2 O Problema de Poisson

2.1 Aula 04: A Solução Fundamental e O Potencial Newtoniano

O objetivo desta aula é estudar a existência de solução para o problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

As hipóteses sobre Ω, f e g serão colocadas no decorrer da discussão. A ideia básica e estudar separadamente os problemas

$$\Delta u = f \ \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \tag{5}$$

e

$$\Delta u = 0 \ \text{ em } \Omega, \quad u = g \ \text{ em } \partial\Omega, \tag{6}$$

e observar que, se u_1 é solução de (5) e u_2 é solução de (6), então a função $u := u_1 + u_2$ é uma solução do problema (P). Na Aula 6, vamos nos concentrar na solução de um caso particular do problema (6). No que segue, vamos considerar o problema $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.1. *Se $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$ e $A = A_{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, então a função $v(x) := u(Ax)$ também satisfaz a mesma equação (Exercício 6.2.1). Por conta disso, vamos tentar simplificar o problema procurando uma solução radial da equação, isto é, uma solução que é constante ao longo de esferas centradas na origem.*

Supondo que u é uma solução radial, vamos denotar por $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função que satisfaz $v(r) = u(x)$, $\ r = |x|$. Como a função v só depende da variável radial r, podemos reescrever a equação de Laplace em coordenadas radiais, obtendo assim uma equação diferencial ordinária. A fim de obter essa EDO note que, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, podemos usar a regra da cadeia para obter $u_{x_i} = v'(r)r_{x_i}$, e $u_{x_ix_i} = v''(r)r_{x_i}^2 + v'(r)r_{x_ix_i}$. Como $r = |x| = (|x|^2)^{1/2}$, então

$$r_{x_i} = \frac{1}{2}\left(|x|^2\right)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{r} \ \text{ e } r_{x_ix_i} = \left(\frac{x_i}{r}\right)_{x_i} = \frac{1}{r} + x_i(-1)r^{-2}r_{x_i} = \frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}.$$

Portanto

$$\Delta u = \sum_{i}^{n} u_{x_ix_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(v''(r)r_{x_i}^2 + v'(r)r_{x_ix_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \sum_{i=1}^{n} v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

ou ainda $\Delta u = v''(r) + v'(r)\left(\dfrac{n}{r} - \dfrac{1}{r}\right)$. Logo a equação $-\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é equivalente a

$$v''(r) + v'(r)\left(\frac{n-1}{r}\right) = 0, \quad r > 0.$$

Supondo $v'(r) \neq 0$, podemos reescrever a equação acima na forma $(\ln v'(r))' = \dfrac{v''(r)}{v'(r)} = \dfrac{1-n}{r}$ e integrar para obter $\ln v'(r) = (1-n)\ln r + c_1 = \ln r^{1-n} + c_1$, ou ainda $v'(r) = c_2 r^{1-n}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. Integrando novamente obtemos $v(r) = \begin{cases} c_3 \ln r + c_4, & \text{se } n = 2, \\ c_3 r^{2-n} + c_4, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$ para constantes $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Com essa motivação, temos a seguinte definição.

Definição 2.1. *Definimos a solução fundamental do Laplaciano por*

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & \textit{se } n = 2, \\ \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & \textit{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Observação 2.2. *a) A função Γ é harmônica e ilimitada quando $x \to 0$ (Exercício 6.1.1). Porém, ela é localmente integrável. De fato, para ver isso basta mostrar que a integral em bolas é finita. Considerando o caso 2-dimensional temos que,*

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(0)} \ln|x|\,\mathrm{d}\sigma_x\right) dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^\varepsilon \ln r \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r, \quad \text{para qualquer } \varepsilon > 0.$$

Portanto,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^2}{4}\left(1 - 2\ln\varepsilon\right), \quad \text{se } n = 2. \tag{7}$$

No caso de dimensões maiores, podemos proceder de modo análogo para obter

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(0)} r^{2-n}\,\mathrm{d}\sigma_x\right) dr = \frac{1}{2-n}\int_0^\varepsilon r\,\mathrm{d}r = \frac{\varepsilon^2}{2(2-n)}, \text{ se } n \geq 3. \tag{8}$$

b) É interessante notar que, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua, a função dada por $x \mapsto \Gamma(x-y)f(y)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Da mesma forma, se $\{y^1, \ldots, y^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma família finita de pontos, então a função $x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \Gamma(x - y^i)f(y^i)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{y^1, \ldots, y^k\}$.

Suponha que f é tal que possamos fazer a soma na Observação 2.2 (b) sobre todos os pontos de $\mathbb{R}^n$, isto é, que a função chamada de **Potencial Newtoniano** gerado por f, $\omega_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\omega_f(x) := (\Gamma * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$, está bem definida. Se fosse possível derivar sob o sinal da integral teríamos

$$\Delta\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Contudo, $D^2\Gamma(x)$ se comporta como $|x|^{-n}$ perto da origem, que não é localmente integrável. Portanto, não há como justificar a passagem da derivada para dentro da integral. De fato, a igualdade acima não é correta, conforme podemos ver pelo próximo resultado.

Lema 2.1. *Suponha que $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto. Então o Potencial Newtoniano gerado por f, isto é, $\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$ está bem definido, $\omega_f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta\omega_f = f$.*

Prova. Como $\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, temos que

$$\frac{\omega_f(x+he_i) - \omega_f(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\right)\Gamma(y)\,\mathrm{d}y.$$

O termo entre parênteses acima converge para para $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$, quando $h \to 0$. Além disso, usando a Desigualdade do Valor Médio concluímos que ele é limitado no suporte (compacto) de f. Uma vez que Γ é localmente integrável, podemos passar a igualdade acima ao limite e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\frac{\partial\omega_f}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\Gamma(y)\,\mathrm{d}y = \left(\Gamma * \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x). \tag{9}$$

De maneira análoga, mostra-se que $D^\alpha\omega_f = (\Gamma * D^\alpha f)$, sempre que α é um multi-índice qualquer com ordem $|\alpha| \leq 2$. Com isso, concluímos que $\omega_f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Aula 05: Funções Hölder Contínuas

Começamos nossa aula finalizando a a prova do Lema 2.1. Seguindo a notação da aula anterior, para calcular $\Delta\omega_f(x)$ vamos tomar $0 < \varepsilon < 1$ e usar (9) para escrever

$$\Delta\omega_f(x) = A_\varepsilon + C_\varepsilon, \text{ com } A_\varepsilon := \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y \text{ e } C_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Como Δf é limitado, podemos usar (7) e (8) para estimar

$$|A_\varepsilon| \leq \int_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)\Delta f(x-y)|\mathrm{d}y \leq \|\Delta f\|_\infty \int\limits_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)|\,\mathrm{d}y = \|\Delta f\|_\infty \times \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2(1-2\ln\varepsilon)}{4}, & \text{se } n=2, \\ \dfrac{\varepsilon^2}{2(n-2)}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Usando a regra de L'Hopital no caso $n = 2$, concluímos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon = 0$ para todo $n \geq 2$. Para estimar o termo C_ε, vamos inicialmente usar o Teorema 1.3(d) para obter

$$C_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y = D_\varepsilon + E_\varepsilon$$

$$\text{com } D_\varepsilon := \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))} \Gamma(y)\frac{\partial f}{\partial \eta}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y \text{ e } E_\varepsilon := -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\Gamma(y)\cdot\nabla f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Para estimar D_ε podemos usar (7) e (8) e que $\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)) = \partial B_\varepsilon(0)$, obtendo assim

$$|D_\varepsilon| \leq \|\nabla f\|_\infty \int\limits_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))} |\Gamma(y)|\,\mathrm{d}\sigma_y = \|\nabla f\|_\infty \times \begin{cases} (-\varepsilon\ln\varepsilon), & \text{se } n=2, \\ \dfrac{\varepsilon}{(n-2)}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \tag{11}$$

Isto mostra que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} D_\varepsilon = 0$. Usando uma vez mais o Teorema 1.3(d), obtemos $E_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} f(x-y)\Delta\Gamma(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))} f(x-y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(y)\,\mathrm{d}\sigma_y$. Como a função Γ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a primeira integral acima é nula. Com relação à segunda notemos que, como a integral é tomada na fronteira do exterior da bola, o vetor normal exterior é $-y/|y|$. Ademais, usando a definição de Γ, obtemos

$$\Gamma_{x_i} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|y|}\frac{y_{x_i}}{|y|} \quad \text{para } n=2, \quad \text{e} \quad \Gamma_{x_i} = \frac{|y|^{1-n}}{n\omega_n}\frac{y_{x_i}}{|y|} \quad \text{para } n \geq 3. \quad \text{Logo,}$$

$$\nabla\Gamma(y) = \frac{y}{n\omega_n|y|^n}, \text{ para } n \geq 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(y) = \nabla\Gamma(y)\cdot\eta(y) = \frac{y}{n\omega_n|y|^n}\cdot\left(-\frac{y}{|y|}\right) = \frac{-1}{n\omega_n|y|^{n-1}}. \tag{12}$$

$$\text{Portanto,} \quad E_\varepsilon = \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))} f(x-y)\frac{1}{n\omega_n|y|^{n-1}}\,\mathrm{d}\sigma_y = \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y.$$

Segue então da mudança de variáveis $z = x - y$ e da continuidade de f em x que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} E_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z)\,\mathrm{d}\sigma_z = f(x). \tag{13}$$

Lembrando que $C_\varepsilon = D_\varepsilon + E_\varepsilon$ e que $D_\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, concluímos que $C_\varepsilon \to f(x)$. Como já havíamos provado que $A_\varepsilon \to 0$, podemos passar a equação (10) ao limite para concluir que $\Delta\omega_f(x) = f(x)$, o que finaliza a prova do lema. $\square$

Observação 2.3. *O Lema 2.1 pode ser provado com uma exigência muito menor de regularidade para a função f. Para formular precisamente esse resultado mais geral, precisamos introduzir um novo espaço de funções para tratar o problema. Lembremos que um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|_E)$ é um espaço de Banach quando ele é completo com relação à topologia induzida pela norma. Isso significa dizer que toda sequência de Cauchy $(u_m) \subset E$ converge para algum elemento de E. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, pode-se mostrar que $C(\overline{\Omega})$, munido com a norma $\|u\|_0 := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$, para todo $u \in C(\overline{\Omega})$, é um espaço de Banach. De uma maneira mais geral, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o conjunto $C^k(\overline{\Omega})$ munido da norma $\|u\|_k := \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_0$, para todo $u \in C^k(\overline{\Omega})$ é também um espaço de Banach.*

No que segue vamos introduzir um novo espaço que é, em um certo sentido, o espaço correto para trabalhar com o problema de Poisson.

Definição 2.2. *Dado $0 < \gamma \le 1$ e uma função $u \in C(\overline{\Omega})$, dizemos que u é Hölder contínua com expoente γ se existe uma constante $c > 0$ tal que $|u(x) - u(y)| \le c|x-y|^\gamma, \quad \forall\, x, y \in \Omega$. Para uma tal função definimos o quociente de Hölder por $H_\gamma[u] := \sup_{x,y \in \Omega,\, x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty$.*

Definição 2.3. *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \gamma \le 1$. O espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\Omega)$ é definido por*

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : H_\gamma[D^\alpha u] < \infty \text{ para todo multi-índice } |\alpha| \le k\}.$$

Definimos ainda $C^{k,\gamma}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) : u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega_0}) \text{ para todo aberto } \Omega_0 \subset\subset \Omega\}$.

Observação 2.4. *O espaço $C^{k,\gamma}(\Omega)$ quando munido da norma $\|u\|_{k,\gamma} := \|u\|_k + \sum_{|\alpha| \le k} H_\gamma[D^\alpha u]$, para todo $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach (Exercício 6.2.3).*

Voltando ao Potencial Newtoniano ω_f, lembremos que o Lema 2.1 foi provado para funções $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto. Uma adaptação da sua prova nos permite concluir que se $f \in C(\overline{\Omega})$ para algum domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então $\omega_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Se exigirmos um pouco mais de regularidade para f temos o seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \gamma \le 1$, então o Potencial Newtoniano ω_f está bem definido e satisfaz*

(i) $\omega_f \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap C^{2,\gamma}(\Omega)$; (ii) $\Delta\omega_f(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Observação 2.5. *A prova da Proposição 2.1 segue as mesmas linhas daquela feita para o Lema 2.1. Contudo, são necessárias algumas adaptações para contornar o fato de não existirem as derivadas da função f. Para mais detalhes veja [6, Corolário 1.2 da Seção 1.3] e também [7, Lemma 4.2] ou [15, Teorema 1.1]. Vale observar que, se f for somente contínua, então ω_f pode não ser de classe C^2 em Ω (Exercício 6.2.4).*

A Proposição 2.1 reduz o estudo do problema de Poisson (P) ao problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{D}$$

De fato, se $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ e $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é tal que

$$\Delta v = 0 \text{ em } \Omega, \quad v = g - \omega_f \text{ em } \partial\Omega,$$

onde ω_f é o Potencial Newtoniano gerado por f, então a função $u := v + \omega_f$ satisfaz $\Delta u = \Delta v + \Delta\omega_f = f$ em Ω, $u = g - \omega_f + \omega_f = g$ em $\partial\Omega$, sendo, portanto, solução de (P).

2.3 Aula 06: A Solução do Problema de Perron

Antes de tratar da questão de existência de solução para o problema (D) é importante discutirmos o seguinte exemplo, conhecido como exemplo de Zaremba.

Exemplo 2.1. *Suponha que* $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ *e defina* $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *por*

$$g(x) := \begin{cases} 0, & se\ x \in \partial B_1(0), \\ 1, & se\ x = 0. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que, apesar de g *ser uma função regular, o problema de Dirichlet não possui solução clássica para essa escolha de* Ω *e* g *(Exercício 6.2.5). Portanto, a solubilidade do problema* (D) *não depende somente da regularidade do dado de fronteira* g*, ela depende também da geometria do domínio* Ω*.*

Vamos introduzir o conceito de regularidade de conjuntos do espaço euclidiano.

Definição 2.4. *Dados* $k \in \mathbb{N}$ *e um aberto limitado* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, dizemos que* Ω *é de classe* C^k *se, para cada* $x_0 \in \partial\Omega$*, existe uma bola* $B = B_r(x_0)$ *e uma bijeção* ψ *de* B *em* $A \subset \mathbb{R}^n$ *tais que:*
(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$*;* *(ii)* $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$*;* *(iii)* $\psi \in C^k(B)$, $\psi^{-1} \in C^k(A)$,

em que $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$*. Dessa forma, podemos inferir que o aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é de classe* C^k *se, e somente se, cada ponto da sua fronteira possui uma vizinhança cuja intersecção com* $\partial\Omega$ *é o gráfico de uma função de* $n-1$ *das coordenadas* $x_1, \dots, x_n$*, com essa função sendo de classe* C^k *.*

Observação 2.6. *O problema de Dirichlet pode ser resolvido por vários métodos, cada qual com uma hipótese de regularidade sobre* g *e* Ω*. Entre todos os métodos, o que parece fornecer solução clássica com hipóteses mais fracas é o* ***método das funções subharmônicas****, ou* ***Método de Perron****. Ele fornece solução* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *para funções* g *contínuas e domínios* Ω *de classe* C^2*. Na verdade, basta que* Ω *satisfaça a* ***condição da esfera exterior****, isto é, que para cada* $x_0 \in \partial\Omega$ *exista uma bola* $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $\overline{\Omega} \cap \overline{B_r(y)} = \{x_0\}$*.*

Enunciamos abaixo um resultado de existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet, baseado no Método de Perron, supondo que o conjunto Ω é de classe C^2. A prova de uma versão mais geral pode ser encontrada em [7, Teorema 2.14].

Teorema 2.1. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio limitado de classe* C^2 *e* $g \in C(\partial\Omega)$*, então o problema de Dirichlet* $\begin{cases} \Delta u &= 0 & em\ \Omega, \\ u &= g & em\ \partial\Omega, \end{cases}$ *possui uma única solução em* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

Com o auxílio do Teorema 2.1, podemos enunciar e provar o seguinte resultado de existência de solução para o problema de Poisson.

Teorema 2.2. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto limitado de classe* C^2*,* $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *e* $g \in C(\partial\Omega)$*, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u &= f & em\ \Omega, \\ u &= g & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui exatamente uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

Prova. Para a existência, é suficiente encontrarmos $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo os problemas

$$\begin{cases} \Delta u_1 &= 0 & \text{em } \Omega, \\ u_1 &= g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta u_2 &= f & \text{em } \Omega, \\ u_2 &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

pois, nesse caso, a função $u := u_1 + u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é solução de (P). A existência de u_1 é consequência imediata do Teorema 2.1. Para obter u_2 consideramos $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta v = 0$ em Ω, e $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Como $\omega_f \in C(\partial\Omega)$, a existência de uma tal função é novamente garantida pelo Teorema 2.1. Considere agora $u_2 := \omega_f - v$ e observe que $\Delta u_2 = \Delta\omega_f - \Delta v = f$ em Ω, $u_2 = \omega_f - \omega_f = 0$ em $\partial\Omega$, e portanto, o problema possui pelo menos uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. A unicidade segue facilmente do Princípio do Máximo, isto é, do Teorema 1.6. □

Observação 2.7. *Exigindo mais regularidade em g e Ω, obtemos soluções mais regulares. De fato, se $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \gamma \leq 1$, podemos definir o conceito de abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe $C^{k,\gamma}$ do mesmo modo que fizemos para C^k, considerando agora a regularidade das aplicações ψ e ψ^{-1} como sendo de classe $C^{k,\gamma}$. Dizemos que uma função $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ definida na fronteira de um aberto Ω de classe $C^{k,\gamma}$ pertence à $C^{k,\gamma}(\partial\Omega)$ quando $g \circ \psi^{-1} \in C^{k,\gamma}(A \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$.*

O resultado abaixo, devido à Kellog [9] , fornece uma versão do Teorema 2.1 para domínios e dados de fronteira mais regulares. Note que a regularidade da solução encontrada é também maior que aquela garantida pelo Teorema 2.1.

Teorema 2.3. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$ e $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, então o problema de Dirichlet $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$ possui exatamente uma solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.*

Observação 2.8. *Com relação ao Teorema 2.3 é importante ressaltar que a mera continuidade de g não implica na existência de derivadas na fronteira. Por exemplo, a função*

$$u(x_1, x_2) = x_2 \ln\left((x_1 - 1)^2 + x_2^2\right) + 2(1 - x_1) \arctan\left(\frac{x_2}{1 - x_1}\right)$$

satisfaz $\Delta u = 0$ em $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, é contínua até o fecho da bola, mas $|\nabla u(x_1, x_2)|$ se comporta como $|\ln(x_1 - 1)^2 + x_2^2|$ quando $(x_1, x_2) \to (1, 0)$.

Aplicando o Teorema 2.3 ao invés do Teorema 2.1 obtemos a seguinte versão do Teorema 2.2 para domínios e condições de fronteira mais regulares.

Corolário 2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de classe $C^{2,\gamma}$, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui exatamente uma solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Prova. Argumentando como na prova do Teorema 2.2, vamos usar o Teorema 2.3 no lugar do Teorema 2.1. Contudo, faremos uma pequena adaptação no argumento. De fato, nas condições enunciadas acima, é imediata a obtenção de u_1 satisfazendo (14). Mas, a obtenção de u_2 requer um argumento mais fino, visto que a aplicação direta da Proposição 2.1 nos garante somente que ω_f pertence a $C^1(\partial\Omega)$, o que não é suficiente usar o Teorema 2.3 e obter $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta v = 0$ em Ω, $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Para contornar tal dificuldade, considere uma bola B tal que $\overline{\Omega} \subset B$. A regularidade de f e do conjunto Ω nos permite estender f para toda a bola B, de modo que a extensão (que denotaremos ainda por f) esteja contida em $C^{0,\gamma}(\overline{B})$, conforme [7, Lemma 6.37]. Pela Proposição 2.1 temos que $\omega_f \in C^{2,\gamma}(B)$. Podemos, então aplicar o Teorema 2.3 para obter $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta v = 0$ em Ω, e $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Procedendo como antes temos que $u_2 := \omega_f - v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é solução do problema (P). A unicidade segue outra vez pelo Princípio do Máximo, Teorema 1.6. $\square$

2.4 Aula 07: A Função de Green

Na aula de hoje vamos supor que o problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui uma solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e usar o Teorema da Divergência de uma maneira apropriada para obter uma expressão explícita para tal solução. Fixado um ponto $x \in \Omega$, considere $\varepsilon > 0$ pequeno e defina $\Lambda_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$. Usando o Teorema 1.3(e) obtemos

$$\int_{\Lambda_\varepsilon} (u\Delta\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\Delta u)\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Lambda_\varepsilon} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Como $\Delta\Gamma(x-y) = 0$ para todo $y \neq x$, segue que

$$-\int_{\Lambda_\varepsilon} \Gamma(x-y)\Delta u\,\mathrm{d}y = C_\varepsilon + D_\varepsilon + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y \tag{15}$$

em que $C_\varepsilon := \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y$, $D_\varepsilon := -\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\,\mathrm{d}\sigma_y$. Argumentando como na prova de (13) e (11), respectivamente, mostramos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} C_\varepsilon = -u(x)$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} D_\varepsilon = 0$. Além disso, como o conjunto Λ_ε se aproxima de Ω quando $\varepsilon \to 0^+$, e Γ é localmente integrável, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Lambda_\varepsilon} \Gamma(x-y)\Delta u\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u\,\mathrm{d}y$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0^+$ na equação (15) obtemos

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y, \tag{16}$$

que é conhecida como **Fórmula de Representação de Green.**

O problema com a expressão acima é que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ não é um dado do problema (P). Para contornar essa dificuldade observemos inicialmente que, se $h^x \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma função harmônica em Ω, então podemos usar o Teorema da Divergência novamente para obter

$$-\int_{\Omega} h^x \Delta u\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial h^x}{\partial \eta} - h^x\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Escrevendo $G(x,y) = \Gamma(x-y) + h^x(y)$ e somando a equação acima com (16), segue que

$$u(x) = \int_{\Omega} G\Delta u\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial G}{\partial \eta} - G\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Se, além disso, tivermos $G = 0$ em $\partial\Omega$, então obtemos a seguinte fórmula de representação

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma_y.$$

Baseados na expressão acima, definimos a Função de Green associada ao problema de Dirichlet em Ω como sendo a função $G(x,y) := \Gamma(x-y) + h^x(y)$, $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, em que

Γ é a solução fundamental do laplaciano e a função $h^x(y)$, chamada parte regular da função de Green, satisfaz

$$\begin{cases} \Delta h^x(y) &= 0, & y \in \Omega, \\ h^x(y) &= -\Gamma(x-y), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que, para cada $x \in \Omega$ fixado, a função $y \mapsto \Gamma(x-y)$ é regular em $\partial\Omega$. Desse modo, se Ω é de classe C^2, podemos sempre garantir a existência de h^x, e portanto da função de Green. De acordo com essas considerações, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{17}$$

e existe a função de Green associda ao problema de Dirichlet em Ω, então

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y) g(y)\,\mathrm{d}\sigma_y.$$

O Teorema 2.4 nos permite resolver o problema (17) desde que exista, e saibamos calcular, a função de Green. De fato, nesse caso basta definir u como acima e mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz as equações do problema. A dificuldade em tal procedimento reside no fato de que calcular a função de Green não é, em geral, uma tarefa fácil. Porém, isso pode ser feito quando Ω possui algum tipo de simetria. Um caso particular importante é o da bola, onde vale a Fórmula de Poisson, dada pelo seguinte resultado (cf. [7, Teorema 2.6] ou [5, Teorema 15, Seção 2.2]).

Teorema 2.5. *Seja $r > 0$ e $g : B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \displaystyle\int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y, & \text{se } x \in B_r(0), \\ g(x), & \text{se } x \in \partial B_r(0), \end{cases}$$

é tal que $u \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ e $\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{em } B_r(0), \\ u &= g \quad \text{em } \partial B_r(0). \end{cases}$

Algumas propriedades da função de Green, além da sua fórmula explícita quando $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, podem ser encontradas em [5, Seção 2.2.4]. Citamos ainda [15, Seção 2.2], onde algumas considerações históricas acerca da função de Green são apresentadas, bem como um resultado de existência desta para certas classes de domínios.