Uma breve introdução aos problemas de Sturm-Liouville

Universidade de Brasília

Aluno: Matheus Horácio

Professor: Prof. Yuri Dumaresq Sobral

14 de Julho de 2025

O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Um problema de Sturm-Liouville regular é (em dimensão um) um problema de valores de contorno de segunda ordem da forma

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + q(t)y = \lambda r(t)y, \quad \forall t \in [a,b], \\ g\left(y(a), y'(a), y(b), y'(b)\right) = 0; \end{aligned} \tag{1}$$

onde $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por

$$g(u_1, u_2, u_3, u_4) \ = \ \begin{pmatrix} \alpha\, u_1 + \beta\, u_2 \\ \gamma\, u_3 + \delta\, u_4 \end{pmatrix}$$

O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais p, q, r (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$).

O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais p, q, r (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$).
- Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o problema 1 admita uma solução não identicamente nula y é o que chamamos de *problema de autovalor de Sturm-Liouville*

O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais p, q, r (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$).
- Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o problema 1 admita uma solução não identicamente nula y é o que chamamos de *problema de autovalor de Sturm-Liouville*
- Essa nomenclatura é justificada pelo fato de que se $0 \neq \lambda$ é tal que o problema 1 admite uma solução não identicamente nula, então λ é um autovalor do operador

$$\mathbb{H} \ni u \mapsto L(u) = -\frac{1}{w(t)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[p(t) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \right] + q(t)u \right) \in \mathbb{H};$$

onde $\mathbb{H}$ é um espaço de Hilbert apropriado que não convém definirmos aqui.

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

Aplicações:

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que $\lambda_n \to \infty$ conforme $n \to \infty$.

Aplicações:

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

  e de forma que $\lambda_n \to \infty$ conforme $n \to \infty$.
- Cada autoespaço tem dimensão 1

Aplicações:

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

  e de forma que $\lambda_n \to \infty$ conforme $n \to \infty$.
- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por $p(t)$ e formam uma base ortonormal

Aplicações:

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

  e de forma que $\lambda_n \to \infty$ conforme $n \to \infty$.
- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por $p(t)$ e formam uma base ortonormal

Aplicações:

- **Física:** Mecânica quântica, vibrações, equação de Poisson...

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

  e de forma que $\lambda_n \to \infty$ conforme $n \to \infty$.
- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por $p(t)$ e formam uma base ortonormal

Aplicações:

- **Física:** Mecânica quântica, vibrações, equação de Poisson...
- **Matemática:** Qualquer EDO linear de 2ª ordem pode ser convertida em um problema de Sturm-Liouville!

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Pode-se mostrar que o deslocamento F de uma membrana plana Ω, mantida fixa ao longo de sua fronteira, satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \ = \ c^2 \, \nabla^2 F,$$

onde c depende das propriedades físicas da membrana e da tensão aplicada.

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Pode-se mostrar que o deslocamento F de uma membrana plana Ω, mantida fixa ao longo de sua fronteira, satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F,$$

onde c depende das propriedades físicas da membrana e da tensão aplicada.

- Modelando a membrana de um tambor como um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, temos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

no qual buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \not\equiv 0$. De certa forma, esse problema pode ser visto como um problema de Sturm-Liouville n-dimensional.

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções u são chamadas de *modos normais* de vibração.

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções u são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções u são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.
- Mark Kac, em 1966, formulou a seguinte questão: *Can one hear the shape of a drum?*: é possível determinar a forma de Ω conhecendo apenas as suas frequências naturais de vibração, i.e, o espectro do laplaciano?

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções u são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.
- Mark Kac, em 1966, formulou a seguinte questão: *Can one hear the shape of a drum?*: é possível determinar a forma de Ω conhecendo apenas as suas frequências naturais de vibração, i.e, o espectro do laplaciano?
- A resposta geral da pergunta de Kac é negativa: existem domínios isoespectrais não congruentes. Porém, Kac provou que um domínio isoespectral a um disco de raio r deve ser congruente ao próprio disco, demonstrando que pelo menos alguns domínios são completamente determinados pelo seu espectro (ou seja, pode-se "ouvir" a forma de *alguns* tambores).

Problemas de Sturm-Liouville regulares

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad \forall x \in [a,b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

onde:

Problemas de Sturm-Liouville regulares

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad \forall x \in [a,b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

onde:

- p, q, r são funções suaves

Problemas de Sturm-Liouville regulares

Definição

$$
\begin{cases}
-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad \forall x \in [a,b], \\
\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\
\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0.
\end{cases} \tag{3}
$$

onde:

- p, q, r são funções suaves
- $p, r > 0$ em $[a, b]$

Problemas de Sturm-Liouville regulares

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad \forall x \in [a,b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

onde:

- p, q, r são funções suaves
- $p, r > 0$ em $[a, b]$
- $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$

Teorema

Propriedades dos autovalores e autofunções

Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

Propriedades dos autovalores e autofunções

Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

- A autofunção y_n correspondente a λ_n tem exatamente n zeros nodais (zeros interiores onde ocorre uma mudança de sinal) e nenhum outro zero interior. Além disso, os nós de y_{n-1} e y_n estritamente se entrelaçam - ou seja, entre quaisquer dois zeros consecutivos de y_n, existe exatamente um zero de y_{n-1}.

Propriedades dos autovalores e autofunções

Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

- A autofunção y_n correspondente a λ_n tem exatamente n zeros nodais (zeros interiores onde ocorre uma mudança de sinal) e nenhum outro zero interior. Além disso, os nós de y_{n-1} e y_n estritamente se entrelaçam - ou seja, entre quaisquer dois zeros consecutivos de y_n, existe exatamente um zero de y_{n-1}.
- Sob hipóteses adicionais leves nas funções p, q, r e nas constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, todos os autovalores são positivos.

O método do tiro

Ideia: Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

1. Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).

O método do tiro

Ideia: Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

1. Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
2. Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial $\lambda = \lambda_k^0$ e obtemos a solução $u(x, \lambda_k^0)$.:

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, \qquad \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad u'(a) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \tag{4}$$

O método do tiro

Ideia: Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

1. Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
2. Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial $\lambda = \lambda_k^0$ e obtemos a solução $u(x, \lambda_k^0)$.:

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, \qquad \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad u'(a) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \tag{4}$$

3. Calculamos $F(\lambda_k^0) = \gamma u(b, \lambda_k^0) + \delta u'(b, \lambda_k^0)$ satisfaz $|F(\lambda)| < \mathrm{TOL}$

O método do tiro

Ideia: Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

1. Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
2. Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial $\lambda = \lambda_k^0$ e obtemos a solução $u(x, \lambda_k^0)$.:

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad u'(a) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \tag{4}$$

3. Calculamos $F(\lambda_k^0) = \gamma u(b, \lambda_k^0) + \delta u'(b, \lambda_k^0)$ satisfaz $|F(\lambda)| < \text{TOL}$
4. Se $|F(\lambda_k^0)| < \varepsilon$, então λ_k^0 é um autovalor (aproximado) do problema de Sturm-Liouville. Caso contrário, usamos algum método de busca de raízes (como o método da bisseção) para atualizar o palpite de λ_k^0 e voltamos ao passo 2.

Algumas ressalvas importantes

- Para usarmos o método da bissecção, precisamos saber a priori que F muda de sinal em cada autovalor. Isso de fato é verdade, como demonstrado em [1].

Algumas ressalvas importantes

- Para usarmos o método da bissecção, precisamos saber a priori que F muda de sinal em cada autovalor. Isso de fato é verdade, como demonstrado em [1].
- Podemos também utilizar o método de Newton-Raphson. De fato, denotando

$$w(x,\lambda) \;:=\; \frac{\partial u}{\partial \lambda}(x,\lambda);$$

e derivando termo a termo usando o PVI, obtemos

$$-(p\,w')' + (q - \lambda\,r)\,w \;-\; r\,u \;=\; 0.$$

Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de λ, segue que

$$w(a,\lambda) = 0, \quad w'(a,\lambda) = 0.$$

Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de λ, segue que

$$w(a, \lambda) = 0, \quad w'(a, \lambda) = 0.$$

- Isso nos dá outro PVI, a saber,

$$\begin{cases} -(p\, w')' + (q - \lambda\, r)\, w = r\, u, & \forall x \in [a, b], \\ w(a) = 0, \quad w'(a) = 0. \end{cases}$$

que nos permite determinar numericamente

$$F'(\lambda) = \gamma w(b, \lambda) + \delta w'(b, \lambda).$$

Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de λ, segue que

$$w(a, \lambda) = 0, \quad w'(a, \lambda) = 0.$$

- Isso nos dá outro PVI, a saber,

$$\begin{cases} -(p\, w')' + (q - \lambda\, r)\, w = r\, u, & \forall x \in [a, b], \\ w(a) = 0, \quad w'(a) = 0. \end{cases}$$

que nos permite determinar numericamente

$$F'(\lambda) = \gamma w(b, \lambda) + \delta w'(b, \lambda).$$

- Como mostrado em [1], $F'(\lambda) \neq 0$. Assim, podemos usar o método de Newton-Raphson para atualizar o palpite de λ_k^n, fazendo

$$\lambda_k^{(n+1)} = \lambda_k^{(n)} - \frac{F(\lambda_k^{(n)})}{F'(\lambda_k^{(n)})}.$$

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ:

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ:
  - Resolver PVI usando RK4

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ:
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ:
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução
  - Verificar mudança de sinal em $F(\lambda)$

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ:
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução
  - Verificar mudança de sinal em $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ:
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução
  - Verificar mudança de sinal em $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:
  - Usar bissecção para refinar o autovalor

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ:
  - Resolver PVI usando RK4
  - Contar zeros da solução
  - Verificar mudança de sinal em $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:
  - Usar bissecção para refinar o autovalor
- **Passo 5:** Voltar ao passo 1 com λ ajustado e encontrar o próximo autovalor

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Testamos a abordagem do atirador marchante com o problema de Sturm-Liouville regular mais simples que há, o problema de Dirichlet clássico:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ \forall x \in [0,1]; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

1. **Resultados teóricos:** $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2$ e $y_{n+1}(x) = \operatorname{sen}((n+1)\pi x)$.

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

- Pela construção do método, devemos encontrar os autovalores $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2$, com as autofunções normalizadas correspondentes

$$y_n(x) = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

- Pela construção do método, devemos encontrar os autovalores $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2$, com as autofunções normalizadas correspondentes

$$y_n(x) = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Note que a normalização se deve ao fato de estarmos resolvendo o PVI

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (0 - \lambda \cdot 1)u(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1], \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$$

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	9.86960440	987	34
1	39.47841760	3938	34
2	88.82643961	4105	39
3	157.91367042	4245	39
4	246.74011003	4374	40
5	355.30575844	4497	40
6	483.61061565	4616	40

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

- Plotamos também as autofunções correspondentes $y_n = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}$ e as autofunções determinadas numericamente pelo programa. Como veremos a seguir, não há nenhuma diferença humanamente perceptível entre as autofunções determinadas numericamente pelo programa e as autofunções teóricas.

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

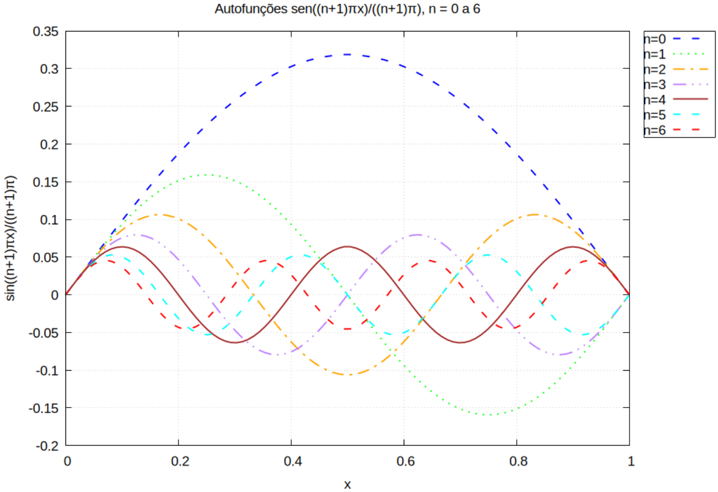


Figura: Autofunções exatas

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

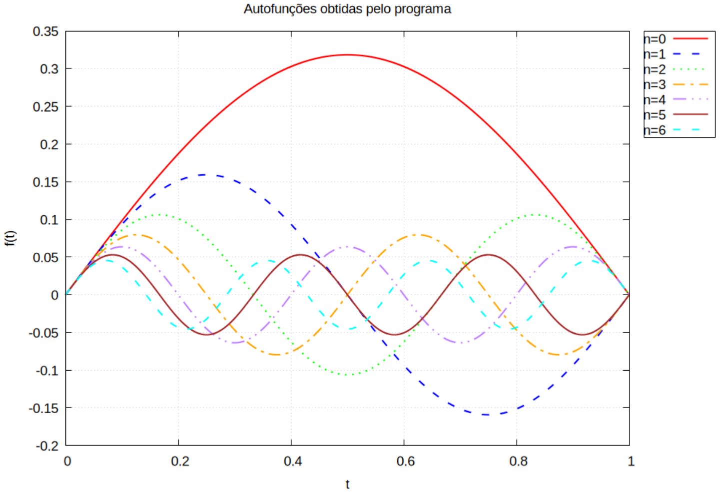


Figura: Autofunções determinadas numericamente pelo programa

Problemas de Sturm-Liouville singulares

Definição

$$\begin{cases} -\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, & \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

Problemas de Sturm-Liouville singulares

Definição

$$\begin{cases} -\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, & \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$ é suave em $[a, b]$, não nula em $a < x \leq b$, e satisfaz $p(a) = 0$, $p'(a) \neq 0$.

Problemas de Sturm-Liouville singulares

Definição

$$\begin{cases} -\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, & \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$ é suave em $[a, b]$, não nula em $a < x \leq b$, e satisfaz $p(a) = 0$, $p'(a) \neq 0$.
- $q(x)$ é suave em $[a, b]$.

Problemas de Sturm-Liouville singulares

Definição

$$\begin{cases} -\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, & \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$ é suave em $[a, b]$, não nula em $a < x \leq b$, e satisfaz $p(a) = 0$, $p'(a) \neq 0$.
- $q(x)$ é suave em $[a, b]$.
- $p(x)$ e $q(x)$ são funções reais, γ e δ são constantes reais.

Problemas de Sturm-Liouville singulares

Definição

$$\begin{cases} -\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$ é suave em $[a, b]$, não nula em $a < x \leq b$, e satisfaz $p(a) = 0$, $p'(a) \neq 0$.
- $q(x)$ é suave em $[a, b]$.
- $p(x)$ e $q(x)$ são funções reais, γ e δ são constantes reais.
- $r(x)$ é suave em $[a, b]$, valendo ou $r(x) > 0$ em $[a, b]$ ou $r(x) = (x - a)^m \rho(x)$ onde $m > 0$ e $\rho(x) > 0$ é suave em $a \leq x \leq b$.

Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- A equação de Legendre pode ser vista como um problema de Sturm-Liouville singular:

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1-t^2)\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}t}\right) = \lambda P_n, \qquad \forall t \in [-1,1], \\ P(-1) = (-1)^n, \quad P(1) = 1. \end{cases}$$

Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- A equação de Legendre pode ser vista como um problema de Sturm-Liouville singular:

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1-t^2)\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}t}\right) = \lambda P_n, \qquad \forall t \in [-1,1], \\ P(-1) = (-1)^n, \quad P(1) = 1. \end{cases}$$

- Sabe-se que os autovalores são dados por $\lambda_n = n(n+1)$. As autofunções correspondentes de $n=0$ até $n=4$ são dadas por

n	**Polinômio de Legendre**
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- Numericamente, obtemos os seguintes autovalores:

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.00007518	1	24
1	2.00022555	192	24
2	6.00037594	387	25
3	12.00052635	535	26
4	20.00067675	667	26

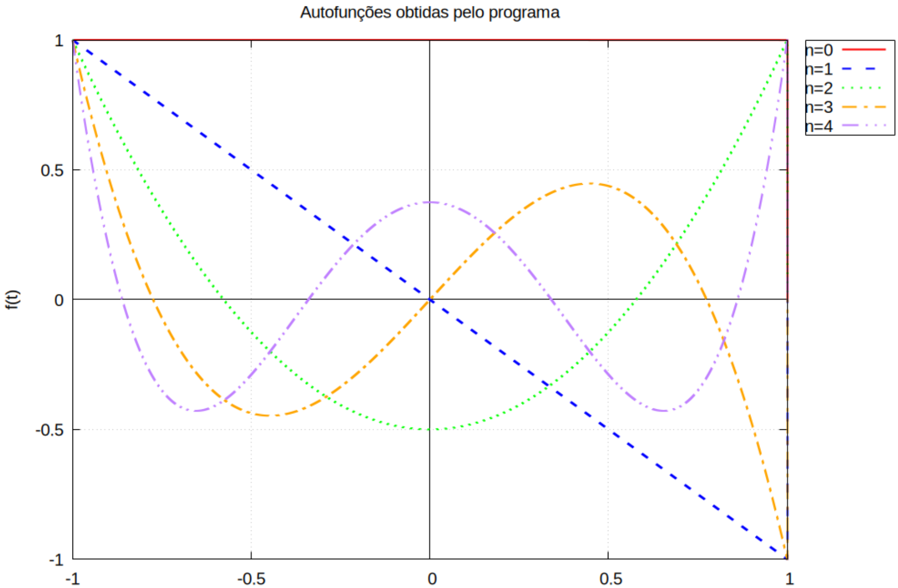
Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- Numericamente, obtemos os seguintes autovalores:

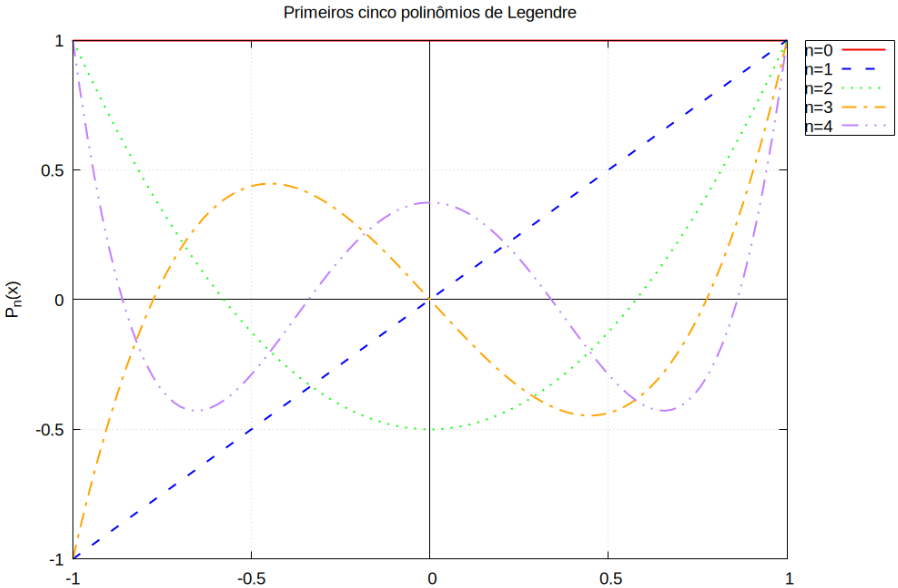
n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.00007518	1	24
1	2.00022555	192	24
2	6.00037594	387	25
3	12.00052635	535	26
4	20.00067675	667	26

- Plotamos as autofunções determinadas numericamente pelo programa e os polinômios de Legendre exatos. Observamos que os polinômios de grau ímpar determinados numericamente diferem pela constante multiplicativa -1 dos polinômios de Legendre exatos correspondentes, o que é esperado, já que os polinômios de Legendre satisfazem $P_n(-1) = (-1)^n$ e $P_n(1) = 1$, enquanto que no nosso programa forçamos $P_n(1) = 1$ sempre.

Exemplo 2: Os polinômios de Legendre



Exemplo 2: Os polinômios de Legendre



Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -\left(1 \cdot u'(x)\right)' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda\cos(x))u(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1], \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.57824838	58	34
1	13.01659499	1292	34
2	48.48917784	1577	37
3	107.57497472	1744	39
4	190.28375117	1884	40

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Com o chute inicial $\lambda_0 = 0$, Newton-Raphson convergiu em somente 4 iterações:

Iteração	λ	$F(\lambda)$
1	0.5376168126655983	-0.53403483428546394
2	0.57802783474609609	-0.034945050888573075
3	0.57824837086275171	-0.00018864919931886801
4	0.57824837740937718	-0.000000055997283388719053

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1], \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1\cdot u'(x))' + (x - \lambda\cos(x))u(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1], \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

-

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.57824838	58	34
1	13.01659499	1292	34
2	48.48917784	1577	37
3	107.57497472	1744	39
4	190.28375117	1884	40

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Já com o chute inicial $\lambda_0 = 140$, Newton-Raphson convergiu em 5 iterações:

Iteração	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{F(\lambda)}$
1	60.773415429648637	-9.8908269771386994
2	46.353458505247033	4.6605507929687588
3	48.528804125931671	-0.83760614199634920
4	48.489185568458076	0.015769242002305423
5	48.489177842533614	0.0000030739212154774114

É um pouco surpreendente que o chute inicial $\lambda_0 = 140$, mais próximo ao autovalor teórico

$$\lambda_3 = 107.57497472$$

tenha convergido para λ_2 ao invés de λ_3.

Comparação dos métodos

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

+ Determina quantos autovalores quisermos (?)

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

- \+ Determina quantos autovalores quisermos (?)
- \+ Não precisa de um chute inicial bom

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

+ Determina quantos autovalores quisermos (?)
+ Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

+ Determina quantos autovalores quisermos (?)
+ Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

+ Determina quantos autovalores quisermos (?)
+ Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

+ Convergência quadrática

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

+ Determina quantos autovalores quisermos (?)
+ Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

+ Convergência quadrática
+ Muito eficiente (4-5 iterações)

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

+ Determina quantos autovalores quisermos (?)
+ Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

+ Convergência quadrática
+ Muito eficiente (4-5 iterações)
- Precisa de um bom chute inicial

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

+ Determina quantos autovalores quisermos (?)
+ Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

+ Convergência quadrática
+ Muito eficiente (4-5 iterações)
- Precisa de um bom chute inicial
- Um autovalor por vez

Referências

[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**
(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Referências

[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**
(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

[2] **Sobral, Y.D.**
Notas de aula de IMCEDO

Referências

[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**
(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

[2] **Sobral, Y.D.**
Notas de aula de IMCEDO

[2] **Texto de apoio ao trabalho**
Disponível em

Referências

[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**
(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

[2] **Sobral, Y.D.**
Notas de aula de IMCEDO

[2] **Texto de apoio ao trabalho**
Disponível em

[3] **Códigos**
Disponíveis em

Referências

[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO

[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

[3] **Códigos**

Disponíveis em

- **https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS**

Referências

[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**
(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

[2] **Sobral, Y.D.**
Notas de aula de IMCEDO

[2] **Texto de apoio ao trabalho**
Disponível em

[3] **Códigos**
Disponíveis em

- **https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS**
- **https://github.com/SaganGromov/SL_SINGULAR_EXEMPLOS**

Referências

[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**
(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

[2] **Sobral, Y.D.**
Notas de aula de IMCEDO

[2] **Texto de apoio ao trabalho**
Disponível em

[3] **Códigos**
Disponíveis em

- **https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS**
- **https://github.com/SaganGromov/SL_SINGULAR_EXEMPLOS**
- **https://github.com/SaganGromov/SL_NEWTON_RAPHSON**