

Uma breve introdução aos problemas de Sturm-Liouville



Universidade de Brasília

Aluno: Matheus Horácio

Professor: Prof. Yuri Dumaresq Sobral

14 de Julho de 2025

O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Um problema de Sturm-Liouville regular é (em dimensão um) um problema de valores de contorno de segunda ordem da forma

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dy}{dt} \right) + q(t)y &= \lambda r(t)y, \quad \forall t \in [a, b], \\ g(y(a), y'(a), y(b), y'(b)) &= 0; \end{aligned} \tag{1}$$

onde $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por

$$g(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_2 \\ \gamma u_3 + \delta u_4 \end{pmatrix}$$

O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais p, q, r (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$).

O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais p, q, r (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$).
- Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o problema 1 admita uma solução não identicamente nula y é o que chamamos de *problema de autovalor de Sturm-Liouville*

O que é um problema de Sturm-Liouville?

- Aqui, os dados do problema são as funções reais p, q, r (com hipóteses de continuidade/suavidade apropriadas) e as constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (que por motivos evidentes pedimos que satisfaçam $\{\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2\} \neq \{0\}$).
- Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o problema 1 admita uma solução não identicamente nula y é o que chamamos de *problema de autovalor de Sturm-Liouville*
- Essa nomenclatura é justificada pelo fato de que se $0 \neq \lambda$ é tal que o problema 1 admite uma solução não identicamente nula, então λ é um autovalor do operador

$$\mathbb{H} \ni u \mapsto L(u) = -\frac{1}{w(t)} \left(\frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{du}{dt} \right] + q(t)u \right) \in \mathbb{H};$$

onde \mathbb{H} é um espaço de Hilbert apropriado que não convém definirmos aqui.

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

Aplicações:

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que $\lambda_n \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Aplicações:

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que $\lambda_n \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$.

- Cada autoespaço tem dimensão 1

Aplicações:

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que $\lambda_n \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$.

- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por $p(t)$ e formam uma base ortonormal

Aplicações:

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que $\lambda_n \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$.

- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por $p(t)$ e formam uma base ortonormal

Aplicações:

- **Física:** Mecânica quântica, vibrações, equação de Poisson...

Por que estudar problemas de Sturm-Liouville?

A joia de ouro da teoria de Sturm-Liouville

- Existe uma quantidade infinita de autovalores reais que podem ser ordenados em ordem crescente:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e de forma que $\lambda_n \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$.

- Cada autoespaço tem dimensão 1
- As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno induzido por $p(t)$ e formam uma base ortonormal

Aplicações:

- **Física:** Mecânica quântica, vibrações, equação de Poisson...
- **Matemática:** Qualquer EDO linear de 2ª ordem pode ser convertida em um problema de Sturm-Liouville!

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Pode-se mostrar que o deslocamento F de uma membrana plana Ω , mantida fixa ao longo de sua fronteira, satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F,$$

onde c depende das propriedades físicas da membrana e da tensão aplicada.

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Pode-se mostrar que o deslocamento F de uma membrana plana Ω , mantida fixa ao longo de sua fronteira, satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F,$$

onde c depende das propriedades físicas da membrana e da tensão aplicada.

- Modelando a membrana de um tambor como um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, temos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

no qual buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \neq 0$. De certa forma, esse problema pode ser visto como um problema de Sturm-Liouville n -dimensional.

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções u são chamadas de *modos normais* de vibração.

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções u são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções u são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.
- Mark Kac, em 1966, formulou a seguinte questão: *Can one hear the shape of a drum?*: é possível determinar a forma de Ω conhecendo apenas as suas frequências naturais de vibração, i.e, o espectro do laplaciano?

É possível ouvir a forma de um tambor?

- Os autovalores $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ são chamados de *frequências naturais* de vibração da membrana, e as funções u são chamadas de *modos normais* de vibração.
- A solução geral do problema (ou, equivalentemente, o som do tambor) é uma combinação dos modos normais.
- Mark Kac, em 1966, formulou a seguinte questão: *Can one hear the shape of a drum?*: é possível determinar a forma de Ω conhecendo apenas as suas frequências naturais de vibração, i.e, o espectro do laplaciano?
- A resposta geral da pergunta de Kac é negativa: existem domínios isoespectrais não congruentes. Porém, Kac provou que um domínio isoespectral a um disco de raio r deve ser congruente ao próprio disco, demonstrando que pelo menos alguns domínios são completamente determinados pelo seu espectro (ou seja, pode-se “ouvir” a forma de *alguns* tambores).

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), & \forall x \in [a, b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

onde:

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), & \forall x \in [a, b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

onde:

- p, q, r são funções suaves

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), & \forall x \in [a, b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

onde:

- p, q, r são funções suaves
- $p, r > 0$ em $[a, b]$

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), & \forall x \in [a, b], \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

onde:

- p, q, r são funções suaves
- $p, r > 0$ em $[a, b]$
- $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$

Teorema

Propriedades dos autovalores e autofunções

Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

- A autofunção y_n correspondente a λ_n tem exatamente n zeros nodais (zeros interiores onde ocorre uma mudança de sinal) e nenhum outro zero interior. Além disso, os nós de y_{n-1} e y_n estritamente se entrelaçam - ou seja, entre quaisquer dois zeros consecutivos de y_n , existe exatamente um zero de y_{n-1} .

Propriedades dos autovalores e autofunções

Teorema

- Os autovalores de um problema regular são reais, simples e podem ser ordenados como

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

- A autofunção y_n correspondente a λ_n tem exatamente n zeros nodais (zeros interiores onde ocorre uma mudança de sinal) e nenhum outro zero interior. Além disso, os nós de y_{n-1} e y_n estritamente se entrelaçam - ou seja, entre quaisquer dois zeros consecutivos de y_n , existe exatamente um zero de y_{n-1} .
- Sob hipóteses adicionais leves nas funções p, q, r e nas constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, todos os autovalores são positivos.

O método do tiro

Ideia: Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

- 1 Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).

O método do tiro

Ideia: Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

- 1 Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
- 2 Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial $\lambda = \lambda_k^0$ e obtemos a solução $u(x, \lambda_k^0)$.

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, & u'(a) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \quad (4)$$

O método do tiro

Ideia: Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

- 1 Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
- 2 Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial $\lambda = \lambda_k^0$ e obtemos a solução $u(x, \lambda_k^0)$.

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, & u'(a) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \quad (4)$$

- 3 Calculamos $F(\lambda_k^0) = \gamma u(b, \lambda_k^0) + \delta u'(b, \lambda_k^0)$ satisfaz $|F(\lambda)| < \text{TOL}$

O método do tiro

Ideia: Transformar o problema de valores de contorno em um problema de valor inicial.

- 1 Determinamos um chute inicial para um autovalor de interesse (ou, ainda melhor, um intervalo que contenha um autovalor de interesse).
- 2 Resolvemos o PVI abaixo com o chute inicial $\lambda = \lambda_k^0$ e obtemos a solução $u(x, \lambda_k^0)$:

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + (q(x) - \lambda r(x))u(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ u(a) = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, & u'(a) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \quad (4)$$

- 3 Calculamos $F(\lambda_k^0) = \gamma u(b, \lambda_k^0) + \delta u'(b, \lambda_k^0)$ satisfaz $|F(\lambda)| < \text{TOL}$
- 4 Se $|F(\lambda_k^0)| < \varepsilon$, então λ_k^0 é um autovalor (aproximado) do problema de Sturm-Liouville. Caso contrário, usamos algum método de busca de raízes (como o método da bisseção) para atualizar o palpite de λ_k^0 e voltamos ao passo 2.

Algumas ressalvas importantes

- Para usarmos o método da bissecção, precisamos saber a priori que F muda de sinal em cada autovalor. Isso de fato é verdade, como demonstrado em [1].

Algumas ressalvas importantes

- Para usarmos o método da bissecção, precisamos saber a priori que F muda de sinal em cada autovalor. Isso de fato é verdade, como demonstrado em [1].
- Podemos também utilizar o método de Newton-Raphson. De fato, denotando

$$w(x, \lambda) := \frac{\partial u}{\partial \lambda}(x, \lambda);$$

e derivando termo a termo usando o PVI, obtemos

$$-(p w')' + (q - \lambda r) w - r u = 0.$$

Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de λ , segue que

$$w(a, \lambda) = 0, \quad w'(a, \lambda) = 0.$$

Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de λ , segue que

$$w(a, \lambda) = 0, \quad w'(a, \lambda) = 0.$$

- Isso nos dá outro PVI, a saber,

$$\begin{cases} -(p w')' + (q - \lambda r) w = r u, & \forall x \in [a, b], \\ w(a) = 0, \quad w'(a) = 0. \end{cases}$$

que nos permite determinar numericamente

$$F'(\lambda) = \gamma w(b, \lambda) + \delta w'(b, \lambda).$$

Algumas ressalvas importantes

- Como os dados iniciais *não* dependem de λ , segue que

$$w(a, \lambda) = 0, \quad w'(a, \lambda) = 0.$$

- Isso nos dá outro PVI, a saber,

$$\begin{cases} -(p w')' + (q - \lambda r) w = r u, & \forall x \in [a, b], \\ w(a) = 0, \quad w'(a) = 0. \end{cases}$$

que nos permite determinar numericamente

$$F'(\lambda) = \gamma w(b, \lambda) + \delta w'(b, \lambda).$$

- Como mostrado em [1], $F'(\lambda) \neq 0$. Assim, podemos usar o método de Newton-Raphson para atualizar o palpite de λ_k^n , fazendo

$$\lambda_k^{(n+1)} = \lambda_k^{(n)} - \frac{F(\lambda_k^{(n)})}{F'(\lambda_k^{(n)})}.$$

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ :

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ :
 - Resolver PVI usando RK4

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ :
 - Resolver PVI usando RK4
 - Contar zeros da solução

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ :
 - Resolver PVI usando RK4
 - Contar zeros da solução
 - Verificar mudança de sinal em $F(\lambda)$

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ :
 - Resolver PVI usando RK4
 - Contar zeros da solução
 - Verificar mudança de sinal em $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ :
 - Resolver PVI usando RK4
 - Contar zeros da solução
 - Verificar mudança de sinal em $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:
 - Usar bissecção para refinar o autovalor

O método do atirador marchante

- **Passo 1:** Começar com $\lambda = \varepsilon$ pequeno
- **Passo 2:** Incrementar λ em passos pequenos $\Delta\lambda$
- **Passo 3:** Para cada λ :
 - Resolver PVI usando RK4
 - Contar zeros da solução
 - Verificar mudança de sinal em $F(\lambda)$
- **Passo 4:** Quando detectar mudança de sinal ou incremento de zeros:
 - Usar bissecção para refinar o autovalor
- **Passo 5:** Voltar ao passo 1 com λ ajustado e encontrar o próximo autovalor

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Testamos a abordagem do atirador marchante com o problema de Sturm-Liouville regular mais simples que há, o problema de Dirichlet clássico:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad \forall x \in [0, 1]; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

- ❶ **Resultados teóricos:** $\lambda_n = (n + 1)^2 \pi^2$ e $y_{n+1}(x) = \text{sen}((n + 1)\pi x)$.

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

- Pela construção do método, devemos encontrar os autovalores $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2$, com as autofunções normalizadas correspondentes

$$y_n(x) = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

- Pela construção do método, devemos encontrar os autovalores $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2$, com as autofunções normalizadas correspondentes

$$y_n(x) = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Note que a normalização se deve ao fato de estarmos resolvendo o PVI

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (0 - \lambda \cdot 1)u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, & u'(0) = 1. \end{cases}$$

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	9.86960440	987	34
1	39.47841760	3938	34
2	88.82643961	4105	39
3	157.91367042	4245	39
4	246.74011003	4374	40
5	355.30575844	4497	40
6	483.61061565	4616	40

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

Resultados numéricos

- Plotamos também as autofunções correspondentes $y_n = \frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}$ e as autofunções determinadas numericamente pelo programa. Como veremos a seguir, não há nenhuma diferença humanamente perceptível entre as autofunções determinadas numericamente pelo programa e as autofunções teóricas.

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

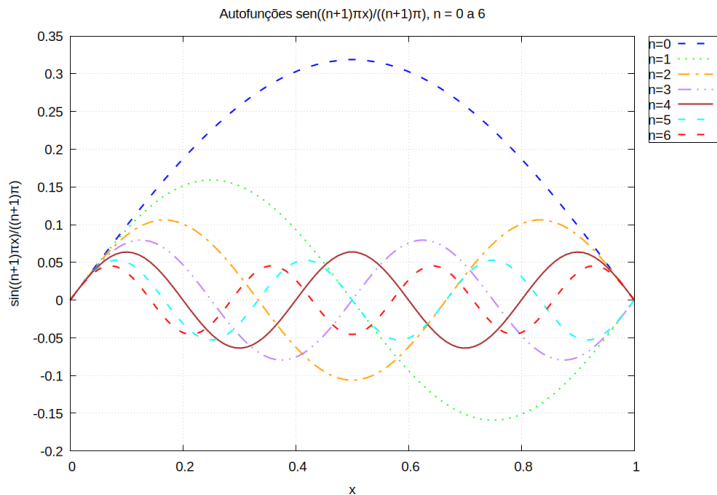


Figura: Autofunções exatas

Exemplo 1: Problema de Dirichlet Clássico

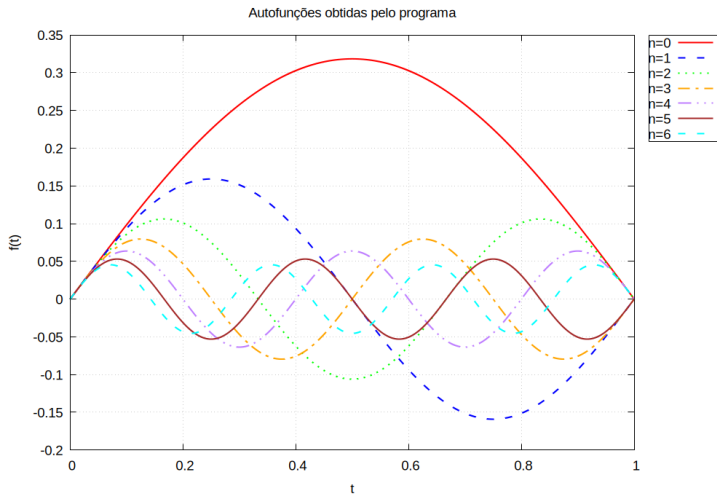


Figura: Autofunções determinadas numericamente pelo programa

Problemas de Sturm-Liouville singulares

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

Problemas de Sturm-Liouville singulares

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$ é suave em $[a, b]$, não nula em $a < x \leq b$, e satisfaz $p(a) = 0$, $p'(a) \neq 0$.

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$ é suave em $[a, b]$, não nula em $a < x \leq b$, e satisfaz $p(a) = 0$, $p'(a) \neq 0$.
- $q(x)$ é suave em $[a, b]$.

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$ é suave em $[a, b]$, não nula em $a < x \leq b$, e satisfaz $p(a) = 0$, $p'(a) \neq 0$.
- $q(x)$ é suave em $[a, b]$.
- $p(x)$ e $q(x)$ são funções reais, γ e δ são constantes reais.

Definição

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, & a < x < b, \\ |y(a)| < \infty, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & |\gamma| + |\delta| \neq 0, \end{cases}$$

onde:

- $p(x) \geq 0$ é suave em $[a, b]$, não nula em $a < x \leq b$, e satisfaz $p(a) = 0$, $p'(a) \neq 0$.
- $q(x)$ é suave em $[a, b]$.
- $p(x)$ e $q(x)$ são funções reais, γ e δ são constantes reais.
- $r(x)$ é suave em $[a, b]$, valendo ou $r(x) > 0$ em $[a, b]$ ou $r(x) = (x - a)^m \rho(x)$ onde $m > 0$ e $\rho(x) > 0$ é suave em $a \leq x \leq b$.

Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- A equação de Legendre pode ser vista como um problema de Sturm-Liouville singular:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{dP_n}{dt} \right) = \lambda P_n, & \forall t \in [-1, 1], \\ P(-1) = (-1)^n, \quad P(1) = 1. \end{cases}$$

Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- A equação de Legendre pode ser vista como um problema de Sturm-Liouville singular:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dP_n}{dt}\right) = \lambda P_n, & \forall t \in [-1, 1], \\ P(-1) = (-1)^n, \quad P(1) = 1. \end{cases}$$

- Sabe-se que os autovalores são dados por $\lambda_n = n(n+1)$. As autofunções correspondentes de $n = 0$ até $n = 4$ são dadas por

n	Polinômio de Legendre
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- Numericamente, obtemos os seguintes autovalores:

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.00007518	1	24
1	2.00022555	192	24
2	6.00037594	387	25
3	12.00052635	535	26
4	20.00067675	667	26

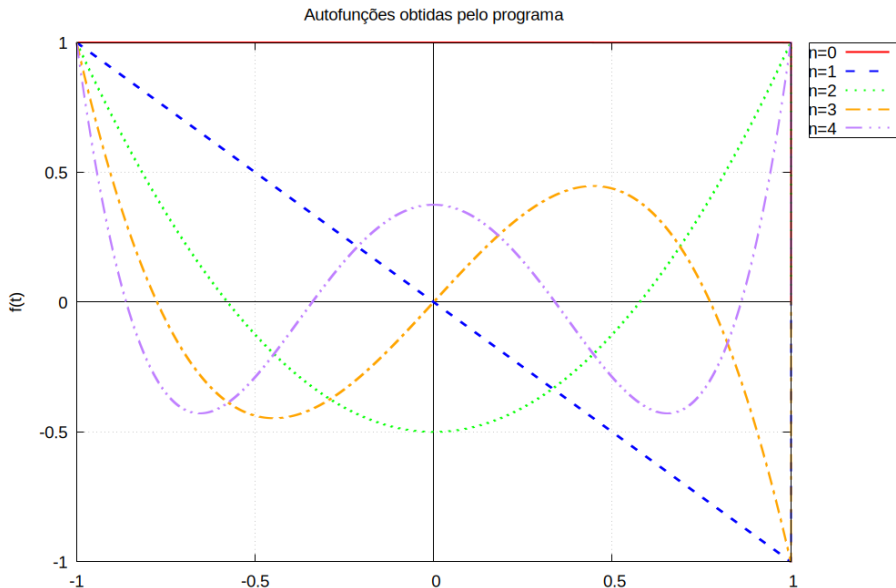
Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

- Numericamente, obtemos os seguintes autovalores:

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.00007518	1	24
1	2.00022555	192	24
2	6.00037594	387	25
3	12.00052635	535	26
4	20.00067675	667	26

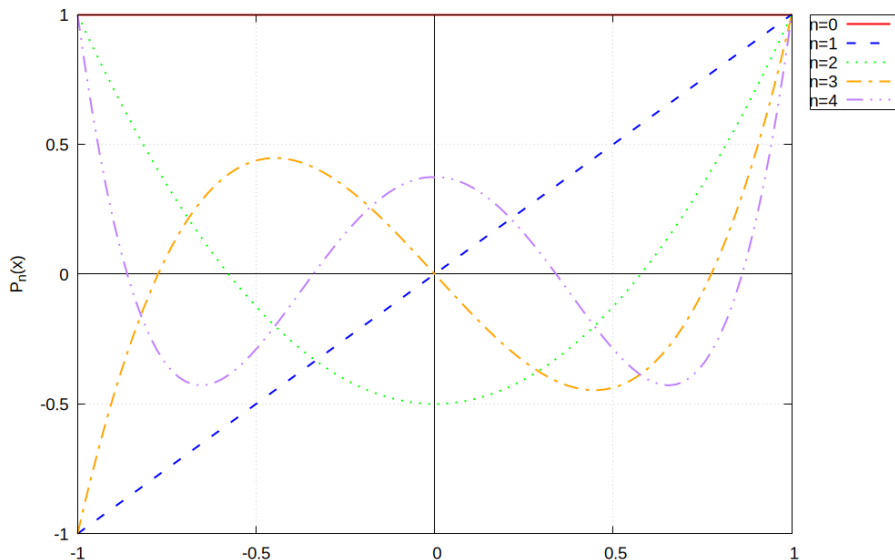
- Plotamos as autofunções determinadas numericamente pelo programa e os polinômios de Legendre exatos. Observamos que os polinômios de grau ímpar determinados numericamente diferem pela constante multiplicativa -1 dos polinômios de Legendre exatos correspondentes, o que é esperado, já que os polinômios de Legendre satisfazem $P_n(-1) = (-1)^n$ e $P_n(1) = 1$, enquanto que no nosso programa forçamos $P_n(1) = 1$ sempre.

Exemplo 2: Os polinômios de Legendre



Exemplo 2: Os polinômios de Legendre

Primeiros cinco polinômios de Legendre



Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.57824838	58	34
1	13.01659499	1292	34
2	48.48917784	1577	37
3	107.57497472	1744	39
4	190.28375117	1884	40

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Com o chute inicial $\lambda_0 = 0$, Newton-Raphson convergiu em somente 4 iterações:

Iteração	λ	$F(\lambda)$
1	0.53761681266555983	-0.53403483428546394
2	0.57802783474609609	-0.034945050888573075
3	0.57824837086275171	-0.00018864919931886801
4	0.57824837740937718	-0.000000055997283388719053

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Determinamos numericamente os cinco primeiros autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} -(1 \cdot u'(x))' + (x - \lambda \cos(x))u(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

n	λ_n	Intervalos buscados	Iterações da bissecção
0	0.57824838	58	34
1	13.01659499	1292	34
2	48.48917784	1577	37
3	107.57497472	1744	39
4	190.28375117	1884	40

Um exemplo usando Newton-Raphson

- Já com o chute inicial $\lambda_0 = 140$, Newton-Raphson convergiu em 5 iterações:

Iteração	λ	$F(\lambda)$
1	60.773415429648637	-9.8908269771386994
2	46.353458505247033	4.6605507929687588
3	48.528804125931671	-0.83760614199634920
4	48.489185568458076	0.015769242002305423
5	48.489177842533614	0.0000030739212154774114

É um pouco surpreendente que o chute inicial $\lambda_0 = 140$, mais próximo ao autovalor teórico

$$\lambda_3 = 107.57497472$$

tenha convergido para λ_2 ao invés de λ_3 .

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)

Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom

Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

- + Convergência quadrática

Comparação dos métodos

Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

- + Convergência quadrática
- + Muito eficiente (4-5 iterações)

Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

- + Convergência quadrática
- + Muito eficiente (4-5 iterações)
 - Precisa de um bom chute inicial

Atirador Marchante:

- + Determina quantos autovalores quisermos (?)
- + Não precisa de um chute inicial bom
- Computacionalmente MUITO caro

Newton-Raphson:

- + Convergência quadrática
- + Muito eficiente (4-5 iterações)
 - Precisa de um bom chute inicial
 - Um autovalor por vez



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf



[3] **Códigos**

Disponíveis em



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf



[3] **Códigos**

Disponíveis em

- https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf



[3] **Códigos**

Disponíveis em

- https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS
- https://github.com/SaganGromov/SL_SINGULAR_EXEMPLOS



[1] **Guenther, R.B; Lee, J.W.**

(2019) *Sturm-Liouville problems: Theory and numerical implementation.*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.



[2] **Sobral, Y.D.**

Notas de aula de IMCEDO



[2] **Texto de apoio ao trabalho**

Disponível em

https://horatiomarm.com/meus_textos/TRABALHO_IMCEDO.pdf



[3] **Códigos**

Disponíveis em

- https://github.com/SaganGromov/SL_REGULAR_EXEMPLOS
- https://github.com/SaganGromov/SL_SINGULAR_EXEMPLOS
- https://github.com/SaganGromov/SL_NEWTON_RAPHSON