3 Operadores Lineares de 2° Ordem

3.1 Aula 07: Princípios do Máximo

A partir de agora, vamos estender os resultados precedentes para o operador linear de 2° ordem dado pela expressão

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{19}$$

onde $u \in C^2(\Omega)$ e os coeficientes a^{ij}, b^i, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções dadas. Além disso, a menos que se diga o contrário, consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Como para qualquer função $u \in C^2(\Omega)$, o Teorema de Schwarz nos assegura que $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$ para todo i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, então, daqui por diante, podemos reescreveer L como

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(a^{ij}(x) + a^{ji}(x)\right) u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

e supor, sem perda de generalidade, que para cada $x \in \Omega$ a matriz

$$A(x) := \begin{bmatrix} a^{11}(x) & \cdots & a^{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1}(x) & \cdots & a^{nn}(x) \end{bmatrix} \text{ é simétrica.} \tag{20}$$

Definição 3.1. *Dizemos que o operador L definido em (19) é:*

(i) ***elíptico*** *no ponto $x \in \Omega$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ definida em (20) é positiva, isto é, se $\theta(x)$ denota o menor autovalor de A, então*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta(x)|\xi|^2, \quad \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$

(ii) ***elíptico em*** *Ω se $\theta > 0$ em Ω;*

(iii) ***uniformemente elíptico em*** *Ω se existe $\theta_0 > 0$ tal que $\theta(x) \geq \theta_0$, para todo $x \in \Omega$.*

Exemplo 3.1. *O mais simples operador uniformemente elíptico é o Laplaciano em qualquer domínio Ω. Se considerarmos $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, então o operador $Lu = u_{x_1x_1} + x_1u_{x_2x_2}$ é elíptico, embora não seja uniformemente elíptico. Entretanto, esse mesmo operador, em uma faixa do tipo $(a, b) \times \mathbb{R}$ com $0 < a < b$, é uniformemente elíptico (Justifique!).*

Observação 3.1. *Quando L é uniformemente elíptico, vale a seguinte desigualdade*

$$\xi A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta_0|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Tomando $\xi = e_i$ como sendo o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$e_iA(x)e_i = a^{ii}(x) \geq \theta_0|e_i|^2 = \theta_0, \quad i = 1, \ldots, n,\ x \in \Omega. \tag{21}$$

Vamos supor que os coeficientes a^{ij}, b^i e c do operador L definido em (19) estão em $L^\infty(\Omega)$. Com isso, temos o seguinte resultado que é uma versão do item (ii) do Teorema 1.5, e uma generalização do Exercício 6.1.11.

Teorema 3.1. *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

(i) *se* $Lu \geq 0$ *em* Ω*, então* $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$;(ii) *se* $Lu \leq 0$ *em* Ω*, então* $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

Prova. Suponha inicialmente que $Lu > 0$ em Ω e que existe $\widetilde{x} \in \Omega$ tal que $u(\widetilde{x}) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Como L é uniformemente elíptico, a matriz dos coeficientes $A = A(\widetilde{x})$ é positiva definida e, portanto, existe uma matriz ortogonal, isto é, $O = O_{n\times n}$ tal que $O^{-1} = O^T$ e

$$OAO^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$ com $\lambda_i \geq \theta_0 > 0$, $i = 1, \ldots, n$. O termo geral da matriz é dado por

$$\delta_{kl}\lambda_k = \sum_{i=1}^n o_{ki} \sum_{j=1}^n a^{ij} o_{jl}^T = \sum_{i,j=1}^n o_{ki} a^{ij} o_{lj}. \tag{22}$$

Considere agora a nova variável $y := \widetilde{x} + O(x - \widetilde{x})$, de modo que as componentes do vetor y são dadas por $y_k = \widetilde{x}_k + \sum_{j=1}^n o_{kj}(x_j - \widetilde{x}_j)$, $\quad k = 1, \ldots, n$. Uma vez que $O^T = O^{-1}$, vale $x = \widetilde{x} + O^T(y - \widetilde{x})$ e podemos derivar $u(x) = u(\widetilde{x} + O^T(y - \widetilde{x}))$ para obter

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n u_{y_k} o_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj},\ \forall\ i,\ j \in \{1, \ldots n\}. \tag{23}$$

Usando que $\widetilde{x} \in \Omega$ é ponto de máximo, segue que $\nabla u(\widetilde{x}) = 0$ e por (22)-(23), obtemos

$$\begin{aligned} Lu(\widetilde{x}) &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\widetilde{x}) u_{x_i x_j}(\widetilde{x}) + \sum_{i=1}^n b^i(\widetilde{x}) u_{x_i}(\widetilde{x}) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\widetilde{x}) \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} \\ &= \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\widetilde{x}) o_{ki} o_{lj} = \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} \delta_{kl} \lambda_k = \sum_{k=1}^n u_{y_k y_k} \lambda_k. \end{aligned}$$

Como $D^2 u(\widetilde{x}) \leq 0$, o mesmo raciocínio usado em (21) mostra que $u_{y_k y_k}(\widetilde{x}) \leq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Como os números $\lambda_i's$ são positivos, concluímos que $Lu(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^n v_{y_k y_k}(\widetilde{x})\lambda_k \leq 0$, o que é um absurdo, pois $Lu > 0$ em Ω. Portanto, função u não pode assumir seu máximo em Ω, isto é, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Para o caso geral $Lu \geq 0$, tome $\gamma \in \mathbb{R}$ arbitrário e $u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_1}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

Usando a definição de L, obtemos $Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon L(e^\gamma x_1) = Lu + \varepsilon e^{\gamma x_1}(a^{11}(x)\gamma^2 + b^1(x)\gamma)$. Usando (21), a regularidade dos coeficientes e $Lu \geq 0$, obtemos

$$Lu_\varepsilon \geq \varepsilon e^{\gamma x_1}(\theta_0 \gamma^2 - \|b^1\|_\infty \gamma) > 0, \quad \text{em } \Omega,$$

desde que o número γ seja tal que $\gamma > \|b^1\|_\infty / \theta_0$. Assim, podemos usar a primeira parte da prova para concluir que $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$. Mas $u_\varepsilon \geq u$, e portanto,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{\gamma x_1}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, concluímos que $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u$, pois $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$, portanto, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Para provar o item (ii) basta usar o item (i) com a função $-u$. $\square$

Observação 3.2. *A conclusão do Teorema* 3.1 *pode não ser válida nas situações abaixo:*

1. *Se Ω é ilimitado, pois basta considerar $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi)$, $Lu = \Delta u$ e $u(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$.*

2. *Se $c \not\equiv 0$, bastando para isso considerar $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, $Lu = \Delta u + 2u$ e $u(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.*

3. *Se os coeficientes do operador são ilimitados, bastando para isso considerar $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $Lu = u'' + b(x)u'$, com $b(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ e a função $u(x) = 1 - x^4$.*

Além disso, uma análise cuidadosa da prova mostra que teorema permanece válido supondo somente que L é elíptico e que, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, a função $|b^i|/a^{ii}$ permanece limitada em qualquer compacto contido em Ω (Justifique!).

Consideramos agora uma versão do Teorema 3.1 para o caso em que o termo de ordem zero c é não-positivo. Lembremos que se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então a **parte positiva** u^+ e a **parte negativa** u^- da função u são definidas por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}, \quad \text{para } x \in \Omega.$$

Observe que essas duas funções são não-negativas e vale que $|u| = u^+ + u^-$ e $u = u^+ - u^-$.

Teorema 3.2 (Princípio do Máximo Fraco)**.** *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

(i) *se $Lu \geq 0$ em Ω, então $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$;*

(ii) *se $Lu \leq 0$ em Ω, então $\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-$;*

(iii) *se $Lu = 0$ em Ω, então $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$.*

Prova. (i) Se o conjunto $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ for vazio não há nada a fazer pois, nesse caso, $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e portanto $\max_{\overline{\Omega}} u \leq 0 = \max_{\partial\Omega} u^+$. Logo, podemos supor que $\Omega^+ \neq \varnothing$. A continuidade de u nos assegura que o conjunto Ω^+ é aberto em Ω, e portanto aberto em $\mathbb{R}^n$. Desse modo, como $c \leq 0$ em Ω, $Ku := Lu - c(x)u \geq 0$ em Ω^+. Note que

$$Ku = Lu - c(x)u = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i}$$

e que $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$. Segue então do Teorema 3.1(i), aplicado ao operador K, que $\max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u$. Uma vez que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega^+} \cup \overline{\Omega \setminus \Omega^+}$ e $u \leq 0$ nesse último conjunto, segue que $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u$. É suficiente então mostrar que $\max_{\partial\Omega^+} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$. Para tanto, considere $x_0 \in \partial\Omega^+$ tal que $u(x_0) = \max_{\partial\Omega^+} u$. A continuidade de u e a definição de Ω^+ implicam que $u(x_0) \geq 0$. Se $u(x_0) = 0$ então $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega^+} u = 0$, o que implicaria $\Omega^+ = \varnothing$. Logo, $u(x_0) > 0$ e podemos usar o fato de Ω^+ ser aberto em Ω para concluir que $x_0 \in \partial\Omega$. De fato, se não fosse assim, então u seria positiva em toda uma bola $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega^+$, contrariando o fato de que $x_0 \in \partial\Omega^+$. Daí, $\max_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) = u^+(x_0) \leq \max_{\partial\Omega} u^+$. Com isso temos o item (i). O item (ii) segue de (i), basta notar que se $Lu \leq 0$, então $L(-u) \geq 0$. Daí, $-\min_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-u)^+ = \max_{\partial\Omega} u^-$, pois $(-u)^+ = \max\{-u, 0\} = u^-$. Por outro lado, para provar (iii), tomemos $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|u(x_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |u|$ e consideremos dois casos:

Caso 1. $u(x_0) \geq 0$: Usando o item (i) e a definição de u^+ temos

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Caso 2. $u(x_0) < 0$: Usando agora o item (ii) e a definição de u^- obtemos

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = -\min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^- \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Segue então que $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|$. Como a desigualdade reversa é trivialmente satisfeita, o teorema está provado. $\square$

3.2 Aula 08: O Lema de Hopf e O Princípio do Máximo Forte

Começamos nossa aula recordando que os princípios de máximos são úteis para obter resultados de **unicidade de solução**, bem como **princípios de comparação**. Como exemplo, temos os dois resultados abaixo, cujas provas serão deixadas como exercício.

Teorema 3.3. *Se L é uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$, então o problema*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.4 (Princípio de Comparação)**.** *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Se $Lu \geq 0$ em Ω e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Nosso objetivo agora é estabelecer uma versão do item (i) do Teorema 1.5 para o operador L. Vamos utilizar um importante resultado que provaremos a seguir.

Lema 3.1 (Lema de Hopf)**.** *Suponha que L é uniformemente elíptico e $Lu \geq 0$ em Ω, com $u \in C^2(\Omega)$. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

(i) *u é contínua em x_0;*

(ii) *$u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$;*

(iii) *existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$.*

Então, caso uma das hipóteses abaixo se verifique:

(a) $c \equiv 0$ em B; *(b) $c \leq 0$ em B e $u(x_0) \geq 0$,*

quando existe, a derivada normal exterior em x_0 satisfaz $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$.

Observação 3.3. *Se $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaz $(i)-(iii)$ e a derivada normal existe, é sempre verdade que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{u(x_0 + h\eta) - u(x_0)}{h} \geq 0$, independente do sinal de Lu. A informação adicional dada pelo lema é, de fato, a desigualdade estrita.*

Prova do Lema 3.1. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \in C(\overline{B})$ e que $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \overline{B} \setminus \{x_0\}$. De fato, se não for esse o caso, é suficiente tomar uma nova bola $B' \subset B$ que é internamente tangente à B no ponto x_0. Além disso, conforme veremos posteriormente, podemos também supor que $B = B_r(0)$. Feitas tais considerações, vamos assumir inicialmente a hipótese (b) e considerar, para $\gamma > 0$ a ser determinado, a função $v(x) := \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} - \mathrm{e}^{-\gamma r^2}$, $x \in B$. Para cada $i, j = 1, \ldots, n$, temos que $v_{x_i} = -2\gamma x_i \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}$ e $v_{x_i x_j} = \begin{cases} 4\gamma^2 x_i x_j \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i \neq j \\ 4\gamma^2 x_i^2 \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} - 2\gamma \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i = j \end{cases} = (4\gamma^2 x_i x_j - 2\gamma\delta_{ij})\mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}$, em que $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Substituindo no operador L, podemos calcular

$$Lv(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left(4\gamma^2 a^{ij}(x)x_i x_j - 2\gamma\delta_{ij}a^{ij}(x)\right) - 2\gamma\sum_{i=1}^{n}(b^i(x)x_i) + c(x)\right) - c(x)\mathrm{e}^{-\gamma r^2}.$$

Usando as hipóteses sobre os coeficientes de L, obtemos c_1, $c_2 \geq 0$ tais que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)x_i x_j \geq \theta_0|x|^2,\ \sum_{i=1}^{n} b^i(x)x_i \leq |x|\sum_{i=1}^{n}\|b^i\|_\infty \leq c_1 \ \text{ e } \sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij}a^{ij}(x) \leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a^{ij}\|_\infty = c_2.$$

Estas estimativas e $c \le 0$ implicam que $Lv(x) \ge \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}\left(4\gamma^2\theta_0|x|^2 - 2\gamma(c_1+c_2) - \|c\|_\infty\right)$. Desse modo, fazendo $c_3 := c_1 + c_2$ e denotando $A_r := B_r(0) \setminus B_{r/2}(0)$ temos que, para todo $x \in A_r$, vale $Lv(x) \ge \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}\left(4\gamma^2\theta_0(r/2)^2 - 2\gamma c_3 - \|c\|_\infty\right)$. Escolhendo $\gamma > 0$ grande de modo que o termo entre parênteses acima seja positivo, concluímos que $Lv \ge 0$ em A_r. Uma vez que x_0 é um ponto de máximo estrito de u e a função v é positiva e contínua no compacto $\partial B_{r/2}(0)$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ pequeno de tal modo que $u(x_0) \ge u(x) + \varepsilon v(x),\ x \in \partial B_{r/2}(0)$. Note ainda que a desigualdade acima permanece válida em $\partial B_r(0)$ pois, nesse conjunto, a função v se anula. Desse modo, a função $w(x) = u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)$ é tal que

$$\begin{cases} Lw = Lu + \varepsilon Lv - c(x)u(x_0) \ge 0, & \text{em } A_r, \\ w \le 0, & \text{em } \partial A_r. \end{cases} \tag{24}$$

Segue então do Princípio de Comparação, Teorema 3.4, que $w \le 0$ em A_r. Observe agora que, como $x_0 \in \partial B$, temos que $v(x_0) = 0$. Logo $w(x_0) = 0$ e, portanto, x_0 é um ponto de máximo de w em $\overline{A_r}$. Supondo que exista a derivada normal de u no ponto x_0, pela Observação 3.3, devemos ter $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) \ge 0$, o que implica que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \quad \ge \quad -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = -\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\left(\frac{x_0}{r}\right) = -\varepsilon\left(-2\gamma x_0\mathrm{e}^{-\gamma|x_0|^2}\right)\cdot\left(\frac{x_0}{r}\right) = 2\gamma\varepsilon\frac{|x_0|^2}{r}\mathrm{e}^{-\gamma|x_0|^2} > 0.$$

Isso estabelece a veracidade do lema sob a hipótese (b) no caso em que a bola B está centrada na origem. Para o caso geral em que $B = B_r(y)$, basta considerar $v(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x-y|^2} - \mathrm{e}^{-\gamma r^2}$ para $x \in B_r(y)$ e proceder como acima. A prova do lema sob a hipótese (a) pode ser feita repetindo os mesmos passos acima com $c \equiv 0$ em vez de $c \le 0$. (Exercício 6.3.6). □

Observação 3.4. *Sob as hipóteses do Lema de Hopf, mesmo quando não existe a derivada normal no ponto x_0, a prova nos mostra que, para toda direção exterior ν tal que $\nu\cdot\eta(x_0) > 0$, vale $\liminf_{h\to 0^-} \dfrac{u(x_0+h\nu)-u(x_0)}{h} > 0$, pois $-\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\nu > 0$, já que $-\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\eta(x_0) > 0$.*

Agora podemos aplicar o Lema de Hopf para provar o Princípio do Máximo Forte.

Teorema 3.5 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo, L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então*

(i) *se $Lu \ge 0$ em Ω e u atinge máximo em Ω, então u é constante em Ω;*

(ii) *se $Lu \le 0$ em Ω e u atinge mínimo em Ω, então u é constante em Ω.*

No caso em que $c \le 0$ vale o seguinte:

(iii) *se $Lu \ge 0$ em Ω e u atinge máximo não-negativo em Ω, então u é constante em Ω;*

(iv) *se $Lu \le 0$ em Ω e u atinge mínimo não-positivo em Ω, então u é constante em Ω.*

Prova. (i) Suponha que $Lu \ge 0$ e que u atinge máximo em Ω. Seja $M := \max_{\overline{\Omega}} u$, $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\} \ne \varnothing$ e suponha, por contradição, que $\Sigma \ne \varnothing$, em que $\Sigma := \Omega \setminus \Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) < M\}$. Como existe $x_0 \in \Omega$ com $u(x_0) = M$, pela continuidade de u, existe $y \in \Sigma$ tal que $\operatorname{dist}(y, \Omega_M) < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$. Considere $r > 0$ o raio da maior bola $B = B_r(y)$ tal que $B \subset \Sigma$. Note que podemos escolher y de forma que $r = \operatorname{dist}(y, x_0)$ (Exercício 6.3.8). Por construção, $x_0 \in \partial B \cap \Omega_M$. Uma vez que $x_0 \in \Omega$ é um ponto de máximo de u, temos $\nabla u(x_0) = 0$ e, portanto, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \nabla u(x_0)\cdot\eta(x_0) = 0$. Por outro lado, segue do Lema de Hopf, com a hipótese (a), que a derivada normal acima deve ser positiva.

Esta contradição mostra que $\Omega_M = \Omega$ e, portanto, $u \equiv M$ em Ω. A prova do item (ii) segue de (i) aplicado a função $-u$. No caso em que $c \leq 0$ em Ω a prova é análoga à apresentada acima utilizando, porém, a hipótese (b) do Lema de Hopf. $\square$

Observação 3.5. *Note que o teorema acima vale para* ***domínios ilimitados.*** *A elipticidade uniforme e a limitação dos coeficientes não é essencial. É suficiente supor que as funções* $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a^{ij}(x)}{\theta(x)}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{b^i(x)}{\theta(x)}, \quad \frac{c(x)}{\theta(x)}$ *são limitadas em todo compacto contido em* Ω.

Em seguida provamos um princípio do máximo para L sem restrições no sinal de $c(x)$.

Teorema 3.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto conexo,* L *um operador uniformemente elíptico e suponha que existe* $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $w > 0$ *em* Ω *e* $Lw \leq 0$ *em* Ω. *Dada* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *temos que*

(i) *se* $Lu \geq 0$ *e* $\frac{u}{w}$ *assume máximo não-negativo em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *é constante em* Ω.

(ii) *se* $Lu \leq 0$ *e* $\frac{u}{w}$ *assume mínimo não-positivo em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *é constante em* Ω.

Prova. Denotando $v = \frac{u}{w}$ e supondo $Lu \geq 0$, um cálculo direto (Verifique!) mostra que
$$\widetilde{L}v = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)v_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}^i(x)v_{x_i} + \widetilde{C}v = \frac{Lu}{w} - \frac{u}{w^2}Lw + \frac{u}{w^2}Lw \geq 0 \quad \text{em } \Omega,$$
com $\displaystyle\widetilde{B}^i(x) := b^i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{w}a^{ij}(x)w_{x_j}$, para cada $i = 1, \ldots, n$ e $\widetilde{C} = \dfrac{Lw}{w} \leq 0$. Com isso, o caso (i) segue do Teorema 3.5 (iii). Para o caso (ii), basta aplicar o Teorema 3.5 (iv). $\square$

A aplicabilidade do Teorema 3.6 depende de podermos encontrar uma função w como no enunciado do teorema. No que segue exibimos uma classe de domínios para os quais essa função pode ser construída facilmente.

Teorema 3.7. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto satisfazendo* $|\langle x - y, e\rangle| < d$, $\forall\, x,\, y \in \Omega$, *para algum* $e \in \mathbb{R}^n$ *satisfazendo* $|e| = 1$ *e* L *um operador uniformemente elíptico em* Ω. *Então existe* $d_0 = d_0(n, \theta_0, \|b^i\|_\infty, \|c^+\|_\infty) > 0$ *tal que o Teorema 3.6 é aplicável se* $d \leq d_0$.

Prova. Vamos exibir uma função w satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.6. Para simplificar a notação vamos supor que $e = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ e que $\Omega \subset (0, d) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Considerando $\gamma > 0$ a ser escolhido posteriormente, definimos $w(x) := \mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}$, $\; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Observe inicialmente que $w \in C^\infty(\Omega)$. Além disso, como para todo $x \in \Omega$ vale $0 < x_1 < d$, temos que $w > 0$ em Ω. Note que $w_{x_1} = -\gamma \mathrm{e}^{\gamma x_1}$, $\; w_{x_1x_1} = -\gamma^2 \mathrm{e}^{\gamma x_1}$ e as demais derivadas de ordem 1 e 2 são nulas. Sendo assim, usando novamente que $0 < x_1 < d$, obtemos
$$\begin{aligned} Lw &= -(a^{11}(x)\gamma^2 + \gamma b^1(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1} + (c^+(x) - c^-(x))(\mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}) \\ &\leq -(a^{11}(x)\gamma^2 + \gamma b^1(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1} + c^+(x)\mathrm{e}^{\gamma d}. \end{aligned}$$
Denotando $M := \max\{\|b^1\|_\infty, \|c^+\|_\infty\}$ e usando (21), obtemos então
$$Lw \leq -\theta_0\gamma^2\mathrm{e}^{\gamma x_1} + \|b^1\|_\infty \gamma \mathrm{e}^{\gamma x_1} + \|c^+\|_\infty \mathrm{e}^{\gamma d} \leq -(\theta_0\gamma^2 - M\gamma)\mathrm{e}^{\gamma x_1} + M\mathrm{e}^{\gamma d}.$$

Escolhendo $\gamma > 0$ grande o suficiente de modo que $\theta_0\gamma^2 - M\gamma > 2M$, concluímos que
$$Lw \leq -2M\mathrm{e}^{\gamma x_1} + M\mathrm{e}^{\gamma d} \leq M(-2 + \mathrm{e}^{\gamma d})$$
de sorte que $Lw \leq 0$ em Ω, sempre que $0 < d \leq d_0 := \ln(2)/\gamma$. $\square$

Apresentamos agora um princípio de comparação devido a Varadhan que também independe do sinal de $c(x)$, mas que, por outro lado, exige que Ω tenha volume pequeno. Mais especificamente, vale o seguinte resultado, cuja prova se encontra em [8, Teorema 2.32].

Teorema 3.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em aberto, L uniformemente elíptico em Ω e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $Lu \geq 0$ em Ω e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$. Então existe $\delta = \delta(n, \|b^i\|_\infty, \|c\|_\infty, \theta_0, diam(\Omega)) > 0$ tal que, se o volume de Ω é menor que δ, então $u \leq 0$ em Ω.*

3.3 Aula 09: O Princípio da Continuação

A partir de agora vamos discutir a existência de solução para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, L é um operador diferencial de 2° ordem da forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u,$$

com os coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. O Corolário 2.1 nos assegura que, sob as condições acima e no caso em que $L = \Delta$, o problema sempre possui solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Estamos interessados em obter um resultado análogo para o caso em que L tem a forma acima.

Observação 3.6. *Sem perda de generalidade, podemos considerar $g \equiv 0$ na formulação do problema (P). Sendo assim, definindo*

$$X := \left\{u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) : u \equiv 0 \quad em\ \partial\Omega\right\}, \quad Y := C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \tag{25}$$

a solubilidade do problema (P) é equivalente a mostrar que $L : X \to Y$ é sobrejetivo. De fato, supondo que o problema $Lv = \widetilde{f}$ em Ω, $v = 0$ em $\partial\Omega$, tenha solução de classe $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ para toda $\widetilde{f} \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, uma vez que o dado de fronteira g e o conjunto Ω são de classe $C^{2,\gamma}$, podemos estender g para todo $\overline{\Omega}$ com a sua extensão, que denotaremos ainda por g, sendo de classe $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ (Confira [7, Lemma 6.38]). Sendo então, $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ a solução do problema em questão com $\widetilde{f} := f - Lg \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, temos que a função $u := v + g$ satisfaz $Lu = Lv + Lg = f$ em Ω, $u = v + g = g$ em $\partial\Omega$, sendo, portanto, solução de (P).

Vamos começar nossa aula provando o seguinte resultado a respeito do operador L.

Proposição 3.1. *Se $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $Lu \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e o operador $L : X \to Y$ está bem definido, e além disso, é contínuo.*

Prova. Tendo em vista a definição de L, basta verificar que se $v, w \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, então o produto $vw \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Dados $x, y \in \Omega$, com $x \neq y$, observe que

$$\begin{aligned} \frac{|v(x)w(x) - v(y)w(y)|}{|x-y|^\gamma} &= \frac{|v(x)w(x) - v(x)w(y) + v(x)w(y) - v(y)w(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq |v(x)|\frac{|w(x) - w(y)|}{|x-y|^\gamma} + |w(y)|\frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v]. \end{aligned}$$

Tomando o supremo para $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, obtemos $H_\gamma[vw] \leq \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v] < \infty$, e, portanto, $vw \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Além disso, obtemos

$$\begin{aligned} \|vw\|_{0,\gamma} &= \|vw\|_0 + H_\gamma[vw] \leq \|v\|_0 \|w\|_0 + \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v] \\ &\leq (\|v\|_0 + H_\gamma[v])(\|w\|_0 + H_\gamma[w]) = \|v\|_{0,\gamma} \|w\|_{0,\gamma}. \end{aligned} \tag{26}$$

Afirmamos agora que o operador L, além de bem definido, é também contínuo. Para isso, como L é linear, considere $(u_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, tal que $u_m \to 0$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. A estimativa (26) nos fornece

$$\begin{aligned} \|Lu_m\|_{0,\gamma} &\le \sum_{i,j=1}^{n} \left\|a^{ij}(u_m)_{x_ix_j}\right\|_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^{n} \left\|b^i(u_m)_{x_i}\right\|_{0,\gamma} + \|cu_m\|_{0,\gamma} \\ &\le c_1 \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|(u_m)_{x_ix_j}\|_{0,\gamma} + \sum_{i}^{n} \|(u_m)_{x_i}\|_{0,\gamma} + \|u_m\|_{0,\gamma} \right), \end{aligned}$$

em que $c_1 := \max\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma}\}$. Uma vez que $\|D^\alpha(u_m)\|_{0,\gamma} \to 0$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \le 2$, segue da expressão acima que $Lu_m \to 0 = L0$ em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Dessa forma, se $u_m \to u$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $u_m - u \to 0$, e concluímos que $L(u_m - u) \to 0$, isto é, $Lu_m \to Lu$ em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e o operador L é contínuo. □

Observação 3.7. *Conforme a Observação 3.6, resolver o problema (P) é equivalente a mostrar a sobrejetividade do operador linear e contínuo correspondente $L : X \to Y$. A fim de provar tal sobrejetividade, vamos considerar a família de problemas*

$$\begin{cases} L_t u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{onde } L_t := (1-t)L + t\Delta,\ t \in [0,1],$$

e usar um resultado abstrato chamado ***Princípio da Continuação*** *para mostrar que $L_0 = L$ é sobrejetivo se, e somente se, $L_1 = \Delta$ é sobrejetivo. Dessa forma, o resultado de existência de solução para (P) será uma consequência direta do Corolário 2.1 que nos dá a sobrejetividade de Δ.*

Definição 3.2. *Se X e Y são espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ um operador linear, então dizemos que T é* limitado *se*

$$\|T\| := \sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y < \infty.$$

Além disso, T é limitado se, e somente se, T é contínuo.

Teorema 3.9 (Princípio da Continuação)**.** *Seja X um espaço de Banach, Y um espaço vetorial normado e $\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1 : X \to Y$ operadores lineares limitados. Para $t \in [0,1]$, considere o operador*

$$\mathscr{L}_t u := (1-t)\mathscr{L}_0 u + t\mathscr{L}_1 u, \quad u \in X. \tag{27}$$

Suponha que existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_X \le c\,\|\mathscr{L}_t u\|_Y\,, \quad \forall\, u \in X,\, t \in [0,1]. \tag{28}$$

Então $\mathscr{L}_0$ é sobrejetivo se, e somente se, $\mathscr{L}_1$ é sobrejetivo.

Observação 3.8. *Se o operador linear $\mathscr{L} : X \to Y$ é tal que existe $c > 0$ com $\|x\|_X \le c\,\|\mathscr{L}x\|_Y$, para todo $x \in X$, então é injetivo. Nesse caso, podemos considerar o operador inverso $\mathscr{L}^{-1} : \mathscr{L}(X) \to X$, que também é linear. Além disso, para todo $y = \mathscr{L}x \in \mathscr{L}(X)$ vale $\|\mathscr{L}^{-1}y\|_X \le c\,\|y\|_Y$, isto é, $\mathscr{L}^{-1}$ também é limitado. Assim, a condição (28) no Teorema 3.9 é equivalente a dizer que $\left\|\mathscr{L}_t^{-1}\right\|$ é uniformemente limitado para $t \in [0,1]$.*

Para provar o Teorema 3.9 vamos usar o resultado abaixo (Exercício 6.3.20).

Teorema 3.10 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X,d) um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração, isto é, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $d(Tx,Ty) \le \theta d(x,y)$, $\forall\, x,y \in X$. Então T possui exatamente um ponto fixo, isto é, um elemento $x \in X$ tal que $Tx = x$.*

Prova do Teorema 3.9. Suponha que $\mathscr{L}_s$ é sobrejetivo para algum $s \in [0,1]$. Dado $t \in [0,1]$, observe que para cada $y \in Y$, $\mathscr{L}_t x = y \iff \mathscr{L}_s x = y + (\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x)$. Desse modo, $\mathscr{L}_t$ é sobrejetivo se, e somente se, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $\mathscr{L}_t x = y$, o que equivale a

$$\begin{aligned} x &= \mathscr{L}_s^{-1}[y + (\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x)] = \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x)] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(1-s)\mathscr{L}_0 x + s\mathscr{L}_1 x - (1-t)\mathscr{L}_0 x - t\mathscr{L}_1 x] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(t-s)\mathscr{L}_0 x - (t-s)\mathscr{L}_1 x] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x)] \end{aligned}$$

Assim, se definirmos $T : X \to X$ por $Tx := \mathscr{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x)]$, resolver a equação $\mathscr{L}_t x = y$ é equivalente a obter um ponto fixo para T.

A ideia agora é mostrar que, se $|t-s|$ é pequeno, então T é uma contração e podemos aplicar o Teorema 3.10. Para tanto, considere $x_1,\, x_2 \in X$ e note que

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\|_X &= \left\|(t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)]\right\|_X \\ &\le |t-s| \left\|\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)]\right\|_X . \end{aligned}$$

Segundo a Observação 3.8, a condição (28) implica que $\|\mathscr{L}_s^{-1}x_0\| \le c\|x_0\|$, para qualquer $x_0 \in X$. Logo,

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\|_X &\le c|t-s|\, \|(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)\|_X \\ &\le c|t-s|\, (\|\mathscr{L}_0(x_1 - x_2)\|_X + \|\mathscr{L}_1(x_1 - x_2)\|_X) \\ &\le c|t-s|\, (\|\mathscr{L}_0\| + \|\mathscr{L}_1\|)\, \|x_1 - x_2\|_X, \end{aligned}$$

o que mostra que T é uma contração desde que $|t-s| < \delta := \dfrac{1}{c(\|\mathscr{L}_0\| + \|\mathscr{L}_1\|)}$, onde estamos supondo, sem perda de generalidade, que $\mathscr{L}_0 \neq \mathscr{L}_1$. Segue agora do Teorema 3.10 que T possui exatamente um ponto fixo $x \in X$ e $\mathscr{L}_t$ é sobrejetivo para todo $t \in [0,1]$ tal que $|t-s| < \delta$. Note agora que podemos cobrir $[0,1]$ com intervalos da forma $(s-\delta, s+\delta)$ quando fazemos s percorrer o intervalo $[0,1]$. A conclusão do teorema segue então por iteração, visto que $\delta > 0$ é uma constante que não depende de t. $\square$

Observação 3.9. *A aplicabilidade do Teorema 3.9 ao problema (P) depende da existência de uma constante $c > 0$ satisfazendo (28). A obtenção dessa constante é uma parte delicada no estudo do problema (P) e depende de algumas propriedades dos espaços de Hölder, veja a Definição 2.3. Portanto, é necessário estudar com mais detalhes esses espaços.*

Definição 3.3. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está **imerso continuamente** em Y se existe $c > 0$ tal que $\|x\|_Y \le C\,\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$. Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.*

Observação 3.10. *Dizer que a imersão de $X \subseteq Y$ em Y é contínua é equivalente a dizer que a aplicação inclusão $i : X \to Y$ dada por $i(x) = x$, $x \in X$, é contínua. Um exemplo simples de imersão ocorre no espaços das funções diferenciáveis. Se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, visto que, para toda função $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, vale*

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_0 \le \sum_{|\alpha| \le k+1} \|D^\alpha u\|_0 = \|u\|_{k+1} .$$

O resultado abaixo generaliza o exemplo da Observação 3.10 e fornece também uma hierarquia entre os espaços de Hölder.

Teorema 3.11. *Se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \nu < \gamma \le 1$, então*

(1) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$; (2) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$; (3) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Além disso, se Ω é convexo, então

(4) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega})$; (5) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Observação 3.11. *A hipótese de convexidade em (4) e (5) não pode ser retirada, pois existem funções $u \in C^1(\overline{\Omega})$ que não estão em $C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Como exemplo, considere*

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt{|x|},\, x^2 + y^2 < 1\} \quad \text{e} \quad u(x,y) := \begin{cases} (sgn\, x) y^\beta, & se\ y > 0, \\ 0, & se\ y \ge 0, \end{cases}$$

em que $1 < \beta < 2$ e $sgn(\cdot)$ é a função sinal. Então $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mas, para todo $\gamma > 0$ satisfazendo que $\beta/2 < \gamma < 1$, pode-se mostrar que $u \notin C^{0\,\gamma}(\overline{\Omega})$. Em particular, pelo item (3), temos que $u \notin C^{0,1}(\overline{\Omega})$.