

# Uma breve introdução aos problemas de Sturm-Liouville



**Universidade de Brasília**

**Aluno:** Matheus Horácio

**Professor:** Prof. Yuri Dumaresq Sobral

14 de Julho de 2025

# O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Um problema de Sturm-Liouville regular é (em dimensão um) um problema de valores de contorno de segunda ordem da forma

$$-\frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dy}{dt} \right) + q(t)y = \lambda r(t)y, \quad \forall t \in [a, b], \quad (1)$$

$$g(y(a), y'(a), y(b), y'(b)) = 0;$$

onde  $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por

$$g(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_2 \\ \gamma u_3 + \delta u_4 \end{pmatrix}$$

# O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais  $p, q, r$  (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam  $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$ ).

# O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais  $p, q, r$  (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam  $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$ ).
- Encontrar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que o problema 1 admita uma solução não identicamente nula  $y$  é o que chamamos de *problema de autovalor de Sturm-Liouville*

# O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais  $p, q, r$  (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam  $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$ ).
- Encontrar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que o problema 1 admita uma solução não identicamente nula  $y$  é o que chamamos de *problema de autovalor de Sturm-Liouville*
- Essa nomenclatura é justificada pelo fato de que se  $0 \neq \lambda$  é tal que o problema 1 admite uma solução não identicamente nula, então  $\lambda$  é um autovalor do operador

$$\mathbb{H} \ni u \mapsto L(u) = -\frac{1}{w(t)} \left( \frac{d}{dt} \left[ p(t) \frac{du}{dt} \right] + q(t)u \right) \in \mathbb{H};$$

onde  $\mathbb{H}$  é um espaço de Hilbert apropriado que não convém definirmos aqui.

# Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

## A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

Aplicações:

# Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

## A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  conforme  $n \rightarrow \infty$ .

## Aplicações:

# Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

## A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  conforme  $n \rightarrow \infty$ .

- Cada autoespaço tem dimensão 1

## Aplicações:



# Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

## A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  conforme  $n \rightarrow \infty$ .

- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por  $p(t)$  e formam uma base ortonormal

## Aplicações:

# Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

## A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  conforme  $n \rightarrow \infty$ .

- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por  $p(t)$  e formam uma base ortonormal

## Aplicações:

- **Física:** Mecânica quântica, vibrações, equação de Poisson...

# Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

## A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  conforme  $n \rightarrow \infty$ .

- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por  $p(t)$  e formam uma base ortonormal

## Aplicações:

- **Física:** Mecânica quântica, vibrações, equação de Poisson...
- **Matemática:** Qualquer EDO linear de 2ª ordem pode ser convertida em um problema de Sturm-Liouville!

# É possível ouvir a forma de um tambor?

- Pode-se mostrar que o deslocamento  $F$  de uma membrana plana  $\Omega$ , mantida fixa ao longo de sua fronteira, satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F,$$

onde  $c$  depende das propriedades físicas da membrana e da tensão aplicada.

# É possível ouvir a forma de um tambor?

- Pode-se mostrar que o deslocamento  $F$  de uma membrana plana  $\Omega$ , mantida fixa ao longo de sua fronteira, satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F,$$

onde  $c$  depende das propriedades físicas da membrana e da tensão aplicada.

- Modelando a membrana de um tambor como um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , temos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

no qual buscamos  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u \neq 0$ . De certa forma, esse problema pode ser visto como um problema de Sturm-Liouville  $n$ -dimensional.

# É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções  $u$  são chamadas de *modos normais* de vibração.

# É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções  $u$  são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.

# É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções  $u$  são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.
- Mark Kac, em 1966, formulou a seguinte questão: *Can one hear the shape of a drum?*: é possível determinar a forma de  $\Omega$  conhecendo apenas as suas frequências naturais de vibração, i.e, o espectro do laplaciano?



# É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções  $u$  são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.
- Mark Kac, em 1966, formulou a seguinte questão: *Can one hear the shape of a drum?*: é possível determinar a forma de  $\Omega$  conhecendo apenas as suas frequências naturais de vibração, i.e, o espectro do laplaciano?
- A resposta geral da pergunta de Kac é negativa: existem domínios isoespectrais não congruentes. Porém, Kac provou que um domínio isoespectral a um disco de raio  $r$  deve ser congruente ao próprio disco, demonstrando que pelo menos alguns domínios são completamente determinados pelo seu espectro (ou seja, pode-se “ouvir” a forma de *alguns* tambores).

## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), & \forall x \in [a, b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

onde:

## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), & \forall x \in [a, b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

onde:

- $p, q, r$  são funções suaves

## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), & \forall x \in [a, b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

onde:

- $p, q, r$  são funções suaves
- $p, r > 0$  em  $[a, b]$

## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), & \forall x \in [a, b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

onde:

- $p, q, r$  são funções suaves
- $p, r > 0$  em  $[a, b]$
- $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  e  $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$

## Teorema

# Propriedades dos autovalores e autofunções

## Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

## Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

- A autofunção  $y_n$  correspondente a  $\lambda_n$  tem exatamente  $n$  zeros nodais (zeros interiores onde ocorre uma mudança de sinal) e nenhum outro zero interior. Além disso, os nós de  $y_{n-1}$  e  $y_n$  estritamente se entrelaçam - ou seja, entre quaisquer dois zeros consecutivos de  $y_n$ , existe exatamente um zero de  $y_{n-1}$ .



## Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

- A autofunção  $y_n$  correspondente a  $\lambda_n$  tem exatamente  $n$  zeros nodais (zeros interiores onde ocorre uma mudança de sinal) e nenhum outro zero interior. Além disso, os nós de  $y_{n-1}$  e  $y_n$  estritamente se entrelaçam - ou seja, entre quaisquer dois zeros consecutivos de  $y_n$ , existe exatamente um zero de  $y_{n-1}$ .
- Sob hipóteses adicionais leves nas funções  $p, q, r$  e nas constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , todos os autovalores são positivos.

# O método do tiro

**Ideia:** Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

- 1 Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).

# O método do tiro

**Ideia:** Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

- 1 Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
- 2 Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial  $\lambda = \lambda_k^0$  e obtemos a solução  $u(x, \lambda_k^0)$ .

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, & u'(a) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \quad (4)$$

# O método do tiro

**Ideia:** Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

- 1 Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
- 2 Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial  $\lambda = \lambda_k^0$  e obtemos a solução  $u(x, \lambda_k^0)$ .

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, & u'(a) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \quad (4)$$

- 3 Calculamos  $F(\lambda_k^0) = \gamma u(b, \lambda_k^0) + \delta u'(b, \lambda_k^0)$  satisfaz  $|F(\lambda)| < \text{TOL}$

# O método do tiro

**Ideia:** Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

- 1 Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
- 2 Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial  $\lambda = \lambda_k^0$  e obtemos a solução  $u(x, \lambda_k^0)$ :

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, & u'(a) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \quad (4)$$

- 3 Calculamos  $F(\lambda_k^0) = \gamma u(b, \lambda_k^0) + \delta u'(b, \lambda_k^0)$  satisfaz  $|F(\lambda)| < \text{TOL}$
- 4 Se  $|F(\lambda_k^0)| < \varepsilon$ , então  $\lambda_k^0$  é um autovalor (aproximado) do problema de Sturm-Liouville. Caso contrário, usamos algum método de busca de raízes (como o método da bisseção) para atualizar o palpite de  $\lambda_k^0$  e voltamos ao passo 2.

# Algumas ressalvas importantes

- Para usarmos o método da bissecção, precisamos saber a priori que  $F$  muda de sinal em cada autovalor. Isso de fato é verdade, como demonstrado em [1].

# Algumas ressalvas importantes

- Para usarmos o método da bissecção, precisamos saber a priori que  $F$  muda de sinal em cada autovalor. Isso de fato é verdade, como demonstrado em [1].
- Podemos também utilizar o método de Newton-Raphson. De fato, denotando

$$w(x, \lambda) := \frac{\partial u}{\partial \lambda}(x, \lambda);$$

e derivando termo a termo usando o PVI, obtemos

$$-(p w')' + (q - \lambda r) w - r u = 0.$$

# Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de  $\lambda$ , segue que

$$w(a, \lambda) = 0, \quad w'(a, \lambda) = 0.$$



# Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de  $\lambda$ , segue que

$$w(a, \lambda) = 0, \quad w'(a, \lambda) = 0.$$

- Isso nos dá outro PVI, a saber,

$$\begin{cases} -(p w')' + (q - \lambda r) w = r u, & \forall x \in [a, b], \\ w(a) = 0, \quad w'(a) = 0. \end{cases}$$

que nos permite determinar numericamente

$$F'(\lambda) = \gamma w(b, \lambda) + \delta w'(b, \lambda).$$

# Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de  $\lambda$ , segue que

$$w(a, \lambda) = 0, \quad w'(a, \lambda) = 0.$$

- Isso nos dá outro PVI, a saber,

$$\begin{cases} -(p w')' + (q - \lambda r) w = r u, & \forall x \in [a, b], \\ w(a) = 0, \quad w'(a) = 0. \end{cases}$$

que nos permite determinar numericamente

$$F'(\lambda) = \gamma w(b, \lambda) + \delta w'(b, \lambda).$$

- Como mostrado em [1],  $F'(\lambda) \neq 0$ . Assim, podemos usar o método de Newton-Raphson para atualizar o palpite de  $\lambda_k^n$ , fazendo

$$\lambda_k^{(n+1)} = \lambda_k^{(n)} - \frac{F(\lambda_k^{(n)})}{F'(\lambda_k^{(n)})}.$$

# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno

# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno
- **Passo 2:** Incrementar  $\lambda$  em passos pequenos  $\Delta\lambda$

# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno
- **Passo 2:** Incrementar  $\lambda$  em passos pequenos  $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada  $\lambda$ :

# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno
- **Passo 2:** Incrementar  $\lambda$  em passos pequenos  $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada  $\lambda$ :
  - Resolver PVI usando RK4

# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno
- **Passo 2:** Incrementar  $\lambda$  em passos pequenos  $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada  $\lambda$ :
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução

# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno
- **Passo 2:** Incrementar  $\lambda$  em passos pequenos  $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada  $\lambda$ :
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução
  - Verificar mudança de sinal em  $F(\lambda)$



# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno
- **Passo 2:** Incrementar  $\lambda$  em passos pequenos  $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada  $\lambda$ :
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução
  - Verificar mudança de sinal em  $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:

# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno
- **Passo 2:** Incrementar  $\lambda$  em passos pequenos  $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada  $\lambda$ :
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução
  - Verificar mudança de sinal em  $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:
  - Usar bissecção para refinar o autovalor

# O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com  $\lambda = \varepsilon$  pequeno
- **Passo 2:** Incrementar  $\lambda$  em passos pequenos  $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada  $\lambda$ :
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução
  - Verificar mudança de sinal em  $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:
  - Usar bissecção para refinar o autovalor
- **Passo 5:** Voltar ao passo 1 com  $\lambda$  ajustado e encontrar o próximo autovalor

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Testamos a abordagem do atirador marchante com o problema de Sturm-Liouville regular mais simples que há, o problema de Dirichlet clássico:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad \forall x \in [0, 1]; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

- ❶ **Resultados teóricos:**  $\lambda_n = (n + 1)^2 \pi^2$  e  $y_{n+1}(x) = \text{sen}((n + 1)\pi x)$ .

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

## Resultados numéricos

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

## Resultados numéricos

- Pela construção do método, devemos encontrar os autovalores  $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2$ , com as autofunções normalizadas correspondentes

$$y_n(x) = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

## Resultados numéricos

- Pela construção do método, devemos encontrar os autovalores  $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2$ , com as autofunções normalizadas correspondentes

$$y_n(x) = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Note que a normalização se deve ao fato de estarmos resolvendo o PVI

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (0 - \lambda \cdot 1)u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, & u'(0) = 1. \end{cases}$$

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

## Resultados numéricos



# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

## Resultados numéricos

$n$	$\lambda_n$	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	9.86960440	987	34
1	39.47841760	3938	34
2	88.82643961	4105	39
3	157.91367042	4245	39
4	246.74011003	4374	40
5	355.30575844	4497	40
6	483.61061565	4616	40

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

## Resultados numéricos

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

## Resultados numéricos

- Plotamos também as autofunções correspondentes  $y_n = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}$  e as autofunções determinadas numericamente pelo programa. Como veremos a seguir, não há nenhuma diferença humanamente perceptível entre as autofunções determinadas numericamente pelo programa e as autofunções teóricas.

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

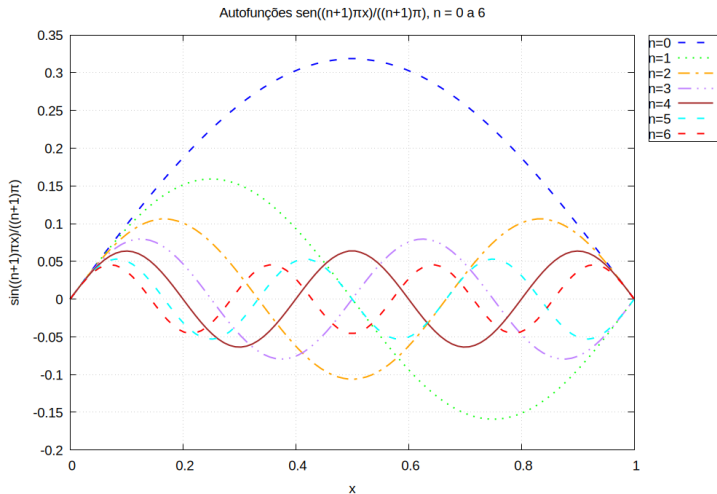


Figura: Autofunções exatas

# Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

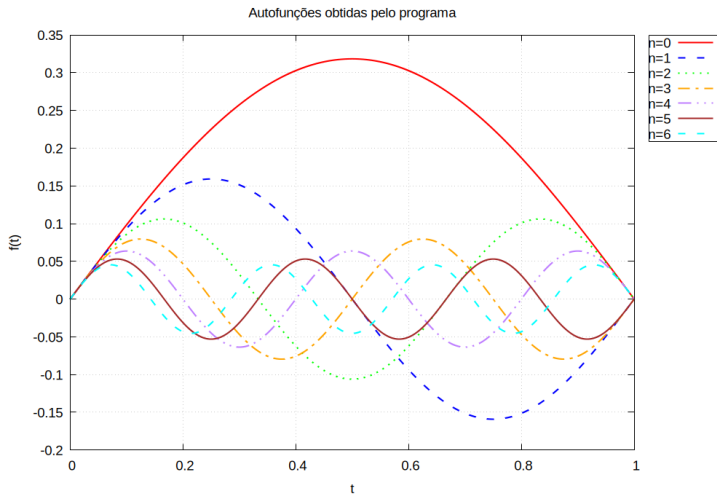


Figura: Autofunções determinadas numericamente pelo programa

# Problemas de Sturm-Liouville singulares

## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$  é suave em  $[a, b]$ , não nula em  $a < x \leq b$ , e satisfaz  $p(a) = 0$ ,  $p'(a) \neq 0$ .

# Problemas de Sturm-Liouville singulares

## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$  é suave em  $[a, b]$ , não nula em  $a < x \leq b$ , e satisfaz  $p(a) = 0$ ,  $p'(a) \neq 0$ .
- $q(x)$  é suave em  $[a, b]$ .



## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$  é suave em  $[a, b]$ , não nula em  $a < x \leq b$ , e satisfaz  $p(a) = 0$ ,  $p'(a) \neq 0$ .
- $q(x)$  é suave em  $[a, b]$ .
- $p(x)$  e  $q(x)$  são funções reais,  $\gamma$  e  $\delta$  são constantes reais.

## Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$  é suave em  $[a, b]$ , não nula em  $a < x \leq b$ , e satisfaz  $p(a) = 0$ ,  $p'(a) \neq 0$ .
- $q(x)$  é suave em  $[a, b]$ .
- $p(x)$  e  $q(x)$  são funções reais,  $\gamma$  e  $\delta$  são constantes reais.
- $r(x)$  é suave em  $[a, b]$ , valendo ou  $r(x) > 0$  em  $[a, b]$  ou  $r(x) = (x - a)^m \rho(x)$  onde  $m > 0$  e  $\rho(x) > 0$  é suave em  $a \leq x \leq b$ .

## Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- A equação de Legendre pode ser vista como um problema de Sturm-Liouville singular:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} \left( (1-t^2) \frac{dP_n}{dt} \right) = \lambda P_n, & \forall t \in [-1, 1], \\ P(-1) = (-1)^n, \quad P(1) = 1. \end{cases}$$

## Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- A equação de Legendre pode ser vista como um problema de Sturm-Liouville singular:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} \left( (1-t^2) \frac{dP_n}{dt} \right) = \lambda P_n, & \forall t \in [-1, 1], \\ P(-1) = (-1)^n, \quad P(1) = 1. \end{cases}$$

- Sabe-se que os autovalores são dados por  $\lambda_n = n(n+1)$ . As autofunções correspondentes de  $n = 0$  até  $n = 4$  são dadas por

n	Polinômio de Legendre
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

## Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- Numericamente, obtemos os seguintes autovalores:

$n$	$\lambda_n$	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.00007518	1	24
1	2.00022555	192	24
2	6.00037594	387	25
3	12.00052635	535	26
4	20.00067675	667	26

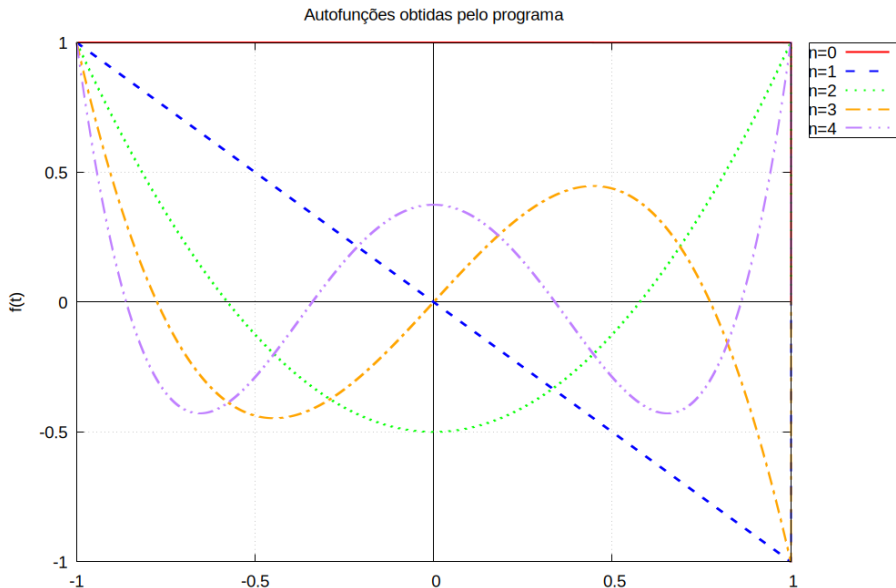
## Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- Numericamente, obtemos os seguintes autovalores:

$n$	$\lambda_n$	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.00007518	1	24
1	2.00022555	192	24
2	6.00037594	387	25
3	12.00052635	535	26
4	20.00067675	667	26

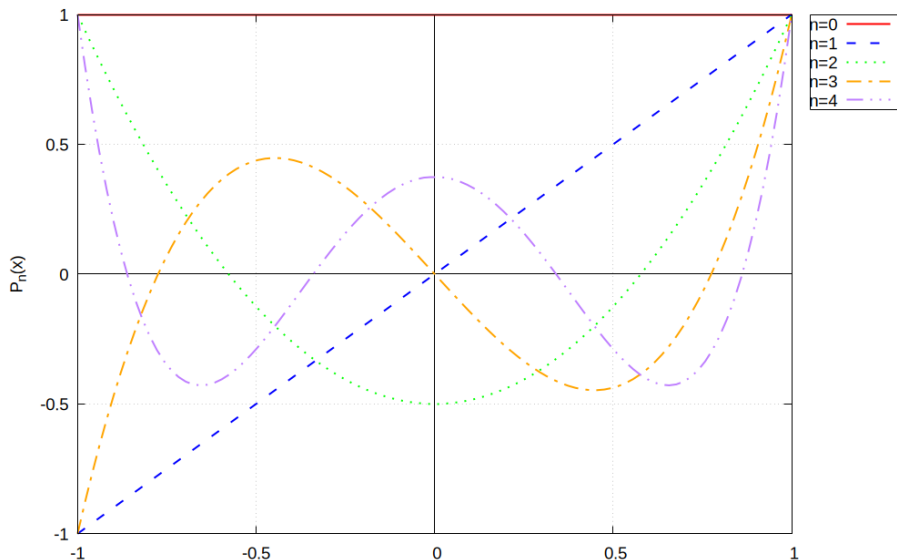
- Plotamos as autofunções determinadas numericamente pelo programa e os polinômios de Legendre exatos. Observamos que os polinômios de grau ímpar determinados numericamente diferem pela constante multiplicativa  $-1$  dos polinômios de Legendre exatos correspondentes, o que é esperado, já que os polinômios de Legendre satisfazem  $P_n(-1) = (-1)^n$  e  $P_n(1) = 1$ , enquanto que no nosso programa forçamos  $P_n(-1) = 1$  sempre.

## Exemplo 2: Os polinômios de Legendre



## Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

Primeiros cinco polinômios de Legendre





# Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

# Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

$n$	$\lambda_n$	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.57824838	58	34
1	13.01659499	1292	34
2	48.48917784	1577	37
3	107.57497472	1744	39
4	190.28375117	1884	40

# Um exemplo usando Newton-Raphson

- Com o chute inicial  $\lambda_0 = 0$ , Newton-Raphson convergiu em somente 4 iterações:

Iteração	$\lambda$	$F(\lambda)$
1	0.53761681266555983	-0.53403483428546394
2	0.57802783474609609	-0.034945050888573075
3	0.57824837086275171	-0.00018864919931886801
4	0.57824837740937718	-0.000000055997283388719053

# Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

# Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

$n$	$\lambda_n$	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.57824838	58	34
1	13.01659499	1292	34
2	48.48917784	1577	37
3	107.57497472	1744	39
4	190.28375117	1884	40

# Um exemplo usando Newton-Raphson

- Já com o chute inicial  $\lambda_0 = 140$ , Newton-Raphson convergiu em 5 iterações:

Iteração	$\lambda$	$F(\lambda)$
1	60.773415429648637	-9.8908269771386994
2	46.353458505247033	4.6605507929687588
3	48.528804125931671	-0.83760614199634920
4	48.489185568458076	0.015769242002305423
5	48.489177842533614	0.0000030739212154774114

É um pouco surpreendente que o chute inicial  $\lambda_0 = 140$ , mais próximo ao autovalor teórico

$$\lambda_3 = 107.57497472$$

tenha convergido para  $\lambda_2$  ao invés de  $\lambda_3$ .

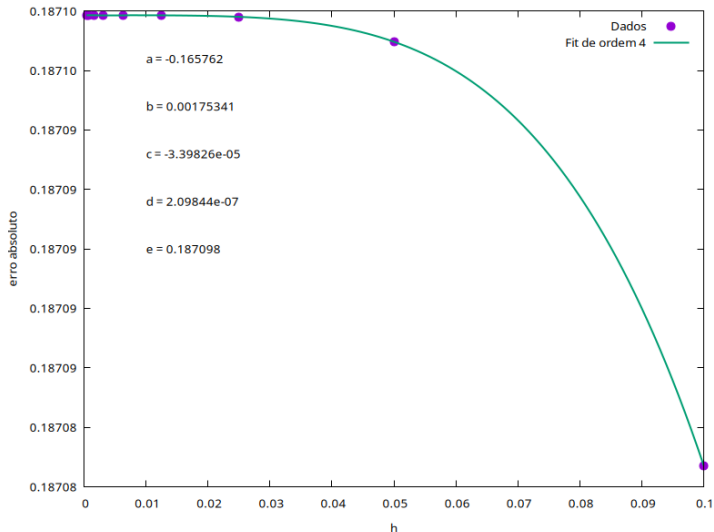
# Verificação da ordem do método do tiro com Newton-Raphson

- Fizemos uma análise da ordem do método do tiro com Newton-Raphson. Configuramos a tolerância do resíduo  $F(\lambda)$  para  $10^{-16}$  e usamos RK4 novamente. A análise foi feita usando o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad \forall x \in [0, 1]; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

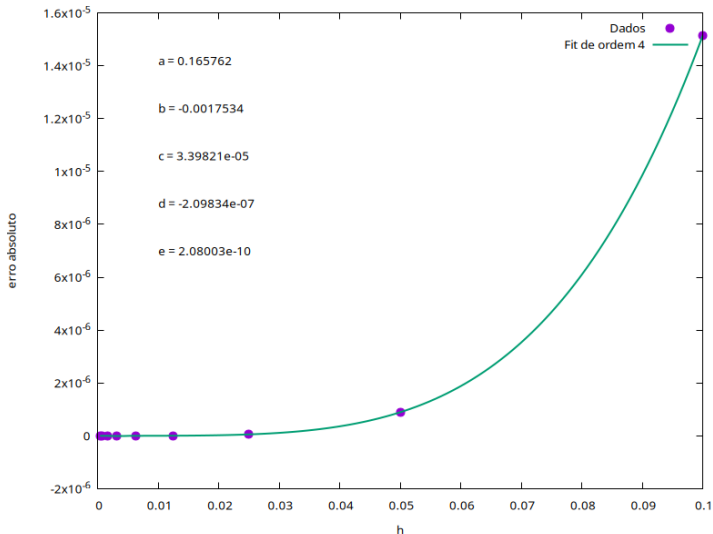
com palpite inicial  $\lambda = 10$ , e o ponto avaliado foi  $x_0 = 0.2$ . Observamos também que quanto mais perto de 0 tomamos  $x_0$ , mais perto de 4 fica a verificação numérica da ordem.

# Verificação da ordem do método do tiro com Newton-Raphson - gráfico de convergência

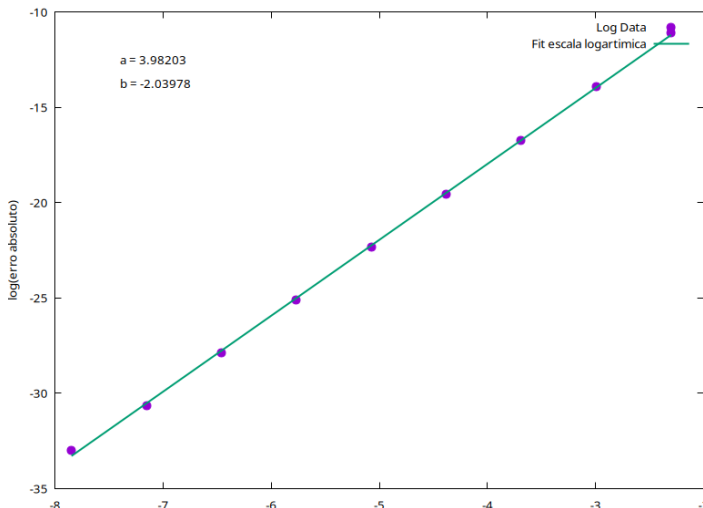




# Verificação da ordem do método do tiro com Newton-Raphson - gráfico do erro de truncamento local



# Verificação da ordem do método do tiro com Newton-Raphson - fit linear de $\log(h)$ vs log do erro de truncamento local.



# Comparação dos métodos

**Atirador Marchante:**

## Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)

## **Atirador Marchante:**

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom

## **Atirador Marchante:**

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

## **Atirador Marchante:**

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

## **Newton-Raphson:**



## **Atirador Marchante:**

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

## **Newton-Raphson:**

- + Convergência quadrática

## **Atirador Marchante:**

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

## **Newton-Raphson:**

- + Convergência quadrática
- + Muito eficiente (4-5 iterações)

## Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

## Newton-Raphson:

- + Convergência quadrática
- + Muito eficiente (4-5 iterações)
  - Precisa de um bom chute inicial

## Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

## Newton-Raphson:

- + Convergência quadrática
- + Muito eficiente (4-5 iterações)
  - Precisa de um bom chute inicial
  - Um autovalor por vez



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

[https://horatiomarm.com/meus\\_textos/TRABALHO\\_IMCEDO.pdf](https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf)



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

[https://horatiomarm.com/meus\\_textos/TRABALHO\\_IMCEDO.pdf](https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf)



[3] **Códigos**

Disponíveis em





[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

[https://horatiomarm.com/meus\\_textos/TRABALHO\\_IMCEDO.pdf](https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf)



[3] **Códigos**

Disponíveis em

- [https://github.com/SaganGromov/SL\\_REGULAR\\_EXEMPLOS](https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS)



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

[https://horatiomarm.com/meus\\_textos/TRABALHO\\_IMCEDO.pdf](https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf)



[3] **Códigos**

Disponíveis em

- [https://github.com/SaganGromov/SL\\_REGULAR\\_EXEMPLOS](https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS)
- [https://github.com/SaganGromov/SL\\_SINGULAR\\_EXEMPLOS](https://github.com/SaganGromov/SL_SINGULAR_EXEMPLOS)



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

[https://horatiomarm.com/meus\\_textos/TRABALHO\\_IMCEDO.pdf](https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf)



[3] **Códigos**

Disponíveis em

- [https://github.com/SaganGromov/SL\\_REGULAR\\_EXEMPLOS](https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS)
- [https://github.com/SaganGromov/SL\\_SINGULAR\\_EXEMPLOS](https://github.com/SaganGromov/SL_SINGULAR_EXEMPLOS)
- [https://github.com/SaganGromov/SL\\_NEWTON\\_RAPHSON](https://github.com/SaganGromov/SL_NEWTON_RAPHSON)