4 Espaços de Sobolev

4.1 Aula 12: Motivação e Formulação Fraca

A partir de agora vamos estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sendo um aberto de classe C^1 e a função f podendo ser descontínua em Ω. Vamos supor, inicialmente, que a função f pertence ao espaço de Lebesgue $L^2(\Omega)$. Se existe $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução clássica de $(\mathcal{P})$ então, multiplicando a primeira equação de $(\mathcal{P})$ por $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, integrando e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_\Omega f(x)\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\mathrm{d}x,$$

ou ainda, lembrando que $\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi \,\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{31}$$

Observação 4.1. *O lado direito da equação (31) é finito sempre que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Em particular, se $f \in L^2(\Omega)$ e u é uma solução clássica de $(\mathcal{P})$, a expressão (31) se verifica e o integrando do lado esquerdo envolve apenas as derivadas de primeira ordem da função u.*

Suponhamos que exista um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com as seguintes propriedades:

(i) o produto interno em $\mathcal{H}$ é dado pela aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} :\ & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) \longmapsto \langle u, v\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\,\mathrm{d}x; \end{aligned} \tag{32}$$

(ii) $C_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço de $\mathcal{H}$ denso;

(iii) $\mathcal{H}$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$.

Nessas condições, a equação (31) se escreve como $\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi \,\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Além disso, a existência de tal espaço $\mathcal{H}$ nos permite encontrar, em certo sentido, solução para o problema $(\mathcal{P})$. Isso motiva a seguinte definição e o resultado subsequente.

Definição 4.1. *Diremos que $u \in \mathcal{H}$ é uma* **solução fraca** *do problema $(\mathcal{P})$ quando vale a igualdade*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi \, dx, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{H}. \tag{33}$$

Proposição 4.1. *A existência de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ como em $(i) - (iii)$ garante que a equação (31) se estende para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ e, portanto, toda solução clássica de $(\mathcal{P})$ é também uma solução fraca. Além disso, o funcional linear $T_f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $\varphi \mapsto T_f(\varphi) := \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi \, dx$ é contínuo e a existência de solução fraca para $(\mathcal{P})$ é equivalente a encontrar $u \in \mathcal{H}$ tal que $\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{H}} = T_f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$.*

Prova. Sejam u solução clássica para $(\mathcal{P})$ e $\varphi \in \mathcal{H}$ com $(\varphi_m) \subset \mathcal{H}$ tal que $\varphi_m \to \varphi$ em $\mathcal{H}$, quando $m \to +\infty$. Pela continuidade do produto interno, temos que $\langle u\,, \varphi_m\rangle_{\mathcal{H}} \to \langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{H}}$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a continuidade da imersão $\mathcal{H} \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$\left|\int_\Omega (f\varphi_m - f\varphi)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |f(\varphi_m - \varphi)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_m - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_m - \varphi\|_{\mathcal{H}} \to 0,$$

quando $m \to +\infty$. Assim, passando a igualdade $\langle u, \varphi_m\rangle_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x$ ao limite, concluímos que

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi)\, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(x)\varphi\, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{H},$$

e, portanto, u é por definição uma solução fraca para $(\mathcal{P})$. Note ainda que, para toda $\varphi \in \mathcal{H}$ vale que $|T_f(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} f(x)\varphi\, \mathrm{d}x \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}}$, e, portanto, T_f é um funcional linear contínuo de $\mathcal{H}$ em $\mathbb{R}$. Além disso, podemos reescrever (33) como

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = T_f(\varphi), \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{H},$$

caracterizando a existência de solução fraca por meio da definição de T_f. □

Observação 4.2. *Nem sempre uma solução fraca é uma solução clássica.*

Em vista da Proposição 4.1, para encontrar uma solução fraca para $(\mathcal{P})$ vale relembrar o seguinte resultado, que depende apenas do fato de $\mathbb{R}^n$ ser um espaço com produto interno.

Teorema 4.1 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja X um espaço de Hilbert e considere $T : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $v_T \in X$ que satisfaz $T(x) = \langle v_T, x \rangle_X$, para todo $x \in X$. Além disso, $\|v_T\| = \|T\|_{X^*}$.*

Prova. Se $T = 0$ basta tomar $v_T = 0$. Podemos então supor que $\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}$ é um subespaço próprio de X. Como esse subespaço é fechado, existe $x_0 \in (\ker T)^{\perp}$ tal que $\|x_0\|_X = 1$. Note agora que, para todo $x \in X$, vale a seguinte decomposição

$$x = \left(x - \frac{T(x)}{T(x_0)} x_0 \right) + \frac{T(x)}{T(x_0)} x_0 \in \ker T \oplus (\ker T)^{\perp}.$$

Dessa forma, fazendo $v_T = T(x_0)x_0 \in (\ker T)^{\perp}$ temos $\langle v_T, x \rangle_X = \left\langle T(x_0)x_0, \frac{T(x)}{T(x_0)} x_0 \right\rangle_X = T(x)$. Além disso, v_T é único, pois se existissem $v_1, v_2 \in X$ tais que $\langle v_1, x \rangle_X = T_f(x) = \langle v_2, x \rangle_X$, para todo $x \in X$, então $\langle v_1 - v_2, x \rangle_X = 0$, $\forall\, x \in X$. Em particular, escolhendo $x = v_1 - v_2$, concluiríamos que $\|v_1 - v_2\|_X^2 = 0$, isto é, que $v_1 = v_2$. A igualdade $\|v_T\| = \|T(x_0)\| = \|T\|_{X^*}$ segue diretamente das propriedades de produto interno (Exercício 6.4.1). □

Aplicando o Teorema de Riesz, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto de classe C^1 e $f \in L^2(\Omega)$, então o problema $(\mathcal{P})$ possui uma única solução fraca.*

Prova. Como T_f é um funcional linear contínuo, de acordo com o Teorema de Riesz, existe um único elemento $u_f \in \mathcal{H}$ tal que $T_f(\varphi) = \langle u_f, \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$. Segue então pela Proposição 4.1 que u_f é a única solução fraca de $(\mathcal{P})$. De fato, se existisse outra solução, digamos $\widetilde{u}_f$, pela caracterização $\langle u_f, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = T_f(\varphi) = \langle \widetilde{u}_f, \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ e o Teorema de Riesz, concluiríamos que $\widetilde{u}_f = u_f$. □

Observação 4.3. *a) A equação (33) pressupõe apenas a existência de **derivadas de primeira ordem** para as funções de $\mathcal{H}$. Desse modo, é natural que o espaço $\mathcal{H}$ seja maior do que $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, sendo este último o espaço em que se encontram as soluções clássicas. Assim, temos mais chance de obter soluções fracas do que soluções clássicas;*
b)Um maneira simples de construir o espaço $\mathcal{H}$ seria notar que a função dada em (32) define um produto interno em $C_0^{\infty}(\Omega)$ e denotar por $\mathcal{H}$ o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ com a norma induzida por esse produto interno. Entretanto, com essa construção, os elementos de $\mathcal{H}$ seriam vistos como classes de equivalência de sequências de Cauchy em $C_0^{\infty}(\Omega)$, que não são bons elementos para se trabalhar. Além disso, ainda precisaríamos mostrar que $\mathcal{H} \hookrightarrow L^2(\Omega)$. A ideia então é tentar identificar este completamento acima com algum espaço de funções.

Notação 4.1. *Como trabalharemos com formulações integrais para nossos problemas, escreveremos somente $\int u$ para denotar $\int_{\Omega} u(x)dx$, em que $u \in L^1(\Omega)$. Além disso, para $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$, vamos escrever $\|u\|_p$ para denotar a norma de u em $L^p(\Omega)$. As normas de funções u com derivadas contínuas ou Hölder contínuas serão denotadas por $\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})}$ e $\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})}$, respectivamente. Finalmente, diremos que φ é uma* **função teste** *quando $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.*

Para construir o espaço $\mathcal{H}$ vamos introduzir um novo conceito de derivada que generaliza a derivada usual. A princípio, considere $u \in C^k(\Omega)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função teste. O Teorema 1.3(b), nos permite integrar por partes para obter

$$\int u\varphi_{x_i} = -\int u_{x_i}\varphi + \int_{\partial\Omega} u(x)\varphi(x)\eta^i \,\mathrm{d}\sigma_x = -\int u_{x_i}\varphi, \quad \text{pois } \varphi \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

De uma maneira mais geral, se α é um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, podemos escrever

$$\int uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|_s} \int \varphi D^\alpha u, \text{ para } |\alpha|_s := \sum_{i=1}^n \alpha_i. \tag{34}$$

Note porém que, para que o lado esquerdo da expressão acima faça sentido, basta supor que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, se este for o caso e denotarmos por $K_\varphi \subset\subset \Omega$ o suporte da função φ, teremos então que $$\left|\int uD^\alpha\varphi\right| \leq \int_{K_\varphi} |u(x)|\,|D^\alpha\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|D^\alpha\varphi\|_\infty \int_{K_\varphi} |u(x)|\mathrm{d}x < \infty.$$

Estas considerações motivam a seguinte definição.

Definição 4.2. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α-ésima **derivada fraca** de u se*

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|_s} \int_\Omega v\varphi \,\mathrm{d}x, \text{ para } |\alpha|_s := \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{35}$$

*Isto é, essencialmente, a derivada fraca é **uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes**.*

O lema abaixo estabelece, em um certo sentido, a unicidade da derivada fraca. Dessa forma, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possui α-ésima derivada fraca v, podemos denotar $v = D^\alpha u$.

Lema 4.1. *A α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.*

Prova. Suponha que v_1, v_2 são α-ésimas derivadas fracas de u. Então

$$(-1)^{|\alpha|_s} \int v_1\varphi = \int uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|_s} \int v_2\varphi, \quad \text{e, portanto,} \quad \int (v_1 - v_2)\varphi = 0, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Com isso, segue de [3, Lema 4.2] que $v_1 - v_2 = 0$ q.t.p. em Ω, de onde se conclui que $v_1 = v_2$ q.t.p. em Ω. □

Notação 4.2. *Daqui em diante, $D^\alpha u$ denotará a α-ésima derivada **no sentido fraco** da função u, e faremos menção quando se tratar da derivada no sentido clássico.*

4.2 Aula 13: Derivadas Fracas e Espaços de Sobolev

Na aula de hoje vamos definir os Espaços de Sobolev $W^{k,p}$ que serão base para construção do espaço $\mathcal{H}$ que estamos procurando. Comecemos com alguns exemplos do conceito de derivada fraca que usaremos na definição de $W^{k,p}$.

Exemplo 4.1. Se uma função u possui derivada no sentido clássico, então, pelo Teorema da Divergência, u possui derivada no sentido fraco, que coincide com a derivada clássica.

Exemplo 4.2. Considere $\Omega = (0, 2)$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
Observe que $u \in L^1_{loc}(0, 2)$ e que não existe a derivada no sentido clássico, visto que não existe a derivada (clássica) no ponto $x = 1$. Vamos mostrar que u possui derivada fraca $v : (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, claramente temos que $v \in L^1_{loc}(0,2)$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(0,2)$ e observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\varphi' \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = x\varphi(x)\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x + (\varphi(2)-\varphi(1))\\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(1) = -\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

de modo que $v = u'$, no sentido fraco.

Exemplo 4.3. Considere $\Omega = (0,2)$ e seja agora $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$
Vamos mostrar que u não é fracamente derivável. De fato, suponha por contradição existe a derivada fraca u'. Então,

$$\int u\varphi' = -\int u'\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,2).$$

Considere uma sequência $(\varphi_m) \subset C_0^\infty(0,2)$ satisfazendo, para todo $m \in \mathbb{N}$,

(i) $\|\varphi_m\|_\infty \le 1$;

(ii) $\varphi_m(1) = 1$;

(iii) $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = 0$, para todo $x \neq 1$;

(iv) o suporte de φ_m está contido em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Usando integração por partes, obtemos

$$-\int u'\varphi_m = \int u\varphi_m' = \int_0^1 x\varphi_m'(x)\,\mathrm{d}x = x\varphi_m\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Como φ_m tem suporte compacto e $\varphi_m(1) = 1$, concluímos que

$$-1 = \int u'\varphi_m - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_J u'\varphi_m\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x,$$

em que $J = (\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$. Observe agora que $u'(x)\varphi_m(x) \to 0$ q.t.p. em J. Além disso, $|u'(x)\varphi_m(x)| \le |u'(x)|$ q.t.p. em J e $|u'| \in L^1(J)$, visto que $u' \in L^1_{loc}(0,2)$. Segue então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $\lim_{m\to\infty} \int_J u'\varphi_m\,\mathrm{d}x = 0$. Do mesmo modo mostra-se que $\int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x \to 0$. Assim, $-1 = \lim_{m\to\infty} \left(\int u'\varphi_m - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x \right) = 0$, o que é absurdo. Portanto, não existe a derivada fraca u'.

Os **Espaços de Sobolev** serão objeto de estudo para obtenção de soluções fracas, pois representam uma estrutura ideal para buscar soluções generalizadas de problemas de valor de contorno.

Observação 4.4. *A teoria dos operadores compactos (lineares e não lineares), bem como a definição dos Espaços de Sobolev, foram em grande parte estimuladas pela necessidade do estudo da solubilidade de EDPs. De fato, os teoremas de imersão compacta dos espaços de Sobolev nos permitem usar a teoria dos operadores compactos para encontrar soluções fracas.*

Definição 4.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $1 \le p \le \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \ : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \le k\}$, com as derivadas $D^\alpha u$ acima sendo tomadas no sentido* ***fraco****.*

Observação 4.5. *a) Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, de modo que toda função de $W^{k,p}(\Omega)$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$. Além disso, como $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, estamos assumindo que todas as derivadas fracas de ordem $|\alpha| \le k$ existem. Mais ainda, $C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.*
b) Quando $p = 2$, vamos denotar $W^{k,p}(\Omega)$ ***simplesmente por*** *$H^k(\Omega)$, isto é, $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. Em particular, se $k = 1$, temos*

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ para \ i = 1, ..., n \right\}.$$

*c) O espaço $H^1(\Omega)$ pode ser dotado do **produto interno** $\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v)\, dx$ e tornar-se um **espaço de Hilbert.** Com isso, se $u \in H^1(\Omega)$, então as duas integrais em (33) são finitas sempre que $f \in L^2(\Omega)$. Dessa forma, veremos que o espaço $\mathcal{H}$ que estamos procurando, cujo produto interno é dado por (32), é um subespaço especial de $H^1(\Omega)$.*

O resultado abaixo apresenta as propriedades básicas dos espaços de Sobolev.

Proposição 4.2. *Sejam $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$. Então*

(i) *$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, para todo λ, $\mu \in \mathbb{R}$;*

(ii) *$D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ sempre que $|\beta| + |\alpha| \leq k$;*

(iii) *$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$;*

(iv) *Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ e vale $D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u$, onde $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$ e $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ é um multí-indice de ordem $\leq k$;*

(iii) *Se $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ é um aberto, então $u \in W^{k,p}(\widetilde{\Omega})$.*

Prova. Considere $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e note que, pela definição de derivada fraca, temos

$$\begin{aligned} \int (\lambda u + \mu v) D^\alpha \varphi &= \lambda \int u D^\alpha \varphi + \mu \int v D^\alpha \varphi = \lambda (-1)^{|\alpha|_s} \int \varphi D^\alpha u + \mu (-1)^{|\alpha|_s} \int \varphi D^\alpha v \\ &= (-1)^{|\alpha|_s} \int (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v)\, \varphi, \end{aligned}$$

o que estabelece a veracidade de (i). A prova dos demais itens também segue da definição de derivada fraca e alguns cálculos diretos (Exercício 6.4.10). $\square$

Pelo item (i) da Proposição 4.2 concluímos que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Vamos transformá-lo em um espaço normado.

Proposição 4.3. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço normado quando munido com*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & se \ 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & se \ p = \infty. \end{cases}$$

Prova. Para verificar que $\| \cdot \|_{W^{k,p}(\Omega)}$ define uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$ precisamos mostrar que, para quaisquer u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem

(N_1) $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \neq 0$, sempre que $u \neq 0$; (N_3) $\|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

(N_2) $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$;

Os itens (N_1) e (N_2) seguem imediatamente da definição de $\| \cdot \|_{W^{k,p}}$. Vamos mostrar a veracidade de (N_3), para $1 \leq p < \infty$. Usando a desigualdade triangular em $L^p(\Omega)$ e a linearidade do operador D^α, obtemos

$$\|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lembremos agora que, se $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, a desigualdade de Minkowski se escreve como

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int |D^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int |D^\alpha v|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Quando $p = \infty$ o item $(N3)$ segue da desigualdade triangular para números reais. □

Observação 4.6. *Existem outras normas em $W^{k,p}(\Omega)$, como por exemplo*

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{ou} \quad |||u|||_{W^{k,p}(\Omega)} := \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Não é difícil verificar que as expressões acima também definem normas em $W^{k,p}(\Omega)$ e que essas normas são equivalentes à norma usual $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ que será denotada apenas por $\|\cdot\|_{k,p}$.

Relembramos que um espaço vetorial $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado **Espaço de Banach** quando é completo com respeito à topologia induzida pela norma. O resultado abaixo estabelece a completude do espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 4.3. *$\big(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p}\big)$ é um espaço de Banach.*

Prova. Seja $1 \leq p < \infty$ e $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Vamos mostrar que (u_m) converge em $W^{k,p}(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $\|u_l - u_m\|_{k,p} < \varepsilon$, se $l, m > N$. Assim, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$,

$$\|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|_p \leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} < \varepsilon, \quad \text{se } l, m > N, \tag{36}$$

o que mostra que $(D^\alpha u_m) \subset L^p(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy. Sendo $L^p(\Omega)$ completo, segue que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$. Vamos mostrar que $u := u_{(0,\ldots,0)} \in W^{k,p}(\Omega)$ e que $D^\alpha u = u_\alpha$, para todo $|\alpha| \leq k$. Se isso for verdade podemos fazer $l \to \infty$ em (36) para concluir que $\|u_m - u\|_{k,p} < \varepsilon$, sempre que $m > N$. Mas isso é o mesmo que dizer que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Resta então mostrar que, para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$, vale $D^\alpha u = u_\alpha$. Fixada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que $D^\alpha \varphi \in L^{p'}(\Omega)$, em que p' é o expoente conjugado de p, isto é, $1/p + 1/p' = 1$. Usando então a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left|\int (uD^\alpha\varphi - u_m D^\alpha \varphi)\right| \leq \int |u - u_m||D^\alpha \varphi| \leq \|u - u_m\|_{L^p(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

A expressão acima mostra que $\displaystyle\int uD^\alpha\varphi = \lim_{m\to\infty} \int u_m D^\alpha \varphi$, $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Uma vez que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$, podemos proceder como acima para verificar que

$$\int u_\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} \int (D^\alpha u_m)\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Portanto, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int uD^\alpha\varphi = \lim_{m\to\infty} \int u_m D^\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|_s} \int (D^\alpha u_m)\varphi = (-1)^{|\alpha|_s} \int u_\alpha \varphi.$$

donde se conclui que $D^\alpha u = u_\alpha \in L^p(\Omega)$, e portanto $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Para o caso $p = \infty$ basta repetir o argumento fazendo $p' = 1$ e usando a definição da norma de $L^\infty(\Omega)$ (Verifique!). □