Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Notas de Aula

Equações Diferenciais Parciais 2

(Baseadas na Apostila "Notas de EDP2" do Prof. Dr. Marcelo Furtado)

Profa. Dra. Mayra Soares Costa Rodrigues

Professora Adjunta do Magistério Superior - IE - MAT/UnB

E-mail: mayra.soares@unb.br

Dezembro, 2023

Sumário

1 Funções Harmônicas

1.1 Aula 01: A Propriedade da Média

O objetivo dessa aula é estudar propriedades satisfeitas por funções harmônicas.

Definição 1.1. *Uma função* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *é harmônica em* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto, se ela satisfaz a equação* $\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega$, *em que* $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$ *é o operador Laplaciano.*

Exemplo 1.1. *O exemplo mais simples de função harmônica é uma função constante. De uma maneira mais geral, qualquer função da forma*

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto a_0 + \sum_{i=1,\dots,N} b_i x_i + \sum_{i,j=1,\dots,N,\, i\neq j} a_{ij} x_i x_j,$$

com a_0, $b_i\, a_{ij} \in \mathbb{R}$ *é também harmônica. Outro exemplo importante de função harmônica (Exercício* 6.1.1*) é a chamada solução fundamental da equação de Laplace* $\Gamma : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & se\ N = 2 \\ \dfrac{1}{N(2-N)\omega_N} |x|^{2-N}, & se\ N \geq 3, \end{cases}$$

Nosso objetivo presente é estudar algumas propriedades básicas das funções harmônicas.

Definição 1.2 (A Propriedade da Média)**.** *Se* $u \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um aberto e* $B_r(x_0) \subset \Omega$ *é uma bola aberta, então a média de u em* $\partial B_r(x_0)$ *e a média de u em* $B_r(x_0)$ *são definidas, respectivamente, por*

$$\frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x, \qquad \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x_0)} u(x) \mathrm{d}x,$$

onde ω_N *é o volume da bola unitária* $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$*. Dizemos que a função u satisfaz a Propriedade da Média se*

$$u(x_0) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \tag{1}$$

e

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

para qualquer bola $B_r(x_0) \subset \Omega$.

Proposição 1.1. *As igualdades* (1) *e* (2) *são equivalentes.*

Prova. Suponha que $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ satisfaz (1), de modo que para todo $0 < s \leq r$ vale $u(x_0) N s^{N-1} = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$. Integrando no intervalo $[0, r]$ com relação à variável s, obtemos

$$r^N u(x_0) = \int_0^r u(x_0) N s^{N-1}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_N} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \right) \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_N} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x,$$

e, portanto, a equação (2) é satisfeita. Reciprocamente, suponha que

$$r^N u(x_0) = \frac{1}{\omega_N} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega_N} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \right) \mathrm{d}s.$$

Derivando com respeito à variável r, observando que a função $s \mapsto \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$ é contínua e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos $n r^{N-1} u(x_0) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$, que é exatamente a equação (1). □

Exemplo 1.2. *Para motivar o nosso primeiro resultado observe que, se $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua, podemos utilizar o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de $x_0 \in (a,b)$ tal que $u(x_0) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$, isto é, a média de u em (a,b) é atingida em algum ponto do intervalo. Se, além disso, soubermos que a função u é harmônica, então por integração básica concluímos que $u(x) = c_1 x + c_2$, para constante c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Desse modo,*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (c_1 x + c_2)\mathrm{d}x = c_1\left(\frac{b+a}{2}\right) + c_2 = u\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

o que mostra que a média é atingida exatamente no centro do intervalo (a,b) e, por conseguinte, u satisfaz a Propriedade da Média.

O resultado principal dessa aula mostra que o mesmo vale em dimensões maiores.

Teorema 1.1. *Uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é harmônica em Ω se, e somente se, ela satisfaz a Propriedade da Média, isto é, as igualdades (1) e (2) se verificam para toda bola $B_r(x_0) \subset \Omega$.*

Para provar o resultado acima, vamos aplicar um importante resultado da Teoria de Integração. Como ele será usado várias vezes ao longo dessas notas, convém enunciá-lo.

Teorema 1.2 (Teorema da Divergência)**.** *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe $\mathcal{C}^1$ e $F = (F_1, \ldots, F_N)$ um campo vetorial tal que $F^i \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, para cada coordenada $i = 1, \ldots, N$. Então $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F(x)\cdot\eta(x)\,\mathrm{d}\sigma_x$, onde $\operatorname{div} F = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ é o divergente de F e $\eta(x)$ é o vetor unitário normal exterior em $x \in \partial\Omega$.*

Observação 1.1. *As condições de regularidade podem ser enfraquecidas sem afetar a validade do teorema. Podemos supor somente que $F^i \in \mathcal{C}^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e que o divergente seja integrável. As condições sobre a regularidade de $\partial\Omega$ também podem ser mais fracas (cf. [18]).*

Teorema 1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe $\mathcal{C}^1$, $\eta(x) = (\eta^1(x), \ldots, \eta^N(x))$ o vetor unitário normal exterior em um ponto $x \in \partial\Omega$ e $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Então*

(a) $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(b) $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i} v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(c) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(d) $\displaystyle\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(e) $\displaystyle\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\eta} - v\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\sigma_x$,

Prova. O item (a) é uma consequência imediata da aplicação do Teorema 1.2 ao campo $F = (F_1, \ldots, F_N)$ definido por $F_i(x) = u(x)$ e $F_j(x) = 0$, se $i \neq j$. As demais afirmações podem ser provadas de maneira análoga escolhendo o campo adequado (Exercício 6.1.2). Para (b) use o campo $F_i(x) = u(x)v(x)$, $F_j(x) = 0$ para $j \neq i$. Para (c) use o campo $F(x) = \nabla u(x)$. Para (d) use o campo $F(x) = u(x)\nabla v(x)$. Para (e) use o campo $F(x) = u(x)\nabla v(x) - v(x)\nabla u(x)$. □

1.2 Aula 02: Regularidade

Começamos nossa aula apresentando a prova do Teorema 1.1.

Prova do Teorema 1.1. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$. Defina a função

$$\varphi(s) := \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x, \quad s \in (0, r],$$

que nada mais é do que a média da função u na esfera $\partial B_s(x_0)$. Vamos inicialmente verificar que, se u é harmônica, então a função acima é constante. Para tanto, fazemos a mudança de variáveis $x \mapsto x_0 + sz$, obtendo

$$\varphi(s) = \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz) s^{N-1}\, \mathrm{d}\sigma_z = \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz)\, \mathrm{d}\sigma_z.$$

Considere agora, para $s \in (0, r)$ fixo,

$$\psi(h) := \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} - \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) \cdot z\, \mathrm{d}\sigma_z$$

e note que, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} \psi(h) &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{u(x_0 + sz + hz) - u(x_0 + sz)}{h} - \nabla u(x_0 + sz) \cdot z \right) \mathrm{d}\sigma_z \\ &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} \Big([\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)] \cdot z \Big) \mathrm{d}\sigma_z, \text{ com } \theta(z) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Logo, $|\psi(h)| \leq \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} \Big|\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)\Big| \mathrm{d}\sigma_z$. Como o integrando é contínuo e $\partial B_1(0)$ é compacto, esse mesmo integrando é uniformemente contínuo. Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $\Big|\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)\Big| < \varepsilon$, para $|h| < \delta$, de onde se conclui que $|\psi(h)| < \varepsilon$, sempre que $|h| < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\varphi'(s) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) \cdot z\, \mathrm{d}\sigma_z, \quad s \in (0, r). \tag{3}$$

Aplicando novamente uma mudança de variáveis, obtemos

$$\varphi'(s) = \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} \nabla u(x) \cdot \left(\frac{x - x_0}{s} \right) \mathrm{d}\sigma_x = \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} \nabla u(x) \cdot \eta(x)\, \mathrm{d}\sigma_x,$$

em que usamos também o fato de que o vetor normal exterior no ponto $x \in \partial B_s(x_0)$ é exatamente $(x - x_0)/s$. A expressão acima e o Teorema 1.2 aplicado ao campo $F = \nabla u$ implicam que

$$\varphi'(s) = \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{B_s(x_0)} \mathrm{div}(\nabla u(x))\, \mathrm{d}x = \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{B_s(x_0)} \Delta u(x)\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Supondo que u é harmônica, a igualdade acima implica que $\varphi'(s) = 0$ para todo $s \in (0, r)$, isto é, φ é constante em $(0, r)$. Uma vez que φ é contínua em $(0, r]$, temos que

$$\frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x = \varphi(r) = \lim_{s \to 0^+} \varphi(s) = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x = u(x_0),$$

em que usamos na última igualdade o fato da função u ser contínua no ponto x_0 (Exercício 6.1.3). Isso prova a veracidade de (1) e, equivalentemente, de (2). Para provar a recíproca suponha, por contradição, que u satisfaz a Propriedade da Média, mas não é harmônica.

Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Delta u(x_0) \neq 0$, digamos $\Delta u(x_0) > 0$. Como $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, o laplaciano de u é uma função contínua. Logo, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ e $\Delta u > 0$ em $B_r(x_0)$. Como a equação (1) se verifica, temos que φ é constante em $(0, r)$. Por outro lado, usando a expressão (4), concluímos que $0 = \varphi'(s) = \dfrac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \displaystyle\int_{B_s(x_0)} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x > 0$, o que é absurdo. $\square$

Observação 1.2. *Nas próximas aulas, discutiremos algumas consequências importantes do Teorema 1.1. Conforme será notado, a prova de muitas dessas consequências utiliza somente as equações (1) e (2), sendo portanto válidas, não só para funções harmônicas, mas também para qualquer função contínua que satisfaça a Propriedade da Média.*

A primeira propriedade que veremos está relacionada com a regularidade das funções harmônicas. Lembremos que, por definição, as funções harmônicas tem pelo menos todas as derivadas de ordem 2 contínuas. Contudo, vale o seguinte resultado de regularidade.

Teorema 1.4. *Se $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ satisfaz a Propriedade da Média, então $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Na prova do Teorema 1.4 vamos usar as **funções regularizantes** ou *mollifiers.* A fim de introduzir esse importante conceito, lembremos inicialmente que o **suporte** de uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é definido por $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Definição 1.3. *a) Seja $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ uma função tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \eta(t)dt = 1$ e cujo suporte esteja contido no intervalo $(-1, 1)$. Uma escolha possível para essa função é*

$$\eta(t) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(\dfrac{1}{(2t)^2 - 1}\right), & \text{se } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{se } |t| \geq 1/2, \end{cases} \quad \text{com } c := \left(\int_{-1/2}^{1/2} \exp(1/((2t)^2-1))\,dt\right)^{-1}.$$

*Dado $\varepsilon > 0$, definimos o **núcleo regularizante** $\eta_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon^N}\eta\left(\dfrac{|x|}{\varepsilon}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Devido às propriedades de η segue que:*

(i) $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$; *(ii)* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$; *(iii)* $\mathrm{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$;

*b) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua, dado $\varepsilon > 0$, defina $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Denote por $f^\varepsilon := (\eta_\varepsilon * f)$ a **convolução** de η_ε com f, isto é, a função $f^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f^\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Observação 1.3. *a) Pela definição de Ω_ε, se $x \in \Omega_\varepsilon$ e $y \in B_\varepsilon(x)$, então $x - y \in \Omega$, de modo que as duas integrais acima fazem sentido. Além disso, usando uma mudança de variáveis concluímos que f^ε também pode ser escrita como $f^\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon$;*
b) Um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ é uma $N-$upla em que $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ representa o número de derivadas na variável x_i no operador D^α. A ordem de um multi-índice α é definida por $|\alpha|_s = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ e representa o número total de derivadas no multi-índice α. Dessa forma, convencionando $\partial x_i^0 = 1$, podemos denotar $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|_s} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

Proposição 1.2. *Se f é contínua e α é um multi-índice qualquer, vale $D^\alpha f^\varepsilon = f * D^\alpha \eta_\varepsilon$. Em particular, $f^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, o que justifica o nome de **núcleo regularizante** para η_ε.*

1.3 Aula 03: O Princípio do Máximo

Iniciamos nossa aula com a prova de uma propriedade importante das funções regularizantes.

Prova. Fixado $i \in \{1, \ldots, N\}$, seja $\alpha = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, com o 1 estando na i-ésima entrada, e considere $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno de modo que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Nestas condições, temos que

$$\frac{f^\varepsilon(x+he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} = \int_{\widetilde{\Omega}} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x+he_i-y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

em que $\widetilde{\Omega}$ é um conjunto compacto totalmente contido em Ω. Usando agora a regularidade de η_ε, a compacidade de $\widetilde{\Omega}$ e o mesmo argumento da prova de (3), obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha f^\varepsilon(x) = \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h\to 0} \int_{\widetilde{\Omega}} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x+he_i-y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}} \lim_{h\to 0} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x+he_i-y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \left(D^\alpha \eta_\varepsilon * f\right)(x), \end{aligned}$$

o que mostra o resultado para o multi-índice com apenas uma derivada $\alpha = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Um processo de indução conclui o resultado para qualquer multi-índice α, visto que este pode ser decomposto em um número finito de multi-índices com apenas uma derivada. □

Agora apresentamos a prova do nosso resultado de regularidade, Teorema 1.4.

Prova do Teorema 1.4. Seja $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ satisfazendo a Propriedade da Média e considere, para $\varepsilon > 0$ pequeno, $u^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * u)(x) = \displaystyle\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon$. Vamos mostrar que $u_{|\Omega_\varepsilon} \equiv u^\varepsilon$ e portanto, das considerações acima, segue que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Feito isso, basta agora notar que, qualquer que seja $x \in \Omega$, devemos ter $x \in \Omega_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Seja então $x \in \Omega_\varepsilon$ fixado e observe que, usando a definição de η_ε e (1), obtemos

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,d\sigma_y \right) \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(u(x) N \omega_N r^{N-1} \right) \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \frac{u(x)}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_r(x)} 1\,d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = u(x) \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{\varepsilon^N} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) d\sigma_y \right) \mathrm{d}r \\ &= u(x) \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta_\varepsilon(x-y) d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = u(x) \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança de variáveis $x - y \mapsto z$ e usando as propriedades (ii) e (iii) da função regularizante, obtemos $u^\varepsilon(x) = u(x) \displaystyle\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = u(x)$, o que conclui a prova. □

Observação 1.4. *Quando a função u é harmônica, vale um resultado mais forte do que o Teorema 1.4. Nesse caso, pode-se provar que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é analítica em Ω (Exercício 6.1.7).*

Exemplo 1.3. *Seja $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ é harmônica, de modo que $u(t) = c_1 + c_2 t$, para constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como o gráfico de u é um segmento de reta vemos que, qualquer que sejam os valores das constantes, o máximo (mínimo) de u é sempre atingido na fronteira de $[a, b]$, que é exatamente o conjunto $\{a, b\}$. Além disso, se o máximo (mínimo) de u for atingido em um ponto interior $x_0 \in (a, b)$, então necessariamente $c_2 = 0$ e, portanto, u é constante em $[a, b]$.*

O resultado a seguir mostra que a propriedade do Exemplo 1.3 permanece válida em dimensões maiores.

Teorema 1.5 (Princípio do Máximo). *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaz a Propriedade da Média.*

(i) *Se Ω é conexo e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, então u é constante em Ω;*

(ii) *Independente da conexidade de Ω, vale que $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.*

Prova. Para provar (i), considere $x_0 \in \Omega$ tal que $\mathcal{M} := \max_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$, e considere o conjunto $\Omega_{\mathcal{M}} := \{x \in \Omega : u(x) = \mathcal{M}\}$. Como $x_0 \in \Omega_{\mathcal{M}}$, este conjunto é não vazio. Além disso, a continuidade de u garante que $\Omega_{\mathcal{M}} = u^{-1}(\{\mathcal{M}\})$ é fechado em Ω. Vamos mostrar que $\Omega_{\mathcal{M}}$ é aberto em Ω, assim, segue da conexidade de Ω que $\Omega_{\mathcal{M}} = \Omega$ e, portanto, u é constante em Ω. De fato, seja $y \in \Omega_{\mathcal{M}}$ um ponto qualquer e $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset\subset \Omega$. Então,

$$\frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(y)} \mathcal{M} \, \mathrm{d}x = \mathcal{M} = u(y) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(y)} u(x) \, \mathrm{d}x \Longrightarrow \int_{B_r(y)} (\mathcal{M} - u(x)) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Como o integrando acima é não-Negativo e contínuo devemos ter $u \equiv \mathcal{M}$ em $B_r(y)$ e, portanto, $B_r(y) \subset \Omega_{\mathcal{M}}$. Logo $\Omega_{\mathcal{M}}$ é aberto e, portanto, aberto em Ω e o item (i) está provado. Para o item (ii), basta considerar o caso constante separadamente e para o caso geral aplicar o item (i) na componente conexa onde o máximo é atingido (Exercício 6.1.9). □

Observação 1.5. *O Teorema* 1.5 *continua válido se substituirmos o máximo pelo mínimo de u. Além disso, a conclusão do item (i) pode ser falsa se Ω não for conexo (Exercício* 6.1.9*).*

Uma aplicação interessante do Teorema 1.5 está relacionada à unicidade de solução do problema de Poisson.

Teorema 1.6. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Prova. Suponha que Ω é limitado e que u_1 e u_2 são duas soluções do problema de Poisson. Então a função $v := u_1 - u_2$ é tal que

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo item (ii) do Teorema 1.5 temos que $v \leq 0$ em Ω. Por outro lado, aplicando o mesmo raciocínio para a função $-v$ concluímos que $-v \leq 0$, isto é, $v \geq 0$ em Ω. Logo v se anula em todo o conjunto Ω, isto é, $u_1 \equiv u_2$ em Ω. □

Observação 1.6. *É importante salientar que a conclusão do Teorema* 1.6 *pode ser falsa se Ω não for limitado. De fato, basta considerar $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ e observar que, nesse caso, o problema*

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

admite, além da solução trivial $u \equiv 0$, a função $u(x_1, \ldots, x_N) = x_N$ como solução.

2 O Problema de Poisson

2.1 Aula 04: A Solução Fundamental e O Potencial Newtoniano

O objetivo desta aula é estudar a existência de solução clássica, isto é, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, para o problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

As hipóteses sobre Ω, f e g serão colocadas no decorrer da discussão. A ideia básica e estudar separadamente os problemas

$$\Delta u = f \ \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \tag{5}$$

e

$$\Delta u = 0 \ \text{ em } \Omega, \quad u = g \ \text{ em } \partial\Omega, \tag{6}$$

e observar que, se u_1 é solução de (5) e u_2 é solução de (6), então a função $u := u_1 + u_2$ é uma solução do problema $(\mathcal{P})$. Na Aula 6, vamos nos concentrar na solução de um caso particular do problema (6). No que segue, vamos considerar o problema $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Observação 2.1. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^N$ e $A = A_{N\times N}$ é uma matriz ortogonal, então a função $v(x) := u(Ax)$ também satisfaz a mesma equação (Exercício 6.2.1). Por conta disso, vamos tentar simplificar o problema procurando uma solução radial da equação, isto é, uma solução que é constante ao longo de esferas centradas na origem.*

Supondo que u é uma solução radial, vamos denotar por $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função que satisfaz $v(r) = u(x)$, $r = |x|$. Como a função v só depende da variável radial r, podemos reescrever a equação de Laplace em coordenadas radiais, obtendo assim uma equação diferencial ordinária.

A fim de obter essa EDO note que, para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, podemos usar a regra da cadeia para obter $u_{x_i} = v'(r) r_{x_i}$, e $u_{x_i x_i} = v''(r) r_{x_i}^2 + v'(r) r_{x_i x_i}$. Como $r = |x| = (|x|^2)^{1/2}$, então
$r_{x_i} = \frac{1}{2}\left(|x|^2\right)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{r}$ e $r_{x_i x_i} = \left(\frac{x_i}{r}\right)_{x_i} = \frac{1}{r} + x_i(-1) r^{-2} r_{x_i} = \frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}$.

Portanto,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^N \left(v''(r) r_{x_i}^2 + v'(r) r_{x_i x_i}\right) = \sum_{i=1}^N v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \sum_{i=1}^N v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

ou ainda, $\Delta u = v''(r) + v'(r)\left(\frac{N}{r} - \frac{1}{r}\right)$. Logo a equação $-\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ é equivalente a

$$v''(r) + v'(r)\left(\frac{N-1}{r}\right) = 0, \quad r > 0.$$

Supondo $v'(r) \neq 0$, podemos reescrever a equação acima na forma $(\ln v'(r))' = \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-N}{r}$ e integrar para obter $\ln v'(r) = (1-N)\ln r + c_1 = \ln r^{1-N} + c_1$, ou ainda $v'(r) = c_2 r^{1-N}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. Integrando novamente obtemos $v(r) = \begin{cases} c_3 \ln r + c_4, & \text{se } N = 2, \\ c_3 r^{2-N} + c_4, & \text{se } N \geq 3, \end{cases}$ para constantes $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Com essa motivação, temos a seguinte definição.

Definição 2.1. *Definimos a solução fundamental do Laplaciano por*

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & \text{se } N = 2, \\ \dfrac{1}{N(2-N)\omega_N}|x|^{2-N}, & \text{se } N \geq 3. \end{cases}$$

Observação 2.2. *a) A função Γ é harmônica e ilimitada quando $x \to 0$ (Exercício 6.1.1). Porém, ela é localmente integrável. De fato, para ver isso basta mostrar que a integral em bolas é finita. Considerando o caso 2-dimensional temos que,*

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(0)} \ln|x|\,\mathrm{d}\sigma_x\right) dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^\varepsilon \ln r \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r, \quad \textit{para qualquer } \varepsilon > 0.$$

Portanto,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^2}{4}\left(1 - 2\ln\varepsilon\right), \quad \textit{se } N = 2. \tag{7}$$

No caso de dimensões maiores, podemos proceder de modo análogo para obter

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N(2-N)\omega_N}\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(0)} r^{2-N}\,\mathrm{d}\sigma_x\right) dr = \frac{1}{2-N}\int_0^\varepsilon r\,\mathrm{d}r = \frac{\varepsilon^2}{2(2-N)}, \ \textit{se } N \geq 3. \tag{8}$$

b) É interessante notar que, se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua, a função dada por $x \mapsto \Gamma(x-y)f(y)$ é harmônica em $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{y\}$. Da mesma forma, se $\{y^1, \ldots, y^k\} \subset \mathbb{R}^N$ é uma família finita de pontos, então a função $x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \Gamma(x-y^i)f(y^i)$ é harmônica em $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{y^1, \ldots, y^k\}$.

Suponha que f é tal que possamos fazer a soma na Observação 2.2 (b) sobre todos os pontos de $\mathbb{R}^N$, isto é, que a função chamada de **Potencial Newtoniano** gerado por f, $\omega_f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $\omega_f(x) := (\Gamma * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$, esteja bem definida. Se fosse possível derivar sob o sinal da integral teríamos

$$\Delta\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta_x\Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Contudo, $D^2\Gamma(x)$ se comporta como $|x|^{-N}$ perto da origem, que não é localmente integrável. Portanto, não há como justificar a passagem da derivada para dentro da integral. De fato, a igualdade acima não é correta, conforme podemos ver pelo próximo resultado.

Lema 2.1. *Suponha que $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^N)$. Então o Potencial Newtoniano gerado por f, isto é, $\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$ está bem definido, $\omega_f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ e $\Delta\omega_f = f$.*

Prova. Como $\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, temos que

$$\frac{\omega_f(x+he_i) - \omega_f(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\right)\Gamma(y)\,\mathrm{d}y.$$

O termo entre parênteses acima converge para para $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$, quando $h \to 0$. Além disso, usando a Desigualdade do Valor Médio concluímos que ele é limitado no suporte (compacto) de f. Uma vez que Γ é localmente integrável, podemos passar a igualdade acima ao limite e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\frac{\partial\omega_f}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\Gamma(y)\,\mathrm{d}y = \left(\Gamma * \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x). \tag{9}$$

De maneira análoga, mostra-se que $D^\alpha\omega_f = (\Gamma * D^\alpha f)$, sempre que α é um multi-índice qualquer com ordem $|\alpha|_s \leq 2$. Com isso, concluímos que $\omega_f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$. Para calcular $\Delta\omega_f(x)$ vamos tomar $0 < \varepsilon < 1$ e usar (9) para escrever $\Delta\omega_f(x) = \mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{C}_\varepsilon$, com

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y \ \text{ e } \ \mathcal{C}_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^N \smallsetminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Como Δf é limitado, podemos usar (7) e (8) para estimar

$$|\mathcal{A}_\varepsilon| \le \int_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)\Delta f(x-y)|\mathrm{d}y \le \|\Delta f\|_\infty \int_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)|\,\mathrm{d}y = \|\Delta f\|_\infty \times \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2(1-2\ln\varepsilon)}{4}, & \text{se } N=2,\\ \dfrac{\varepsilon^2}{2(N-2)}, & \text{se } N\ge 3.\end{cases}$$

Usando a regra de L'Hospital no caso $N=2$, concluímos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{A}_\varepsilon = 0$ para todo $N \ge 2$. Para estimar o termo $\mathcal{C}_\varepsilon$, vamos inicialmente usar o Teorema 1.3(d) para obter

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y = \mathcal{D}_\varepsilon + \mathcal{E}_\varepsilon$$

$$\text{com } \mathcal{D}_\varepsilon := \int_{\partial(\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(0))} \Gamma(y)\frac{\partial f}{\partial\eta}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y \ \text{ e } \ \mathcal{E}_\varepsilon := -\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\Gamma(y)\cdot\nabla f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Para estimar $\mathcal{D}_\varepsilon$ podemos usar (7) e (8) e que $\partial(\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)) = \partial B_\varepsilon(0)$, obtendo assim

$$|\mathcal{D}_\varepsilon| \le \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial(\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(0))} |\Gamma(y)|\,\mathrm{d}\sigma_y = \|\nabla f\|_\infty \times \begin{cases} (-\varepsilon\ln\varepsilon), & \text{se } N=2,\\ \dfrac{\varepsilon}{(N-2)}, & \text{se } N\ge 3.\end{cases} \tag{11}$$

Isto mostra que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{D}_\varepsilon = 0$. Usando uma vez mais o Teorema 1.3(d), obtemos $\mathcal{E}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(0)} f(x-y)\Delta\Gamma(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial(\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(0))} f(x-y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(y)\,\mathrm{d}\sigma_y$. Como a função Γ é harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ a primeira integral acima é nula. Com relação à segunda notemos que, como a integral é tomada na fronteira do exterior da bola, o vetor normal exterior é $-y/|y|$. Ademais, usando a definição de Γ, obtemos

$$\Gamma_{x_i} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|y|}\frac{y_{x_i}}{|y|} \quad \text{para } N=2, \quad \text{e} \quad \Gamma_{x_i} = \frac{|y|^{1-N}}{N\omega_N}\frac{y_{x_i}}{|y|} \quad \text{para } N. \quad \text{Logo,}$$

$$\nabla\Gamma(y) = \frac{y}{N\omega_N|y|^N}, \text{ para } N\ge 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(y) = \nabla\Gamma(y)\cdot\eta(y) = \frac{y}{N\omega_N|y|^N}\cdot\left(-\frac{y}{|y|}\right) = \frac{-1}{N\omega_N|y|^{N-1}}. \tag{12}$$

$$\text{Portanto,} \quad \mathcal{E}_\varepsilon = \int_{\partial(\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(0))} f(x-y)\frac{1}{N\omega_N|y|^{N-1}}\,\mathrm{d}\sigma_y = \frac{1}{N\omega_N\varepsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y.$$

Segue então da mudança de variáveis $z = x-y$ e da continuidade de f em x que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{E}_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{N\omega_N\varepsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z)\,\mathrm{d}\sigma_z = f(x). \tag{13}$$

Lembrando que $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{D}_\varepsilon + \mathcal{E}_\varepsilon$ e que $\mathcal{D}_\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, concluímos que $\mathcal{C}_\varepsilon \to f(x)$. Como já havíamos provado que $\mathcal{A}_\varepsilon \to 0$, podemos passar a equação (10) ao limite para concluir que $\Delta\omega_f(x) = f(x)$, o que finaliza a prova do lema. $\square$

Observação 2.3. *O Lema 2.1 pode ser provado com uma exigência muito menor de regularidade para a função f. Por exemplo, uma adaptação da sua prova nos permite concluir que se $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ para algum domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, então $\omega_f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Para formular precisamente esse resultado mais geral, de maneira a conseguir melhor regularidade para ω_f, precisamos introduzir um novo espaço de funções para tratar o problema.*

2.2 Aula 05: Funções Hölder Contínuas, o Método de Perron

Começamos nossa aula relembrando que um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|_E)$ é um **espaço de Banach** quando ele é completo com relação à topologia induzida pela norma. Isso significa dizer que toda sequência de Cauchy $(u_m) \subset E$ converge em E.

Observação 2.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, pode-se mostrar que $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, munido com a norma $\|u\|_0 := \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$, para todo $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, é um espaço de Banach. De uma maneira mais geral, para $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, o conjunto $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ munido da norma $\|u\|_k := \sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_0$, para todo $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ é também um espaço de Banach.*

No que segue vamos introduzir um novo espaço que, em certo sentido, é o espaço correto para trabalhar com o problema de Poisson.

Definição 2.2. *Dado $0 < \gamma \le 1$ e uma função $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, dizemos que u é Hölder contínua com expoente γ se existe uma constante $c > 0$ tal que $|u(x) - u(y)| \le c|x-y|^\gamma, \quad \forall\, x, y \in \Omega$. Para uma tal função definimos o quociente de Hölder por $H_\gamma[u] := \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty$.*

Definição 2.3. *Seja $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ e $0 < \gamma \le 1$. O espaço de Hölder $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\Omega)$ é definido por*

$$\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) : H_\gamma[D^\alpha u] < \infty \text{ para todo multi-índice } |\alpha|_s \le k\}.$$

Definimos ainda $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) : u \in \mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega_0}) \text{ para todo aberto } \Omega_0 \subset\subset \Omega\}$.

Observação 2.5. *O espaço $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\Omega)$ munido da norma $\|u\|_{k,\gamma} := \|u\|_k + \sum_{|\alpha|_s\le k} H_\gamma[D^\alpha u]$ para todo $u \in \mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach (Exercício 6.2.3).*

Voltando ao Potencial Newtoniano ω_f, lembremos que o Lema 2.1 foi provado para funções $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto. Porém, se exigirmos apenas um pouco mais de regularidade que a continuidade de f temos o seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \gamma \le 1$, então o Potencial Newtoniano ω_f está bem definido e satisfaz*

(i) $\omega_f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^{2,\gamma}(\Omega)$; (ii) $\Delta\omega_f(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Observação 2.6. *A prova da Proposição 2.1 segue as mesmas linhas daquela feita para o Lema 2.1. Contudo, são necessárias algumas adaptações para contornar o fato de não existirem as derivadas da função f. Para mais detalhes veja [6, Corolário 1.2 da Seção 1.3] e também [7, Lemma 4.2] ou [15, Teorema 1.1]. Vale observar que, se f for apenas contínua, então ω_f* ***pode não ser de classe*** *$\mathcal{C}^2$ em Ω (Exercício 6.2.4).*

Com a Proposição 2.1 reduzimos o estudo do problema de Poisson $(\mathcal{P})$ ao problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

De fato, se $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ e $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é tal que $\Delta v = 0$ em Ω, $v = g - \omega_f$ em $\partial\Omega$, onde ω_f é o Potencial Newtoniano gerado por f, então a função $u := v + \omega_f$ satisfaz $\Delta u = \Delta v + \Delta\omega_f = f$ em Ω, $u = g - \omega_f + \omega_f = g$ em $\partial\Omega$, ou seja, é solução de $(\mathcal{P})$.

Para tratar da existência de solução para o problema (D) é importante discutirmos o seguinte exemplo, conhecido como exemplo de Zaremba.

Exemplo 2.1. *Suponha que $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ e defina $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ por*

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \partial B_1(0), \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que, apesar de g ser uma função regular, o problema de Dirichlet não possui solução clássica para essa escolha de Ω e g (Exercício 6.2.5). Portanto, a solubilidade do problema (D) não depende somente da regularidade do dado de fronteira g, ela depende também da geometria do domínio Ω.

Vamos introduzir o conceito de regularidade de conjuntos do espaço euclidiano.

Definição 2.4. *Dados $k \in \mathbb{N}$ e um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dizemos que Ω é de classe $\mathcal{C}^k$ se, para cada $x_0 \in \partial\Omega$, existe uma bola $B = B_r(x_0)$ e uma bijeção ψ de B em $A \subset \mathbb{R}^N$ tais que:*
(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^N_+$; *(ii)* $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^N_+$; *(iii)* $\psi \in \mathcal{C}^k(B)$, $\psi^{-1} \in \mathcal{C}^k(A)$,

em que $\mathbb{R}^N_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Dessa forma, o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é de classe $\mathcal{C}^k$ se, e somente se, cada ponto da sua fronteira possui uma vizinhança cuja intersecção com $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função de classe $\mathcal{C}^k$ dependendo de $N-1$ das coordenadas $x_1, \ldots, x_N$.

Observação 2.7. *O problema de Dirichlet pode ser resolvido por vários métodos, cada qual com uma hipótese de regularidade sobre g e Ω. Entre todos os métodos, o que parece fornecer solução clássica com hipóteses mais fracas é o **método das funções sub-harmônicas**, ou **Método de Perron**. Ele fornece solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ para funções g contínuas e domínios Ω de classe $\mathcal{C}^2$. Na verdade, basta que Ω satisfaça a **condição da esfera exterior**, isto é, que para cada $x_0 \in \partial\Omega$ exista uma bola $B_r(y) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\overline{\Omega} \cap \overline{B_r(y)} = \{x_0\}$.*

Enunciamos abaixo um resultado de existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet (D), baseado no Método de Perron, supondo que o conjunto Ω é de classe $\mathcal{C}^2$. A prova de uma versão mais geral pode ser encontrada em [7, Teorema 2.14].

Teorema 2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de classe $\mathcal{C}^2$ e $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, então o problema de Dirichlet $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$ possui uma única solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

Com o auxílio do Teorema 2.1, podemos enunciar e provar o seguinte resultado de existência de solução para o problema de Poisson.

Teorema 2.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^2$, $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

possui exatamente uma solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Prova. Para a existência, é suficiente encontrarmos $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfazendo os problemas

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_1 = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = f & \text{em } \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

pois, nesse caso, a função $u := u_1 + u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é solução de $(\mathcal{P})$. A existência de u_1 é consequência imediata do Teorema 2.1. Para obter u_2 consideramos $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta v = 0$ em Ω, e $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Como $\omega_f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, a existência de uma tal função é novamente garantida pelo Teorema 2.1. Considere agora $u_2 := \omega_f - v$ e observe que $\Delta u_2 = \Delta\omega_f - \Delta v = f$ em Ω, $u_2 = \omega_f - \omega_f = 0$ em $\partial\Omega$, e portanto, o problema possui pelo menos uma solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. A unicidade segue do Teorema 1.6. $\square$

Observação 2.8. *Exigindo mais regularidade em g e Ω, obtemos soluções mais regulares. De fato, se $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \gamma \leq 1$, podemos definir o conceito de abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^{k,\gamma}$ do mesmo modo que fizemos para $\mathcal{C}^k$, considerando agora a regularidade das aplicações ψ e ψ^{-1} como sendo de classe $\mathcal{C}^{k,\gamma}$. Dizemos que uma função $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ definida na fronteira de um aberto Ω de classe $\mathcal{C}^{k,\gamma}$ pertence à $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\partial\Omega)$ quando $g \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^{k,\gamma}(A \cap \partial\mathbb{R}^N_+)$.*

O próximo resultado é devido à Kellog [9] que fornece uma versão do Teorema 2.1 para domínios e dados de fronteira mais regulares. Note que a regularidade da solução encontrada é também maior que aquela garantida pelo Teorema 2.1.

Teorema 2.3. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}$ e $g \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, então o problema de Dirichlet $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$ possui exatamente uma solução em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.*

Observação 2.9. *Com relação ao Teorema 2.3 é importante ressaltar que a mera continuidade de g não implica na existência de derivadas na fronteira. Por exemplo, a função* $u(x_1,x_2) = x_2 \ln\Big((x_1-1)^2+x_2^2\Big)+2(1-x_1)\arctan\left(\dfrac{x_2}{1-x_1}\right)$ *satisfaz* $\Delta u = 0$ *em* $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, *é contínua em* $\overline{B_1(0)}$, *mas* $|\nabla u(x_1,x_2)| \approx |\ln(x_1-1)^2+x_2^2|$ *quando* $(x_1,x_2) \to (1,0)$.

Aplicando o Teorema 2.3 ao invés do Teorema 2.1 obtemos a seguinte versão do Teorema 2.2 para domínios e condições de fronteira mais regulares.

Corolário 2.1. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado de classe* $\mathcal{C}^{2,\gamma}$, $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *e* $g \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, *então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

possui exatamente uma solução em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Prova. Argumentando como na prova do Teorema 2.2, vamos usar o Teorema 2.3 no lugar do Teorema 2.1 e fazer uma pequena adaptação no argumento. De fato, nas condições enunciadas acima, é imediata a obtenção de u_1 satisfazendo (14). Mas, a obtenção de u_2 requer um argumento mais fino, visto que a aplicação direta da Proposição 2.1 nos garante somente que ω_f pertence a $\mathcal{C}^1(\partial\Omega)$, o que não é suficiente para usar o Teorema 2.3 e obter $v \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta v = 0$ em Ω, $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Para contornar tal dificuldade, considere uma bola B tal que $\overline{\Omega} \subset B$. A regularidade de f e do conjunto Ω nos permite estender f para toda a bola B, de modo que a extensão (que denotaremos ainda por f) esteja contida em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{B})$, conforme [7, Lemma 6.37]. Pela Proposição 2.1 temos que $\omega_f \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(B)$. Podemos, então aplicar o Teorema 2.3 para obter $v \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta v = 0$ em Ω, e $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Procedendo como antes temos que $u_2 := \omega_f - v \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é solução do problema $(\mathcal{P})$. A unicidade segue outra vez pelo Princípio do Máximo, Teorema 1.6. □

2.3 Aula 06: A Função de Green

Nessa aula vamos supor que o problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

possui uma solução $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e usar o Teorema da Divergência apropriadamente para obter uma expressão explícita para tal solução. Para isso, introduzimos a definição a seguir.

Definição 2.5. *Definimos a* ***Função de Green*** *associada ao problema de Dirichlet em* Ω *como sendo a função* $\mathcal{G}(x,y) := \Gamma(x-y)+\hbar^x(y)$, *para* $x,\, y \in \Omega$, $x \neq y$, *em que* Γ *é a Solução Fundamental do Laplaciano e a função* $\hbar^x(y)$, *chamada* ***parte regular*** *da função de Green, satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta \hbar^x(y) &= 0, \qquad\qquad y \in \Omega, \\ \hbar^x(y) &= -\Gamma(x-y), \quad y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observação 2.10. *Para cada* $x \in \Omega$ *fixado, a função* $y \mapsto \Gamma(x-y)$ *é regular em* $\partial\Omega$. *Desse modo, se* Ω *é de classe* $\mathcal{C}^2$, *podemos sempre garantir a existência de* $\hbar^x$ *e, portanto, da função de Green. Isso motiva o seguinte resultado.*

Teorema 2.4. *Se* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *é solução do problema de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

e existe a função de Green associada ao problema de Dirichlet em Ω, *então* u *satisfaz a seguinte fórmula de representação*

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta}(x,y)g(y)\,\mathrm{d}\sigma_y. \tag{16}$$

Prova. Fixado um ponto $x \in \Omega$, considere $\varepsilon > 0$ pequeno e defina $\Lambda_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$. Usando o Teorema 1.3(e) obtemos

$$\int_{\Lambda_\varepsilon} (u(y)\Delta\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\Delta u(y))\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Lambda_\varepsilon} \left(u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta}(y) \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Como $\Delta\Gamma(x-y) = 0$ para todo $y \neq x$, segue que

$$-\int_{\Lambda_\varepsilon} \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \mathcal{C}_\varepsilon + \mathcal{D}_\varepsilon + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta}(y) \right) \mathrm{d}\sigma_y \quad (17)$$

em que $\mathcal{C}_\varepsilon := -\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y$, $\mathcal{D}_\varepsilon := \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta}(y)\,\mathrm{d}\sigma_y$. Argumentando como na prova de (13) e (11), respectivamente, mostramos que $\lim_{\varepsilon\to0^+} \mathcal{C}_\varepsilon = -u(x)$, $\lim_{\varepsilon\to0^+} \mathcal{D}_\varepsilon = 0$. Além disso, como $\Lambda_\varepsilon \to \Omega$ quando $\varepsilon \to 0^+$, Γ é localmente integrável e $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\Lambda_\varepsilon} \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0^+$ em (17) obtemos

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta}(y) \right) \mathrm{d}\sigma_y, \quad (18)$$

que é conhecida como **Fórmula de Representação de Green.** Entretanto, como $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$ não é um dado do problema $(\mathcal{P})$, para reescrever u e obter (16), observemos que, por hipótese, $\hbar^x \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ é uma função harmônica em Ω, então podemos usar Teorema 1.3(e) novamente para obter

$$-\int_\Omega \hbar^x \Delta u\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \hbar^x}{\partial\eta} - \hbar^x\frac{\partial u}{\partial\eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Como $\mathcal{G}(x,y) = \Gamma(x-y) + \hbar^x(y)$, somando a equação acima a (18), segue que

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}\Delta u\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\eta} - \mathcal{G}\frac{\partial u}{\partial\eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Como $\mathcal{G} = 0$ em $\partial\Omega$, então obtemos $u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\eta}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma_y$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 2.11. *a) O Teorema 2.4 nos permite resolver o problema (15) desde que exista, e saibamos calcular, a função de Green. De fato, nesse caso basta utilizar a definição de u dada pela fórmula de representação e mostrar que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaz as equações do problema. A dificuldade em tal procedimento reside no fato de que calcular a função de Green não é, em geral, uma tarefa fácil. Porém, isso pode ser feito quando Ω possui algum tipo de simetria. Um caso particular importante é o da bola, onde vale a Fórmula de Poisson, dada pelo seguinte resultado (cf. [7, Teorema 2.6] ou [5, Teorema 15, Seção 2.2]).*

Teorema 2.5. *Seja $r > 0$ e $g : B_r(0) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2 - |x|^2}{N\omega_N r} \displaystyle\int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^N}\,\mathrm{d}\sigma_y, & \text{se } x \in B_r(0), \\ g(x), & \text{se } x \in \partial B_r(0), \end{cases}$$

é tal que $u \in \mathcal{C}^2(B_r(0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_r(0)})$ e $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_r(0), \\ u = g & \text{em } \partial B_r(0). \end{cases}$

b) Algumas propriedades da função de Green e também a sua fórmula explícita quando $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$, podem ser encontradas em [5, Seção 2.2.4]. Citamos ainda [15, Seção 2.2], onde são apresentadas considerações históricas acerca da função de Green, bem como um resultado de existência desta para certas classes de domínios.

3 Operadores Lineares de 2° Ordem

3.1 Aula 07: Princípios do Máximo

A partir de agora, vamos estender os resultados precedentes para o operador linear de 2° ordem dado pela expressão

$$\mathcal{L}u := \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{$\mathcal{L}$}$$

onde $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e os coeficientes a^{ij}, b^i, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções dadas. Além disso, a menos que se diga o contrário, consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um **aberto limitado**. Como para qualquer função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, o Teorema de Schwarz nos assegura que $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$ para todo i, $j \in \{1, \ldots, N\}$, então, daqui por diante, podemos reescrever $\mathcal{L}$ como

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2}\left(a^{ij}(x) + a^{ji}(x)\right) u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

e supor, sem perda de generalidade, que para cada $x \in \Omega$ a matriz

$$A(x) := \begin{bmatrix} a^{11}(x) & \cdots & a^{1N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{N1}(x) & \cdots & a^{NN}(x) \end{bmatrix} \text{ é simétrica.} \tag{19}$$

Definição 3.1. *Dizemos que o operador $\mathcal{L}$ definido em ($\mathcal{L}$) é:*

(i) ***elíptico*** *no ponto $x \in \Omega$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ definida em (19) é positiva, isto é, se $\theta(x)$ denota o menor autovalor de A, então*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta(x)|\xi|^2, \quad \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\};$$

(ii) ***elíptico em*** Ω *se $\theta > 0$ em Ω;*

(iii) ***uniformemente elíptico em*** Ω *se existe $\theta_0 > 0$ tal que $\theta(x) \geq \theta_0$, para todo $x \in \Omega$.*

Exemplo 3.1. *O mais simples operador uniformemente elíptico é o Laplaciano em qualquer domínio Ω. Se considerarmos $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, então o operador $\mathcal{L}u = u_{x_1x_1} + x_1u_{x_2x_2}$ é elíptico, embora não seja uniformemente elíptico. Entretanto, esse mesmo operador, em uma faixa do tipo $(a, b) \times \mathbb{R}$ com $0 < a < b$, é uniformemente elíptico (Justifique!).*

Observação 3.1. *Quando $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico, vale a seguinte desigualdade*

$$\xi A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta_0|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Tomando $\xi = e_i$ como sendo o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^N$, obtemos

$$e_iA(x)e_i = a^{ii}(x) \geq \theta_0|e_i|^2 = \theta_0, \quad i = 1, \ldots, N,\ x \in \Omega. \tag{20}$$

Vamos supor que **os coeficientes** a^{ij}, b^i **e** c **do operador** $\mathcal{L}$ **definido em (**$\mathcal{L}$**) estão em** $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Com isso, temos o seguinte resultado o que é uma versão do item (ii) do Teorema 1.5, e uma generalização do Exercício 6.1.11.

Teorema 3.1. *Seja $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ em Ω. Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

(i) *se* $\mathcal{L}u \geq 0$ *em* Ω, *então* $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$;(ii) *se* $\mathcal{L}u \leq 0$ *em* Ω, *então* $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

Prova. Suponha inicialmente que $\mathcal{L}u > 0$ em Ω e que existe $\widetilde{x} \in \Omega$ tal que $u(\widetilde{x}) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Como $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico, a matriz dos coeficientes $A = A(\widetilde{x})$ é positiva definida e, portanto, existe uma matriz ortogonal, isto é, $O = O_{N\times N}$ tal que $O^{-1} = O^T$ e

$OAO^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$ com $\lambda_i \geq \theta_0 > 0,\ i = 1, \ldots, N$. O termo geral da matriz é dado por

$$\delta_{kl}\lambda_k = \sum_{i=1}^N o_{ki} \sum_{j=1}^N a^{ij} o^T_{jl} = \sum_{i,j=1}^N o_{ki} a^{ij} o_{lj}. \tag{21}$$

Considere agora a nova variável $y := \widetilde{x} + O(x - \widetilde{x})$, de modo que as componentes do vetor y são dadas por $y_k = \widetilde{x}_k + \sum_{j=1}^N o_{kj}(x_j - \widetilde{x}_j)$, $\quad k = 1, \ldots, N$. Uma vez que $O^T = O^{-1}$, vale $x = \widetilde{x} + O^T(y - \widetilde{x})$ e podemos derivar $u(x) = u(\widetilde{x} + O^T(y - \widetilde{x}))$ para obter

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^N u_{y_k} o_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^N u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj},\ \forall\ i,\ j \in \{1, \ldots, N\}. \tag{22}$$

Usando que $\widetilde{x} \in \Omega$ é ponto de máximo, segue que $\nabla u(\widetilde{x}) = 0$ e por (21)-(22), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(\widetilde{x}) &= \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(\widetilde{x}) u_{x_i x_j}(\widetilde{x}) + \sum_{i=1}^N b^i(\widetilde{x}) u_{x_i}(\widetilde{x}) = \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(\widetilde{x}) \sum_{k,l=1}^N u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} \\ &= \sum_{k,l=1}^N u_{y_k y_l} \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(\widetilde{x}) o_{ki} o_{lj} = \sum_{k,l=1}^N u_{y_k y_l} \delta_{kl}\lambda_k = \sum_{k=1}^N u_{y_k y_k}\lambda_k. \end{aligned}$$

Como $D^2 u(\widetilde{x}) \leq 0$, o mesmo raciocínio usado em (20) mostra que $u_{y_k y_k}(\widetilde{x}) \leq 0$, $k = 1, \ldots, N$. Como os números $\lambda_i' s$ são positivos, concluímos que $\mathcal{L}u(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^N v_{y_k y_k}(\widetilde{x})\lambda_k \leq 0$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{L}u > 0$ em Ω. Portanto, função u não pode assumir seu máximo em Ω, isto é, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Para o caso geral $\mathcal{L}u \geq 0$, tome $\gamma \in \mathbb{R}$ arbitrário e $u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon \mathrm{e}^{\gamma x_1}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega.$$

Usando a definição de $\mathcal{L}$, obtemos $\mathcal{L}u_\varepsilon = \mathcal{L}u + \varepsilon\mathcal{L}(\mathrm{e}^\gamma x_1) = \mathcal{L}u + \varepsilon\mathrm{e}^{\gamma x_1}(a^{11}(x)\gamma^2 + b^1(x)\gamma)$. Usando (20), a regularidade dos coeficientes e $\mathcal{L}u \geq 0$, obtemos

$$\mathcal{L}u_\varepsilon \geq \varepsilon\mathrm{e}^{\gamma x_1}(\theta_0\gamma^2 - \|b^1\|_\infty\gamma) > 0, \quad \text{em } \Omega,$$

desde que o número γ seja tal que $\gamma > \|b^1\|_\infty/\theta_0$. Assim, podemos usar a primeira parte da prova para concluir que $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$. Mas $u_\varepsilon \geq u$, e portanto,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} \mathrm{e}^{\gamma x_1}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, concluímos que $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u$, pois $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$, portanto, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Para provar o item (ii) basta usar o item (i) com a função $-u$. $\square$

Observação 3.2. *A conclusão do Teorema* 3.1 *pode não ser válida nas situações abaixo:*

1. *Se* Ω *é ilimitado, pois basta considerar* $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi)$, $\mathcal{L}u = \Delta u$ *e* $u(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$.

2. *Se $c \not\equiv 0$, bastando para isso considerar $\Omega = (0,2\pi) \times (0,2\pi)$, $\mathcal{L}u = \Delta u + 2u$ e $u(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.*

3. *Se os coeficientes do operador são ilimitados, bastando para isso considerar $\Omega = (-1,1)$, $\mathcal{L}u = u'' + b(x)u'$, com $b(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ e a função $u(x) = 1 - x^4$.*

Além disso, uma análise cuidadosa da prova mostra que teorema permanece válido supondo somente que $\mathcal{L}$ é elíptico e que, para algum $i \in \{1, \ldots, N\}$, a função $|b^i|/a^{ii}$ permanece limitada em qualquer compacto contido em Ω (Justifique!).

Consideramos agora uma versão do Teorema 3.1 para o caso em que o termo de ordem zero c é não-positivo. Lembremos que se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então a **parte positiva** u^+ e a **parte negativa** u^- da função u são definidas por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}, \qquad \text{para } x \in \Omega.$$

Observe que essas duas funções são não-Negativas e vale que $|u| = u^+ + u^-$ e $u = u^+ - u^-$.

Teorema 3.2 (Princípio do Máximo Fraco)**.** *Seja $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ em Ω. Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

(i) *se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω, então $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \leq \max\limits_{\partial\Omega} u^+$;*

(ii) *se $\mathcal{L}u \leq 0$ em Ω, então $\min\limits_{\overline{\Omega}} u \geq -\max\limits_{\partial\Omega} u^-$;*

(iii) *se $\mathcal{L}u = 0$ em Ω, então $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| = \max\limits_{\partial\Omega} |u|$.*

Prova. (i) Se o conjunto $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ for vazio não há nada a fazer pois, nesse caso, $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e portanto $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \leq 0 = \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. Logo, podemos supor que $\Omega^+ \neq \varnothing$. A continuidade de u nos assegura que o conjunto Ω^+ é aberto em Ω, e portanto aberto em $\mathbb{R}^N$. Desse modo, como $c \leq 0$ em Ω, $\mathcal{K}u := \mathcal{L}u - c(x)u \geq 0$ em Ω^+. Note que

$$\mathcal{K}u = \mathcal{L}u - c(x)u = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i}$$

e que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega^+})$. Segue então do Teorema 3.1(i), aplicado ao operador $\mathcal{K}$, que $\max\limits_{\overline{\Omega^+}} u = \max\limits_{\partial\Omega^+} u$. Uma vez que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega^+} \cup \overline{\Omega \setminus \Omega^+}$ e $u \leq 0$ nesse último conjunto, segue que $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\overline{\Omega^+}} u = \max\limits_{\partial\Omega^+} u$. É suficiente então mostrar que $\max\limits_{\partial\Omega^+} u \leq \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. Para tanto, considere $x_0 \in \partial\Omega^+$ tal que $u(x_0) = \max\limits_{\partial\Omega^+} u$. A continuidade de u e a definição de Ω^+ implicam que $u(x_0) \geq 0$. Se $u(x_0) = 0$ então $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega^+} u = 0$, o que implicaria $\Omega^+ = \varnothing$. Logo, $u(x_0) > 0$ e podemos usar o fato de Ω^+ ser aberto em Ω para concluir que $x_0 \in \partial\Omega$. De fato, se não fosse assim, então u seria positiva em toda uma bola $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega^+$, contrariando o fato de que $x_0 \in \partial\Omega^+$. Daí, $\max\limits_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) = u^+(x_0) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. Com isso temos o item (i). O item (ii) segue de (i), basta notar que se $\mathcal{L}u \leq 0$, então $\mathcal{L}(-u) \geq 0$. Daí, $-\min\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max\limits_{\partial\Omega}(-u)^+ = \max\limits_{\partial\Omega} u^-$, pois $(-u)^+ = \max\{-u, 0\} = u^-$. Por outro lado, para provar (iii), tomemos $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|u(x_0)| = \max\limits_{\overline{\Omega}} |u|$ e consideremos dois casos:

Caso 1. $u(x_0) \geq 0$: Usando o item (i) e a definição de u^+ temos

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Caso 2. $u(x_0) < 0$: Usando agora o item (ii) e a definição de u^- obtemos

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = -\min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^- \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Segue então que $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max\limits_{\partial\Omega} |u|$. Como a desigualdade reversa é trivialmente satisfeita, o teorema está provado. $\square$

3.2 Aula 08: O Lema de Hopf e O Princípio do Máximo Forte

Começamos nossa aula recordando que os princípios de máximos são úteis para obter resultados de **unicidade de solução**, bem como **princípios de comparação**. Como exemplo, temos os dois resultados abaixo, cujas provas serão deixadas como exercício.

Teorema 3.3. *Se $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$, então o problema*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.4 (Princípio de Comparação)**.** *Seja $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Nosso objetivo agora é estabelecer uma versão do item (i) do Teorema 1.5 para o operador $\mathcal{L}$. Vamos utilizar um importante resultado que provaremos a seguir.

Lema 3.1 (Lema de Hopf)**.** *Suponha que $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico e $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω, com $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

(i) *u é contínua em x_0;*

(ii) *$u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$;*

(iii) *existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$.*

Então, caso uma das hipóteses abaixo se verifique:

(a) $c \equiv 0$ em B; *(b) $c \leq 0$ em B e $u(x_0) \geq 0$,*

quando existe, a derivada normal exterior em x_0 satisfaz $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$.

Observação 3.3. *Se $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaz (i)$-$(iii) e a derivada normal existe, é sempre verdade que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{u(x_0 + h\eta) - u(x_0)}{h} \geq 0$, independente do sinal de $\mathcal{L}u$. A informação adicional dada pelo lema é, de fato, a desigualdade estrita.*

Prova do Lema 3.1. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \in \mathcal{C}(\overline{B})$ e que $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \overline{B} \setminus \{x_0\}$. De fato, se não for esse o caso, é suficiente tomar uma nova bola $B' \subset B$ que é internamente tangente à B no ponto x_0. Além disso, conforme veremos posteriormente, podemos também supor que $B = B_r(0)$. Feitas tais considerações, vamos assumir inicialmente a hipótese (b) e considerar, para $\gamma > 0$ a ser determinado, a função $v(x) := \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} - \mathrm{e}^{-\gamma r^2}$, $\quad x \in B$. Para cada $i, j = 1, \ldots, N$, temos que $v_{x_i} = -2\gamma x_i \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}$ e $v_{x_i x_j} = \begin{cases} 4\gamma^2 x_i x_j \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i \neq j \\ 4\gamma^2 x_i^2 \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} - 2\gamma \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i = j \end{cases} = (4\gamma^2 x_i x_j - 2\gamma\delta_{ij})\mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}$, em que $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Substituindo no operador $\mathcal{L}$, podemos calcular

$$\mathcal{L}v(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} \left(\sum_{i,j=1}^{N} \left(4\gamma^2 a^{ij}(x) x_i x_j - 2\gamma \delta_{ij} a^{ij}(x)\right) - 2\gamma \sum_{i=1}^{N} (b^i(x) x_i) + c(x) \right) - c(x)\mathrm{e}^{-\gamma r^2}.$$

Usando as hipóteses sobre os coeficientes de $\mathcal{L}$, obtemos c_1, $c_2 \geq 0$ tais que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) x_i x_j \geq \theta_0 |x|^2, \; \sum_{i=1}^{N} b^i(x) x_i \leq |x| \sum_{i=1}^{N} \|b^i\|_\infty \leq c_1 \text{ e } \sum_{i,j=1}^{N} \delta_{ij} a^{ij}(x) \leq \sum_{i,j=1}^{N} \|a^{ij}\|_\infty = c_2.$$

Estas estimativas e $c \leq 0$ implicam que $\mathcal{L}v(x) \geq \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}\left(4\gamma^2\theta_0|x|^2 - 2\gamma(c_1+c_2) - \|c\|_\infty\right)$. Desse modo, fazendo $c_3 := c_1+c_2$ e denotando $A_r := B_r(0)\setminus B_{r/2}(0)$ temos que, para todo $x \in A_r$, vale $\mathcal{L}v(x) \geq \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}\left(4\gamma^2\theta_0(r/2)^2 - 2\gamma c_3 - \|c\|_\infty\right)$. Escolhendo $\gamma > 0$ grande de modo que o termo entre parênteses acima seja positivo, concluímos que $\mathcal{L}v \geq 0$ em A_r. Uma vez que x_0 é um ponto de máximo estrito de u e a função v é positiva e contínua no compacto $\partial B_{r/2}(0)$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ pequeno de tal modo que $u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x),\ x \in \partial B_{r/2}(0)$. Note ainda que a desigualdade acima permanece válida em $\partial B_r(0)$ pois, nesse conjunto, a função v se anula. Desse modo, a função $w(x) = u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)$ é tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = \mathcal{L}u + \varepsilon\mathcal{L}v - c(x)u(x_0) \geq 0, & \text{em } A_r, \\ w \leq 0, & \text{em } \partial A_r. \end{cases} \tag{23}$$

Segue então do Princípio de Comparação, Teorema 3.4, que $w \leq 0$ em A_r. Observe agora que, como $x_0 \in \partial B$, temos que $v(x_0) = 0$. Logo $w(x_0) = 0$ e, portanto, x_0 é um ponto de máximo de w em $\overline{A_r}$. Supondo que exista a derivada normal de u no ponto x_0, pela Observação 3.3, devemos ter $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) \geq 0$, o que implica que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \quad \geq \quad -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = -\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\left(\frac{x_0}{r}\right) = -\varepsilon\left(-2\gamma x_0\mathrm{e}^{-\gamma|x_0|^2}\right)\cdot\left(\frac{x_0}{r}\right) = 2\gamma\varepsilon\frac{|x_0|^2}{r}\mathrm{e}^{-\gamma|x_0|^2} > 0.$$

Isso estabelece a veracidade do lema sob a hipótese (b) no caso em que a bola B está centrada na origem. Para o caso geral em que $B = B_r(y)$, basta considerar $v(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x-y|^2} - \mathrm{e}^{-\gamma r^2}$ para $x \in B_r(y)$ e proceder como acima. A prova do lema sob a hipótese (a) pode ser feita repetindo os mesmos passos acima com $c \equiv 0$ em vez de $c \leq 0$. (Exercício 6.3.6). □

Observação 3.4. *Sob as hipóteses do Lema de Hopf, mesmo quando não existe a derivada normal no ponto x_0, a prova nos mostra que, para toda direção exterior ν tal que $\nu\cdot\eta(x_0) > 0$, vale $\liminf\limits_{h\to 0^-}\dfrac{u(x_0+h\nu)-u(x_0)}{h} > 0$, pois $-\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\nu > 0$, já que $-\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\eta(x_0) > 0$.*

Agora podemos aplicar o Lema de Hopf para provar o Princípio do Máximo Forte.

Teorema 3.5 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto conexo, $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Então*

(i) *se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω e u atinge máximo em Ω, então u é constante em Ω;*

(ii) *se $\mathcal{L}u \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo em Ω, então u é constante em Ω.*

No caso em que $c \leq 0$ vale o seguinte:

(iii) *se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω e u atinge máximo não-Negativo em Ω, então u é constante em Ω;*

(iv) *se $\mathcal{L}u \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo não-positivo em Ω, então u é constante em Ω.*

Prova. (i) Suponha que $\mathcal{L}u \geq 0$ e que u atinge máximo em Ω. Seja $\mathcal{M} := \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, $\Omega_{\mathcal{M}} := \{x \in \Omega : u(x) = \mathcal{M}\} \neq \varnothing$ e suponha, por contradição, que $\Sigma \neq \varnothing$, em que $\Sigma := \Omega \setminus \Omega_{\mathcal{M}} = \{x \in \Omega : u(x) < \mathcal{M}\}$. Como existe $x_0 \in \Omega$ com $u(x_0) = \mathcal{M}$, pela continuidade de u, existe $y \in \Sigma$ tal que $\operatorname{dist}(y, \Omega_{\mathcal{M}}) < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$. Considere $r > 0$ o raio da maior bola $B = B_r(y)$ tal que $B \subset \Sigma$. Note que podemos escolher y de forma que $r = \operatorname{dist}(y, x_0)$ (Exercício 6.3.8). Por construção, $x_0 \in \partial B \cap \Omega_{\mathcal{M}}$. Uma vez que $x_0 \in \Omega$ é um ponto de máximo de u, temos $\nabla u(x_0) = 0$ e, portanto, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \nabla u(x_0)\cdot\eta(x_0) = 0$. Por outro lado, segue do Lema de Hopf, com a hipótese (a), que a derivada normal acima deve ser positiva. Esta contradição mostra que $\Omega_{\mathcal{M}} = \Omega$ e, portanto, $u \equiv \mathcal{M}$ em Ω. A prova do item (ii) segue de (i) aplicado a função $-u$. No caso em que $c \leq 0$ em Ω a prova é análoga à apresentada acima utilizando, porém, a hipótese (b) do Lema de Hopf. □

Observação 3.5. *Note que o teorema acima vale para* ***domínios ilimitados.*** *A elipticidade uniforme e a limitação dos coeficientes não é essencial. É suficiente supor que as funções* $\sum_{i,j=1}^{N} \frac{a^{ij}(x)}{\theta(x)}$, $\sum_{i=1}^{N} \frac{b^i(x)}{\theta(x)}$, $\frac{c(x)}{\theta(x)}$ *são limitadas em todo compacto contido em* Ω.

Em seguida provamos um princípio do máximo para $\mathcal{L}$ sem restrições no sinal de $c(x)$.

Teorema 3.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto conexo,* $\mathcal{L}$ *um operador uniformemente elíptico e suponha que existe* $w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $w > 0$ *em* Ω *e* $\mathcal{L}w \leq 0$ *em* Ω. *Dada* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, *temos que*

(i) *se* $\mathcal{L}u \geq 0$ *e* $\frac{u}{w}$ *assume máximo não-Negativo em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *é constante em* Ω.

(ii) *se* $\mathcal{L}u \leq 0$ *e* $\frac{u}{w}$ *assume mínimo não-positivo em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *é constante em* Ω.

Prova. Denotando $v = \frac{u}{w}$ e supondo $\mathcal{L}u \geq 0$, um cálculo direto (Verifique!) mostra que

$$\widetilde{\mathcal{L}}v = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{B}^i(x) v_{x_i} + \widetilde{C}v = \frac{\mathcal{L}u}{w} - \frac{u}{w^2}\mathcal{L}w + \frac{u}{w^2}\mathcal{L}w \geq 0 \quad \text{em } \Omega,$$

com $\widetilde{B}^i(x) := b^i(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{2}{w} a^{ij}(x) w_{x_j}$, para cada $i = 1, \ldots, N$ e $\widetilde{C} = \frac{\mathcal{L}w}{w} \leq 0$. Com isso, o caso (i) segue do Teorema 3.5 (iii). Para o caso (ii), basta aplicar o Teorema 3.5 (iv). □

A aplicabilidade do Teorema 3.6 depende de podermos encontrar uma função w como no enunciado do teorema. No que segue exibimos uma classe de domínios para os quais essa função pode ser construída facilmente.

Teorema 3.7. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto satisfazendo* $|\langle x - y, e\rangle| < d$, $\forall\, x,\, y \in \Omega$, *para algum* $e \in \mathbb{R}^N$ *satisfazendo* $|e| = 1$ *e* $\mathcal{L}$ *um operador uniformemente elíptico em* Ω. *Então existe* $d_0 = d_0(N, \theta_0, \|b^i\|_\infty, \|c^+\|_\infty) > 0$ *tal que o Teorema 3.6 é aplicável se* $d \leq d_0$.

Prova. Vamos exibir uma função w satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.6. Para simplificar a notação vamos supor que $e = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ e que $\Omega \subset (0, d) \times \mathbb{R}^{N-1}$. Considerando $\gamma > 0$ a ser escolhido posteriormente, definimos $w(x) := \mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}$, $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$. Observe inicialmente que $w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Além disso, como para todo $x \in \Omega$ vale $0 < x_1 < d$, temos que $w > 0$ em Ω. Note que $w_{x_1} = -\gamma \mathrm{e}^{\gamma x_1}$, $w_{x_1 x_1} = -\gamma^2 \mathrm{e}^{\gamma x_1}$ e as demais derivadas de ordem 1 e 2 são nulas. Sendo assim, usando novamente que $0 < x_1 < d$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w &= -(a^{11}(x)\gamma^2 + \gamma b^1(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1} + (c^+(x) - c^-(x))(\mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}) \\ &\leq -(a^{11}(x)\gamma^2 + \gamma b^1(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1} + c^+(x)\mathrm{e}^{\gamma d}. \end{aligned}$$

Denotando $\mathcal{M} := \max\{\|b^1\|_\infty, \|c^+\|_\infty\}$ e usando (20), obtemos então

$$\mathcal{L}w \leq -\theta_0 \gamma^2 \mathrm{e}^{\gamma x_1} + \|b^1\|_\infty \gamma \mathrm{e}^{\gamma x_1} + \|c^+\|_\infty \mathrm{e}^{\gamma d} \leq -(\theta_0\gamma^2 - \mathcal{M}\gamma)\mathrm{e}^{\gamma x_1} + \mathcal{M}\mathrm{e}^{\gamma d}.$$

Escolhendo $\gamma > 0$ grande o suficiente de modo que $\theta_0\gamma^2 - \mathcal{M}\gamma > 2\mathcal{M}$, concluímos que

$$\mathcal{L}w \leq -2\mathcal{M}\mathrm{e}^{\gamma x_1} + \mathcal{M}\mathrm{e}^{\gamma d} \leq \mathcal{M}(-2 + \mathrm{e}^{\gamma d})$$

de sorte que $\mathcal{L}w \leq 0$ em Ω, sempre que $0 < d \leq d_0 := \ln(2)/\gamma$. □

Apresentamos agora um princípio de comparação devido a Varadhan, [8, Teorema 2.32], que independe do sinal de $c(x)$, mas que, por outro lado, exige que Ω tenha volume pequeno.

Teorema 3.8. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *em aberto,* $\mathcal{L}$ *uniformemente elíptico em* Ω *e* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *tal que* $\mathcal{L}u \geq 0$ *em* Ω *e* $u \leq 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então existe* $\delta = \delta(N, \|b^i\|_\infty, \|c\|_\infty, \theta_0, \mathrm{diam}(\Omega)) > 0$ *tal que, se o volume de* Ω *é menor que* δ, *então* $u \leq 0$ *em* Ω.

3.3 Aula 09: O Princípio da Continuação

A partir de agora vamos discutir a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, $\mathcal{L}$ é um operador diferencial de 2° ordem da forma

$$\mathcal{L}u := \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

com os coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. O Corolário 2.1 nos assegura que, sob as condições acima e no caso em que $\mathcal{L} = \Delta$, o problema sempre possui solução em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Estamos interessados em obter um resultado análogo para o caso em que $\mathcal{L}$ tem a forma acima.

Observação 3.6. *Sem perda de generalidade, podemos considerar $g \equiv 0$ na formulação do problema $(\mathcal{P})$. Sendo assim, definindo*

$$\mathcal{X} := \left\{u \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) : u \equiv 0 \ \text{ em } \partial\Omega\right\}, \quad \mathcal{Y} := \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \tag{24}$$

a solubilidade do problema $(\mathcal{P})$ é equivalente a mostrar que $\mathcal{L} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é sobrejetivo. De fato, supondo que o problema $\mathcal{L}v = \widetilde{f}$ em Ω, $v = 0$ em $\partial\Omega$, tenha solução de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ para toda $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, uma vez que o dado de fronteira g e o conjunto Ω são de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}$, podemos estender g para todo $\overline{\Omega}$ com a sua extensão, que denotaremos ainda por g, sendo de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ (Confira [7, Lemma 6.38]). Sendo então, $v \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ a solução do problema em questão com $\widetilde{f} := f - \mathcal{L}g \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, temos que a função $u := v + g$ satisfaz $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v + \mathcal{L}g = f$ em Ω, $u = v + g = g$ em $\partial\Omega$, sendo, portanto, solução de $(\mathcal{P})$.

Vamos começar nossa aula provando o seguinte resultado a respeito do operador $\mathcal{L}$.

Proposição 3.1. *Se $u \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $\mathcal{L}u \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e o operador $\mathcal{L} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ está bem definido, e além disso, é contínuo.*

Prova. Tendo em vista a definição de $\mathcal{L}$, basta verificar que se $v, w \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, então o produto $vw \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Dados $x, y \in \Omega$, com $x \neq y$, observe que

$$\begin{aligned}\frac{|v(x)w(x)-v(y)w(y)|}{|x-y|^\gamma} &= \frac{|v(x)w(x) - v(x)w(y) + v(x)w(y) - v(y)w(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq |v(x)|\frac{|w(x) - w(y)|}{|x-y|^\gamma} + |w(y)|\frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \leq \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v].\end{aligned}$$

Tomando o supremo para $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, obtemos $H_\gamma[vw] \leq \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v] < \infty$, e, portanto, $vw \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Além disso, obtemos

$$\begin{aligned}\|vw\|_{0,\gamma} &= \|vw\|_0 + H_\gamma[vw] \leq \|v\|_0 \|w\|_0 + \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v] \\ &\leq (\|v\|_0 + H_\gamma[v])(\|w\|_0 + H_\gamma[w]) = \|v\|_{0,\gamma} \|w\|_{0,\gamma}. \end{aligned} \tag{25}$$

Afirmamos agora que o operador $\mathcal{L}$, além de bem definido, é também contínuo. Para isso, como $\mathcal{L}$ é linear, considere $(u_m) \subset \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, tal que $u_m \to 0$ em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. A estimativa (25) nos fornece

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}u_m\|_{0,\gamma} &\leq \sum_{i,j=1}^{N} \left\|a^{ij}(u_m)_{x_ix_j}\right\|_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^{N} \left\|b^i(u_m)_{x_i}\right\|_{0,\gamma} + \|cu_m\|_{0,\gamma} \\ &\leq c_1 \left(\sum_{i,j=1}^{N} \|(u_m)_{x_ix_j}\|_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^{N} \|(u_m)_{x_i}\|_{0,\gamma} + \|u_m\|_{0,\gamma} \right),\end{aligned}$$

em que $c_1 := \max\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma}\}$. Uma vez que $\|D^\alpha(u_m)\|_{0,\gamma} \to 0$, para todo multi-índice α com $|\alpha|_s \leq 2$, segue da expressão acima que $\mathcal{L}u_m \to 0 = \mathcal{L}0$ em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Dessa forma, se $u_m \to u$ em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $u_m - u \to 0$, e concluímos que $\mathcal{L}(u_m - u) \to 0$, isto é, $\mathcal{L}u_m \to \mathcal{L}u$ em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e o operador $\mathcal{L}$ é contínuo. $\square$

Observação 3.7. *Conforme a Observação 3.6, resolver o problema $(\mathcal{P})$ é equivalente a mostrar a sobrejetividade do operador linear e contínuo correspondente $\mathcal{L} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. A fim de provar tal sobrejetividade, vamos considerar a família de problemas*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_t u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{onde } \mathcal{L}_t := (1-t)\mathcal{L} + t\Delta,\ t \in [0,1],$$

*e usar um resultado abstrato chamado **Princípio da Continuação** para mostrar que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ é sobrejetivo se, e somente se, $\mathcal{L}_1 = \Delta$ é sobrejetivo. Dessa forma, o resultado de existência de solução para $(\mathcal{P})$ será uma consequência direta do Corolário 2.1 que nos dá a sobrejetividade de Δ.*

Definição 3.2. *Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais normados e $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma aplicação linear, então dizemos que T é* limitada *se*

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}} < \infty.$$

Além disso, T é limitada se, e somente se, T é contínua.

Teorema 3.9 (Princípio da Continuação)**.** *Seja $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ um espaço de Banach, $\mathcal{Y}$ um espaço vetorial normado e $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operadores lineares limitados. Para $t \in [0,1]$, considere o operador*

$$\mathcal{L}_t u := (1-t)\mathcal{L}_0 u + t\mathcal{L}_1 u, \quad u \in \mathcal{X}. \tag{26}$$

Suponha que existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leq c\,\|\mathcal{L}_t u\|_{\mathcal{Y}}, \quad \forall\, u \in \mathcal{X},\, t \in [0,1]. \tag{27}$$

Então $\mathcal{L}_0$ é sobrejetivo se, e somente se, $\mathcal{L}_1$ é sobrejetivo.

Observação 3.8. *Se o operador linear $\mathcal{L} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é tal que existe $c > 0$ com $\|x\|_{\mathcal{X}} \leq c\,\|\mathcal{L}x\|_{Y}$, para todo $x \in \mathcal{X}$, então é injetivo. Nesse caso, podemos considerar o operador inverso $\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{L}(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$, que também é linear. Além disso, para todo $y = \mathcal{L}x \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ vale $\|\mathcal{L}^{-1}y\|_{\mathcal{X}} \leq c\,\|y\|_{\mathcal{Y}}$, isto é, $\mathcal{L}^{-1}$ também é limitado. Assim, a condição (27) no Teorema 3.9 é equivalente a dizer que $\left\|\mathcal{L}_t^{-1}\right\|$ é uniformemente limitado para $t \in [0,1]$.*

Para provar o Teorema 3.9 vamos usar o resultado abaixo (Exercício 6.3.20).

Teorema 3.10 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico completo e $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ uma contração, isto é, existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$d(\mathcal{T}x_1, \mathcal{T}x_2) \leq \theta d(x_1, x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{X}.$$

Então $\mathcal{T}$ possui exatamente um ponto fixo, isto é, um elemento $x \in X$ tal que $\mathcal{T}x = x$.

Prova do Teorema 3.9. Suponha que $\mathcal{L}_s$ é sobrejetivo para algum $s \in [0,1]$. Dado $t \in [0,1]$, observe que para cada $y \in \mathcal{Y}$, $\mathcal{L}_t x = y \iff \mathcal{L}_s x = y + (\mathcal{L}_s - \mathcal{L}_t)(x)$. Como pela Observação 3.8 o operador $\mathcal{L}_s^{-1}$ está bem definido, sabemos que $\mathcal{L}_t$ é sobrejetivo se, e somente se, para cada $y \in \mathcal{Y}$, existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{L}_t x = y$, o que equivale a

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{L}_s^{-1}[y + (\mathcal{L}_s - \mathcal{L}_t)(x)] = \mathcal{L}_s^{-1}y + \mathcal{L}_s^{-1}[(\mathcal{L}_s - \mathcal{L}_t)(x)] \\ &= \mathcal{L}_s^{-1}y + \mathcal{L}_s^{-1}[(1-s)\mathcal{L}_0 x + s\mathcal{L}_1 x - (1-t)\mathcal{L}_0 x - t\mathcal{L}_1 x] \\ &= \mathcal{L}_s^{-1}y + \mathcal{L}_s^{-1}[(t-s)\mathcal{L}_0 x - (t-s)\mathcal{L}_1 x] \\ &= \mathcal{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathcal{L}_s^{-1}[(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)(x)] \end{aligned}$$

Assim, dado $y \in \mathcal{Y}$, se definirmos $\mathcal{T}_y : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ por $\mathcal{T}_y x := \mathcal{L}_s^{-1} y + (t-s)\mathcal{L}_s^{-1}[(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)(x)]$, resolver a equação $\mathcal{L}_t x = y$ é equivalente a obter um ponto fixo para $\mathcal{T}_y$.

A ideia agora é mostrar que, se $|t-s|$ é pequeno, então $\mathcal{T}_y$ é uma contração e podemos aplicar o Teorema 3.10. Para tanto, considere $x_1,\, x_2 \in \mathcal{X}$ e note que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_y x_1 - \mathcal{T}_y x_2\|_{\mathcal{X}} &= \left\|(t-s)\mathcal{L}_s^{-1}[(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)(x_1 - x_2)]\right\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq |t-s| \left\|\mathcal{L}_s^{-1}[(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)(x_1 - x_2)]\right\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Segundo a Observação 3.8, a condição (27) implica que $\|\mathcal{L}_s^{-1} x_0\| \leq c\|x_0\|$, para qualquer $x_0 \in \mathcal{X}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_y x_1 - \mathcal{T}_y x_2\|_{\mathcal{X}} &\leq c|t-s| \,\|(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)(x_1 - x_2)\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq c|t-s| \left(\|\mathcal{L}_0(x_1 - x_2)\|_{\mathcal{X}} + \|\mathcal{L}_1(x_1 - x_2)\|_{\mathcal{X}}\right) \\ &\leq c|t-s| \left(\|\mathcal{L}_0\| + \|\mathcal{L}_1\|\right) \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{T}_y$ é uma contração desde que $|t-s| < \delta := \dfrac{1}{c(\|\mathcal{L}_0\| + \|\mathcal{L}_1\|)}$, onde estamos supondo, sem perda de generalidade, que $\mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}_1$. Segue agora do Teorema 3.10 que $\mathcal{T}_y$ possui exatamente um ponto fixo $x \in \mathcal{X}$ e como y é arbitrário, $\mathcal{L}_t$ é sobrejetivo para todo $t \in [0,1]$ tal que $|t-s| < \delta$. Note agora que podemos cobrir $[0,1]$ com intervalos da forma $(s-\delta, s+\delta)$ quando fazemos s percorrer o intervalo $[0,1]$. A conclusão do teorema segue então por iteração, visto que $\delta > 0$ é uma constante que não depende de t. $\square$

Observação 3.9. *A aplicabilidade do Teorema* 3.9 *ao problema* $(\mathcal{P})$ *depende da existência de uma constante* $c > 0$ *satisfazendo (*27*). A obtenção dessa constante é uma parte delicada no estudo do problema* $(\mathcal{P})$ *e depende de algumas propriedades dos espaços de Hölder, veja a Definição* 2.3*. Portanto, é necessário estudar com mais detalhes esses espaços.*

Definição 3.3. *Sejam* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *dois espaços vetoriais normados com* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$*. Dizemos que* $\mathcal{X}$ *está* ***imerso continuamente*** *em* $\mathcal{Y}$ *se existe* $\mathcal{C} > 0$ *tal que* $\|x\|_{\mathcal{Y}} \leq \mathcal{C}\,\|x\|_{\mathcal{X}}$, $\forall\, x \in \mathcal{X}$*. Nesse caso, escrevemos* $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$*.*

Observação 3.10. *Dizer que a imersão de* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ *em* $\mathcal{Y}$ *é contínua é equivalente a dizer que a aplicação inclusão* $i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *dada por* $i(x) = x$, $x \in \mathcal{X}$*, é contínua. Um exemplo simples de imersão ocorre no espaços das funções diferenciáveis. Se* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, então* $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k}(\overline{\Omega})$*, visto que, para toda função* $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega})$*, vale*

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u\|_0 \leq \sum_{|\alpha|_s \leq k+1} \|D^\alpha u\|_0 = \|u\|_{k+1}.$$

3.4 Aula 10: Espaços de Hölder, Imersões Contínuas e Compactas

Iniciamos essa aula generalizando o exemplo da Observação 3.10 e fornecendo também uma hierarquia entre os espaços de Hölder.

Teorema 3.11. *Se* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *e* $0 < \nu < \gamma \leq 1$*, então*

(1) $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k}(\overline{\Omega})$; (2) $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k}(\overline{\Omega})$; (3) $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Além disso, se Ω *é convexo, então*

(4) $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,1}(\overline{\Omega})$; (5) $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Observação 3.11. *A hipótese de convexidade em (4) e (5) não pode ser retirada, pois existem funções* $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *que não estão em* $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$*. Como exemplo, considere*

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt{|x|},\, x^2 + y^2 < 1\} \quad \text{e} \quad u(x,y) := \begin{cases} (sgn\, x) y^\beta, & se\ y > 0, \\ 0, & se\ y \leq 0, \end{cases}$$

em que $1 < \beta < 2$ *e* $sgn(\cdot)$ *é a função sinal. Então* $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *mas, para todo* $\gamma > 0$ *satisfazendo que* $\beta/2 < \gamma < 1$*, pode-se mostrar que* $u \notin \mathcal{C}^{0\,\gamma}(\overline{\Omega})$*. Em particular, pelo item (3), temos que* $u \notin \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$*.*

Prova. O item (1) segue da Observação 3.10. Para (2), basta notar que

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_0 \le \|u\|_k + \sum_{|\alpha|_s \le k} H_\gamma\left[D^\alpha u\right] = \|u\|_{k,\gamma},$$

para toda $u \in \mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$. Para verificar (3), vamos fixar $u \in \mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ e α um multi-índice com $|\alpha|_s \le k$. Dados $x, y \in \Omega$ com $0 < |x-y| < 1$, temos que

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} \le \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma} \le H_\gamma[D^\alpha u].$$

Por outro lado, se $|x-y| \ge 1$, então

$$\begin{aligned} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} &\le |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \le |D^\alpha u(x)| + |D^\alpha u(y)| \\ &\le \|D^\alpha u\|_0 + \|D^\alpha u\|_0 = 2\,\|D^\alpha u\|_0\,. \end{aligned}$$

Assim, $H_\nu[D^\alpha u] \le 2\,\|D^\alpha u\|_0 + H_\gamma[D^\alpha u]$, de onde se conclui que

$$\begin{aligned} \|u\|_{k,\nu} &= \sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_0 + \sum_{|\alpha|_s \le k} H_\nu[D^\alpha u] \le \sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_0 + \sum_{|\alpha|_s \le k} H_\gamma[D^\alpha u] + 2\sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_0 \\ &\le \|u\|_{k,\gamma} + 2\sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_0 + 2\sum_{|\alpha|_s \le k} H_\gamma[D^\alpha u] = 3\,\|u\|_{k,\gamma}\,, \end{aligned}$$

e, portanto, (3) se verifica. Suponha agora que Ω é convexo e considere $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega})$. Dados $x, y \in \Omega$ com $x \ne y$, e um multi-índice α tal que $|\alpha|_s \le k$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para escrever $D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) = \nabla D^\alpha u(z) \cdot (x-y)$ para algum $z \in \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$. Desse modo

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|} \le |\nabla D^\alpha u(z)| \le c\,\|u\|_{k+1} \Longrightarrow \|u\|_{k,1} = \|u\|_k + \sum_{|\alpha|_s \le k} H_1[D^\alpha u] \le (c+1)\,\|u\|_{k+1}\,,$$

o que estabelece (4). Finalmente, vemos que o item (5) também vale ao considerar as imersões contínuas $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$. $\square$

Estamos interessados agora em propriedades especiais das imersões do Teorema 3.11.

Definição 3.4. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois espaços vetoriais normados com $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$.*
*a) Dizemos que uma aplicação linear $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é **compacta** quando T é contínua e leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, isto é, se $A \subseteq \mathcal{X}$ é limitado, então $\overline{T(A)} \subset \mathcal{Y}$ é compacto;*
*b) Dizemos que a **imersão de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ é compacta** se a aplicação inclusão $i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ for compacta. Nesse caso, $\mathcal{X}$ está **imerso compactamente** em $\mathcal{Y}$ e escrevemos $\mathcal{X} \overset{cpct.}{\hookrightarrow} \mathcal{Y}$.*

Observação 3.12. *Uma maneira equivalente de definir uma imersão compacta é dizer que $\mathcal{X}$ está imerso compactamente em $\mathcal{Y}$ se toda sequência $(u_m) \subset \mathcal{X}$ limitada possui subsequência convergente em $\mathcal{Y}$. Conforme veremos adiante, resultados de compacidade são extremamente importantes no estudo de equações diferenciais.*

Enunciamos abaixo um resultado clássico de convergência que será bastante útil nesse contexto.

Teorema 3.12 (Arzelá-Ascoli)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ um subconjunto satisfazendo*

(i) *existe $\mathcal{M} > 0$ tal que $\|u\|_0 \leq \mathcal{M}, \quad \forall\, u \in \mathcal{A}$;*

(ii) *dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $u \in \mathcal{A}$, x, $y \in \overline{\Omega}$, vale*
$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon, \quad \textit{sempre que } |x - y| < \delta.$$

Então toda sequência $(u_m) \subset \mathcal{A}$ possui subsequência convergente.

Observação 3.13. *Um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é dito* ***equilimitado*** *quando satisfaz a condição (i) acima. Quando (ii) é satisfeita, dizemos que o conjunto é* ***equicontínuo****. Note que, quando Ω é convexo, uma condição suficiente para a equicontinuidade de $\mathcal{A}$ é que as suas funções tenham derivadas uniformemente limitadas em $\overline{\Omega}$.*

A seguir, analisamos a compacidade das imersões dadas no Teorema 3.11.

Teorema 3.13. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \nu < \gamma \leq 1$, então*

(2') $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{k}(\overline{\Omega})$; (3') $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Além disso, se Ω é convexo, então

(1') $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{k}(\overline{\Omega})$; (5') $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Prova. Vamos provar primeiro (2') para $k = 0$. Seja $(u_m) \subset \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que
$$\|u_m\|_{0,\gamma} = \|u_m\|_0 + H_\gamma[u_m] \leq \mathcal{M}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$
Para ver que existe uma subsequência convergente em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, seja $\mathcal{A} := \{u_m : m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Segue da expressão acima que $\mathcal{A}$ é equilimitado. Além disso, como $H_\gamma[u_m] \leq \mathcal{M}$, vale $|u_m(x) - u_m(y)| \leq \mathcal{M}|x-y|^\gamma$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\forall\, x$, $y \in \overline{\Omega}$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ dado, a condição (ii) do Teorema 3.12, de equicontinuidade, se verifica para $\delta = (\varepsilon/\mathcal{M})^{1/\gamma}$. Aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli concluímos que (u_m) possui uma subsequência convergente em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Considerando agora $k \in \mathbb{N}$, tomamos $(u_m) \subset \mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ uma sequência limitada. Então existe uma subsequência de (u_m), que denotaremos ainda por (u_m), tal que $u_m \to u$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Para todo multi-índice α tal que $|\alpha|_s \leq k$,
$$\|u_m\|_{k,\gamma} = \|u_m\|_k + \sum_{|\alpha|_s \leq k} H_\gamma[D^\alpha u_m] \leq \mathcal{M}. \text{ Logo, } \|D^\alpha u_m\|_{0,\gamma} = \|D^\alpha u_m\|_0 + H_\gamma[D^\alpha u_m] \leq \mathcal{M}.$$
Usando a primeira parte da prova e passando para subsequências se necessário, temos que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Devido à equicontinuidade, temos que a convergência é uniforme, logo $u_\alpha = D^\alpha u$ (Verifique!). Desse modo, $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ e $\|u_m - u\|_k = \displaystyle\sum_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_0 \to 0$, o que estabelece (2'). Para verificar (3') note inicialmente que, se $u \in \mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ e x, $y \in \Omega$ com $x \neq y$, então
$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} = \left(\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}\right)^{\frac{\nu}{\gamma}} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-\frac{\nu}{\gamma}}$$
de modo que, tomando o supremo, obtemos $H_\nu[D^\alpha u] \leq 2^{1-\nu/\gamma} H_\gamma[D^\alpha u]^{\nu/\gamma} \|D^\alpha u\|_0^{1-\nu/\gamma}$.

Seja agora $(u_m) \subset \mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $\|u_m\|_{k,\gamma} \leq \mathcal{M}$. Usando (2') e passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que (u_m) converge em $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$. Usando a estimativa acima, obtemos
$$\begin{aligned}
\|u_j - u_m\|_{k,\nu} &= \sum_{|\alpha|_s \leq k} \left(\|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0 + H_\nu[D^\alpha(u_j - u_m)]\right) \\
&\leq \sum_{|\alpha|_s \leq k} A_{j,m} \left(\|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0^{\nu/\gamma} + 2^{1-\nu/\gamma} H_\gamma[D^\alpha(u_j - u_m)]^{\nu/\gamma}\right),
\end{aligned}$$

com $A_{j,m} = \|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0^{1-\nu/\gamma}$. Usando a desigualdade abaixo (veja o Exercício 6.3.21)

$$(a+b)^{\nu/\gamma} \le c(a^{\nu/\gamma} + b^{\nu/\gamma}), \quad a,\, b \ge 0, \quad \text{para algum } c > 0 \text{ dependendo de } \nu/\gamma,$$

e a limitação de (u_m), concluímos que

$$H_\gamma[D^\alpha u_j - D^\alpha u_m]^{\nu/\gamma} \le (H_\gamma[D^\alpha u_j] + H_\gamma[D^\alpha u_m])^{\nu/\gamma} \le 2c\mathcal{M}^{\nu/\gamma},$$

com uma estimativa análoga valendo para $\|D^\alpha u_j - D^\alpha u_m\|_0^{\nu/\gamma}$. Portanto,

$$\|u_j - u_m\|_{k,\gamma} \le 2\mathcal{M}^{\nu/\gamma}(1 + 2^{1-\nu/\gamma}) \sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0^{1-\nu/\gamma}.$$

Como u_N converge em $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, temos $\|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0 \to 0$, quando $j,\, m \to \infty$, para todo multi-índice α com $|\alpha|_s \le k$. Assim, como $1 - \nu/\gamma > 0$, segue da expressão acima que (u_m) é sequência de Cauchy em $\mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$. Logo, $u_m \to u$ em $\mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$, para alguma função $u \in \mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$, o que estabelece (3'). A prova dos itens $(1')$ e $(5')$ segue dos diagramas abaixo

$$\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,1}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{k}(\overline{\Omega}) \quad \text{e} \quad \mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,1}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{k,\nu}(\overline{\Omega})$$

e do fato de que a composição de uma aplicação contínua com uma aplicação compacta é uma aplicação compacta. □

3.5 Aula 11: O Teorema de Existência de Schauder

Na aula de hoje, voltaremos à questão de existência de solução para o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \le 1$, $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)$ e $\mathcal{L}$ é um operador diferencial de 2° ordem da forma

$$\mathcal{L}u := \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^N b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \text{ com os coeficientes } a^{ij},\, b^i,\, c \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Conforme a Observação 3.7, para resolver esse problema vamos usar o Princípio da Continuação para a família de operadores $\mathcal{L}_t := (1-t)\mathcal{L} + t\Delta$, $t \in [0,1]$. Para isso, será necessário encontrar $c > 0$, independente de t, tal que

$$\|u\|_{2,\gamma} \le c\|\mathcal{L}_t u\|_{0,\gamma}, \quad \forall\, u \in \mathcal{X},\, t \in [0,1]. \tag{28}$$

Para obter (28) usaremos o que chamamos de **estimativa a priori** para as soluções do problema $(\mathcal{P})$. Mais especificamente, vamos usar o resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [7, Teorema 6.6].

Teorema 3.14 (Estimativa a priori)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}$ e $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico com* $\max\left\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma} \,:\, i,j = 1,\ldots,N\right\} \le \delta$. *Então existe uma constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, \gamma, \theta_0, \delta, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{2,\gamma} \le \mathcal{C}\left\{\|\mathcal{L}u\|_{0,\gamma} + \|u\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|u\|_0\right\}, \quad \forall\, u \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Observação 3.14. *Observe que, se $u \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é uma solução de $(\mathcal{P})$, a estimativa a priori dada pelo Teorema 3.14 nos fornece* $\|u\|_{2,\gamma} \leq \mathcal{C}\left\{\|f\|_{0,\gamma} + \|g\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|u\|_0\right\}$ *e, portanto, não obtemos uma informação precisa a respeito da solução, devido ao termo $\|u\|_0$ que aparece do lado direito. Este termo indesejado atrapalha na aplicação do Método da Continuação.*

Conforme veremos a seguir, o problema apresentado na estimativa do Teorema 3.14 pode ser superado desde que valha o princípio de comparação para o operador $\mathcal{L}$.

Teorema 3.15. *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.14 são satisfeitas e que o problema*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tenha apenas a solução trivial $u \equiv 0$ em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Então existe uma constante

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, \gamma, \theta_0, \delta, \Omega) > 0 \ \ \textit{tal que} \ \ \|u\|_{2,\gamma} \leq \mathcal{C}\left\{\|\mathcal{L}u\|_{0,\gamma} + \|u\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)}\right\}, \quad \forall\, u \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Prova. Suponha, por contradição, que existem $(C_m) \subset (0, +\infty)$ e $(u_m) \subset \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tais que $C_m \to +\infty$, quando $m \to +\infty$ e $\|u_m\|_{2,\gamma} \geq C_m\left\{\|\mathcal{L}u_m\|_{0,\gamma} + \|u_m\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)}\right\}$. Considerando

$$v_m := \frac{u_m}{\|u_m\|_{2,\gamma}} \text{ temos que } \|v_m\|_{2,\gamma} = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathcal{L}v_m\|_{0,\gamma} + \|v_m\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)} \leq C_m^{-1} \to 0. \tag{29}$$

Uma vez que $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, existe $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e uma subsequência, que ainda denotamos por (v_m), tal que $v_m \to v$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema 3.14,

$$\|v_j - v_m\|_{2,\gamma} \leq \mathcal{C}\left\{\|\mathcal{L}v_j - \mathcal{L}v_m\|_{0,\gamma} + \|v_j - v_m\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|v_j - v_m\|_0\right\}.$$

A expressão acima, juntamente com (29) e a convergência em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ mostram que $(v_m) \subset \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, $v_m \to v$ em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Como $\mathcal{L}$ é contínuo, temos que $\mathcal{L}v_m \to \mathcal{L}v$. Desse modo, segue de (29) que v satisfaz

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = 0, & \text{em } \Omega \\ v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde se conclui que $v \equiv 0$. Mas isso é um absurdo, visto que $1 = \|v_m\|_{2,\gamma} \to \|v\|_{2,\gamma} = 0$. $\square$

Observação 3.15. *Em vista do Teorema 3.3, podemos aplicar o Teorema 3.15 quando o termo c é não-positivo em $\overline{\Omega}$, pois, nesse caso, o problema do enunciado tem, de fato, apenas a solução trivial. Desse modo, podemos enunciar e provar o resultado principal dessa aula.*

Teorema 3.16 (Teorema de Existência de Schauder)**.** *Seja Ω um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}$, $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico com coeficientes em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e tal que $c \leq 0$ em Ω. Então, para toda $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

possui solução única em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Prova do Teorema 3.16. Conforme a Observação (3.6) podemos, sem perda de generalidade, supor que $g \equiv 0$. Considere $\mathcal{X} := \{u \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} \equiv 0\}$ e defina, para $t \in [0,1]$, o operador $\mathcal{L}_t : \mathcal{X} \to \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ por $\mathcal{L}_t u := (1-t)\mathcal{L}u + t\Delta u$, $\forall\, u \in \mathcal{X}$. Observe que, se $\theta_0 > 0$ é a constante de elipticidade de $\mathcal{L}$, $A(x) = a^{ij}(x)$, para $x \in \Omega$, e $\xi \in \mathbb{R}^N$, então

$$\xi\big((1-t)A(x) + tId\big)\xi \geq (1-t)\theta_0|\xi|^2 + t|\xi|^2 = [(1-t)\theta_0 + t]\,|\xi|^2 \geq \min\{1, \theta_0\}|\xi|^2.$$

De modo que $\mathcal{L}_t$ é uniformemente elíptico com constante de elipticidade igual a $\min\{1, \theta_0\}$, que é independente de t. Além disso, como $t \in [0,1]$, temos que

$$\max\{\|(1-t)a^{ij}+t\delta_{ij}\|_{0,\gamma}, \|(1-t)b^i\|_{0,\gamma}, \|(1-t)c\|_{0,\gamma} : i,j=1,\ldots,N\} \leq \delta,$$

com $\delta = \delta(\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma}) > 0$ independente de t. Finalmente, note que o termo de ordem zero de $\mathcal{L}_t$ é $(1-t)c(\cdot)$, que é não-positivo em Ω. Segue do Princípio do Máximo, veja o Teorema 3.3, que o problema homogêneo $\mathcal{L}_t u = 0$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, possui somente a solução nula. Com estas considerações podemos aplicar o Teorema 3.15 para obter uma constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, \gamma, \theta_0, \delta, \Omega) > 0$, independente de $t \in [0,1]$, tal que

$$\|u\|_{2,\gamma} \leq \mathcal{C}\left\{\|\mathcal{L}_t u\|_{0,\gamma} + \|u\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\partial\Omega)}\right\} = \mathcal{C}\|\mathcal{L}_t u\|_{0,\gamma}, \quad \forall\, u \in \mathcal{X},$$

visto que os elementos de $\mathcal{X}$ são identicamente nulos na fronteira de Ω. Utilizando agora o Teorema 3.9, concluímos que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ é sobrejetivo se, e somente se, $\mathcal{L}_1$ é sobrejetivo. O Corolário 2.1 nos assegura que $\mathcal{L}_1 = \Delta$ é sobrejetivo e, portanto, o problema $(\mathcal{P})$ tem pelo menos uma solução em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. A unicidade da solução segue do Princípio do Máximo. $\square$

No próximo teorema estamos interessados em estimativas a priori para subconjuntos no interior de Ω. Por isso, não exigimos regularidade sobre Ω. A prova do resultado abaixo pode ser encontrada em [7, Teorema 6.2].

Teorema 3.17 (Estimativas interiores). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto e $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico com $\max\{\|a^{ij}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|b^i\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|c\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} : i,j=1,\ldots,N\} \leq \delta$. Se $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ e $\overline{\Omega}_1$ é compacto, então existe $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, \gamma, \theta_0, \delta) > 0$ constante tal que*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_0)} \leq \mathcal{C}\left\{\|\mathcal{L}u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}_1)} + \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}_1)}\right\}, \quad \forall\, u \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_1).$$

Como uma aplicação da estimativa interior dada pelo Teorema 3.17, vamos provar o teorema a seguir que pode ser comparado ao Teorema 2.2. Naquela ocasião consideramos o mesmo problema para $\mathcal{L} = \Delta$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^2$, $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ e obtivemos uma solução única em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.18. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}$, $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico com coeficientes em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $c \leq 0$. Então, dada $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= f, \quad \text{em } \Omega \\ u &= g, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui solução única em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Prova. A regularidade de Ω e g nos permite estender essa última para todo $\overline{\Omega}$ de modo que a extensão, que denotaremos ainda por g, é contínua em $\overline{\Omega}$. Pelo Teorema de Stone-Weirstrass [1, Corolário 1.29], g pode ser aproximada uniformemente por polinômios e, portanto, existe $(g_m) \subset \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $g_m \to g$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Usando $c \leq 0$, podemos aplicar o Teorema 3.16 para obter $u_m \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_m &= f, \quad \text{em } \Omega \\ u_m &= g_m, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

Aplicando o Princípio do Máximo para $u_j - u_m$, concluímos que $\|u_j - u_m\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \|g_j - g_m\|_{\mathcal{C}(\partial\Omega)}$. A convergência de g_m em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ implica que (u_m) é sequência de Cauchy em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, e portanto $u_m \to u$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Considerando agora um aberto Ω_0 tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, o Teorema 3.17 nos garante que $\|u_j - u_m\|_{\mathcal{C}^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq \mathcal{C}\|u_j - u_m\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}$. Isso nos diz que (u_m) é sequência de Cauchy em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_0)$ e portanto $u_m \to u$ em $\mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_0)$. Como Ω_0 é arbitrário, podemos passar (30) ao limite para concluir que $u \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é solução do problema. A unicidade segue novamente pelo Princípio do Máximo. $\square$

4 Espaços de Sobolev

4.1 Aula 12: Motivação e Formulação Fraca

A partir de agora vamos estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sendo um aberto de classe $\mathcal{C}^1$ e a função f podendo ser descontínua em Ω. Vamos supor, inicialmente, que a função f pertence ao espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Se existe $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ uma solução clássica de $(\mathcal{P})$ então, multiplicando a primeira equação de $(\mathcal{P})$ por $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, integrando e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_\Omega f(x)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi) \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} \, \mathrm{d}x,$$

ou ainda, lembrando que $\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \tag{31}$$

Observação 4.1. *O lado direito da equação* (31) *é finito sempre que* $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$. *Em particular, se* $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ *e* u *é uma solução clássica de* $(\mathcal{P})$, *a expressão* (31) *se verifica e o integrando do lado esquerdo envolve apenas as derivadas de primeira ordem da função* u.

Suponhamos que exista um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com as seguintes propriedades:

(i) o produto interno em $\mathcal{H}$ é dado pela aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} : \ & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}x; \end{aligned} \tag{32}$$

(ii) $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço de $\mathcal{H}$ denso;

(iii) $\mathcal{H}$ está imerso continuamente em $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Nessas condições, a equação (31) se escreve como $\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Além disso, a existência de tal espaço $\mathcal{H}$ nos permite encontrar, em certo sentido, solução para o problema $(\mathcal{P})$. Isso motiva a seguinte definição e o resultado subsequente.

Definição 4.1. *Diremos que* $u \in \mathcal{H}$ *é uma* **solução fraca** *do problema* $(\mathcal{P})$ *quando vale a igualdade*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi) \, dx = \int_\Omega f(x)\varphi \, dx, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{H}. \tag{33}$$

Proposição 4.1. *A existência de um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *como em* $(i) - (iii)$ *garante que a equação* (31) *se estende para todo* $\varphi \in \mathcal{H}$ *e, portanto, toda solução clássica de* $(\mathcal{P})$ *é também uma solução fraca. Além disso, o funcional linear* $T_f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$, *dado por* $\varphi \mapsto T_f(\varphi) := \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi \, dx$ *é contínuo e a existência de solução fraca para* $(\mathcal{P})$ *é equivalente a encontrar* $u \in \mathcal{H}$ *tal que* $\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = T_f(\varphi)$, *para todo* $\varphi \in \mathcal{H}$.

Prova. Sejam u solução clássica para $(\mathcal{P})$ e $\varphi \in \mathcal{H}$ com $(\varphi_m) \subset \mathcal{H}$ tal que $\varphi_m \to \varphi$ em $\mathcal{H}$, quando $m \to +\infty$. Pela continuidade do produto interno, $\langle u \, , \varphi_m \rangle_{\mathcal{H}} \to \langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a continuidade da imersão $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$, obtemos

$$\left| \int_\Omega (f\varphi_m - f\varphi) \, \mathrm{d}x \right| \leq \textstyle\int_\Omega |f(\varphi_m - \varphi)| \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|\varphi_m - \varphi\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \mathcal{C} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|\varphi_m - \varphi\|_{\mathcal{H}} \to 0,$$

quando $m \to +\infty$. Assim, passando a igualdade $\langle u, \varphi_m \rangle_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x$ ao limite, concluímos que

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi\,\mathrm{d}x, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{H},$$

e, portanto, u é por definição uma solução fraca para $(\mathcal{P})$. Note ainda que, para toda $\varphi \in \mathcal{H}$ vale que $|T_f(\varphi)| = \left|\displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi\,\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \mathcal{C}\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}}$, e, portanto, T_f é um funcional linear contínuo de $\mathcal{H}$ em $\mathbb{R}$. Além disso, podemos reescrever (33) como

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = T_f(\varphi), \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{H},$$

caracterizando a existência de solução fraca por meio da definição de T_f. $\square$

Observação 4.2. *Nem sempre uma solução fraca é uma solução clássica.*

Em vista da Proposição 4.1, para encontrar uma solução fraca para $(\mathcal{P})$ vale relembrar o seguinte resultado, que depende apenas do fato de $\mathbb{R}^N$ ser um espaço com produto interno.

Teorema 4.1 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e considere $T : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $v_T \in \mathcal{H}$ que satisfaz $T(x) = \langle v_T, x \rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Além disso, $\|v_T\| = \|T\|_{\mathcal{H}^*}$.*

Prova. Se $T = 0$ basta tomar $v_T = 0$. Podemos então supor que $\mathrm{Ker}T = \{x \in \mathcal{H} : Tx = 0\}$ é um subespaço próprio de $\mathcal{H}$. Como esse subespaço é fechado, existe $x_0 \in (\mathrm{Ker}T)^\perp$ tal que $\|x_0\|_{\mathcal{H}} = 1$. Note agora que, para todo $x \in \mathcal{H}$, vale a seguinte decomposição

$$x = \left(x - \frac{T(x)}{T(x_0)}x_0\right) + \frac{T(x)}{T(x_0)}x_0 \in \mathrm{Ker}T \oplus (\mathrm{Ker}T)^\perp.$$

Dessa forma, fazendo $v_T = T(x_0)x_0 \in (\mathrm{Ker}T)^\perp$ temos $\langle v_T, x \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle T(x_0)x_0, \frac{T(x)}{T(x_0)}x_0 \right\rangle_{\mathcal{H}} = T(x)$. Além disso, v_T é único, pois se existissem v_1, $v_2 \in \mathcal{H}$ tais que $\langle v_1, x \rangle_{\mathcal{H}} = T_f(x) = \langle v_2, x \rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $x \in \mathcal{H}$, então $\langle v_1 - v_2, x \rangle_{\mathcal{H}} = 0$, $\forall\, x \in \mathcal{H}$. Em particular, escolhendo $x = v_1 - v_2$, concluiríamos que $\|v_1 - v_2\|^2_{\mathcal{H}} = 0$, isto é, que $v_1 = v_2$. A igualdade $\|v_T\| = \|T(x_0)\| = \|T\|_{\mathcal{H}^*}$ segue diretamente das propriedades de produto interno (Exercício 6.4.1). $\square$

Aplicando o Teorema de Riesz, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto de classe $\mathcal{C}^1$ e $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, então o problema $(\mathcal{P})$ possui uma única solução fraca.*

Prova. Como T_f é um funcional linear contínuo, de acordo com o Teorema de Riesz, existe um único elemento $u_f \in \mathcal{H}$ tal que $T_f(\varphi) = \langle u_f, \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$. Segue então pela Proposição 4.1 que u_f é a única solução fraca de $(\mathcal{P})$. De fato, se existisse outra solução, digamos $\widetilde{u}_f$, pela caracterização $\langle u_f, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = T_f(\varphi) = \langle \widetilde{u}_f, \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ e o Teorema de Riesz, concluiríamos que $\widetilde{u}_f = u_f$. $\square$

Observação 4.3. *a) A equação (33) pressupõe apenas a existência de* ***derivadas de primeira ordem*** *para as funções de $\mathcal{H}$. Desse modo, é natural que o espaço $\mathcal{H}$ seja maior do que $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, sendo este último o espaço em que se encontram as soluções clássicas. Assim, temos mais chance de obter soluções fracas do que soluções clássicas;*
b)Um maneira simples de construir o espaço $\mathcal{H}$ seria notar que a função dada em (32) define um produto interno em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e denotar por $\mathcal{H}$ o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ com a norma induzida por esse produto interno. Entretanto, com essa construção, os elementos de $\mathcal{H}$ seriam vistos como classes de equivalência de sequências de Cauchy em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, que não são bons elementos para se trabalhar. Além disso, ainda precisaríamos mostrar que $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$. A ideia então é tentar identificar este completamento acima com algum espaço de funções.

Notação 4.1. *Como trabalharemos com formulações integrais para nossos problemas, escreveremos somente* $\int u$ *para denotar* $\int_\Omega u(x)dx$*, em que* $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$*. Além disso, para* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$*, vamos escrever* $\|u\|_p$ *para denotar a norma de* u *em* $\mathcal{L}^p(\Omega)$*. As normas de funções* u *com derivadas contínuas ou Hölder contínuas serão denotadas por* $\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})}$ *e* $\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})}$*, respectivamente. Finalmente, diremos que* φ *é uma* **função teste** *quando* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$*.*

Para construir o espaço $\mathcal{H}$ vamos introduzir um novo conceito de derivada que generaliza a derivada usual. A princípio, considere $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ uma função teste. O Teorema 1.3(b), nos permite integrar por partes para obter

$$\int u\varphi_{x_i} = -\int u_{x_i}\varphi + \int_{\partial\Omega} u(x)\varphi(x)\eta^i \,\mathrm{d}\sigma_x = -\int u_{x_i}\varphi, \quad \text{pois } \varphi \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

De uma maneira mais geral, se α é um multi-índice tal que $|\alpha|_s \leq k$, podemos escrever

$$\int uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|_s}\int \varphi D^\alpha u, \text{ para } |\alpha|_s := \sum_{i=1}^N \alpha_i. \tag{34}$$

Note porém que, para que o lado esquerdo da expressão acima faça sentido, basta supor que $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$. De fato, se este for o caso e denotarmos por $K_\varphi \subset\subset \Omega$ o suporte da função φ, teremos então que $\left|\int uD^\alpha\varphi\right| \leq \int_{K_\varphi} |u(x)|\,|D^\alpha\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|D^\alpha\varphi\|_\infty \int_{K_\varphi}|u(x)|\mathrm{d}x < \infty.$

Estas considerações motivam a seguinte definição.

Definição 4.2. *Dado um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*, uma função* $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ *e um multi-índice* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$*, dizemos que* $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ *é uma* α*-ésima* ***derivada fraca*** *de* u *se*

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|_s}\int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x, \ \textit{para } |\alpha|_s := \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \tag{35}$$

Isto é, essencialmente, a derivada fraca é ***uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes****.*

O lema abaixo estabelece, em um certo sentido, a unicidade da derivada fraca. Dessa forma, se $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ possui α-ésima derivada fraca v, podemos denotar $v = D^\alpha u$.

Lema 4.1. *A* α*-ésima derivada fraca de uma função* $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$*, quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.*

Prova. Suponha que v_1, v_2 são α-ésimas derivadas fracas de u. Então

$$(-1)^{|\alpha|_s}\int v_1\varphi = \int uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|_s}\int v_2\varphi, \quad \text{e, portanto, } \int (v_1 - v_2)\varphi = 0, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Com isso, segue de [3, Corolário 4.24] que $v_1 - v_2 = 0$ q.t.p. em Ω, de onde se conclui que $v_1 = v_2$ q.t.p. em Ω. $\square$

Notação 4.2. *Daqui em diante,* $D^\alpha u$ *denotará a* α*-ésima derivada* ***no sentido fraco*** *da função* u*, e faremos menção quando se tratar da derivada no sentido clássico.*

4.2 Aula 13: Derivadas Fracas e Espaços de Sobolev

Na aula de hoje vamos definir os Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}$ que serão base para construção do espaço $\mathcal{H}$ que estamos procurando. Comecemos com alguns exemplos do conceito de derivada fraca que usaremos na definição de $\mathcal{W}^{k,p}$.

Exemplo 4.1. Se uma função u possui derivada no sentido clássico, então, pelo Teorema da Divergência, u possui derivada no sentido fraco, que coincide com a derivada clássica.

Exemplo 4.2. Considere $\Omega = (0,2)$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
Observe que $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(0,2)$ e que não existe a derivada no sentido clássico, visto que não existe a derivada (clássica) no ponto $x = 1$. Vamos mostrar que u possui derivada fraca $v : (0,2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, claramente temos que $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(0,2)$. Seja $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(0,2)$ e observe que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\varphi' \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = x\varphi(x)\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi\,\mathrm{d}x + (\varphi(2) - \varphi(1)) \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi\,\mathrm{d}x - \varphi(1) = -\int_0^1 \varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

de modo que $v = u'$, no sentido fraco.

Exemplo 4.3. Considere $\Omega = (0,2)$ e seja agora $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$
Vamos mostrar que u não é fracamente derivável. De fato, suponha por contradição existe a derivada fraca u'. Então,

$$\int u\varphi' = -\int u'\varphi, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(0,2).$$

Considere uma sequência $(\varphi_m) \subset \mathcal{C}^\infty_0(0,2)$ satisfazendo, para todo $m \in \mathbb{N}$,

(i) $\|\varphi_m\|_\infty \leq 1$;

(ii) $\varphi_m(1) = 1$;

(iii) $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = 0$, para todo $x \neq 1$;

(iv) o suporte de φ_m está contido em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Usando integração por partes, obtemos

$$-\int u'\varphi_m = \int u\varphi_m' = \int_0^1 x\varphi_m'(x)\,\mathrm{d}x = x\varphi_m\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi_m\,\mathrm{d}x.$$

Como φ_m tem suporte compacto e $\varphi_m(1) = 1$, concluímos que

$$-1 = \int u'\varphi_m - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_J u'\varphi_m\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \varphi_m\,\mathrm{d}x,$$

em que $J = (\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$. Observe agora que $u'(x)\varphi_m(x) \to 0$ q.t.p. em J. Além disso, $|u'(x)\varphi_m(x)| \leq |u'(x)|$ q.t.p. em J e $|u'| \in \mathcal{L}^1(J)$, visto que $u' \in \mathcal{L}^1_{loc}(0,2)$. Segue então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $\lim_{m\to\infty} \int_J u'\varphi_m\,\mathrm{d}x = 0$. Do mesmo modo mostra-se que $\int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x \to 0$. Assim, $-1 = \lim_{m\to\infty} \left(\int u'\varphi_m \mathrm{d}x - \int_0^1 \varphi_m\,\mathrm{d}x \right) = 0$, o que é absurdo. Portanto, não existe a derivada fraca u'.

Os **Espaços de Sobolev** serão objeto de estudo para obtenção de soluções fracas, pois representam uma estrutura ideal para buscar soluções generalizadas de problemas de valor de contorno.

Observação 4.4. *A teoria dos operadores compactos (lineares e não lineares), bem como a definição dos Espaços de Sobolev, foram em grande parte estimuladas pela necessidade do estudo da solubilidade de EDPs. De fato, os teoremas de imersão compacta dos espaços de Sobolev nos permitem usar a teoria dos operadores compactos para encontrar soluções fracas.*

Definição 4.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \ : \ D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice α tal que $|\alpha|_s \leq k\}$, com as derivadas $D^\alpha u$ acima sendo tomadas no sentido **fraco**.*

Observação 4.5. *a) Se $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, então $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, de modo que toda função de $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ está em $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$. Além disso, como $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, estamos assumindo que todas as derivadas fracas de ordem $|\alpha|_s \leq k$ existem. Mais ainda, $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subseteq \mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$.*
*b) Quando $p = 2$, vamos denotar $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ **simplesmente por** $\mathcal{H}^k(\Omega)$**,** isto é, $\mathcal{H}^k(\Omega) := \mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$. Em particular, se $k = 1$, temos*

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \mathcal{W}^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^2(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ para } i = 1, ..., n \right\}.$$

*c) O espaço $\mathcal{H}^1(\Omega)$ pode ser dotado do **produto interno** $\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v)\, dx$ e tornar-se um **espaço de Hilbert.** Com isso, se $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, então as duas integrais em (33) são finitas sempre que $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Dessa forma, veremos que o espaço $\mathcal{H}$ que estamos procurando, cujo produto interno é dado por (32), é um subespaço especial de $\mathcal{H}^1(\Omega)$.*

O resultado abaixo apresenta as propriedades básicas dos espaços de Sobolev.

Proposição 4.2. *Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice tal que $|\alpha|_s \leq k$. Então*

(i) *$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, para todo λ, $\mu \in \mathbb{R}$;*

(ii) *$D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ sempre que $|\beta|_s + |\alpha|_s \leq k$;*

(iii) *$D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|_s,p}(\Omega)$;*

(iv) *Se $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, então $\varphi u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e vale $D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u$, onde $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_N!$ e $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_N - \beta_N)$ é um multí-indice de ordem $\leq k$;*

(v) *Se $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ é um aberto, então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\widetilde{\Omega})$.*

Prova. Considere $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e note que, pela definição de derivada fraca, temos

$$\begin{aligned}
\int (\lambda u + \mu v) D^\alpha \varphi &= \lambda \int u D^\alpha \varphi + \mu \int v D^\alpha \varphi = \lambda (-1)^{|\alpha|_s} \int \varphi D^\alpha u + \mu (-1)^{|\alpha|_s} \int \varphi D^\alpha v \\
&= (-1)^{|\alpha|_s} \int (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v)\, \varphi,
\end{aligned}$$

o que estabelece a veracidade de (i). A prova dos demais itens também segue da definição de derivada fraca e alguns cálculos diretos (Exercício 6.4.8). □

Pelo item (i) da Proposição 4.2 concluímos que $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Vamos transformá-lo em um espaço normado.

Proposição 4.3. *O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ é um espaço normado quando munido com*

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|_s \leq k} \int |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Prova. Para verificar que $\| \cdot \|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ define uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ precisamos mostrar que, para quaisquer u, $v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem

(N_1) $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \neq 0$, sempre que $u \neq 0$; (N_3) $\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$.

(N_2) $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = |\lambda|\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$;

Os itens (N_1) e (N_2) seguem imediatamente da definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}}$. Vamos mostrar a veracidade de (N_3), para $1 \leq p < \infty$. Usando a desigualdade triangular em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ e a linearidade do operador D^α, obtemos

$$\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha|_s \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lembremos agora que, se $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, a desigualdade de Minkowski se escreve como

$$\left(\sum_{i=1}^N |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^N |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} &\leq \left(\sum_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha v\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha|_s \leq k} \int |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|_s \leq k} \int |D^\alpha v|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Quando $p = \infty$ o item $(N3)$ segue da desigualdade triangular para números reais. $\square$

Observação 4.6. *Existem outras normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, como por exemplo*

$$|u|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \quad ou \quad |||u|||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} := \max_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Não é difícil verificar que as expressões acima também definem normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e que essas normas são equivalentes à norma usual $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ que será denotada apenas por $\|\cdot\|_{k,p}$.

Relembramos que um espaço vetorial $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ é chamado **Espaço de Banach** quando é completo com respeito à topologia induzida pela norma. O resultado abaixo estabelece a completude do espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 4.3. *$\left(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p}\right)$ é um espaço de Banach.*

Prova. Seja $1 \leq p < \infty$ e $(u_m) \subset \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Vamos mostrar que (u_m) converge em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 > 0$ tal que $\|u_l - u_m\|_{k,p} < \varepsilon$, se $l, m > N_0$. Assim, para todo multi-índice α tal que $|\alpha|_s \leq k$,

$$\|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|_p \leq \left(\sum_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \right)^{1/p} < \varepsilon, \quad \text{se } l, m > N_0, \tag{36}$$

o que mostra que $(D^\alpha u_m) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy. Sendo $\mathcal{L}^p(\Omega)$ completo, segue que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Vamos mostrar que $u := u_{(0,\ldots,0)} \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e que $D^\alpha u = u_\alpha$, para todo $|\alpha|_s \leq k$. Se isso for verdade podemos fazer $l \to \infty$ em (36) para concluir que $\|u_m - u\|_{k,p} < \varepsilon$, sempre que $m > N_0$. Mas isso é o mesmo que dizer que $u_m \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Resta então mostrar que, para cada multi-índice α tal que $|\alpha|_s \leq k$, vale $D^\alpha u = u_\alpha$. Fixada $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, temos que $D^\alpha \varphi \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$, em que p' é o expoente conjugado de p, isto é, $1/p + 1/p' = 1$. Usando então a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int (u D^\alpha \varphi - u_m D^\alpha \varphi) \right| \leq \int |u - u_m||D^\alpha \varphi| \leq \|u - u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{\mathcal{L}^{p'}(\Omega)}.$$

A expressão acima mostra que $\int uD^\alpha\varphi = \lim_{m\to\infty}\int u_m D^\alpha\varphi, \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Uma vez que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, podemos proceder como acima para verificar que

$$\int u_\alpha\varphi = \lim_{m\to\infty}\int (D^\alpha u_m)\varphi, \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Portanto, para toda $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int uD^\alpha\varphi = \lim_{m\to\infty}\int u_m D^\alpha\varphi = \lim_{m\to\infty}(-1)^{|\alpha|_s}\int (D^\alpha u_m)\varphi = (-1)^{|\alpha|_s}\int u_\alpha\varphi.$$

donde se conclui que $D^\alpha u = u_\alpha\in\mathcal{L}^p(\Omega)$, e portanto $u\in\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Para o caso $p=\infty$ basta repetir o argumento fazendo $p'=1$ e usando a definição da norma de $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ (Exercício 6.4.9). □

4.3 Aula 14: Espaços de Sobolev, Aproximação por Funções Suaves

Começamos nossa aula apresentando propriedades importantes do espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, quando $p<\infty$. Para $p=\infty$, mostra-se em [10] que $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$ não é nem separável nem reflexivo.

Teorema 4.4. *O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1<p<\infty$ e separável se $1\le p<\infty$.*

Prova. Vamos considerar somente $k=1$, porque os demais casos são análogos. Observe que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ pode ser imerso isometricamente em $(\mathcal{L}^p(\Omega))^{N+1}$ através da aplicação $I:\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)\longrightarrow\mathcal{L}^p(\Omega)^{N+1}$ dada por $I(u):=\left(u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$, onde o espaço $\mathcal{X}:=(\mathcal{L}^p(\Omega))^{N+1}$ está munido com a norma

$$\|(v_0,v_1,\cdots,v_N)\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)^{N+1}} = \left(\sum_{i=0}^N \|v_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, v=(v_0,v_1,\ldots,v_N)\in\mathcal{L}^p(\Omega)^{N+1}.$$

Com isso, podemos identificar $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com o subespaço correspondente $\mathcal{Y}:=I(\mathcal{W}^{1,p}(\Omega))$ de $\mathcal{X}$. Uma vez que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ é completo segue que $\mathcal{Y}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{X}$, devido a identificação isométrica. Como $\mathcal{X}$ é reflexivo para $1<p<\infty$ e separável para $1\le p<\infty$, então o subespaço fechado $\mathcal{Y}$ também goza dessas propriedades. Mais ainda, como $I:\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)\to\mathcal{Y}$ é uma isometria, as propriedades se estendem para $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. □

O exemplo a seguir mostra que espaços de Sobolev possuem funções mal comportadas.

Exemplo 4.4. *Seja $B=B_1(0)\subset\mathbb{R}^N$ a bola unitária, $1<p<\infty$ e $\alpha>0$ tal que $\alpha<(N-p)/p$. Sabemos que a função $u(x)=|x|^{-\alpha}$ pertence a $\mathcal{W}^{1,p}(B)$ (Exercício 6.4.10). Como u é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em qualquer aberto que não contém a origem, concluímos que $u\in\mathcal{W}^{1,p}(B_2(0))$. Considere agora $(x_m)\in B$ um conjunto enumerável e denso em B e defina*

$$v(x):=\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{2^m}|x-x_m|^{-\alpha}, \quad x\in B.$$

Observe que $\||x-x_m|^{-\alpha}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}\le\||x|^{-\alpha}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B_2(0))}=\mathcal{C}(N,p,\alpha)>0$ e, portanto,

$$\|v\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}\le\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{2^m}\||x|^{-\alpha}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B_2(0))}\le\mathcal{C}(N,p,\gamma)\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{2^m}=\mathcal{C}(N,p,\gamma).$$

Desse modo, concluímos que $v\in\mathcal{W}^{1,p}(B)$. Observe porém que, como o conjunto (x_m) é denso em B, a função v é ilimitada em qualquer aberto contido na bola unitária.

Observação 4.7. *Apesar da existência de funções como a do Exemplo 4.4, sempre é possível aproximar uma função de um espaço de Sobolev por funções regulares. De fato, se $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um conjunto aberto arbitrário, lembremos que, para $\varepsilon>0$, $\Omega_\varepsilon:=\{x\in\Omega: dist(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$ e pela Proposição 1.2 se $f\in\mathcal{C}(\Omega)$, então a função regularizada $f^\varepsilon:=(\eta_\varepsilon * u)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em Ω_ε. Utilizando o argumento da Proposição 1.2 e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos obter a mesma conclusão com a hipótese mais fraca $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$. Desse modo, se $f\in\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, então $f^\varepsilon\in\mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$.*

Antes do próximo resultado, definimos a convergência local em $\mathcal{W}^{k,p}$.

Definição 4.4. *Dizemos que uma sequência $(u_m) \subset \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}_{loc}(\Omega)$ quando*

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(K)} = 0, \quad \textit{para todo} \quad K \subset\subset \Omega.$$

Teorema 4.5. *Se $1 \leq p < \infty$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, então $u^\varepsilon \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}_{loc}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0^+$.*

Prova. Dado um multi-índice α tal que $|\alpha|_s \leq k$, podemos usar o mesmo argumento da Proposição 1.2 para verificar que, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$, vale

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int_\Omega D^\alpha_x \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = (-1)^{|\alpha|_s} \int_\Omega D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|_s}(-1)^{|\alpha|_s} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy \ = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x), \end{aligned}$$

em que usamos a Regra da Cadeia, a definição de derivada fraca e o fato que $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ é uma função teste. Desse modo, concluímos que $D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u = (D^\alpha u)^\varepsilon$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$. Pelas propriedades dos espaços $\mathcal{L}^p$, se $f \in \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$, então $f^\varepsilon \to f$ em $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$, sempre que $1 \leq p < \infty$ (Exercício 6.4.11). Com isso, dado um compacto $K \subset\subset \Omega$, note que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \|u^\varepsilon - u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(K)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \sum\limits_{|\alpha|_s \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(K)} = 0$, pois $(D^\alpha u)^\varepsilon \to D^\alpha u$ em $\mathcal{L}^p_{loc}(\Omega)$. □

Agora vamos obter aproximações em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ que não são locais como no Teorema 4.5. Para isso vamos transformar estimativas locais em estimativas globais utilizando o importante conceito de partição da unidade, que pode ser encontrado em [1, Teorema 3.14].

Proposição 4.4 (Partição da Unidade)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\mathcal{O}$ uma família de abertos que cobrem Ω, isto é, $\Omega \subset \bigcup\limits_{A\in\mathcal{O}} A$. Então, existe uma família Ψ de funções $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ tais que*

(i) $0 \leq \psi(x) \leq 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$, $\psi \in \Psi$;

(ii) *se* $K \subset\subset \Omega$, *então* $\text{supp}(\psi) \cap K \neq \varnothing$ *somente para um número finito de funções* $\psi \in \Psi$;

(iii) *para cada* $\psi \in \Psi$, *existe um aberto* $A_\psi \in \mathcal{O}$ *tal que* $\text{supp}(\psi) \subset A_\psi$;

(iv) *se* $x \in \Omega$, *então* $\sum\limits_{\psi\in\Psi} \psi(x) = 1$.

Veremos agora que as funções de $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ podem ser aproximadas por funções em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Teorema 4.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Então existe $(u_m) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.*

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, é suficiente mostrar que existe $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ com $\|u - v\|_{k,p} < \varepsilon$. Defina os conjuntos

$$\Omega_0 = \varnothing, \qquad \Omega_j := \left\{ x \in \Omega : \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \right\} \cap B_j(0), \quad j \in \mathbb{N},$$

de modo que $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$, $\forall\, j$. Considere ainda $A_j := \Omega_{j+1} \setminus \overline{\Omega_{j-1}}$ e note que $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$.

Seja Ψ a família de funções associada a família de abertos $\{A_j\}$, dada pela Proposição 4.4. Observe que, em vista do item (iv) da Proposição 4.2, para cada $j \in \mathbb{N}$, a função $\psi_j \in \Psi$ cujo suporte está contido em A_j é tal que $\psi_j u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Como $\psi_j u$ tem suporte compacto em Ω, podemos utilizar o Teorema 4.5 para obter $\varepsilon_j > 0$ pequeno, de modo que a função $v_j := \eta_{\varepsilon_j} * (\psi_j u)$ satisfaça $\|v_j - \psi_j u\|_{k,p} < \dfrac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Defina então $v(x) := \sum\limits_{j=1}^{\infty} v_j(x)$, para $x \in \Omega$.

Dado um compacto $K \subset\subset \Omega$ arbitrário, sabemos que $\text{supp}(\psi_j) \cap K \neq \varnothing$ somente para um número finito de índices j. Desse modo, v restrita a K é uma soma finita de funções

$v_j \in \mathcal{C}^\infty(K)$, sendo portanto $\mathcal{C}^\infty$ em K. Como o compacto é arbitrário concluímos que $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Além disso, lembrando que $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1$, temos que

$$\|v-u\|_{k,p} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} v_j - u \right\|_{k,p} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} v_j - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j u \right\|_{k,p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j - \psi_j u\|_{k,p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \varepsilon,$$

o que conclui a prova. □

Observação 4.8. *Em muitos trabalhos antigos encontra-se a definição do espaço $\mathcal{H}^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{C}^\infty$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{k,p}$. O Teorema* 4.6 *diz precisamente que $\mathcal{H}^{k,p}(\Omega) = \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Esse resultado foi provado em 1964 por Meyers e Serrin [12], em um artigo cujo título é simplesmente "$\mathcal{H} = \mathcal{W}$". Esse trabalho foi muito importante porque unificou a notação dos espaços de funções que vinham sendo utilizados pelos matemáticos.*

Agora queremos saber se é possível fazer aproximações por funções que são regulares até o fecho de Ω. De fato, para isso basta que Ω tenha certa regularidade. Mais especificamente, vale o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [5, Teorema 3, Seção 5.3.3].

Teorema 4.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Então existe $(u_m) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_m \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.*

Observação 4.9. *a) O Teorema* 4.7 *vale com condições mais fracas de regularidade sobre Ω. É necessário apenas que Ω satisfaça a seguinte propriedade do segmento: para cada $x \in \partial\Omega$ existe um aberto A_x e um vetor não nulo y_x tal que $x \in A_x$ e $z + ty_x \in \Omega$, sempre que $z \in \overline{\Omega} \cap A_x$ e $0 < t < 1$. A prova do resultado de densidade com essa condição mais fraca pode ser encontrada em [1, Teorema 3.18].*
b) Os Teoremas 4.6 *e* 4.7 *podem ser falsos se $p = \infty$. No que se refere ao Teorema* 4.6*, basta considerar a função $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = |x|$. Nesse caso $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}(-1,1)$, mas u não pode ser aproximada por funções de classe $\mathcal{C}^\infty(-1,1)$ (Exercício* 6.4.15*). Com relação ao Teorema* 4.7*, consideramos $\Omega := (-1,0) \cup (0,1)$ e $v : \Omega \to \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega)$, dada por*

$$v(x) := \begin{cases} 0, & se \ -1 < x < 0, \\ x, & se \ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Então v não pode ser aproximada por funções de classe $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ (Exercício 6.4.16*).*

4.4 Aula 15: Imersões dos Espaços $\mathcal{W}^{k,p}$: A Des. Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Começamos nossa aula relembrando que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\Omega)$. A seguir vamos determinar imersões em espaços intermediários, que se localizem entre $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Nosso estudo será dividido em três casos distintos, dependendo dos valores de p.

O Caso $p < N$

Vamos supor que $1 \leq p < N$ e tentar obter uma estimativa do tipo

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C} \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\, u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N), \tag{37}$$

para algum $q > 1$, com $\mathcal{C} > 0$ independente de u. Considere $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} \neq 0$ e defina, para $\lambda > 0$, a função $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. A mudança de variáveis $y = \lambda x$ nos fornece

$$\|u_\lambda\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^q \mathrm{d}x = \lambda^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^q \mathrm{d}y \quad \text{e}$$

$$\|\nabla u_\lambda(x)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\lambda x)|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda(x)\lambda|^p \mathrm{d}x = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\lambda x)|^p \mathrm{d}x = \lambda^{p-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^p \mathrm{d}y.$$

Suponha que a desigualdade (37) vale para alguma constante $\mathcal{C} > 0$. Então

$$\left(\lambda^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}|u(y)|^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \leq \mathcal{C}\left(\lambda^{p-N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ isto é, } \lambda^{\frac{-N}{q}}\|u\|_q \leq \mathcal{C}\lambda^{\frac{p-N}{p}}\|\nabla u\|_p,$$

ou ainda $\|u\|_q \leq \mathcal{C}\lambda^{\frac{p-N}{p}+\frac{N}{q}}\|\nabla u\|_p$, qualquer que seja $\lambda > 0$. Se $\dfrac{p-N}{p} + \dfrac{N}{q} > 0$, a desigualdade acima nos fornece uma contradição quando $\lambda \to 0^+$. Do mesmo modo, fazendo $\lambda \to \infty$, percebemos que não pode ocorrer $\dfrac{p-N}{p} + \dfrac{N}{q} < 0$. Com isso, para que valha (37) devemos ter $\dfrac{p-N}{p} + \dfrac{N}{q} = 0$, ou equivalentemente, $q = p^* := \dfrac{Np}{N-p}$. O número p^* é conhecido como **expoente crítico de Sobolev**. E de acordo com esta conclusão, temos o seguinte resultado.

Lema 4.2 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Se $1 \leq p < N$, então existe $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N,p) > 0$ tal que $\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}$, para todo $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N)$.*

Prova. Vamos considerar primeiro o caso $p = 1$ e escrever $x = (x_1, \dots, x_N)$. Como u tem suporte compacto, para cada $1 \leq i \leq N$, vale $u(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)\,\mathrm{d}y_i$, logo, $|u(x)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)|\,\mathrm{d}y_i \Longrightarrow |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}}$.

Integrando a expressão acima com respeito à variável x_1, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}}\mathrm{d}x_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{N-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=2}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}}\mathrm{d}x_1.\end{aligned} \tag{38}$$

Lembremos agora que, se $f_1, ..., f_j$ são tais que $f_i \in \mathcal{L}^{r_i}(\mathbb{R})$, $i = 1, ..., j$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} 1/r_i = 1$, então a desigualdade de Hölder generalizada nos dá $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f_1 f_2 \cdots f_j| \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^{r_1}(\mathbb{R})}\cdots\|f_j\|_{\mathcal{L}^{r_j}(\mathbb{R})}$.

Aplicando esse resultado em (38) com $j = N-1$, $r_i = N-1$ e $f_i = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\mathrm{d}y_{i+1}\right)^{\frac{1}{N-1}}$, $i = 1, ..., N-1$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{N-1}}\prod_{i=2}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}y_i\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Agora, integrando com respeito a x_2, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{N-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1,i\neq 2}^{N}F_i^{\frac{1}{N-1}}\,\mathrm{d}x_2,$$

onde

$$F_1 := \int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}y_1 \quad \text{e} \quad F_i := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_i, \quad i = 3, 4, \dots, N.$$

Aplicando Hölder novamente, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{N-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\quad \times \prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}}.\end{aligned}$$

Continuando esse processo obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\leq\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\right)^{\frac{1}{N-1}}=\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N-1}},$$

em que, na desigualdade acima, escrevemos $\mathrm{d}x_i$ no lugar de $\mathrm{d}y_i$. Segue então que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N}{N-1}},\ \text{ ou ainda, }\ \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-1}{N}}\leq\|\nabla u\|_1,$$

o que estabelece o lema no caso $p=1$.

Para $1<p<N$ vamos aplicar a desigualdade acima para $|u|^\gamma$ com $\gamma>1$ a ser escolhido posteriormente. Como $\nabla(|u|^\gamma)=\gamma|u|^{\gamma-2}u\nabla u$, temos $\left(\int|u|^{\gamma\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}}\leq\gamma\int|u|^{\gamma-1}|\nabla u|$. Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes p e $p'=p/(p-1)$, obtemos

$$\left(\int|u|^{\gamma\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}}\leq\gamma\left(\int|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int|\nabla u|^p\right)^{1/p}.$$

Vamos agora escolher γ de modo que $\dfrac{\gamma N}{N-1}=(\gamma-1)\dfrac{p}{p-1}$, isto é, $\gamma=\dfrac{p(N-1)}{N-p}>p>1$.

Com isso, a última desigualdade se torna $\left(\int|u|^{\gamma\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}-\frac{p-1}{p}}\leq\gamma\left(\int|\nabla u|^p\right)^{1/p}$. Mas, $\gamma\dfrac{N}{N-1}=\dfrac{p(N-1)}{N-p}\cdot\dfrac{N}{N-1}=\dfrac{Np}{N-p}=p^*$ e $\dfrac{N-1}{N}-\dfrac{p-1}{p}=\dfrac{pN-p-Np+N}{Np}=\dfrac{N-p}{Np}=\dfrac{1}{p^*}$ e, portanto, $\left(\int|u|^{p^*}\right)^{1/p^*}\leq\dfrac{p(N-1)}{N-p}\left(\int|\nabla u|^p\right)^{1/p}$ e o lema vale para $\mathcal{C}(N,p)=\dfrac{p(N-1)}{N-p}$.

□

Gostaríamos de estender o Lema 4.2 para funções $u\in\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Começamos com um caso particular, dado pela proposição a seguir, que motiva a definição subsequente.

Proposição 4.5. *O Lema 4.2 vale para toda função $u\in\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ que é limite de funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ com suporte compactamente contido em Ω.*

Prova. Suponha que u é tal que existe uma sequência $(u_m)\subset\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo $u_m\to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Como u_m tem suporte compacto em Ω podemos estendê-la para todo o $\mathbb{R}^N$ simplesmente fazendo $u_m|_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\equiv 0$. Observe que essa extensão não afeta a regularidade de u_m, de modo que podemos aplicar o Lema 4.2 para u_m e obter

$$\|u_m\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)}\leq\mathcal{C}\|\nabla u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.\tag{39}$$

Aplicando o Lema 4.2 também para (u_m-u_l) e lembrando que $\nabla u_m\to\nabla u$ em $\mathcal{L}^p(\Omega)^N$, concluímos que $(u_m)\subset\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Logo $u_m\to v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Como $u_m\to u$ em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ devemos ter $u=v$, isto é, $u_m\to u$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Assim, passando (39) ao limite obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)}\leq\mathcal{C}\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},\tag{40}$$

o que garante a validade do Lema 4.2 para u. □

Definição 4.5. *Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um aberto, $1\leq p\leq\infty$ e $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. O espaço $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{k,p}$, i.e., $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega):=\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}$.*

Observação 4.10. *De acordo com a Definição 4.5, $u\in\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_m)\subset\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m\to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Com isso, concluímos que $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.*

De acordo com a Proposição 4.5 e a Definição 4.5 temos a seguinte extensão do Lema 4.2 para as funções de $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 4.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $1 \leq p < N$. Então, para todo $q \in [1, p^*]$, existe $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, p, q, |\Omega|) > 0$ tal que $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq \mathcal{C}\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$.*

Prova. Pela proposição 4.5 obtemos (40), isto é, o resultado vale quando $q = p^*$. Para o caso em que $q \in [1, p^*)$ basta usar Hölder para obter $\displaystyle\int |u|^q \leq \left(\int |u|^{p^*}\right)^{q/p^*} |\Omega|^{(p^*-q)/p^*}$, o que mostra que a imersão $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ é contínua para todo $q \in [1, p^*]$. Desse modo, $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq \mathcal{C}_q\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq \widetilde{\mathcal{C}}\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$, o que conclui a prova do teorema. □

Observação 4.11. *O ponto chave para a prova do Teorema* 4.8 *(Proposição* 4.5*) foi usar a aproximação por funções em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Como toda função de $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é limite de funções desse tipo, seria natural inferir que as funções de $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ se anulam em $\partial\Omega$. Contudo, essa afirmação não faz sentido visto que $\partial\Omega$ tem medida n-dimensional de Lebesgue nula e que as funções no espaço de Sobolev são sempre definidas a menos de conjuntos de medida nula. Entretanto, veremos que, num certo sentido, podemos realmente dizer que as funções $u \in \mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ são as funções de $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ que "se anulam" na fronteira de Ω.*

4.5 Aula 16: O Teorema do Traço e o Teorema da Extensão

Começamos nossa aula destacando um importante caso particular do Teorema 4.8.

Corolário 4.1 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e $1 \leq p < N$. Então existe $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, p, |\Omega|) > 0$ tal que, $\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \mathcal{C}\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$.*

Observação 4.12. *a) Uma consequência importante da Desigualdade de Poincaré é que podemos definir em $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ a seguinte norma*

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{1/p} = \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \tag{41}$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Para ver isso observe que, se $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\|u\|^p_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^p \leq \|u\|^p_{1,p} = \int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |\nabla u|^p \leq (\mathcal{C}^p + 1)\int_\Omega |\nabla u|^p = \mathcal{C}\|u\|^p_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Assim, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente à norma usual $\|\cdot\|_{1,p}$;

b) Quando $p = 2$, temos $\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} = \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$, logo, o espaço de Hilbert que estávamos procurando é $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0^1(\Omega) = \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}} \hookrightarrow \mathcal{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$;
c) A expressão (41) não define uma norma em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. De fato, basta notar que, quando Ω é limitado, a função não nula $u \equiv 1$ está em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, mas $\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} = 0$. Por isso, quando $p = 2$, não podemos considerar $\mathcal{H}^1(\Omega)$ com o produto interno dado por (32)*.*

Como consequência do Teorema 4.8 e da Observação 4.12, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.9 (Imersão de $\mathcal{W}_0^{1,p}$, $1 \leq p < N$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $1 \leq p < N$. Então vale a imersão $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*]$.*

Observação 4.13. *Ressaltamos que a desigualdade de Poincaré e, portanto, o Teorema* 4.9 *podem não valer se Ω é ilimitado (cf. Exercício* 6.4.18*). Contudo, pode-se mostrar que ela vale se Ω é limitado em pelo menos uma direção. Em particular, temos as imersões acima no caso em que $\Omega \subseteq (a, b) \times \mathbb{R}^{N-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, veja [13, Teorema 5.5.1].*

Relembramos que pelo Teorema 4.7, quando Ω é limitado e de classe $\mathcal{C}^1$ toda função de $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ pode ser aproximada por funções $u_m \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Então faz sentido falar dos valores de u_m em $\partial\Omega$, pois u_m é regular até a fronteira. Utilizando-se dessa aproximação, é possível introduzir um operador que nos permite falar dos valores de fronteira de uma função no espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Mais especificamente, vale o **Teorema do Traço**, cuja prova pode ser encontrada em [5, Teorema 1, Seção 5.5].

Teorema 4.10 (Teorema do Traço)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$ e $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador linear limitado $\mathcal{T} : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ tal que,*

(i) $\mathcal{T}u = u_{|\partial\Omega}$ *se* $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$;

(ii) *existe* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(p, \Omega) > 0$ *tal que* $\|\mathcal{T}u\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leq \mathcal{C}\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, $\forall\, u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Observação 4.14. *a) O operador definido no Teorema* 4.10 *é chamado* **operador Traço** *e nos permite identificar $\mathcal{T}u$ como sendo os valores na fronteira de uma função $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$;*
b) A existência do operador Traço está ligada com o fato das funções de $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ possuírem derivada fraca. Uma construção semelhante não pode ser feita de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ em $\mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ (Exercício 6.4.19*). Por isso não é natural de falar dos valores de fronteira de $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$;*
c) Suponha que $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ e seja $(u_m) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Como o operador Traço é contínuo temos que $\mathcal{T}u = \lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{T}u_m = 0$. Desse modo, $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathrm{Ker}\mathcal{T}$. Mais ainda, a recíproca também é verdadeira, veja [5, Teorema 2, Seção 5.5]. Portanto, vale o seguinte resultado que afirma que as funções de $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ "se anulam" em $\partial\Omega$.

Teorema 4.11 (Caracterização de $\mathcal{W}_0^{1,p}$ em relação ao Traço)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$ e $1 \leq p < \infty$. Então $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $\mathcal{T}u = 0$ em $\partial\Omega$.*

Observação 4.15. *Não podemos obter um resultado de imersão análogo ao Teorema* 4.9 *para o espaço $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ usando o argumento de extensão da Proposição* 4.5*. De fato, em vista do Teorema* 4.11*, existem funções no espaço $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ que não têm Traço igual a zero. Portanto, não é possível estender $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ fazendo $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, pois isso poderia criar descontinuidades em $\partial\Omega$, de modo que a função estendida não possuísse derivada fraca.*

O próximo resultado mostra que, se Ω é regular, então é possível estender qualquer função de $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ de modo que a função estendida pertença a $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Diferentemente do Lema 4.2, o resultado de extensão abaixo vale para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 4.12 (Teorema de Extensão)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ um aberto tal que $\Omega \subset\subset \widetilde{\Omega}$. Então existe um operador linear limitado $\mathcal{E} : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que, para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, vale*

(i) $\mathcal{E}u(x) = u(x)$ *q.t.p. em* Ω; (ii) $\mathrm{supp}(\mathcal{E}u) \subset\subset \widetilde{\Omega}$;

(iii) *existe* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(p, \Omega, \widetilde{\Omega}) > 0$ *tal que* $\|\mathcal{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$.

Observação 4.16. *A prova do Teorema* 4.12 *pode ser encontrada em [5, Teorema 1, Seção 5.4]. Para uma versão mais geral, com menos regularidade em Ω, veja [1, Teorema 4.2.6]. O operador $\mathcal{E}$ é chamado* **operador de Prolongamento***. Pode-se mostrar que o mesmo resultado vale para $\mathbb{R}^N_+$ e para $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, em que Ω é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$.*

Usando o operador de Prolongamento, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.13 (Imersão de $\mathcal{W}^{1,p}$, $1 \leq p < N$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$ e $1 \leq p < N$. Então vale a imersão $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*]$.*

Prova. Vamos considerar primeiro o caso $q = p^*$ e obter uma constante $\mathcal{C} > 0$ tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq \mathcal{C}\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega).$$

Seja $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, B uma bola tal que $\Omega \subset\subset B$ e considere $\overline{u} := \mathcal{E}u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ a extensão de u dada pelo Teorema 4.12. Uma vez que $\operatorname{supp}(\overline{u}) \subset\subset B$ está contido na bola, existe uma sequência $(u_m) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_m \to \overline{u}$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Segue do Lema 4.2 que $\|u_m - u_l\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}_1\|\nabla u_m - \nabla u_l\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}$. Como (u_m) converge em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ concluímos que o lado direito da expressão acima tende a zero quando $l, m \to \infty$. Desse modo $(u_m) \subset \mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, $u_m \to \overline{u}$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Logo passando a expressão $\|u_m\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}_1\|\nabla u_m\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}$ ao limite e usando o Teorema 4.12 obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq \|\mathcal{E}u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}_1\|\nabla(\mathcal{E}u)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}_1\|\mathcal{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde a constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, p, \Omega) > 0$ é independente de u. Considere agora $1 \leq q < p^*$. Conforme visto na prova do Teorema 4.8 temos a imersão contínua $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$. Logo $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, o que conclui a prova. □

Observação 4.17. *Um ponto que merece destaque é que a imersão de $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, diferente daquela de $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, não exige regularidade da fronteira de $\partial\Omega$. Isso ocorre porque, no caso de $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, não precisamos usar o operador de Prolongamento.*

O argumento da prova acima pode ser ligeiramente adaptado para provar imersões para domínios mais gerais, inclusive ilimitados. Um exemplo pode ser visto no resultado abaixo.

Teorema 4.14. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é tal que a imersão $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ é contínua, então $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p^*]$, independente de Ω ser limitado ou regular.*

Prova. Se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, então $u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Fixado $q \in (p, p^*)$ podemos usar $1/p^* < 1/q < 1/p$ para obter $t \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{q} = (1-t)\frac{1}{p} + t\frac{1}{p^*}$. Então, da desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega |u|^q = \int_\Omega |u|^{tq}|u|^{(1-t)q} \leq \left(\int_\Omega |u|^{tq\frac{p^*}{tq}}\right)^{\frac{tq}{p^*}} \left(\int_\Omega |u|^{(1-t)q\frac{p}{(1-t)q}}\right)^{\frac{(1-t)q}{p}},$$

isto é, $\|u\|_q \leq \|u\|_{p^*}^t \|u\|_p^{1-t}$ Esta desigualdade é conhecida como **Desigualdade de Interpolação**. Como $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, usando a definição de $\|\cdot\|_{1,p}$, obtemos

$$\|u\|_q \leq \mathcal{C}_1\|u\|_{1,p}^t \|u\|_p^{1-t} \leq \mathcal{C}_1\|u\|_{1,p}^t \|u\|_{1,p}^{1-t} = \mathcal{C}\|u\|_{1,p},$$

para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Desse modo, vale a imersão $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$. □

O caso $p = N$

O Teorema 4.13 considera o caso $1 \leq p < N$. Como $p^* = Np/(N-p) \to +\infty$ quando $p \to N^-$, poderíamos pensar que $\mathcal{W}^{1,N}(\Omega) \subset \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Mas isso não é verdade em geral (Exercício 6.4.20). No entanto, podemos usar o Teorema 4.13 para considerar o caso $p = N$.

Teorema 4.15 (Imersão de $\mathcal{W}^{1,N}$). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$, então vale a imersão $\mathcal{W}^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$.*

Prova. Suponha que $n > 1$ e considere $q \geq 1$ fixado. Usando a definição de expoente crítico de Sobolev obtemos $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} (N - \varepsilon)^* = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{N(N-\varepsilon)}{N - (N-\varepsilon)} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{N(N-\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty$. Desse modo, para $\varepsilon > 0$ pequeno, devemos ter $(N-\varepsilon)^* > q$ e $N - \varepsilon \geq 1$. Então, basta agora observar que

$$\mathcal{L}^N(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{N-\varepsilon}(\Omega) \Rightarrow \mathcal{W}^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{1,N-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{(N-\varepsilon)^*}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega),$$

o que prova o resultado. No caso 1-dimensional as funções de $\mathcal{W}^{1,N}(\Omega)$ são de fato absolutamente contínuas e, portanto, o resultado segue imediatamente (Exercício 6.4.24). □

4.6 Aula 17: Imersões dos Espaços $\mathcal{W}^{k,p}$: A Desigualdade de Morey

Começamos nossa aula com o último caso.

O caso $p > N$

Lema 4.3. *Se $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, então* $\displaystyle\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{r^N}{N} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}} dy.$

Prova. Fixados $w \in \partial B_1(0)$ e $0 < s < r$, temos que

$$|u(x+sw) - u(x)| = \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tw)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^s \nabla u(x+tw) \cdot w\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^s |\nabla u(x+tw)|\,\mathrm{d}t.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw) - u(x)|\,\mathrm{d}\sigma_w &\leq \int_{\partial B_1(0)} \left(\int_0^s |\nabla u(x+tw)|\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\sigma_w \\
&= \int_0^s \left(\int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+tw)|\,\mathrm{d}\sigma_w \right) \mathrm{d}t = \int_0^s \left(\int_{\partial B_t(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{t^{N-1}}\,\mathrm{d}\sigma_y \right) \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^r \left(\int_{\partial B_t(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{N-1}}\,\mathrm{d}\sigma_y \right) \mathrm{d}t = \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Multiplicando por s^{N-1} e integrando, com respeito a s, no intervalo $[0,r]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{r^N}{N} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,\mathrm{d}y &\geq \int_0^r \left(\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw) - u(x)|\,\mathrm{d}\sigma_w \right) s^{N-1} \mathrm{d}s \\
&= \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x)} \frac{|u(y) - u(x)|}{s^{N-1}}\,\mathrm{d}\sigma_y \right) s^{N-1} \mathrm{d}s = \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

Utilizando o Lema 4.3 vamos provar uma estimativa essencial para as imersões de Sobolev.

Lema 4.4 (Desigualdade de Morey)**.** *Se $N < p \leq \infty$ e $\gamma = 1 - (N/p) \in (0,1)$, então existe $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N,p) > 0$ tal que, $||u||_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$, para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$.*

Prova. Seja $N < p < \infty$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Como

$$|u(x)| = |u(x) - u(y) + u(y)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)|,$$

podemos integrar com relação a y, para obter

$$\int_{B_1(x)} |u(x)|\,\mathrm{d}y \leq \int_{B_1(x)} |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{B_1(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}y,$$

ou ainda

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\omega_N} \int_{B_1(x)} |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\omega_N} \int_{B_1(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Aplicando agora o Lema 4.3 e lembrando que $\mathcal{L}^p(B_1(x)) \hookrightarrow \mathcal{L}^1(B_1(x))$, temos

$$|u(x)| \leq \overline{\mathcal{C}} \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|\,\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-1}} + \widetilde{\mathcal{C}}||u||_{\mathcal{L}^1(B_1(x))} \leq \overline{\mathcal{C}} \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|\,\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-1}} + \widehat{\mathcal{C}}||u||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (42)$$

Utilizando a desigualdade de Hölder podemos estimar a integral acima. Seja $p' = p/(p-1)$ o expoente conjugado de p e observe que

$$\int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,\mathrm{d}y \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p/(p-1)}}\,\mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p}. \quad (43)$$

A primeira integral do lado esquerdo acima é finita porque $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Para ver que a segunda também é finita basta notar que

$$\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p/(p-1)}}\,\mathrm{d}y = \int_{B_1(0)} |w|^{-(N-1)p/(p-1)}\,\mathrm{d}w$$

e lembrar que $\displaystyle\int_{B_1(0)} |w|^{-\alpha}\mathrm{d}w < \infty$ se, e somente se, $\alpha < N$. Quando $\alpha = (N-1)p/(p-1)$ esta condição de integrabilidade é exatamente $N < p$, que é o caso que estamos considerando. Dessa forma

$$\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p/(p-1)}}\,\mathrm{d}y = \widetilde{\mathcal{C}}(N,p) = \widetilde{\mathcal{C}} < \infty.$$

Substituindo a igualdade acima e (43) em (42), concluímos que

$$|u(x)| \le \overline{\mathcal{C}}\widetilde{\mathcal{C}}^{(p-1)/p}\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} + \widehat{\mathcal{C}}||u||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} \le \mathcal{C}\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

e portanto

$$||u||_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)} \le \mathcal{C}||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \quad (44)$$

A fim de estimar $H_\gamma[u]$ escolhemos $x, y \in \mathbb{R}^N$ com $x \ne y$ e fazemos $r := |x-y|$ e $\Omega := B_r(x) \cap B_r(y)$. Observe que para todo $z \in \mathbb{R}^N$, $|u(x)-u(y)| \le |u(x)-u(z)|+|u(z)-u(y)|$ e, portanto, podemos integrar em Ω com respeito a z para obter

$$|u(x)-u(y)| \le \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(z)-u(y)|\,\mathrm{d}z, \quad (45)$$

em que $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto Ω. Como $B_{r/2}(\frac{x+y}{2}) \subseteq \Omega$ temos que

$$|\Omega| \ge \left|B_{r/2}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| = \omega_N\left(\frac{r}{2}\right)^N.$$

Logo, podemos usar o Lema 4.3 e a desigualdade de Hölder como há pouco, para obter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z &\le \frac{2^N}{\omega_N r^N}\int_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z \le \frac{2^N}{N\omega_N}\int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}}\,\mathrm{d}z \\
&\le \widetilde{\mathcal{C}}(n)\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{B_r(0)} |w|^{-(N-1)p/(p-1)}\,\mathrm{d}w\right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}$$

Mas $\displaystyle\int_{B_r(0)} |w|^{-(N-1)p/(p-1)}\,\mathrm{d}w = \int_0^r\int_{\partial B_s(0)} |w|^{-(N-1)p/(p-1)}\,\mathrm{d}\sigma_w\,\mathrm{d}s = \widetilde{\mathcal{C}}(N,p)r^{(p-N)/(p-1)}$.

Assim, (45) implica que $\displaystyle|u(x)-u(y)| = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}z \le \widetilde{\mathcal{C}}(n)\widetilde{\mathcal{C}}r^{1-N/p}\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}$.

Ou seja, $|u(x)-u(y)| \le \mathcal{C}r^{1-N/p}\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$. Como $r = |x-y|$ e $\gamma = 1-N/p$, concluímos que $H_\gamma[u] \le \mathcal{C}\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$. Isso, juntamente com (44), mostra que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)} \le \mathcal{C}(N,p)\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

o que conclui a prova no caso em que $N < p < \infty$. Para o caso $p = \infty$, basta usar a definição da norma em $\mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ e o Teorema do Valor Médio (Exercício 6.4.21). □

Usando a Desigualdade de Morey em vez da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e argumentando como na prova do Teorema 4.13 temos o teorema a seguir (Exercício 6.4.22).

Teorema 4.16 (Imersão de $\mathcal{W}^{1,p}$, $N < p$)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$, então vale a imersão $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega})$.*

Observação 4.18. *É importante entender o significado da imersão no Teorema 4.16. Como as funções de $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ pertencem ao espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\Omega)$, são definidas a menos de conjuntos de medida nula. Sendo assim, o teorema diz que, se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $N < p$, então existe $u^* \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,1-N/p}(\overline{\Omega})$ tal que $u(x) = u^*(x)$ q.t.p. em Ω. Um outro ponto que merece destaque é que a imersão acima também vale se $p = +\infty$. Nesse caso, mostra-se que $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega)$ se, e somente se, u é Lipschitziana em Ω (cf. [5, Teorema 4, Seção 5.8]).*

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$, então os resultados de imersão apresentados até agora podem ser sumarizados como

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}^q(\Omega),\ 1 \le q \le p^* = \frac{Np}{N-p}, \text{ se } 1 \le p < N, \\ \mathcal{L}^q(\Omega),\ 1 \le q < \infty, \quad \text{se } p = N, \\ \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega}), \quad \text{se } p > N. \end{cases}$$

A partir das imersões acima, obtemos imersões para os espaços $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ quando $k > 1$.

Teorema 4.17 (Imersão de $\mathcal{W}^{k,p}$)**.** *[1, Teorema 5.4] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \le p \le \infty$. Então,*

(i) *se $kp < N$, $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $1 \le q \le \frac{Np}{N-kp}$;*

(ii) *se $kp = N$, $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $1 \le q < \infty$;*

(iii) *se $kp > N$, $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-[\frac{N}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\gamma = \begin{cases} [\frac{N}{p}] + 1 - \frac{N}{p}, \text{ se } \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ \text{para todo em } (0,1), \text{ se } \frac{N}{p} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ e $[N/p]$ é o maior inteiro que é menor ou igual a N/p.*

Prova. Vamos mostrar o caso $k = 2$, os demais casos seguem por iteração do mesmo argumento. Suponha inicialmente que $1 \le p < N$ e seja $u \in \mathcal{W}^{2,p}(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sendo um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$. Note que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, , para cada $i = 1, \dots, N$. Uma vez que $u \in \mathcal{W}^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, concluímos que $u \in \mathcal{W}^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{1,p^*}(\Omega)$. Suponha adicionalmente que $1 \le p^* < N$, isto é, que $2p < N$. Nesse caso, segue que $\mathcal{W}^{1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{(p^*)^*}(\Omega)$, onde $(p^*)^* = \dfrac{Np^*}{N - p^*} = \dfrac{Np}{N - 2p}$. Ou seja, se $2p < N$, então vale a seguinte imersão $\mathcal{W}^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)$. O caso $N = 2p$ pode ser tratado analogamente ao Teorema 4.15, pois fazendo $2p \to N^-$ temos $(p^*)^* \to +\infty$. Já o caso $N < p < 2p$ pode ser tratado considerando o Teorema 4.16, pois

$$\mathcal{W}^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-N/p}(\overline{\Omega}).$$

E para o caso $p < N < 2p$, temos $\mathcal{W}^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-N/p}(\overline{\Omega})$, pois $N < 2p \iff N < p^*$. $\square$

Observação 4.19. *O Teorema 4.17 continua válido se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto possivelmente ilimitado de classe $\mathcal{C}^1$ com a restrição $q \ge p$ nos dois primeiros itens.*

4.7 Aula 18: Imersões Compactas de Sobolev, O Teorema de Rellich-Kondrachov

Começamos a aula de hoje, observando que como no caso dos espaços de Hölder, podemos obter imersões compactas dos espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, conforme o resultado seguinte.

Teorema 4.18 (Rellich-Kondrachov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$.*

(i) *Se $1 \le p < N$ e $1 \le q < p^*$, então $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega)$.*

(ii) *Se $p = N$ e $1 \le q < \infty$, então $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega)$.*

(iii) *Se $N < p$ e $0 < \gamma < 1 - (N/p)$, então $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.*

Além disso, as imersões de $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ nos espaços acima são compactas, independentemente da regularidade de Ω.

Prova. Consideremos primeiro o caso $1 \le p < N$. Fixado $1 \le q < p^*$, seja $(u_m) \subset \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada. Usando o operador de Prolongamento, podemos supor que u_m está definida em todo o $\mathbb{R}^N$ e $\operatorname{supp}(u_m) \subset\subset B$ em que B é uma bola tal que $\Omega \subset\subset B$. Com isso, temos que a extensão, ainda denotada por u_m, pertence a $\mathcal{W}_0^{1,p}(B)$. Além disso, o operador Prolongamento garante que $\|u_m\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \le \mathcal{M}$, para algum $\mathcal{M} > 0$, já que (u_m) é limitada em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Para cada $\varepsilon > 0$, seja η_ε a função núcleo regularizante e considere $u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m$. Podemos supor que $\varepsilon > 0$ é pequeno de modo que $\operatorname{supp}(u_m^\varepsilon) \subset\subset B$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar as seguintes afirmações e utilizá-las para garantir a veracidade do item (i):

Afirmação 1: a sequência $(u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e equilimitada.

Afirmação 2: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} u_m^\varepsilon = u_m$, uniformemente em $\mathcal{L}^q(B)$.

Para mostrar a primeira afirmação, observe que

$$u_m^\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)u_m(y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon^{-N}\int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u_m(y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{logo}$$

$$|u_m^\varepsilon(x)| \le \varepsilon^{-N}\|\eta\|_\infty \|u_m\|_{\mathcal{L}^1(B_\varepsilon(x))} \le \mathcal{C}_1\varepsilon^{-N}\|u_m\|_{\mathcal{L}^p(B)} \le \mathcal{C}_2\varepsilon^{-N}\|u_m\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \le \mathcal{C}_2\mathcal{M}\varepsilon^{-N},$$

o que garante que $(u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ é equilimitada. De maneira análoga, obtemos $|\nabla u_m^\varepsilon(x)| \le \mathcal{C}_3/\varepsilon^{N+1}$, e, portanto, as derivadas das funções u_m^ε formam uma sequência equilimitada no conjunto convexo B. Segue então da Desigualdade do Valor Médio que $|u_m^\varepsilon(x) - u_m^\varepsilon(y)| \le \frac{\mathcal{C}_3}{\varepsilon^{(N+1)}}|x-y|$, para todo $x, y \in B$, isto é, a sequência $(u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e, portanto, temos a primeira afirmação. Note agora que, se $v \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$, então para todo $\varepsilon > 0$ pequeno temos

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)v(x-z)\,\mathrm{d}z = \varepsilon^N \int_{B_1(0)} \eta_\varepsilon(\varepsilon y)v(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y \\ &= \varepsilon^N \int_{B_1(0)} \frac{1}{\varepsilon^N}\eta\left(\frac{|\varepsilon y|}{\varepsilon}\right) v(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_1(0)} \eta(|y|)v(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x) - v(x) &= \int_{B_1(0)} \eta(|y|)(v(x-\varepsilon y) - v(x))\,\mathrm{d}y = \int_{B_1(0)} \eta(|y|)\int_0^1 \frac{d}{dt}(v(x-t\varepsilon y))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= -\varepsilon\int_{B_1(0)} \eta(|y|)\int_0^1 \nabla v(x-t\varepsilon y)\cdot y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \quad \text{e, portanto,} \end{aligned}$$

$$\int_B |v^\varepsilon(x) - v(x)|\,\mathrm{d}x \le \varepsilon\int_{B_1(0)} \eta(|y|)\int_0^1\int_B |\nabla v(x-\varepsilon ty)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \le \varepsilon\int_B |\nabla v(z)|\,\mathrm{d}z,$$

ou ainda,
$$\|v^\varepsilon - v\|_{\mathcal{L}^1(B)} \leq \varepsilon \|\nabla v(z)\|_{\mathcal{L}^1(B)}. \tag{46}$$

Como cada função $u_m \in \mathcal{W}_0^{1,p}(B)$ pode ser aproximada por funções de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{B})$, então a desigualdade (46) ainda vale se substituirmos v por u_m (Exercício 6.4.23). Logo, a limitação de B e $p > 1$ implicam que
$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{\mathcal{L}^1(B)} \leq \varepsilon \|\nabla u_m\|_{\mathcal{L}^1(B)} \leq \varepsilon \mathcal{C}_4 \|\nabla u_m\|_{\mathcal{L}^p(B)} \leq \varepsilon \mathcal{C}_4 \mathcal{M}.$$

Portanto, $u_m^\varepsilon \to u_m$ em $\mathcal{L}^1(B)$, uniformemente em m. Isso prova a Afirmação 2 se $q = 1$. Para o caso $1 < q < p^*$, argumentamos como na prova do Teorema 4.14 para obter $t \in (0,1)$ tal que
$$\begin{aligned}\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{\mathcal{L}^q(B)} &\leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|^{1-t}_{\mathcal{L}^1(B)} \|u_m^\varepsilon - u_m\|^t_{\mathcal{L}^{p^*}(B)} \\ &\leq \mathcal{C}_5 \|u_m^\varepsilon - u_m\|^{1-t}_{\mathcal{L}^1(B)} \|u_m^\varepsilon - u_m\|^t_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq \mathcal{C}_6 \|u_m^\varepsilon - u_m\|^{1-t}_{\mathcal{L}^1(B)}.\end{aligned}$$

Portanto, a Afirmação 2 segue da convergência uniforme em $\mathcal{L}^1(B)$.

Para mostrar o item (i), observe que dado $\delta > 0$, a Afirmação 2 garante $\varepsilon > 0$ tal que $\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{\mathcal{L}^q(B)} < \dfrac{\delta}{4}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso, a Afirmação 1 e o Teorema 3.12 de Arzelá-Ascoli, implicam a existência de uma subsequência $(u_{m_j}^\varepsilon)_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em B para algum $u_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{B})$. Em particular, como B é limitado, $\limsup\limits_{j,k\to+\infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(B)} \leq \mathcal{C}_7 \limsup\limits_{j,k\to+\infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_0 = 0$, pois $(u_{m_j}^\varepsilon)$ é de Cauchy em $\mathcal{C}(\overline{B})$. Assim,
$$\|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{\mathcal{L}^q(B)} \leq \|u_{m_j} - u_{m_j}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(B)} + \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(B)} + \|u_{m_k}^\varepsilon - u_{m_k}\|_{\mathcal{L}^q(B)},$$

e, portanto, $\limsup\limits_{j,k\to+\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{\mathcal{L}^q(B)} < \delta$. Tomando agora $\delta_j = 1/j$, $j = 1, 2, \ldots$, e usando um processo diagonal obtemos uma subsequência de $(u_{\widetilde{m}_j}) \subset (u_m)$ tal que $\|u_{\widetilde{m}_j} - u_{\widetilde{m}_k}\|_{\mathcal{L}^q(B)} < 2/j$ para todo $\widetilde{m}_k \geq \widetilde{m}_j$. Logo, fazendo $j \to \infty$, vemos que esta subsequência é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^q(B)$. Portanto, tal subsequência converge nos espaços $\mathcal{L}^q(\Omega) \subset \mathcal{L}^q(B)$.

Para mostrar o item (ii) vamos considerar somente o caso $p = N > 1$, pois na reta vale um resultado mais geral (Exercício 6.4.24). Fixado $q \geq 1$, escolhemos $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $(N - \varepsilon)^* > q$. Temos então $\mathcal{W}^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{1,(N-\varepsilon)}(\Omega) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega)$, e o resultado segue do fato da composição de um operador contínuo com um operador compacto ser compacta. O item (iii) segue do diagrama $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-N/p}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, em que usamos as imersões compactas dos espaços de Hölder provadas na Aula 10, Teorema 3.13.

Finalmente, para verificar que no caso de $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ vale a compacidade das imersões acima sem hipóteses de regularidade em Ω, consideramos uma bola aberta B tal que $\Omega \subset\subset B$ e estendemos as funções $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ para todo a bola fazendo $u \equiv 0$ em $B \setminus \Omega$. Como a bola é de classe $\mathcal{C}^1$, argumentando como acima, obtemos a compacidade das imersões. $\square$

5 Soluções Fracas para Equações Lineares de 2° Ordem

5.1 Aula 19: O Problema de Poisson para um Operador na Forma Divergente

Nessa aula vamos considerar o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e a função f pode não ser regular, digamos $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. O operador $\mathcal{L}$ será considerado linear de segunda ordem e na **forma divergente**, isto é,

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^{N} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u. \tag{$\mathcal{L}_D$}$$

Os coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ e vamos supor ainda que $\mathcal{L}$ é simétrico e uniformemente elíptico em Ω, isto é, existe $\theta_0 > 0$ tal que, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\xi A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta_0|\xi|^2 \text{ e a matriz } A(x) = (a^{ij}(x)) \text{ é simétrica para cada } x \in \Omega.$$

Observação 5.1. *Como f não é regular, não podemos aplicar os resultados clássicos vistos anteriormente para operadores lineares de 2° ordem. Por isso, vamos introduzir um conceito mais abrangente de solução e buscar soluções nos espaços de Sobolev.*

Suponhamos inicialmente que os coeficientes de $\mathcal{L}$ são suaves e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica de $(\mathcal{P})$. Multiplicado a equação em $(\mathcal{P})$ por $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e integrando por partes obtemos

$$\int \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i}v + \int c(x)uv = \int f(x)v.$$

A expressão acima vale para toda função teste. Vamos mostrar que ela também vale para funções do espaço de Sobolev $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. De fato, se $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, então existe $(v_m) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $v_m \to v$ em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Logo,

$$v_m \to v, \qquad (v_m)_{x_j} \to v_{x_j} \qquad \text{em } \mathcal{L}^2(\Omega), \tag{47}$$

para qualquer $j = 1, \ldots, N$. Como as funções v_m são regulares, vale

$$\int \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_i}(v_m)_{x_j} + \int \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i}v_m + \int c(x)uv_m = \int f(x)v_m. \tag{48}$$

Note agora que, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int a^{ij}(x)u_{x_i}(v_m)_{x_j} - \int a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} \right| \leq \|a^{ij}\|_\infty \|u_{x_i}\|_2 \|(v_m)_{x_j} - v_{x_j}\|_2$$

e, portanto, segue de (47) que $\lim_{m\to\infty} \int a^{ij}(x)u_{x_i}(v_m)_{x_j} = \int a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}$. Como $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, podemos proceder de maneira análoga para mostrar que valem as seguintes convergências

$$\int b^i(x)u_{x_i}v_m \to \int b^i(x)u_{x_i}v, \quad \int c(u)uv_m \to \int c(x)uv, \quad \int f(x)v_m \to \int f(x)v.$$

Passando então a igualdade (48) ao limite, concluímos que ela vale para toda função $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 5.1. *Dizemos que $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema $(\mathcal{P})$ se*

$$\int \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^{N} b^i(x) u_{x_i} v + \int c(x) uv = \int f(x) v, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Observação 5.2. *Na igualdade acima, as derivadas das funções u e v são derivadas fracas. Uma vez que os coeficientes de $\mathcal{L}$ estão em $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$, todas as integrais acima estão bem definidas. Finalmente, note que uma solução fraca do problema **pode não ter** derivadas no sentido clássico. Apenas é necessário que a equação integral acima seja satisfeita. Desse modo, há mais chances de se obter uma solução fraca do que uma solução clássica.*

Definição 5.2. *Definimos por $\mathcal{B} : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ a seguinte forma bilinear*

$$\mathcal{B}[u, v] := \int \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^{N} b^i(x) u_{x_i} v + \int c(x) uv. \tag{$\mathcal{B}$}$$

associada a formulação fraca do problema $(\mathcal{P})$. De fato, com essa notação, $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ é solução fraca de $(\mathcal{P})$ se, e somente se, $\mathcal{B}[u, v] = \displaystyle\int f(x) v$, para todo $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Exemplo 5.1. *Vamos considerar o caso $\mathcal{L} = -\Delta$, cuja formulação fraca é dada por encontrar $u \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\mathcal{B}[u, v] = \displaystyle\int (\nabla u \cdot \nabla v) = \int f v$, para todo $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Lembremos que em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ podemos introduzir o seguinte produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \int (\nabla u \cdot \nabla v), \quad \forall\, u,\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Desse modo, a formulação fraca se reduz a $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \displaystyle\int f(x) v$, para todo $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. O lado direito da expressão pode ser visto como a ação do funcional linear $T_f : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $v \mapsto T_f(v) := \displaystyle\int f(x) v$. Usando a Desigualdade de Poincaré, obtemos

$|T_f(v)| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \mathcal{C} \|f\|_2 \left(\displaystyle\int |\nabla v|^2 \right)^{1/2} = \mathcal{C} \|f\|_2 \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}$, o que mostra que T_f é contínuo. Segue então do Teorema da Representação de Riesz que existe uma única função $u_f \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\langle u_f, v \rangle_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = T_f(v) = \displaystyle\int f(x) v$, para todo $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Logo u_f é a única solução fraca do problema $(\mathcal{P})$, como já havíamos inferido nas aulas anteriores.

A ideia do Exemplo 5.1 pode ser estendida para uma classe maior de operadores. Suponha que $b^i \equiv 0$ para $i = 1, \ldots, N$ e que $c \geq 0$ em Ω. Nesse caso, a forma bilinear associada ao problema $(\mathcal{P})$ é $\mathcal{B}[u, v] = \displaystyle\int \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int c(x) uv$ e temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico em Ω da forma*

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{N} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x) u, \ \text{com } a^{ij},\, c \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \ \text{e } c \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Então para toda $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ o problema $\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{L}u & = & f, & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$ tem exatamente uma solução fraca em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Prova. Como não existem os termos de primeira ordem, $\mathcal{B}$ é simétrica. Além disso, podemos usar a elipticidade uniforme de $\mathcal{L}$, $c \geq 0$ e a desigualdade de Poincaré novamente, para obter

$$\mathcal{B}[u,u] = \int \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + \int c(x) u^2 \geq \theta_0 \int |\nabla u|^2 \geq \mathcal{C} \int |u|^2,$$

com $\mathcal{C} > 0$ independente de u. A expressão acima mostra que $\mathcal{B}[u,u] = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma forma bilinear, simétrica e positiva definida. Logo, $\mathcal{B}$ define um produto interno em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, cuja norma induzida é $\|u\|_{\mathcal{B}} := \mathcal{B}[u,u]^{1/2}$. Para aplicar o Teorema de Riesz e obtermos uma solução fraca precisamos verificar que $v \xmapsto{T_f} \int fv$ é um funcional linear contínuo no espaço de Hilbert $(\mathcal{H}_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$. Para tanto, observe primeiro que o espaço em questão é, de fato, um espaço de Hilbert porque a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ é equivalente a norma usual de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Além disso, se $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, então, por Poincaré temos $|T_f(v)| \leq \mathcal{C}_1 \|f\|_2 \|\nabla v\|_2$. Como $\mathcal{B}[v,v] \geq \theta_0 \|\nabla v\|_2^2$ obtemos $|T_f(v)| \leq \mathcal{C}_2 \theta_0^{-1/2} \mathcal{B}[v,v]^{1/2} = \mathcal{C}_3 \|v\|_{\mathcal{B}}$. Desse modo, essa nova topologia em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ mantém a continuidade de T_f e podemos aplicar o Teorema de Riesz para obter $u_f \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\mathcal{B}[u_f, v] = \int f(x) v, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. □

Gostaríamos agora de resolver o problema $(\mathcal{P})$ no caso geral em que existem os termos de primeira ordem. Lembre-se que, nesse caso, a forma bilinear associada ao problema é

$$\mathcal{B}[u,v] = \int \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^{N} b^i(x) u_{x_i} v + \int c(x) uv. \tag{$\mathcal{B}$}$$

Devido à presença dos termos de primeira ordem, $\mathcal{B}$ pode não ser simétrica. Nesse caso, o lado esquerdo da formulação fraca do problema não é mais um produto interno e não podemos aplicar o Teorema de Riesz. Para superar essa dificuldade vamos utilizar o resultado de Análise Funcional conhecido como Teorema de Lax-Milgram.

5.2 Aula 20: O Teorema de Lax-Milgram

Nessa aula generalizaremos os argumentos da aula passada substituindo o Teorema da Representação de Riesz pelo seguinte resultado.

Teorema 5.2 (Lax-Milgram)**.** *[3, Corolário 5.8] Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear satisfazendo*

(i) *existe $\kappa > 0$ tal que, para todo $u, v \in \mathcal{H}$, $|\mathcal{B}[u,v]| \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, u, v \in \mathcal{H}$.*

(ii) *existe $\tau > 0$ tal que, $\mathcal{B}[u,u] \geq \tau \|u\|^2, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}$.*

Então, dado um funcional linear contínuo $T : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, existe um único $u_T \in \mathcal{H}$ tal que

$$T(u) = \mathcal{B}[u_T, u], \quad \forall\, u \in \mathcal{H}.$$

Prova. Para cada $u \in \mathcal{H}$ fixado, a aplicação $v \xmapsto{T_u} \mathcal{B}[u,v]$ é um funcional linear contínuo. Logo, pelo Teorema de Riesz, existe $\widetilde{u} \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{B}[u,v] = \langle \widetilde{u}, v\rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $v \in \mathcal{H}$. Variando u, podemos construir um operador $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ de tal modo que, para cada $u \in \mathcal{H}$, o vetor $\mathcal{A}u := \widetilde{u}$ é o único elemento de $\mathcal{H}$ que satisfaz $\mathcal{B}[u,v] = \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{\mathcal{H}}$, para todo par $u, v \in \mathcal{H}$. Por sua definição, vemos que $\mathcal{A}$ é linear. Além disso,

$$\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \mathcal{A}u, \mathcal{A}u\rangle_{\mathcal{H}} = \mathcal{B}[u, \mathcal{A}u] \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{H}}$$

e, portanto, $\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{H}}$ o que mostra que $\mathcal{A}$ é contínuo. Utilizando agora (ii) obtemos $\tau \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \mathcal{B}[u,u] = \langle \mathcal{A}u, u\rangle_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}$, então segue que

$$\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{H}} \geq \tau \|u\|_{\mathcal{H}}, \tag{49}$$

o que implica que $\mathcal{A}$ é injetivo e que a imagem de $\mathcal{A}$, $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, é fechada em $\mathcal{H}$ (Exercício 6.5.2). Além disso, $\mathcal{A}$ também é sobrejetivo. De fato, suponha por contradição que $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{H}$.

Como $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ é um subespaço próprio fechado de $\mathcal{H}$, o seu complementar ortogonal $\mathrm{Im}(\mathcal{A})^{\perp}$ é não trivial. Desse modo, se $w \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})^{\perp} \setminus \{0\}$, temos que $\tau \|w\|^2 \leq \mathcal{B}[w,w] = \langle \mathcal{A}w, w\rangle = 0$, o que é absurdo, visto que $\tau > 0$ e $w \neq 0$. Assim, o operador $\mathcal{A}$ é sobrejetivo. Além disso, pelo Teorema de Riesz, existe um único $\overline{u} \in \mathcal{H}$ tal que $T(u) = \langle \overline{u}, u\rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $u \in \mathcal{H}$. A sobrejetivade de $\mathcal{A}$ nos fornece $u_T \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A}(u_T) = \overline{u}$. Logo,

$$T(u) = \langle \overline{u}, u\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{A}(u_T), u\rangle = \mathcal{B}[u_T, u], \quad \forall\, u \in \mathcal{H}.$$

Para mostrar que o elemento u_T é único, suponha que existe $\widetilde{u}_T \in \mathcal{H}$ tal que $T(u) = \mathcal{B}[\widetilde{u}_T, u]$, para todo $u \in \mathcal{H}$. Então, escolhendo $u = u_T - \widetilde{u}_T$, obtemos
$0 = T(u_T - \widetilde{u}_T) - T(u_T - \widetilde{u}_T) = \mathcal{B}[u_T - \widetilde{u}_T, u_T - \widetilde{u}_T] \geq \tau \|u_T - \widetilde{u}_T\|^2_{\mathcal{H}}$, o que mostra que $u_T = \widetilde{u}_T$. $\square$

Voltemos agora a considerar o problema $(\mathcal{P})$. Vamos usar o espaço de Hilbert $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$ munido da norma usual

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} := \left(\int |\nabla u|^2\right)^{1/2}.$$

Observação 5.3. *Sabemos que, com essa topologia, o funcional linear* $v \xmapsto{T_f} \int fv$ *é contínuo de* $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$ *em* $\mathbb{R}$. *Queremos aplicar o Teorema de Lax-Milgram utilizando a forma bilinear* $\mathcal{B}[\cdot,\cdot]$ *definida em* ($\mathcal{B}$). *Para tanto, note inicialmente que, se* $u, v \in \mathcal{H}$, *então*

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{B}[u,v]\big| \leq & \sum_{i,j=1}^{N} \left\|a^{ij}\right\|_\infty \int |u_{x_i}|\,|v_{x_i}| + \sum_{i=1}^{N} \left\|b^i\right\|_\infty \int |u_{x_i}|\,|v| + \|c\|_\infty \int |u|\,|v| \\
\leq & \ \widetilde{c}\bigg(\int |\nabla u|\,|\nabla v| + \int |\nabla u|\,|v| + \int |u|\,|v|\bigg) \leq \widetilde{c}\Big(\|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + (\|\nabla u\|_2 + \|u\|_2)\,\|v\|_2\Big) \\
\leq & \ \widetilde{c}\Big(\|u\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} + \widehat{c}\|u\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}\Big) \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}
\end{aligned} \tag{50}$$

e, portanto, $\mathcal{B}$ *é contínua e satisfaz (i). Por outro lado, a condição (ii) do Teorema de Lax-Milgram é mais delicada e não vale em geral.*

O próximo lema é um primeiro passo na tentativa de mostrar a validade de (ii), aplicar o Teorema 5.2 e resolver o problema $(\mathcal{P})$.

Lema 5.1. *Existem* $\gamma = \gamma(\|b^i\|_\infty, \theta_0, \|c\|_\infty) \geq 0$ *e* $\tau > 0$ *tais que*

$$\tau \|\nabla u\|_2^2 \leq \mathcal{B}[u,u] + \gamma \|u\|_2^2, \quad \forall\ u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega).$$

Prova. Observe que

$$\begin{aligned}
\theta_0 \int |\nabla u|^2 \ \leq & \ \int \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} = \mathcal{B}[u,u] - \int \sum_{i=1}^{N} b^i(x) u_{x_i} u - \int c(x) u^2 \\
\leq & \ \mathcal{B}[u,u] + \sum_{i=1}^{N} \left\|b^i\right\|_\infty \int |\nabla u|\,|u| + \|c\|_\infty \|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, pela Desigualdade de Young, para todo $\varepsilon > 0$ vale que
$ab = \sqrt{2\varepsilon}\, a \dfrac{b}{\sqrt{2\varepsilon}} \leq \dfrac{1}{2} 2\varepsilon a^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{b^2}{2\varepsilon} = \varepsilon a^2 + \dfrac{1}{4\varepsilon} b^2$. Desse modo, $\displaystyle\int |\nabla u|\,|u| \leq \varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\|u\|_2^2}{4\varepsilon}$.

Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left\|b^i\right\|_\infty = \theta_0/2$, obtemos $(4\varepsilon)^{-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^N \|b^i\|_\infty}{2\theta_0}$ e, então

$$\theta_0 \int |\nabla u|^2 \leq \mathcal{B}[u,u] + \frac{\theta_0}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^N \|b^i\|_\infty}{4\varepsilon} + \|c\|_\infty\right)\|u\|_2^2.$$

Portanto,

$$\frac{\theta_0}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq \mathcal{B}[u,u] + \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^N \|b^i\|_\infty\right)^2}{2\theta_0} + \|c\|_\infty\right)\|u\|_2^2.$$

Assim, concluímos a prova com $\tau := \dfrac{\theta_0}{2}$ e $\gamma := \dfrac{\left(\sum_{i=1}^N \|b^i\|_\infty\right)^2}{2\theta_0} + \|c\|_\infty$. $\square$

De acordo com o Lema 5.1, podemos provar nosso primeiro teorema de existência de solução para o caso em que $\mathcal{B}$ não é simétrica.

Teorema 5.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico em Ω na forma divergente*

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{N} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \text{ com } a^{ij},\, b^i,\, c \in \mathcal{L}^\infty(\Omega).$$

Então, existe $\gamma = \gamma(\|b^i\|_\infty, \theta_0, \|c\|_\infty) \geq 0$ tal que, para toda $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e todo $\mu \leq -\gamma$, o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= \mu u + f, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\mu$}$$

tem exatamente uma solução fraca em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Prova. Vamos provar o teorema para $\gamma \geq 0$ dado pelo Lema 5.1. Seja então $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e $\mu \leq -\gamma$. A formulação fraca do problema $(\mathcal{P}_\mu)$ consiste em obter $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{B}_\mu[u,v] = \int f(x)v, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ onde } \mathcal{B}_\mu[u,v] := \mathcal{B}[u,v] - \mu \int uv.$$

Pela Observação 5.3 e pela imersão $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$, existe $\widetilde{\kappa} > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}_\mu[u,v]| \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} + |\mu| \|u\|_2 \|v\|_2 \leq \widetilde{\kappa} \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}, \quad \forall\, u,\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

garantindo a condição (i) para $\mathcal{B}_\mu$. Além disso, se τ é a constante dada pelo Lema 5.1 temos

$$\tau \|u\|^2 \leq \mathcal{B}[u,u] + \gamma \int u^2 \leq \mathcal{B}[u,u] - \mu \int u^2 \Rightarrow \tau \|u\|^2 \leq \mathcal{B}_\mu[u,u], \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Com isso, a hipótese (ii) do Teorema 5.2 também é satisfeita para $\mathcal{B}_\mu$. Portanto, como $v \mapsto \int f(x)v$ é linear e contínuo, aplicando o Teorema 5.2 obtemos $u_f \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{B}_\mu[u_f, v] = \int f(x)v, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

e, portanto, u_f é a única solução fraca de $(\mathcal{P}_\mu)$ em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. $\square$

De agora em diante, vamos precisar da teoria de operadores compactos para estudar melhor a existência de solução para $(\mathcal{P}_\mu)$. Apresentamos, a seguir, definições relevantes para os resultados de existência de solução de problemas envolvendo operadores compactos.

Definição 5.3. *a) Se $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_\mathcal{H})$ é um espaço de Hilbert real e $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador contínuo, o **operador adjunto** $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é definido por $\langle Tu, v\rangle_\mathcal{H} = \langle u, T^*v\rangle_\mathcal{H}$, para todo $u,\, v \in \mathcal{H}$.*
*b) $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um **operador compacto** se para todo $A \subset \mathcal{H}$ limitado, $\overline{\mathcal{K}(A)}$ é compacto.*
*c) Se $\mathcal{K}$ é um operador compacto, o operador $Id - \mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dito uma **pertubação compacta** da identidade.*

Relembramos agora que se $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um operador linear, então o Teorema do Núcleo e da Imagem nos garante que T é injetivo se, e somente se, T é sobrejetivo. Porém, em dimensão infinita essa conclusão pode ser falsa, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 5.2. *Sejam $\ell^2 := \left\{(x_m)_{m\in\mathbb{N}} : \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2 < \infty\right\}$ o espaço de Hilbert das sequências de quadrado somável e $T : \ell^2 \to \ell^2$ o operador definido por $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Então, T é injetivo, mas não é sobrejetivo. Já o operador $S : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ é sobrejetivo, mas não é injetivo.*

5.3 Aula 21: Alternativa de Fredholm, Resolução do Problema $(\mathcal{P}_\mu)$

Começamos nossa aula com um resultado que fornece, para pertubações compactas da identidade, um resultado análogo ao Teorema do Núcleo e da Imagem em dimensão finita.

Teorema 5.4 (Alternativa de Fredholm). *[3, Teorema 6.6] Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert real e $\mathcal{K}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ um operador linear compacto. Então,*

(i) $\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\mathcal{K})<\infty$;

(ii) $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}-\mathcal{K})$ *é um subespaço fechado e* $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}-\mathcal{K}) = (\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\mathcal{K}^*))^\perp$;

(iii) $(\mathrm{Id}-\mathcal{K})$ *é injetivo se, e somente se, é sobrejetivo;*

(iv) $\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\mathcal{K}) = \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\mathcal{K}^*)$.

Observação 5.4. *O Teorema 5.4 fornece informações sobre a solubilidade do problema*

$$u-\mathcal{K}u=f, \tag{51}$$

com $f\in\mathcal{H}$. O nome do resultado se deve ao fato de que, devido a (iii), ele afirma que ocorre exatamente uma das alternativas abaixo.

Alternativa 1: *para cada $f\in\mathcal{H}$ o problema tem solução única;*

Alternativa 2: *o problema homogêneo associado $u-\mathcal{K}u=0$ possui solução $u\neq 0$. Nesse caso, a equação (51) tem solução se, e somente se, $f\in(\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\mathcal{K}^*))^\perp$, devido a (ii).*

Nosso objetivo é aplicar o Teorema 5.4 para estudar a solubilidade do problema $(\mathcal{P})$. Para tanto, vamos supor que os coeficientes b^i do operador $\mathcal{L}$ são de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e introduzir o operador adjunto de $\mathcal{L}$ dado por

$$\mathcal{L}^*v = -\sum_{i,j=1}^{N}(a^{ij}(x)v_{x_i})_{xj} - \sum_{i=1}^{N} b^i(x)v_{x_i} + \left(c(x)-\sum_{i=1}^{N}(b^i(x))_{x_i}\right)v,$$

e também o problema adjunto de $(\mathcal{P})$ como sendo $\begin{cases} \mathcal{L}^*v &= f, & \text{em } \Omega,\\ v &= 0, & \text{em } \partial\Omega.\end{cases}$

Observação 5.5. *A expressão para $\mathcal{L}^*v$ pode ser obtida via integração por partes, por meio da definição de operador adjunto (Exercício 6.5.3), isto é, $\mathcal{L}^*$ é tal que*

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int(\mathcal{L}u)v = \int u(\mathcal{L}^*v) = \langle u,\mathcal{L}^*v\rangle_{L^2(\Omega)},\quad \forall\, u,\, v\in\mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{52}$$

O resultado abaixo caracteriza o espectro de solução do problema $(\mathcal{P})$.

Teorema 5.5 (Alternativa de Fredholm para $(\mathcal{P})$). *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico Ω da forma*

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j}(a^{ij}(x)u_{x_i})x_j + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,\ \text{ com } a^{ij},\, c\in\mathcal{L}^\infty(\Omega)\ \text{ e } b^i\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).$$

(a) *Exatamente uma das duas situações abaixo ocorre*

Alternativa 1: *o problema $(\mathcal{P})$ possui solução única para cada $f\in\mathcal{L}^2(\Omega)$;*

Alternativa 2: *o problema homogêneo abaixo possui solução $u\neq 0$:*

$$\mathcal{L}u=0 \text{ em } \Omega,\quad u=0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{53}$$

(b) *Se ocorre a segunda alternativa, a dimensão do subespaço $\mathcal{N}\subset\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ de soluções fracas de (53) é finita e coincide com a dimensão do subespaço $\mathcal{N}^*\subset\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ de soluções fracas de*

$$\mathcal{L}^*v=0 \text{ em } \Omega,\quad v=0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{54}$$

(c) *O problema* $(\mathcal{P})$ *tem solução fraca para uma dada* $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ *se, e somente se,*

$$\langle f, v\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{N}^*.$$

Prova. Considerando $\gamma \geq 0$ dado pelo Teorema 5.3, sabemos que o problema $(\mathcal{P}_{-\gamma})$ tem solução fraca única para cada $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Desse modo, podemos construir o operador solução $\mathcal{S}_\gamma : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ como segue

$$\mathcal{S}_\gamma(f) = u \iff \begin{cases} u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ é a única solução fraca de} \\ \mathcal{L}u + \gamma u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que $\mathcal{L}$ é linear, o operador solução também é linear. Além disso, se $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, então $u = \mathcal{S}_\gamma(f)$ satisfaz $\tau\|u\|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \mathcal{B}_\gamma[u,u] = \displaystyle\int fu \leq \|f\|_2\|u\|_2 \leq \mathcal{C}\|f\|_2\|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}$, onde estamos usando a mesma notação da prova do Teorema 5.3. Uma vez que $u = \mathcal{S}_\gamma(f)$, esta expressão pode ser reescrita como $\|\mathcal{S}_\gamma(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \frac{\mathcal{C}}{\tau}\|f\|_2$, isto é, o operador solução é contínuo de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Suponha que $(f_m) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ é uma sequência limitada. Como $\mathcal{S}_\gamma$ é contínua, a sequência $(\mathcal{S}_\gamma(f_m))$ é limitada em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Lembrando que a imersão desse último espaço em $\mathcal{L}^2(\Omega)$ é compacta, concluímos que uma subsequência de $(\mathcal{S}_\gamma(f_m))$ converge em $\mathcal{L}^2(\Omega)$, o que mostra a compacidade de $\mathcal{S}_\gamma : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$. Note agora que

$$\mathcal{L}u = f \Leftrightarrow \mathcal{L}u + \gamma u = f + \gamma u \Leftrightarrow u = \mathcal{S}_\gamma(f + \gamma u) = \mathcal{S}_\gamma(f) + \gamma\mathcal{S}_\gamma(u) \iff u - \gamma\mathcal{S}_\gamma(u) = \mathcal{S}_\gamma(f) \quad (55)$$

Desse modo, se $g_f = \mathcal{S}_\gamma(f) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e $\mathcal{K} = \gamma\mathcal{S}_\gamma$, o problema $(\mathcal{P})$ é equivalente a $u - \mathcal{K}u = g_f$. Como $\mathcal{S}_\gamma$ é compacto, as conclusões seguem da aplicação imediata do Teorema 5.4. De fato, (a) segue do Teorema 5.4(iii); (b) segue do Teorema 5.4(iv); e (c) segue do Teorema 5.4(ii). Além disso, os detalhes seguem da Observação 5.4. □

Definição 5.4. *Dado um espaço de Hilbert real* $\mathcal{H}$ *e um operador linear contínuo* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, *a) definimos o* **resolvente de** T *como sendo*

$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (T - \lambda\,\mathrm{Id}) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é bijeção*$\}$ *e o* **espectro de** T *como* $\sigma(T) = \mathbb{R} \smallsetminus \rho(T)$;

b) se $\lambda \in \sigma(T)$ *é tal que* $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$, *então dizemos que* λ *é um* **autovalor de** T*;*
c) se λ *é autovalor de* T, *existe* $u_\lambda \neq 0$ *tal que* $Tu_\lambda = \lambda\, u_\lambda$ *e dizemos que* u_λ *é um* **autovetor** *associado ao autovalor* λ. *Denotamos por* $\sigma_p(T)$ *o conjunto dos autovalores de* T, *isto é,*

$$\sigma_p(T) = \Big\{\lambda \in \sigma(T) : \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}\Big\}.$$

Observação 5.6. *a)* $\lambda \in \rho(T)$ *se, e somente se, para cada* $f \in \mathcal{H}$, *a equação* $Tu - \lambda u = f$ *tem solução única* $u \in \mathcal{H}$*;*
b) Se dim$(\mathcal{H}) < \infty$, *então* $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. *Porém, em dimensão infinita pode ocorrer* $\sigma(T) \neq \sigma_p(T)$. *Por exemplo, o operador* $T : \ell^2 \to \ell^2$ *definido no Exemplo* 5.2 T *não é sobrejetiva, então* $0 \in \sigma(T)$. *Mas* $0 \notin \sigma_p(T)$, *pois* $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. *Logo,* $0 \in \sigma(T) \smallsetminus \sigma_p(T)$.

O seguinte resultado de Análise funcional caracteriza o espectro de operadores compactos e será aplicado na resolução do problema $(\mathcal{P}_\mu)$.

Teorema 5.6 (Teoria espectral de operadores compactos)**.** *[3, Teorema 6.8] Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert real com dimensão infinita e* $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador compacto. Então,*

(i) $0 \in \sigma(\mathcal{K})$ *;*

(ii) $\sigma(\mathcal{K}) \smallsetminus \{0\} = \sigma_p(\mathcal{K}) \smallsetminus \{0\}$*;*

(iii) *se* $\sigma(\mathcal{K}) \smallsetminus \{0\}$ *é um conjunto infinito então* $\sigma(\mathcal{K}) \smallsetminus \{0\} = (\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *com* $\lambda_m \to 0$ *quando* $m \to \infty$.

Aplicando o Teorema 5.6 ao operador solução do problema do $(\mathcal{P}_{-\gamma})$, que é compacto, podemos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 5.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico em Ω da forma*

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j}(a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \ \ com\ a^{ij},\ c \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \text{ e } b^i \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).$$

Então existe um conjunto finito ou infinito enumerável $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= \mu u + f, & em\ \Omega, \\ u &= 0, & em\ \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\mu)$$

possui única solução fraca para cada $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ se, e somente se, $\mu \notin \Sigma$. Além disso, se Σ é infinito, então $\Sigma = (\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ com $\mu_m \to +\infty$ quando $m \to \infty$.

Prova. Pelo Teorema 5.3, sabemos que o problema $(\mathcal{P}_\mu)$ tem solução única para cada $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ desde que $\mu \leq -\gamma$. Considerando a notação da prova do Teorema 5.5, para o operador compacto $\mathcal{K} = \gamma\mathcal{S}_\gamma$, pela equivalência em (55) segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = \mu u + f \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}u + \gamma u = f + (\mu+\gamma)u \Leftrightarrow u = \mathcal{S}_\gamma(f + (\mu+\gamma)u) \\ &\Leftrightarrow \quad u - (\mu+\gamma)\mathcal{S}_\gamma(u) = \mathcal{S}_\gamma(f) \Leftrightarrow \mathcal{S}_\gamma(u) - (\mu+\gamma)^{-1}\mathrm{Id}u = -(\mu+\gamma)^{-1}\mathcal{S}_\gamma(f). \end{aligned}$$

Logo, pela definição de $\sigma(\mathcal{K})$, $(\mathcal{P}_\mu)$ possui única solução fraca para cada $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ se, e somente se, $\gamma(\mu+\gamma)^{-1} \notin \sigma(\mathcal{K})$, isto é, se, e somente se, $\mu \notin \Sigma := \{\gamma\lambda^{-1} - \gamma :\ \lambda \in \sigma(\mathcal{K})\} \subset (-\gamma, +\infty)$. Mas pelo Teorema 5.6 vemos que ou $\sigma(\mathcal{K})$ é finito ou infinito enumerável e forma uma sequência $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ com $\lambda_m \to 0$ quando $m \to \infty$. Daí, como há uma bijeção entre Σ e $\sigma(\mathcal{K}) \setminus \{0\}$, segue que ou Σ é finito ou $\Sigma = (\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ com $-\gamma < \mu_m = \gamma\lambda_m^{-1} - \gamma \to +\infty$ quando $m \to \infty$. Note que (μ_m) não pode ter uma subsequência tendendo a $-\infty$, pois é limitada inferiormente por $-\gamma$. □

Observação 5.7. *Sob as hipóteses do Teorema 5.7 o problema $(\mathcal{P}) = (\mathcal{P}_0)$ tem única solução para cada $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ se, e somente se, $0 \notin \Sigma \iff 1 \notin \sigma(\gamma\mathcal{S}_\gamma) \iff \gamma^{-1} \notin \sigma(\mathcal{S}_\gamma)$. Mais ainda, pelo Teorema 5.3, $\mathcal{S}_\gamma$ é o operador solução do problema $(\mathcal{P}_{-\gamma})$, que tem solução única para cada $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, em que $\gamma := \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\|b^i\|_\infty\right)^2}{2\theta_0} + \|c\|_\infty$ foi estabelecido pelo Lema 5.1. Então $\mathcal{S}_\gamma(\gamma u) = u \iff \mathcal{L}u + \gamma u = \gamma u$. Portanto, o problema $(\mathcal{P})$ tem solução única para cada $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ se, somente se, $0 \notin \sigma(\mathcal{L})$.*

5.4 Aula 22: Propriedades do Espectro de $-\Delta$

Na aula de hoje vamos estudar o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u &= 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\lambda^a)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é uma aberto limitado. Vamos usar em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ a norma $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$.

Observação 5.8. *A formulação fraca do problema $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ consiste em encontrar $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que*

$$\langle u, v\rangle = \int(\nabla u \cdot \nabla v) = \int \lambda uv, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

*Como estamos interessados em soluções $u \neq 0$, visto que autovetores são sempre não nulos, fazendo $v = u$ na expressão acima, obtemos $\int |\nabla u|^2 = \lambda \int u^2$ e concluímos que λ **deve ser positivo**. Além disso, vale ressaltar que as autofunções são funções de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Vamos aplicar o Teorema 5.6 para encontrar os autovalores de $(\mathcal{P}_\lambda^a)$.

Teorema 5.8. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u &= 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\lambda^a)$$

possui uma sequência de autovalores $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_m \to \infty$ quando $m \to \infty$. Além disso, as autofunções associadas formam uma base ortogonal de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Prova. Para cada $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ fixado, $T_u : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $v \mapsto T_u(v) := \displaystyle\int uv$ é um funcional linear e contínuo em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Logo, pelo Teorema de Riesz, existe $\overline{u} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\langle \overline{u}, v\rangle = T_u(v)$ para todo $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Variando u, podemos construir um operador $\mathcal{T} : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \to \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\mathcal{T}u := \overline{u}$, isto é,

$$\langle \mathcal{T}u, v\rangle = \int uv, \quad \forall\, u, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{56}$$

Dado $u, w, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ e $\ell \in \mathbb{R}$, temos que

$$\langle \mathcal{T}(u + \ell w), v\rangle = \int (u + \ell w)v = \langle \mathcal{T}u + \ell\mathcal{T}w, v\rangle, \text{ e } \langle \mathcal{T}u, v\rangle = \int uv = \int vu = \langle u, \mathcal{T}v\rangle,$$

portanto, $\mathcal{T}$ é linear e autoadjunto. Das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré temos,

$$\|\mathcal{T}u\|^2 = \langle \mathcal{T}u, \mathcal{T}u\rangle = \int u(\mathcal{T}u) \leq \|u\|_2\|\mathcal{T}u\|_2 \leq c_1\|u\|\|\mathcal{T}u\|, \text{ ou ainda } \|\mathcal{T}u\| \leq c_1\|u\|,$$

para todo $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, o que mostra que $\mathcal{T}$ é contínuo. Seja $(u_m) \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. A imersão compacta $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$ implica que, a menos de subsequência, $u_m \to u$ em $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Assim, temos $\|\mathcal{T}u_m - \mathcal{T}u_k\| \leq c_2\|u_m - u_k\|_2 \to 0$, pois

$$\|\mathcal{T}u_m - \mathcal{T}u_k\|^2 = \langle \mathcal{T}(u_m - u_k), (u_m - u_k)\rangle \leq c_2\|u_m - u_k\|_2\|\mathcal{T}(u_m - u_k)\|.$$

Segue então que, a menos de subsequência, $(\mathcal{T}u_m)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ e, portanto, $(\mathcal{T}u_m)$ possui subsequência convergente, mostrando que $\mathcal{T}$ é compacto. Além disso, se $u \neq 0$ é solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda^a)$, então

$$\langle u, v\rangle = \lambda \int uv = \lambda\langle \mathcal{T}u, v\rangle, \text{ ou ainda } \langle \mathcal{T}u, v\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle u, v\rangle, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{57}$$

Com isso, λ é autovalor de $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ com autovetor associado $u \neq 0$ se, e somente se, $\mathcal{T}u = \lambda^{-1}u$. Isto é, λ **é autovalor do problema** $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ **se, e somente se,** $\mu = 1/\lambda$ **é autovalor de** $\mathcal{T}$.

De acordo com o Teorema 5.6 ou $\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \sigma_p(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$ é finito, ou é uma sequência $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu_m \to 0^+$, visto que pela Observação 5.8 os autovalores são positivos. Uma vez que $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ é separável e $\mathcal{T}$ é compacto e autoadjunto, os autovetores de $\mathcal{T}$ formam uma base ortogonal de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ (cf. [3, Teorema 6.11]). Se $\mu \in \sigma_p(\mathcal{T})$, então a Alternativa de Fredholm implica que a dimensão de $\mathrm{Ker}(\mathcal{T} - \mu\,\mathrm{Id})$ é finita. Logo, **todos os autoespaços têm dimensão finita.** Como $\dim(\mathcal{H}_0^1(\Omega)) = +\infty$, concluímos que $\sigma(\mathcal{T}) = \mathbb{R} \setminus \rho(\mathcal{T})$ deve ser infinito para que a base de autovetores seja infinita. Desse modo,

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \sigma_p(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = (\mu_m), \text{ com } \mu_m \to 0^+$$

e os autovalores correspondentes de $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ são da forma $\lambda_m = \dfrac{1}{\mu_m}$, logo, formam uma sequência $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots$, tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. $\square$

Observação 5.9. *a) No Teorema 5.8, se $\lambda_{m-1} < \lambda_m = \cdots = \lambda_{m+j-1} < \lambda_{m+j}$, então $\lambda = \lambda_m$ é um autovalor com multiplicidade j, isto é, $\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T} - \lambda^{-1}\,Id) = j$. Mostraremos posteriormente que o primeiro autovalor λ_1 tem multiplicidade 1, é simples, isto é, $\lambda_1 < \lambda_2$; b) O resultado do Teorema 5.8 permanece válido para o operador $\mathcal{L}$ simétrico e uniformemente elíptico, com coeficientes limitados e $c \geq 0$, dado por*

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{N} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u.$$

Mais ainda, temos que $\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \overline{span\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots\}}$*, onde* φ_m *é uma autofunção associada ao autovalor* λ_m *e as autofunções* φ_m *são ortogonais em* $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$*. Além disso, usando a formulação fraca do problema* $(\mathcal{P}_\lambda^a)$*, obtemos também sua ortogonalidade em* $\mathcal{L}^2(\Omega)$*.*

A ortogonalidade das autofunções do problema $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ nos permite obter desigualdades interessantes para funções de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Mais especificamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.1 (Exercício 6.5.4)**.** *As autofunções* $(\varphi_m) \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ *do problema* $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ *são ortogonais em* $\mathcal{L}^2(\Omega)$*. Além disso, se* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$*, para o subespaço* $V_k := \langle\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}\rangle \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ *vale que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \lambda_k \int_\Omega u^2, \quad \forall\, u \in V_k, \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega u^2, \quad \forall\, u \in V_k^\perp,$$

Em particular, ao tomarmos $k = 0$*, obtemos como corolário a Desigualdade de Poincaré.*

Agora vamos extrair propriedades do primeiro autovalor λ_1. Para isso precisaremos do seguinte resultado de Análise Funcional.

Lema 5.2. *[3, Proposição 6.9] Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador linear, contínuo e autoadjunto.*
Se $m := \inf\limits_{\|u\|_\mathcal{H}=1} \langle Tu, u\rangle_\mathcal{H}$ e $\mathcal{M} := \sup\limits_{\|u\|_\mathcal{H}=1} \langle Tu, u\rangle_\mathcal{H}$*, então* $m, \mathcal{M} \in \sigma(T)$ *e* $\sigma(T) \subset [m, \mathcal{M}]$*.*

Vamos aplicar o Lema 5.2 para o operador T , definido em (56) para caracterizar λ_1.

Proposição 5.2. *O primeiro autovalor* $\lambda_1 > 0$ *do problema de autovalor* $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ *é dado por* $\lambda_1 = \min\limits_{u\neq 0} \mathcal{Q}(u)$*, onde* $\mathcal{Q} : \mathcal{H}_0^1(\Omega)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *é definido por* $\mathcal{Q}(u) := \|\nabla u\|_2^2 \|u\|_2^{-2}$*. Mais ainda,* $\lambda_1 = \mathcal{Q}(\varphi_1) \iff \varphi_1$ *é uma autofunção associada a* λ_1*.*

Prova. De acordo com (57), o menor autovalor λ_1 do problema $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ é exatamente o inverso do maior autovalor do operador T definido em (56). Assim, pelo Lema 5.2, segue que

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle = \sup_{u\neq 0} \left\langle T\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \geq \left\langle T\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle = \frac{1}{\|u\|^2}\langle Tu, u\rangle = \frac{1}{\|u\|^2}\int u^2,$$

para todo $u \neq 0$ e, portanto, $\lambda_1 \|u\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2$, para todo $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, isto é, $\lambda_1 \leq \inf\limits_{u\neq 0} \mathcal{Q}(u)$. Além disso, o ínfimo de $\mathcal{Q}$ é na verdade um mínimo. De fato, se φ_1 é uma autofunção associada a λ_1, então $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ em Ω, daí se conclui que $\|\nabla\varphi_1\|_2^2 = \lambda_1\|\varphi_1\|_2^2$, isto é, $\lambda_1 = \mathcal{Q}(\varphi_1)$. Desse modo, toda autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 é um ponto de mínimo de $\mathcal{Q}$ e vale a igualdade $\lambda_1 = \inf\limits_{u\neq 0} \mathcal{Q}(u)$.

Por outro lado, se $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ é tal que $\mathcal{Q}(\varphi) = \lambda_1$, então φ é uma λ_1-autofunção. De fato, dada $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda_1 \leq \mathcal{Q}(\varphi + tv)$, isto é, $\|\nabla(\varphi + tv)\|_2^2 \geq \lambda_1\|(\varphi + tv)\|_2^2$. Desenvolvendo os dois lados da desigualdade e lembrando que $\lambda_1\|\varphi\|_2^2 = \|\nabla\varphi\|_2^2$ obtemos

$$2t\int(\nabla\varphi\cdot\nabla v) + t^2\int|\nabla v|^2 \geq 2t\lambda_1\int\varphi v + t^2\lambda_1\int v^2.$$

Dividindo essa expressão por $2t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$ concluímos que $\int(\nabla\varphi\cdot\nabla v) \geq \lambda_1\int\varphi v$. Um argumento análogo fazendo $t \to 0^-$ nos fornece uma desigualdade reversa e, portanto,

$$\int(\nabla\varphi\cdot\nabla v) = \lambda_1\int\varphi v, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

o que mostra que φ é uma solução fraca do problema $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ com $\lambda = \lambda_1$. $\square$

De acordo com os resultados anteriores, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 5.9. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, λ_1 é o primeiro autovalor do problema $(\mathcal{P}^a_\lambda)$ e φ_1 é uma autofunção associada a esse autovalor. Então,*

(i) *$\varphi_1 > 0$ ou $\varphi_1 < 0$ em Ω.*

(ii) *se ψ é uma λ_1-autofunção, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = \alpha\varphi_1$.*

Prova. Suponha por contradição que φ_1 troca de sinal em Ω. Então $\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^-$, com $\varphi_1^+, \varphi_1^- \not\equiv 0$. Lembremos que $\varphi_1^+, \varphi_1^- \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ e

$$\nabla\varphi_1^+(x) = \begin{cases} \nabla\varphi_1(x), & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega : \varphi_1(x) > 0\} \\ 0, & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega : \varphi_1(x) \leq 0\}, \end{cases}$$

com uma expressão análoga valendo para $\nabla\varphi_1^-$ (Exercício 6.4.29). Fazendo $v = \varphi_1^+$ na formulação fraca do problema obtemos

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_1^+|^2 = \int_{\{\varphi_1>0\}} (\nabla\varphi_1^+ \cdot \nabla\varphi_1^+) = \int_\Omega (\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1^+) = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1\varphi_1^+ = \lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1^+)^2. \quad (58)$$

Portanto, segue de (58) que $\mathcal{Q}(\varphi_1^+) = \lambda_1$, daí se conclui que φ_1^+ é uma λ_1-autofunção. De maneira análoga, mostra-se que φ_1^- é também λ_1-autofunção. Temos então que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1^\pm &= \lambda_1\varphi_1^\pm, \quad \text{em } \Omega, \\ \varphi_1^\pm &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 5.13, as autofunções são soluções clássicas. Assim, como $\varphi_1^\pm \geq 0$ em Ω, segue do Princípio do Máximo Forte que $\varphi_1^\pm > 0$ em Ω. De fato, se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi_1^\pm(x_0) = 0$, então $\varphi_1^\pm$ teria um ponto de mínimo em Ω, daí seguiria que $\varphi_1^\pm \equiv 0$ em Ω, mas estamos supondo $\varphi_1^\pm \not\equiv 0$. Desse modo, concluímos que $\varphi_1^\pm > 0$ em Ω. Mas isso é uma contradição, pois pela definição de $\varphi_1^\pm$ devemos ter $\varphi_1^+\varphi_1^- \equiv 0$ em Ω. A contradição vem de supormos que φ_1 troca de sinal em Ω, portanto, ou $\varphi_1^+ \equiv 0$ ou $\varphi_1^- \equiv 0$. Se $\varphi_1^- \equiv 0$, então $\varphi_1 \geq 0$ em Ω e pelo Princípio do Máximo concluímos que $\varphi_1 > 0$ em Ω. No caso em que $\varphi_1^+ \equiv 0$ o mesmo argumento implica que $\varphi_1 < 0$ em Ω. Isso estabele o item (i).

Para provar (ii) vamos supor por contradição que φ_1 e ψ são linearmente independentes. Nesse caso, $\dim \operatorname{Ker}(-\Delta - \lambda_1 \operatorname{Id}) \geq 2$. Uma vez que existe uma base ortogonal de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ formada por autofunções, e φ_1 e ψ são linearmente independentes, podemos considerar, sem perda de generalidade, que φ_1 e ψ são ortogonais, isto é,

$$0 = \langle\varphi_1, \psi\rangle = \int \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\psi = \lambda_1 \int \varphi_1\psi.$$

Mas a expressão acima não pode ocorrer, pois pelo item (i) o produto $\varphi_1\psi$ tem sinal definido em Ω. Obtemos então uma contradição, o que mostra que ψ é um múltiplo escalar de φ_1. □

5.5 Aula 23: Regularidade de Soluções

Na aula de hoje estamos interessados em obter mais regularidade para as soluções fracas do problema $(\mathcal{P})$. Para isso, vamos considerar o operador $\mathcal{L}$ como sendo da forma divergente

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^N (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^N b^i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

Os resultados obtidos variam de acordo com a regularidade dos coeficientes. De uma maneira geral, quanto mais regulares forem os coeficientes e a função f, mais regular será a solução.

Exemplo 5.3. *Suponha por exemplo que $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma solução do problema*

$$-\Delta u = f, \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

com $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Suponha ainda que essa solução tenha propriedades que permitam realizar todas as integrações por partes abaixo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u)^2 \, dx = \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} \, dx = \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_i x_i} (u_{x_j})_{x_j} dx \\ &= -\sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} dx = \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_j x_i} u_{x_i x_j} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |D^2 u|^2 dx.\end{aligned}$$

Esta igualdade garante que as derivadas de ordem 2 de u estão em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Supondo agora que, para todo $i = 1, \ldots, N$, a função $f_{x_i} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ exista, podemos usar que $-\Delta(u_{x_i}) = f_{x_i}$ para concluir que as derivadas de ordem 3 da função u também estão em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$.

O argumento do Exemplo 5.3 indica que uma solução do problema $\mathcal{L}u = f$ tem duas derivadas a mais do que a função f, o que de fato segue do seguinte resultado.

Teorema 5.10 (Regularidade interior)**.** *[5, Teorema 2, Seção 6.3] Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e suponha que $a^{ij}, b^i, c \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega)$, $f \in \mathcal{H}^k(\Omega)$ e $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ é uma solução fraca de $\mathcal{L}u = f$. Então $u \in \mathcal{H}^{k+2}_{loc}(\Omega)$ e, para cada $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, existe uma constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(k, \Omega, \Omega_0, a^{ij}, b^i, c) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{k+2}(\Omega_0)} \leq \mathcal{C}\left(\|f\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\right).$$

Observação 5.10. *A solução u do resultado acima pertence a $\mathcal{H}^1(\Omega)$, em vez de $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$, isto é, não estamos exigindo que $u = 0$ em $\partial\Omega$, no sentido do Operador Traço. Outro ponto que merece destaque é que, se os coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, então podemos usar o Teorema 5.10 e o item (iii) do Teorema 4.17, isto é, $\mathcal{H}^k(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-[\frac{N}{2}]-1,\gamma}(\overline{\Omega}_0)$, quando $2k > N$, para concluir que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_)$.*

Quando a fronteira de Ω é regular, podemos obter um resultado global de regularidade.

Teorema 5.11 (Regularidade global)**.** *[5, Teorema 5, Seção 6.3] Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e suponha que $a^{ij}, b^i, c \in \mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega})$, $f \in \mathcal{H}^k(\Omega)$ e Ω é de classe $\mathcal{C}^{k+2}$. Suponha que $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in \mathcal{H}^{k+2}(\Omega)$ e existe uma constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(k, \Omega, a^{ij}, b^i, c) > 0$ tal que

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{k+2}(\Omega)} \leq \mathcal{C}\left(\|f\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\right).$$

Abaixo enunciamos outros dois resultados clássicos de regularidade elíptica.

Teorema 5.12. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio e $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \ \text{em } \Omega \\ \quad u &= 0, \ \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

(i) (Agmon, Douglis, Nirenberg) *se Ω é de classe $\mathcal{C}^2$, $\partial\Omega$ é limitada e $f \in \mathcal{L}^p(\Omega), 1 < p < \infty$, então $u \in \mathcal{W}^{2,p}(\Omega)$ e existe uma constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, p) > 0$ tal que $\|u\|_{2,p} \leq \mathcal{C}\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$.*

(ii) (Schauder) *se Ω é limitado e de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e existe uma constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, \alpha) > 0$ tal que $\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \mathcal{C}\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$.*

Observação 5.11. *Ainda que os resultados acima sejam para a equação linear $-\Delta u = f$, é possível usá-los, juntamente com as imersões de Sobolev, no processo de regularização de soluções de equações não-lineares do tipo*

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x, u), \ \text{em } \Omega \\ \quad u &= 0, \ \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\widetilde{\mathcal{P}}_g$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\gamma}$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Para que a regularização faça sentido, vamos estender o conceito de solução fraca para $(\widetilde{\mathcal{P}}_g)$.

A forma natural de definir uma solução fraca para o problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_g)$ é encontrar $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int (\nabla u \cdot \nabla v) = \int g(x,u)v, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{59}$$

Mas em geral, o lado direito de (59) pode não ser finito. Desse modo, para que a definição faça sentido, vamos supor que existem c_1, $c_2 \geq 0$, $r \geq 1$ para $N \leq 2$ e $1 \leq r \leq 2^* - 1$ para $N \geq 3$, tais que

$$|g(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^r, \quad \forall\, (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{60}$$

Impondo tal condição de crescimento sobre g, podemos mostrar que a integral envolvendo g é finita. De fato, dados u, $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, temos

$$\left|\int g(x,u)v\right| \leq c_1\|v\|_1 + c_2 \int |u|^r|v| \leq c_1\|v\|_1 + c_2\left(\int |u|^{2^*}\right)^{r/2^*}\left(\int |v|^{\frac{2^*}{2^*-r}}\right)^{\frac{2^*-r}{2^*}},$$

onde aplicamos a desigualdade de Hölder com expoentes $s = \dfrac{2^*}{r}$, $s' = \dfrac{2^*}{(2^*-r)}$. Se $N \leq 2$, o lado direito acima é finito, visto que pelas imersões de Sobolev $v \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. Se $N \geq 3$, podemos usar $r \leq 2^* - 1$ para obter $s' = \dfrac{2^*}{2^*-r} \leq \dfrac{2^*}{2^*-(2^*-1)} = 2^*$ e, portanto, das imersões de Sobolev

$$\left|\int g(x,u)v\right| \leq c_1\|v\|_1 + c_2\|u\|_{2^*}^r\|u\|_{s'} < \infty.$$

Assim, sob a condição de crescimento (60), está bem definida uma solução fraca para problema não linear $(\widetilde{\mathcal{P}}_g)$ como sendo qualquer função $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ que satisfaça (59). Desse modo, temos o seguinte resultado de regularidade para o problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_g)$.

Teorema 5.13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua satisfazendo (60) com $1 \leq r < 2^* - 1$, se $N \geq 3$, e $r \geq 1$ se $N \leq 2$. Se $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de $(\widetilde{\mathcal{P}}_g)$, então $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica.*

Prova. Vamos supor inicialmente que $N \geq 3$ e usar um argumento conhecido como "bootstrap". O primeiro passo é usar a imersão de Sobolev $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$ para concluir que $u \in \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$. Por outro lado, a desigualdade (60) implica que

$$|g(x,s)|^{2^*/r} \leq (c_1 + c_2|s|^r)^{2^*/r} \leq c_3 + c_4|s|^{2^*}, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}.$$

Como Ω é limitado e $u \in \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$, segue da expressão acima que $g(\cdot,u) \in \mathcal{L}^{p_1}(\Omega)$, com $p_1 = \dfrac{2^*}{r}$, então podemos aplicar o item (i) do Teorema 5.12 para concluir que $u \in \mathcal{W}^{2,p_1}(\Omega)$. Temos então dois casos a considerar:

Caso 1: $2p_1 > N$. Pelo item (iii) do Teorema 4.17, temos

$$u \in \mathcal{W}^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{1-[\frac{N}{p_1}],\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Como g é Hölder contínua, temos que $|g(x,s) - g(y,t)| \leq c_5|(x,s) - (y,t)|^\beta$, para todo x, $y \in \Omega$, s, $t \in \mathbb{R}$ para algum $\beta \in (0,1]$. Então, para x e y q.t.p. em Ω, vale que

$$\begin{aligned} |g(x,u(x)) - g(y,u(y))| &\leq c_5\Big(|x-y| + |u(x)-u(y)|\Big)^\beta \leq c_5\Big(|x-y| + c_6|x-y|^\gamma\Big)^\beta \\ &\leq c_6\Big(|x-y|^\beta + |x-y|^{\gamma\beta}\Big). \end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{|g(x,u(x)) - g(y,u(y))|}{|x-y|^{\gamma\beta}} \le c_7\Big(|x-y|^{\beta-\gamma\beta}+1\Big) \le c_8$, visto que Ω é limitado e $\beta \ge \gamma\beta$. Esta expressão implica que $g(\cdot,u) \in \mathcal{C}^{0,\gamma\beta}(\overline{\Omega})$. Segue então do item (ii) do Teorema 5.12 que $u \in \mathcal{C}^{2,\gamma\beta}(\overline{\Omega})$, sendo, portanto, solução clássica do problema.

Caso 2: $2p_1 \le N$**.** Usando o item (i)-(ii) do Teorema 4.17, obtemos $u \in \mathcal{W}^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{q_1}(\Omega)$, para $q_1 = \frac{Np_1}{N-2p_1}$. Assim, devido ao crescimento de g, concluímos que $g(\cdot,u) \in \mathcal{L}^{p_2}(\Omega)$, com $p_2 = \frac{q_1}{r} = \frac{Np_1}{r(N-2p_1)}$ e, portanto, $u \in \mathcal{W}^{2,p_2}(\Omega)$, devido ao item (i) do Teorema 5.12. Se $2p_2 > N$, podemos argumentar como no Caso 1 e provar que u é solução clássica. Caso contrário, podemos iterar esse processo k vezes para obter $p_m,\ q_m,$ com $m = 1,\dots,k,$ tais que

$$p_1 = \frac{2^*}{r},\ p_{m+1} = \frac{q_m}{r},\ q_m = \frac{Np_m}{N-2p_m} \text{ e, além disso, } u \in \mathcal{W}^{2,p_m}(\Omega) \text{ para todo } m = 1,2,...,k.$$

Afirmamos que, para algum $k \in \mathbb{N}$, vale $2p_k > N$ e então pelo Caso 1, $u \in \mathcal{W}^{2,p_k}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\gamma_k}(\Omega)$, é solução clássica. Para verificar a afirmação note que, como $r < 2^* - 1$, temos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q_1}{2^*} = \frac{N}{Nr - 2\cdot 2^*} > \frac{N}{N(2^*-1) - 2\cdot 2^*} = 1 \ \text{ e, portanto, } \ \frac{p_2}{p_1} = 1+\delta, \text{ para algum } \delta > 0.$$

Como, $\dfrac{p_3}{p_2} = \dfrac{q_2}{q_1} = \dfrac{p_2}{p_1}\left(\dfrac{N-2p_1}{N-2p_2}\right) > \dfrac{p_2}{p_1} = 1+\delta$, obtemos $p_3 > p_2(1+\delta) = (1+\delta)^2 p_1$. Iterando esse processo concluímos que $p_k > (1+\delta)^{k-1}p_1$. Logo, $2p_k > N$ para algum k suficientemente grande, o que conclui a prova para $N \ge 3$.

Quando $N \le 2$ podemos usar somente o Caso 1. De fato, pelas imersões de Sobolev sabemos que $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $q \ge 1$. Portanto, basta escolher $p_1 = q/r$ para q grande o suficiente e garantir que $2p_1 > N$. □

5.6 Aula 24: O Teorema de Brezis-Kato

Os argumentos feitos no Teorema 5.13, para mostrar a regularidade de uma solução fraca funcionam somente quando $r < 2^* - 1$, para $N \ge 3$. De fato, se $r = 2^* - 1$, então $p_2 = p_1$ e não podemos construir uma sequência crescente (p_k) para regularizar u.

Na aula de hoje vamos lidar com o caso $r = 2^* - 1$ através de um resultado de regularidade provado por Brezis e Kato [4], que por sua vez usaram uma ideia devida a Moser [14].

Teorema 5.14 (Brezis-Kato)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio e suponha que $u \in \mathcal{H}^1_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca de*

$$-\Delta u = a(x)(1+|u|), \text{ em } \Omega,$$

com $a \in \mathcal{L}^{N/2}_{loc}(\Omega)$. Então $u \in \mathcal{L}^q_{loc}(\Omega)$, para todo $q \ge 1$. Se $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$, $a \in \mathcal{L}^{N/2}(\Omega)$ e Ω é limitado, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ para todo $1 \le q < \infty$.

Observação 5.12. *Note que podemos supor que $N \ge 3$, pois, caso contrário, o Teorema 5.14 segue diretamente das Imersões de Sobolev no Teorema 4.17. Além disso, se Ω é limitado, dado $1 \le q \le 2$, segue pela desigualdade de interpolação que $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$. Nesse caso, precisamos apenas mostrar o resultado para $q > 2$.*

Prova. Vamos provar somente a versão para $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$. A prova da versão local pode ser feita seguindo o mesmo argumento considerando pequenas adaptações (Exercício 6.5.8). Considerando a Observação 5.12, note que precisamos mostrar apenas que $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ para $q > 2$. Para esse caso, afirmamos que é suficiente mostrar que, dado $s \ge 0$, se $u \in \mathcal{L}^{2(s+1)}(\Omega)$, então $u \in \mathcal{L}^{2^*(s+1)}(\Omega)$. De fato, começando com $s_0 = 0$ e obtemos $q_0 = 2(s_0+1) = 2$, $q_1 = 2^*(s_0+1) = 2^* = 2(s_1+1)$ e $s_1 = \frac{2^*}{2} - 1 > 1$, pois $2^*/2 = N/(N-2) > 1$. Pelas imersões de Sobolev, como $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$, então $u \in \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$, ou seja, temos a validade da afirmação para $s = 0$. Além disso, se a afirmação é verdadeira, temos que

$u \in \mathcal{L}^{2(s_1+1)}(\Omega)$ implica que $u \in \mathcal{L}^{2^*(s_1+1)}(\Omega)$, ou seja, $u \in \mathcal{L}^{q_2}(\Omega)$, com $q_2 = 2(s_2+1) = 2^*(s_1+1) > q_1$ e $s_2 = \frac{2^*}{2}(s_1+1) - 1 = \frac{2^*}{2}(\frac{2^*}{2}) - 1 > s_1$, pois $2^*/2 > 1$. Dessa forma, construímos sequências crescentes (s_i) e (q_i) e, após um número finito k de iterações, obtemos $q_k = 2(s_{k-1}+1)\frac{2^*}{2} \geq q > 2(s_{k-1}+1) = q_{k-1} > 2$, para $s_{k-1} = (\frac{2^*}{2})^{k-1} - 1$ tal que $u \in \mathcal{L}^{q_k}(\Omega)$ e, por interpolação, concluímos que $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$. Resta então mostrar que a afirmação é válida para qualquer $s \geq 0$ para concluir a prova.

Dado $s \geq 0$ e $\mathcal{k} \geq 1$, defina $v_{s,\mathcal{k}}(x) := u(x)\min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}$ e note que

$$\nabla v_{s,\mathcal{k}} = \min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}\nabla u + \begin{cases} 2s|u|^{2s}\nabla u(x), & \text{se } 0 \leq |u(x)| \leq \mathcal{k} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, se definirmos $\Omega_{s,\mathcal{k}} := \{x \in \Omega : |u(x)|^s < \mathcal{k}\}$, então

$$\nabla v_{s,\mathcal{k}} = \left[\min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\} + 2s|u|^{2s}\chi_{\Omega_{s,\mathcal{k}}}(x)\right]\nabla u,$$

em que $\chi_{\Omega_{s,\mathcal{k}}}$ denota a função característica do conjunto $\Omega_{s,\mathcal{k}}$. Deste modo, usando $v_{s,\mathcal{k}}$ como função teste na formulação fraca da equação satisfeita por u, obtemos

$$\int_\Omega \min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}|\nabla u|^2 dx + 2s\int_{\Omega_{s,\mathcal{k}}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx = \int_\Omega a(x)(1+|u|)\min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}|u|dx. \quad (61)$$

Observe agora que, definindo $w_{s,\mathcal{k}}(x) := u(x)\psi(x) := u(x)\min\{|u|^s, \mathcal{k}\}$, temos

$$\nabla w_{s,\mathcal{k}} = \left[\min\{|u|^s, \mathcal{k}\} + s|u|^s\chi_{\Omega_{s,\mathcal{k}}}(x)\right]\nabla u \;\text{ e, portanto,}$$

$$\int_\Omega |\nabla w_{s,\mathcal{k}}|^2 dx = \int_\Omega \min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}|\nabla u|^2 dx + 2s\int_{\Omega_{s,\mathcal{k}}} |u|^s\min\{|u|^s, \mathcal{k}\}|\nabla u|^2 dx + s^2\int_{\Omega_{s,\mathcal{k}}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx.$$

Uma vez que $\psi(x) = \min\{|u|^s, \mathcal{k}\} = |u|^s$ em $\Omega_{s,\mathcal{k}}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w_{s,\mathcal{k}}|^2 dx &= \int_\Omega \min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}|\nabla u|^2 dx + 2s\int_{\Omega_{s,\mathcal{k}}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx + s^2\int_{\Omega_{s,\mathcal{k}}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx \\ &\leq (1+2s+s^2)\int_\Omega \min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}|\nabla u|^2 dx = (1+2s+s^2)\int_\Omega \psi^2|\nabla u|^2 dx,\end{aligned}$$

pois, $\psi^2(x) := \min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}$. Então, podemos usar (61) para concluir que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w_{s,\mathcal{k}}|^2 dx &\leq c_1(s)\int_\Omega a(x)(1+|u|)\min\{|u|^{2s}, \mathcal{k}^2\}|u|dx - c_1(s)2s\int_{\Omega_{s,\mathcal{k}}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx \\ &\leq c_1(s)\int_\Omega a(x)(1+|u|)\psi^2|u|dx, \quad \text{com } c_1(s) := (1+2s+s^2). \quad (62)\end{aligned}$$

Observe agora que $\psi^2|u| \leq 2 + \psi^2|u|^2$. De fato, a desigualdade é obvia quando $|u| \geq 1$. Por outro lado, se $|u| < 1$, então $\psi^2 = |u|^{2s}$, pois $\mathcal{k} \geq 1$. Neste caso, a desigualdade em questão se escreve como $|u|^{2s+1} \leq 2 + |u|^{2s+2}$, que é verdadeira, já que $|u| < 1$. Com isso, temos $(1+|u|)\psi^2|u| \leq 2 + \psi^2|u|^2 + \psi^2|u|^2 = 2 + 2\psi^2|u|^2$ e, portanto, segue de (62) que

$$\int_\Omega |\nabla w_{s,\mathcal{k}}|^2 dx \leq 2c_1\int_\Omega a(x)dx + 2c_1\int_\Omega a(x)\psi^2|u|^2 dx \leq c_2 + 2c_1\int_\Omega a(x)\psi^2|u|^2 dx,$$

com $c_2 = c_2(s, a, \Omega) = 2c_1\|a\|_{N/2}|\Omega|^{(N-2)/N}$. Dessa forma, considerando $u \in \mathcal{L}^{2(s+1)}(\Omega)$, para $\mathcal{M} > 0$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w_{s,\mathcal{k}}|^2 dx &\leq c_2 + 2c_1\mathcal{M}\int_{\{a(x)<\mathcal{M}\}} |u|^{2s}|u|^2 dx + 2c_1\int_{\{a(x)\geq\mathcal{M}\}} a(x)\psi^2|u|^2 dx \\ &\leq c_3(s, a, \Omega, \mathcal{M})\|u\|_{2(s+1)}^{2(s+1)} + 2c_1\left(\int_{\{a(x)\geq\mathcal{M}\}} a(x)^{N/2}dx\right)^{2/N}\left(\int_\Omega [\psi(x)u]^{2^*} dx\right)^{2/2^*}.\end{aligned}$$

Como $w_{s,\mathcal{k}} = \psi u$, da imersão de Sobolev $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$, temos $\|w_{s,\mathcal{k}}\|_{2^*}^2 \leq \mathcal{C}\|w_{s,\mathcal{k}}\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}^2$, logo

$$\|\nabla w_{s,\mathcal{k}}\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla w_{s,\mathcal{k}}|^2 dx \leq c_3 \|u\|_{2(s+1)}^{2(s+1)} + c_4 \left(\int_{\{a(x) \geq \mathcal{M}\}} a(x)^{N/2} dx \right)^{2/N} \|\nabla w_{s,\mathcal{k}}\|_2^2, \quad (63)$$

em que $c_4 = c_4(s, \Omega)$. Uma vez que $a \in \mathcal{L}^{N/2}(\Omega)$, vale $\lim\limits_{\mathcal{M} \to +\infty} \int_{\{a(x) \geq \mathcal{M}\}} a(x)^{N/2} dx = 0$ e, portanto, para $\mathcal{M} > 0$ grande o suficiente, temos que

$$\left(\int_{\{a(x) \geq \mathcal{M}\}} a(x)^{N/2} dx \right)^{2/N} < 1/(2c_4).$$

Assim, usando (63) e $w_{s,\mathcal{k}}(x) = u(x) \min\{|u|^s, \mathcal{k}\}$, concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla (u \min\{|u|^s, \mathcal{k}\})|^2 dx \leq 2c_3 \|u\|_{2(s+1)}^{2(s+1)}.$$

Utilizando outra vez a imersão $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$, a desigualdade acima nos dá

$$\left(\int_\Omega |u \min\{|u|^s, \mathcal{k}\}|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq c_5 \int_\Omega |\nabla (u \min\{|u|^s, \mathcal{k}\})|^2 dx \leq c_5 2c_3 \|u\|_{2(s+1)}^{2(s+1)} =: c_6 \|u\|_{2(s+1)}^{2(s+1)},$$

com $c_6 = c_6(s, a, \Omega, \mathcal{M})$. Como $\mathcal{k}$ é arbitrário, podemos fazer $\mathcal{k} \to +\infty$, assim obtemos $|u \min\{|u|^s, \mathcal{k}\}|^{2^*} \to |u|^{2^*(s+1)}$ q.t.p. em Ω. Além disso, $|u \min\{|u|^s, \mathcal{k}\}|^{2^*} \leq |u|^{2^*(s+1)}$, para todo $\mathcal{k} \geq 1$. Portanto, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos $\int_\Omega |u|^{2^*(s+1)} dx \leq c_6 \|u\|_{2(s+1)}^{2(s+1)} < +\infty$, isto é, $u \in \mathcal{L}^{2^*(s+1)}(\Omega)$ e concluímos a prova. □

Corolário 5.1. *O Teorema 5.13 permanece válido quando $N \geq 3$ e a função g tem crescimento crítico, isto é, $|g(x,s)| \leq c_1 + c_2 |s|^{2^*-1}$, para todo $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$, com c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.*

Prova. Observe que, se $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ é solução fraca de $(\widetilde{\mathcal{P}}_g)$, então u é solução fraca de

$$-\Delta u = a(x)(1 + |u|), \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \quad \text{com } \ a(x) = \frac{g(x,u)}{1 + |u|}.$$

Além disso, visto que Ω é limitado e $u \in \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$, segue que $a \in \mathcal{L}^{N/2}(\Omega)$, pois

$$|a(x)| = \frac{|g(x,u)|}{1 + |u|} \leq \frac{c_1 + c_2 |u|^{2^*-1}}{1 + |u|} \leq c_1 + c_2 |u|^{2^*-2},$$

logo,

$$\int |a(x)|^{N/2} \leq c_1 |\Omega| + c_2 \int |u|^{\frac{2N - 2(N-2)}{N-2} \frac{N}{2}} = c_1 |\Omega| + c_2 \int |u|^{2^*} < \infty.$$

Aplicando o Teorema 5.14 de Brezis-Kato, segue que $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. Então,

$$|g(x,s)|^{q/(2^*-1)} \leq (c_1 + c_2 |s|^{2^*-1})^{q/(2^*-1)} \leq c_3 + c_4 |s|^q, \quad \forall\, x \in \Omega, \, s \in \mathbb{R}.$$

Como Ω é limitado e $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, segue que $g(\cdot, u) \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, com $p = \frac{q}{(2^*-1)}$. Aplicando o item (i) do Teorema 5.12, concluímos que $u \in \mathcal{W}^{2,p}(\Omega)$. Escolhendo q suficientemente grande de forma que $p = q/(2^* - 1) > N$, as imersões no Teorema 4.17, isto é,

$$\mathcal{W}^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-N/p}(\Omega) \text{ para } p > N, \text{ implicam que } u \text{ é Hölder contínua.}$$

Usando agora o fato de que g é também Hölder contínua, podemos proceder como no final do Caso 1 do Teorema 5.13 para concluir que $g(\cdot, u)$ é Hölder contínua. Segue então do item (ii) do Teorema 5.12 que u é solução clássica do problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_g)$.

□

6 Exercícios

6.1 Funções Harmônicas

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com fronteira suave.

Exercício 6.1.1. Mostre que a função $\Gamma : \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ dada por

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{se } N = 2, \\ \dfrac{1}{N(2-N)\omega_N} |x|^{2-N}, & \text{se } N \geq 3, \end{cases}$$

é harmônica e ilimitada quando $|x| \to 0$.

Exercício 6.1.2. Prove o Teorema 1.3.

Exercício 6.1.3. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \Omega$, então

$$u(x_0) = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) \, \mathrm{d}\sigma_x.$$

Sugestão: Note que $u(x_0) = [N\omega_N s^{N-1}]^{-1} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x_0) \mathrm{d}\sigma_x$.

Exercício 6.1.4. Modifique a prova do Teorema 1.1 para mostrar que

$$u(0) = \lim_{s \to 0^+} \varphi(s) = \varphi(r) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(0)} g(x) \, \mathrm{d}\sigma_x + \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_{B_r(0)} \left(\frac{1}{|x|^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right) f(x) \, \mathrm{d}x,$$

sempre que $N \geq 3$ e $u \in \mathcal{C}^2(B_r(0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_r(0)})$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } B_r(0), \\ u = g & \text{em } \partial B_r(0). \end{cases}$$

Exercício 6.1.5. Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é harmônica então, para todo $x_0 \in \Omega$ e $i \in \{1, \ldots, N\}$, temos que

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{N}{d_{x_0}} \max_{x \in \partial B_{d_{x_0}}(x_0)} |u(x)|,$$

onde $d_{x_0} = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

Exercício 6.1.6. (Teorema de Liouville) Se u é harmônica e limitada inferiormente (ou superiormente) em $\mathbb{R}^N$, então u é constante.
Sugestão: Use o exercício anterior.

Exercício 6.1.7. Se u é harmônica em Ω, então u é analítica em Ω.
Sugestão: cf. [5, Teorema 2.2.10].

Exercício 6.1.8. (Desigualdade de Harnack) Se u é harmônica e não-Negativa, e $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ é conexo, então existe uma constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, \Omega_0) > 0$ tal que

$$\max_{\Omega_0} u \leq \mathcal{C} \inf_{\Omega_0} u.$$

Sugestão: cf. [5, Teorema 2.2.11].

Exercício 6.1.9. Mostre que, no enunciado do Teorema 1.5, a afirmação (i) implica em (ii). Em seguida, dê um exemplo mostrando que a conexidade em (i) é essencial.

Exercício 6.1.10. Mostre que $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ é harmônica se, e somente se,

$$\int_\Omega u\Delta\phi \, \mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^2(\Omega).$$

Sugestão: cf. [8, Teorema 1.16].

Exercício 6.1.11. Dizemos que uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é sub-harmônica se

$$-\Delta u \leq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Prove que se u é sub-harmônica então, para todo bola $B_r(x) \subset\subset \Omega$, vale

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} u(y) \, \mathrm{d}y.$$

Conclua que, se Ω é limitado, pode-se estender u continuamente para $\overline{\Omega}$ e então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Exercício 6.1.12. Sejam u, v funções com u harmônica e v sub-harmônica em Ω. Se $u \equiv v$ em $\partial\Omega$, então $v \leq u$ em Ω.

Exercício 6.1.13. Dizemos que uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é superharmônica se

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Enuncie e prove resultados análogos aos dos dois exercícios anteriores para funções superharmônicas.

Exercício 6.1.14. Se $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ é convexa e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é harmônica, então a função v definida por $v(x) = \phi(u(x))$ é sub-harmônica.

Exercício 6.1.15. Se u é harmônica então a função v definida por $v(x) = |\nabla u(x)|^2$ é sub-harmônica.

Exercício 6.1.16. Sejam $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$, $f \in \mathcal{C}(\overline{B})$, $g : \partial B \to \mathbb{R}$ contínua,

$$\mathcal{F} := \max_{x \in \overline{B}} |f(x)| \quad \text{e} \quad \mathcal{G} := \max_{x \in \partial B} |g(x)|.$$

Supondo que $u \in \mathcal{C}^2(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$ é tal que $\Delta u \equiv f$ em B, $u \equiv g$ em ∂B, resolva os itens abaixo.

(a) Defina $w^\pm : \overline{B} \to \mathbb{R}$ por

$$w^\pm(x) := \frac{\mathcal{F}}{2N}|x|^2 \pm u(x)$$

e verifique que $\Delta w^\pm \geq 0$ em B.

(b) Verifique que, se $x \in \partial B$, então $w^\pm(x) \leq \dfrac{\mathcal{F}}{2N} + \mathcal{G}$.

(c) Conclua que existe $\mathcal{C} > 0$, independente de u, tal que

$$\max_{x \in \overline{B}} |u(x)| \leq \mathcal{C} \left(\max_{x \in \overline{B}} |f(x)| + \max_{x \in \partial B} |g(x)| \right).$$

Exercício 6.1.17. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é conexo e u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g : \partial\Omega \to [0, \infty)$ é tal que $g(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$, então $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.

6.2 O Problema de Poisson

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com fronteira suave.

Exercício 6.2.1. Se $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ é harmônica e $A_{N\times N}$ é uma matriz ortogonal, então $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $v(x) = u(Ax)$ é também harmônica.

Exercício 6.2.2. Complete os detalhes da prova do Lema 2.1, provando as igualdades em (11) e (12).

Exercício 6.2.3. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \gamma \leq 1$, verifique que $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$, munido com a norma,

$$\|u\|_{k,\gamma} = \sum_{|\alpha|_s \leq k} (\|D^\alpha u\|_0 + H_\gamma[D^\alpha u])$$

é um espaço de Banach.

Exercício 6.2.4. (cf. [15, Exercício 1.4]) Sejam $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \dfrac{(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^2} |\ln|x||^{\alpha-2}(\alpha - 1 + 4\ln|x|) & \text{se } 0 < |x| < 1/2, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 1$, $x = (x_1, x_2)$ e ω_f é o potencial Newtoniano gerado por f. Resolva os itens abaixo.

(a) Definindo $v : B_{1/2}(0) \to \mathbb{R}$ por $v(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)|\ln|x||^\alpha & \text{se } 0 < |x| < 1/2, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

verifique que $-\Delta v = f$ em $\Omega \setminus \{0\}$, $v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, mas v não é de classe $\mathcal{C}^2$ em Ω.

(b) Verifique que, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, a igualdade $\displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ é satisfeita para $u = \omega_f$ e para $u = v$.

(c) Utilize o item acima e o Exercício 6.1.10 para concluir que $\Delta(\omega_f - v) = 0$ em Ω.

(d) Conclua que o potencial Newtoniano ω_f não é de classe $\mathcal{C}^2$ em Ω.

Exercício 6.2.5. O Princípio da Singularidade Removível afirma que, se u é uma função harmônica e limitada em $\overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}$, então u pode ser estendida para $\overline{B_r(x_0)}$ de modo que a extensão seja harmônica.

(a) Prove o resultado enunciado acima (cf. [15, Proposição 4.12]).

(b) Use o resultado e o Princípio do Máximo para verificar a afirmação do Exemplo 2.1.

Exercício 6.2.6. Seja $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1,\, x_N > 0\}$. Suponha que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B^+})$ é harmônica e $u = 0$ em $\partial B^+ \cap \{x_N = 0\}$. Usando um cálculo direto, mostre que $u^* : B_1(0) \to \mathbb{R}$ definida abaixo é harmônica

$$u^*(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x_N \geq 0 \\ -u(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N) & \text{se } x_N < 0. \end{cases}$$

Exercício 6.2.7. Resolva os itens a seguir para mostrar que o resultado do exercício anterior permanece válido se trocarmos $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B^+})$ por $u \in \mathcal{C}(B^+)$:

(a) Explique por que existe v tal que $\Delta v = 0$ em B, $v = u^*$ em ∂B.

(b) Aplique o Princípio do Máximo para mostrar que v é ímpar em x_N.

(c) Verifique que $v = u^*$ em B^+ e conclua que u^* é harmônica em $B_1(0)$.

Exercício 6.2.8. Prove o Teorema 2.5 (cf. [5, Teorema 11, Seção 2.2]).

Exercício 6.2.9. Use a fórmula de Poisson (cf. Teorema 2.5) para provar que

$$r^{N-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{N-1}}u(0) \leq u(x) \leq r^{N-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{N-1}}u(0),$$

sempre que u é não-Negativa e harmônica em $B_r(0)$. Conclua que uma função não negativa e harmônica em $\mathbb{R}^N$ tem que ser constante.

6.3 Operadores Lineares de 2° Ordem

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^2$. O operador $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico em Ω e tem a forma

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_i,x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

com os coeficientes limitados em Ω e $c \leq 0$ em Ω.

Exercício 6.3.1. Verifique com detalhes todas as afirmações feitas na Observação 3.2.

Exercício 6.3.2. Se $\Omega = (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$ e $u(x,y) = \cos x \cos y$, então u satisfaz $\Delta u + 2u = 0$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, mas u troca de sinal em Ω. Por que isso não contraria o Princípio do Máximo?

Exercício 6.3.3. A função $u(x,y) = \dfrac{1-(x^2+y^2)}{(1-x)^2+y^2}$, $(x,y) \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, satisfaz $\Delta u = 0$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega \setminus \{(1,0)\}$. O Princípio do Máximo se aplica nesse caso?

Exercício 6.3.4. Prove o Teorema 3.3..

Exercício 6.3.5. Prove o Teorema 3.4. Conclua que se $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfazem $\mathcal{L}u \geq \mathcal{L}v$ em Ω, $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω.

Exercício 6.3.6. Considere as hipóteses do Lema de Hopf e o novo operador $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - c^+(x)$. Repetindo o argumento da prova, mostre que se $u(x_0) = 0$, então o resultado do lema permanece válido independente do sinal de $c(x)$.

Exercício 6.3.7. Se Ω é conexo e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaz $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω, $u \leq 0$ em Ω, então $u < 0$ em Ω ou $u \equiv 0$ em Ω, independente do sinal de $c(x)$.

Exercício 6.3.8. Mostre que é sempre possível obter $y \in \Sigma$ e $r > 0$ satisfazendo as condições utilizadas na prova do Teorema 3.5..

Exercício 6.3.9. Prove a afirmação feita na Observação 3.5..

Exercício 6.3.10. Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaz $\Delta u = u^3$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, então $u \equiv 0$.

Exercício 6.3.11. Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaz $\Delta u = u^3 - u$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, então $-1 \leq u(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$. Seria possível $u(x_0) = \pm 1$ para algum $x_0 \in \Omega$?

Exercício 6.3.12. Se Ω é conexo, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaz $\Delta u = u^2$ em Ω e u assume máximo em Ω, então $u \equiv 0$.

Exercício 6.3.13. Se $u(x) = -e^x - e^{-x}$, então u satisfaz $u'' - u = 0$ em $\mathbb{R}$ e assume máximo em $x = 0$. Por que isso não contraria o Princípio do Máximo Forte?

Exercício 6.3.14. Considere o problema *não linear*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u & = & \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

em que $f(\cdot, u) \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $f(x, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e f é não decrescente em u, isto é, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Mostre que o problema tem no máximo uma solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Exercício 6.3.15. Use o exercício anterior para verificar que, se $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ é uma função não negativa, então o problema não linear

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & \mathcal{P}(x)e^u & \text{em } \Omega, \\ u & = & \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

tem no máximo uma solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Exercício 6.3.16. Seja Ω conexo e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tal que $\mathcal{L}u = 0$ em Ω e $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$.

(a) Mostre que u é constante em Ω.

(b) Se $c(x_0) < 0$ para algum $x_0 \in \Omega$, então $u \equiv 0$ em Ω.

(c) Enuncie e prove um teorema de unicidade de solução para o problema de Neumann $\mathcal{L}u = f$ em Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi$ em $\partial\Omega$.

Exercício 6.3.17. Para Ω conexo, considere o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{L}u & = & f & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha(x)u & = & \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

em que $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ e $\alpha \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ é uma função não negativa.

(a) Se $c \not\equiv 0$ ou $\alpha \not\equiv 0$, então o problema tem no máximo uma solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

(b) Se $c \equiv 0$ e $\alpha \equiv 0$, então quaisquer duas soluções do problema em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ diferem por uma constante.

Exercício 6.3.18. Se $\mathcal{K} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então o operador linear $\mathcal{T} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ definido por $(\mathcal{T}u)(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathcal{K}(x,y)u(y)\,dy$ é compacto.

Exercício 6.3.19. Se $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é contínuo e $\mathcal{K} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ é compacto, então $(\mathcal{K} \circ \mathcal{T}) : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ é compacto.

Exercício 6.3.20. Seja $(\mathcal{X}, d)$ é um espaço métrico completo e $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Se existe $c \in (0,1)$ tal que

$$d(\mathcal{T}x_1, \mathcal{T}x_2) \leq c \cdot d(x_1, x_2), \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{X},$$

então existe exatamente um elemento $x \in \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{T}x = x$.

Sugestão: Tome $x_0 \in \mathcal{X}$ não nulo e mostre que a sequência $x_k = \mathcal{T}x_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy. Em seguida, mostre que o limite dessa sequência é um ponto fixo.

Exercício 6.3.21. Mostre que, se $t \in \mathbb{R}$, então existe $c > 0$ tal que

$$(a+b)^t \leq c(a^t + b^t), \quad \forall\, a,\, b \geq 0.$$

Sugestão: Estude o comportamento de $f(x) = (1+x)^t/(1+x^t)$ quando $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.

6.4 Espaços de Sobolev

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercício 6.4.1. Complete todos os detalhes da prova do Teorema 4.1.

Exercício 6.4.2. Decida para quais valores de $\gamma \in \mathbb{R}$ a função $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = |x|^{-\gamma}$ possui derivada fraca.

Sugestão: o candidato natural é a derivada clássica, que pode não existir em $x = 0$. Use integração por partes em conjuntos do tipo $B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ e depois faça $\varepsilon \to 0^+$.

Exercício 6.4.3. Sejam Ω_1, Ω_2 abertos de $\mathbb{R}^N$. Se $u_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, possuem derivadas fracas $v_i(x) = D^\alpha u_i(x)$ em Ω_i e $u_1(x) = u_2(x)$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, então a função

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{se } x \in \Omega_1, \\ u_2(x) & \text{se } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

possui α-ésima derivada fraca em $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Exercício 6.4.4. Considere a função sinal definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Verifique que $\operatorname{sgn}(x)$ possui derivada clássica contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mas não possui derivada fraca em $(-a, a)$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 6.4.5. Se $u : (0, 1) \to \mathbb{R}$ é contínua em $(0, 1)$, diferenciável q.t.p. em $(0, 1)$ e possui derivada fraca de primeira ordem em $(0, 1)$, então u é absolutamente contínua.

Sugestão: veja [13, Teorema 5.1.1].

Exercício 6.4.6. Se a sequência de funções (u_m) tem derivadas fracas $v_m(x) = D^\alpha u_m(x)$ no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u_m \to u$ e $v_m \to v$ em $\mathcal{L}^1(\Omega)$, então $v(x) = D^\alpha u(x)$.

Exercício 6.4.7. As normas abaixo são equivalentes em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad |u|_{k,p} = \sum_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_p \quad \text{e} \quad |||u|||_{k,p} = \max_{|\alpha|_s \le k} \|D^\alpha u\|_p.$$

Exercício 6.4.8. Prove a Proposição 4.2.

Exercício 6.4.9. $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 6.4.10. Se $1 < p < \infty$ e $0 < \alpha < (N - p)/p$, então $u(x) := |x|^{-\alpha}$ está em $\mathcal{W}^{1,p}(B_1(0))$.

Exercício 6.4.11. Se $1 \le p < \infty$ e $f \in \mathcal{L}^p_{loc}(\Omega)$, então $f^\varepsilon \to f$ em $\mathcal{L}^p(\Omega_0)$ para todo conjunto $\Omega_0 \subset\subset \Omega$.

Exercício 6.4.12. Use integração por partes para provar a seguinte desigualdade de interpolação $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \le \mathcal{C} \left(\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |D^2 u|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$, para toda função $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Usando um argumento de densidade estenda o resultado para $u \in \mathcal{W}^{2,2}(\Omega) \cap \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$.

Exercício 6.4.13. Use integração por partes para obter a seguinte desigualdade de interpolação $\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x \leq \mathcal{C}\left(\int_\Omega u^p \mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2 u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/2}$, para $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e em seguida estenda o resultado para $u \in \mathcal{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

<u>*Sugestão*</u>*: observe que* $\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega u_{x_i} u_{x_i} |\nabla u|^{p-2} dx.$

Exercício 6.4.14. Se Ω é conexo e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ é tal que $\nabla u = 0$ q.t.p. em Ω, então u é constante q.t.p. em Ω.

Exercício 6.4.15. Se $u(x) = |x|$, para todo $x \in \Omega = (-1,1)$, então $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega)$, mas u não pode ser aproximada nesse espaço por funções de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

<u>*Sugestão*</u>*: mostre que, se* $\varepsilon < 1/2$*, não existe* $\phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ *tal que* $\|u' - \phi'\|_\infty < \varepsilon$.

Exercício 6.4.16. Se $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$ e $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1,0), \\ 1 & \text{se } x \in (0,1), \end{cases}$ então $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \geq 1$, mas u não pode ser aproximada nesse espaço por funções de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

<u>*Sugestão*</u>*: veja [13, Exemplo 5.4.2].*

Exercício 6.4.17. Obtenha $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega)$ tal que u não é Lipschitz contínua em Ω.

Exercício 6.4.18. A desigualdade de Poincaré pode ser falsa em domínios ilimitados.

Exercício 6.4.19. Mostre que não existe um operador linear limitado $\mathcal{T} : \mathcal{L}^p(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ tal que $\mathcal{T}u = u|_{\partial\Omega}$ sempre que $u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Exercício 6.4.20. Se $n > 1$ então a função $u(x) = \log\left(\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right)$ é ilimitada em $B_1(0)$ e $u \in \mathcal{W}^{1,N}(B_1(0))$.

Exercício 6.4.21. Prove o Lema 4.4 no caso em que $p = \infty$.

Exercício 6.4.22. Prove o Teorema 4.16.

Exercício 6.4.23. Mostre que podemos substituir v por u_m na estimativa (46).

Exercício 6.4.24. Se $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então existe uma função u^* absolutamente contínua tal que $u(x) = u^*(x)$ q.t.p. em Ω. Além disso, a derivada clássica u' (que existe q.t.p. em Ω) pertence a $\mathcal{L}^p(\Omega)$ e

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1-1/p}\left(\int_a^b |u'(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

Conclua que a imersão $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é compacta, o mesmo valendo para a imersão em $\mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$.

Exercício 6.4.25. Se $u, v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, então $uv \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ e $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$.

Exercício 6.4.26. Se $r \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ então o operador multiplicação $u \mapsto ru$ é contínuo em $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$. Se $r > 0$ em $\overline{\Omega}$, então esse operador é um isomorfismo.

<u>*Sugestão*</u>*: lembre que* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Exercício 6.4.27. Se $\Omega = B_1(0)$ e $\gamma > 0$, então existe uma constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\gamma, N) > 0$ tal que

$$\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \leq \mathcal{C} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x,$$

sempre que $u \in \mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ é tal que a medida do conjunto $\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ é $\geq \gamma$.

Exercício 6.4.28. Seja $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ com F' limitada, $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Então $v := F(u) \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com

$$v_{x_i} = F'(u) u_{x_i}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Verifique que o mesmo resultado vale se Ω é ilimitado e $F(0) = 0$.

Sugestão: veja [7, Lema 7.5] ou [13, Teorema 5.4.2].

Exercício 6.4.29. Se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ então, $u^+, u^-, |u| \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Além disso, para cada $i = 1, \ldots, N$, vale

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \text{q.t.p. em } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{q.t.p. em } \{u \leq 0\}, \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & \text{q.t.p. em } \{u \geq 0\}, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \text{q.t.p. em } \{u < 0\}. \end{cases}$$

Sugestão: defina $F_\varepsilon(t) = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$ para $t \geq 0$, $F_\varepsilon \equiv 0$ em $(-\infty, 0)$. Use o exercício anterior e o fato de que $F_\varepsilon(t) \to t^+$, quando $\varepsilon \to 0^+$ (cf. [7, Lema 7.6]).

Exercício 6.4.30. Se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$ e $\Omega_c = \{x \in \Omega : u(x) = c\}$, então $\nabla u = 0$ q.t.p. em Ω_c.

Sugestão: considere $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$, $\phi \equiv 0$ fora de $B_2(0)$ e $0 \leq \phi \leq 1$, e a sequência $\phi_m(x) := \phi(x/m)$.

Exercício 6.4.31. A imersão $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ não é compacta.

Sugestão: tome u_1 de classe $\mathcal{C}^1$ com suporte em $(0,1)$ e $\|u_1\|_{1,p} = 1$, e considere a sequência $u_m(x) = u_1(x - m)$.

6.5 Soluções Fracas para Equações Lineares de 2° Ordem

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercício 6.5.1. Resolva os exercícios 1 a 3, e 5 a 9 da Seção 6.6 do livro do Evans [5].

Exercício 6.5.2. Mostre que imagem do operador A definido na prova do Teorema 5.2 é fechada em $\mathcal{H}$.

Exercício 6.5.3. Prove a equação (52).

Exercício 6.5.4. Mostre que as autofunções do problema $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ são ortogonais também em $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Em seguida, considerando $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $V_k \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ o subespaço gerado por $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, mostre as seguintes desigualdades variacionais

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \lambda_k \int_\Omega u^2, \quad \forall\, u \in V_k, \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega u^2, \quad \forall\, u \in V_k^\perp,$$

Em particular, se tomarmos $k = 0$, a desigualdade acima é a desigualdade de Poincaré.

Exercício 6.5.5. Sejam $\Omega_1 \subset \Omega_2$ domínios limitados e $\lambda_1(\Omega_i)$ o primeiro autovalor do problema $(\mathcal{P}_\lambda^a)$ com $\Omega = \Omega_i$. Mostre que $\lambda_1(\Omega_2) \leq \lambda_1(\Omega_1)$.

Exercício 6.5.6. Faça o estudo do problema de autovalor

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{L}u & = & \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $\mathcal{L}$ é um operador simétrico e uniformemente elíptico da forma

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^N (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x)u,$$

com os coeficientes limitados e $c \geq 0$ em Ω.

Exercício 6.5.7. Faça o estudo do problema de autovalor com peso

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda m(x) u, & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $m \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ para algum $r > N/2$. Em seguida, obtenha desigualdades análogas àquelas do Exercício 6.5.4 nesse novo contexto.

Exercício 6.5.8. Prove a versão local do Teorema 5.14 considerando, no início da prova, a função $v = u \min\{|u|^{2s}, L^2\}\eta^2$, em que $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Sugestão: cf. [17, Lema B.2].

Referências

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] S. Agmon S., A. Douglis A., L. Nirenberg, *Estimatives near the boundary for solutions of elliptic P. D. E. satisfying a general boundary value condition I*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.

[3] H. Brézis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer New York, NY, LLC 2011.

[4] H. Brézis, T. Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials*, J. Math. Pures Appl. **58** (1979), 137-151.

[5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Math. Soc. (1998).

[6] D. G. de Figueiredo, *Equações Elípticas Não-Lineares*, IMPA 11^o. CBM(1977)

[7] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential equations of second order* Springer-Verlag, Berlin, 1977 (2a edição 1984).

[8] Q. Han e F. Lin, *Elliptic Partial Differential Equations*, American Math. Soc.(1997)

[9] O.D. Kellogg, *On the derivatives of harmonic functions on the boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), 486–510.

[10] A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function spaces*, Ed. Acad., (1977)

[11] E. Lieb e M. Loss, *Analysis*, 1a ed. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1997. (Graduate Studies in Mathematics, 14)

[12] N.G. Meyers e J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 1055–1056.

[13] D. Mitrovic, D. Zubrinic, *Fundamentals of applied functional analysis: 91 - Distributions, Sobolev spaces, nonlinear elliptic equations*, Chapman and Hall/CRC, (1997)

[14] J. Moser, *A new proof of De Giorgi's theorem*, Commun. Pure Appl. Math. **13** (1960) 457–468

[15] A. Ponce, *Métodos clássicos em Teoria do Potencial*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[16] M. Protter e H. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall (1967).

[17] M. Struwe, *Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag (2008)

[18] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Princeton Univ. Press (1957).