1 Funções Harmônicas

1.1 Aula 01: A Propriedade da Média

O objetivo dessa aula é estudar propriedades satisfeitas por funções harmônicas.

Definição 1.1. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, se ela satisfaz a equação $\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega$, em que $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$ é o operador Laplaciano.*

Exemplo 1.1. *O exemplo mais simples de função harmônica é uma função constante. De uma maneira mais geral, qualquer função da forma*

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_0 + \sum_{i=1,\ldots,n} b_i x_i + \sum_{i,j=1..n,\, i\neq j} a_{ij} x_i x_j,$$

com a_0, $b_i\, a_{ij} \in \mathbb{R}$ é também harmônica. Outro exemplo importante de função harmônica (Exercício 6.1.1) é a chamada solução fundamental da equação de Laplace $\Gamma : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & \textit{se } n = 2 \\ \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}, & \textit{se } n \geq 3, \end{cases}$$

Nosso objetivo presente é estudar algumas propriedades básicas das funções harmônicas.

Definição 1.2 (A Propriedade da Média)**.** *Se $u \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $B_r(x_0) \subset \Omega$ é uma bola aberta, então a média de u em $\partial B_r(x_0)$ e a média de u em $B_r(x_0)$ são definidas, respectivamente, por*

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x, \qquad \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) \mathrm{d}x,$$

onde ω_n é o volume da bola unitária $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função u satisfaz a Propriedade da Média se

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \tag{1}$$

e

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

para qualquer bola $B_r(x_0) \subset \Omega$.

Proposição 1.1. *As igualdades* (1) *e* (2) *são equivalentes.*

Prova. Suponha que $u \in C(\Omega)$ satisfaz (1), de modo que para todo $0 < s \leq r$ vale $u(x_0) n s^{n-1} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$. Integrando no intervalo $[0, r]$ com relação à variável s, obtemos

$$r^n u(x_0) = \int_0^r u(x_0) n s^{n-1}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \right) \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x,$$

e, portanto, a equação (2) é satisfeita. Reciprocamente, suponha que

$$r^n u(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \right) \mathrm{d}s.$$

Derivando com respeito à variável r, observando que a função $s \mapsto \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$ é contínua e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos $n r^{n-1} u(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$, que é exatamente a equação (1). $\square$

Exemplo 1.2. *Para motivar o nosso primeiro resultado observe que, se* $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ *é contínua, podemos utilizar o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de* $x_0 \in (a,b)$ *tal que* $u(x_0) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$, *isto é, a média de* u *em* (a,b) *é atingida em algum ponto do intervalo. Se, além disso, soubermos que a função* u *é harmônica, então por integração básica concluímos que* $u(x) = c_1 x + c_2$, *para constante* c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. *Desse modo,*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (c_1 x + c_2)\mathrm{d}x = c_1\left(\frac{b+a}{2}\right) + c_2 = u\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

o que mostra que a média é atingida exatamente no centro do intervalo (a,b) *e, por conseguinte,* u *satisfaz a Propriedade da Média.*

O resultado principal dessa aula mostra que o mesmo vale em dimensões maiores.

Teorema 1.1. *Uma função* $u \in C^2(\Omega)$ *é harmônica em* Ω *se, e somente se, ela satisfaz a Propriedade da Média, isto é, as igualdades* (1) *e* (2) *se verificam para toda bola* $B_r(x_0) \subset \Omega$.

Para provar o resultado acima, vamos aplicar um importante resultado da Teoria de Integração. Como ele será usado várias vezes ao longo dessas notas, convém enunciá-lo.

Teorema 1.2 (Teorema da Divergência)**.** *Considere* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado cuja fronteira* $\partial\Omega$ *é uma hiperfície de classe* C^1 *e* $F = (F_1, \ldots, F_n)$ *um campo vetorial tal que* $F^i \in C^1(\overline{\Omega})$, *para cada coordenada* $i = 1, \ldots, n$. *Então* $\displaystyle\int_\Omega div\, F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F(x)\cdot\eta(x)\,\mathrm{d}\sigma_x$, *onde* $divF = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ *é o divergente de* F *e* $\eta(x)$ *é o vetor unitário normal exterior em* $x \in \partial\Omega$.

Observação 1.1. *As condições de regularidade podem ser enfraquecidas sem afetar a validade do teorema. Podemos supor somente que* $F^i \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e que o divergente seja integrável. As condições sobre a regularidade de* $\partial\Omega$ *também podem ser mais fracas (cf. [18]).*

Teorema 1.3. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado cuja fronteira* $\partial\Omega$ *é uma hiperfície de classe* C^1, $\eta(x) = (\eta^1(x), \ldots, \eta^n(x))$ *o vetor unitário normal exterior em um ponto* $x \in \partial\Omega$ *e* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. *Então*

(a) $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(b) $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i} v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(c) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(d) $\displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(e) $\displaystyle\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\eta} - v\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\sigma_x$,

Prova. O item (a) é uma consequência imediata da aplicação do Teorema 1.2 ao campo $F = (F_1, \ldots, F_n)$ definido por $F_i(x) = u(x)$ e $F_j(x) = 0$, se $i \neq j$. As demais afirmações podem ser provadas de maneira análoga escolhendo o campo adequado (Exercício 6.1.2). Para (b) use o campo $F_i(x) = u(x)v(x)$, $F_j(x) = 0$ para $j \neq i$. Para (c) use o campo $F(x) = \nabla u(x)$. Para (d) use o campo $F(x) = u(x)\nabla v(x)$. Para (e) use o campo $F(x) = u(x)\nabla v(x) - v(x)\nabla u(x)$. $\square$

1.2 Aula 02: Regularidade

Começamos nossa aula apresentando a prova do Teorema 1.1.

Prova do Teorema 1.1. Seja $u \in C^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$. Defina a função

$$\varphi(s) := \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_x, \quad s \in (0, r],$$

que nada mais é do que a média da função u na esfera $\partial B_s(x_0)$. Vamos inicialmente verificar que, se u é harmônica, então a função acima é constante. Para tanto, fazemos a mudança de variáveis $x \mapsto x_0 + sz$, obtendo

$$\varphi(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz)s^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma_z = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz)\,\mathrm{d}\sigma_z.$$

Considere agora, para $s \in (0, r)$ fixo,

$$\psi(h) := \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} - \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) \cdot z\,\mathrm{d}\sigma_z$$

e note que, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} \psi(h) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{u(x_0 + sz + hz) - u(x_0 + sz)}{h} - \nabla u(x_0 + sz) \cdot z \right) \mathrm{d}\sigma_z \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \Big([\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)] \cdot z \Big) \mathrm{d}\sigma_z, \text{ com } \theta(z) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Logo, $|\psi(h)| \leq \dfrac{1}{n\omega_n} \displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \Big|\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)\Big| \mathrm{d}\sigma_z$. Como o integrando é contínuo e $\partial B_1(0)$ é compacto, esse mesmo integrando é uniformemente contínuo. Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $\Big|\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)\Big| < \varepsilon$, para $|h| < \delta$, de onde se conclui que $|\psi(h)| < \varepsilon$, sempre que $|h| < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) \cdot z\,\mathrm{d}\sigma_z, \quad s \in (0, r). \tag{3}$$

Aplicando novamente uma mudança de variáveis, obtemos

$$\varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} \nabla u(x) \cdot \left(\frac{x - x_0}{s} \right) \mathrm{d}\sigma_x = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} \nabla u(x) \cdot \eta(x)\,\mathrm{d}\sigma_x,$$

em que usamos também o fato de que o vetor normal exterior no ponto $x \in \partial B_s(x_0)$ é exatamente $(x - x_0)/s$. A expressão acima e o Teorema 1.2 aplicado ao campo $F = \nabla u$ implicam que

$$\varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{B_s(x_0)} \mathrm{div}(\nabla u(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{B_s(x_0)} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Supondo que u é harmônica, a igualdade acima implica que $\varphi'(s) = 0$ para todo $s \in (0, r)$, isto é, φ é constante em $(0, r)$. Uma vez que φ é contínua em $(0, r]$, temos que

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_x = \varphi(r) = \lim_{s \to 0^+} \varphi(s) = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_x = u(x_0),$$

em que usamos na última igualdade o fato da função u ser contínua no ponto x_0 (Exercício 6.1.3). Isso prova a veracidade de (1) e, equivalentemente, de (2). Para provar a recíproca suponha, por contradição, que u satisfaz a Propriedade da Média, mas não é harmônica.

Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Delta u(x_0) \neq 0$, digamos $\Delta u(x_0) > 0$. Como $u \in C^2(\Omega)$, o laplaciano de u é uma função contínua. Logo, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ e $\Delta u > 0$ em $B_r(x_0)$. Como a equação (1) se verifica, temos que φ é constante em $(0, r)$. Por outro lado, usando a expressão (4), concluímos que $0 = \varphi'(s) = \dfrac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \displaystyle\int_{B_s(x_0)} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x > 0$, o que é absurdo. $\square$

Observação 1.2. *Nas próximas aulas, discutiremos algumas consequências importantes do Teorema 1.1. Conforme será notado, a prova de muitas dessas consequências utiliza somente as equações (1) e (2), sendo portanto válidas, não só para funções harmônicas, mas também para qualquer função contínua que satisfaça a Propriedade da Média.*

A primeira propriedade que veremos está relacionada com a regularidade das funções harmônicas. Lembremos que, por definição, as funções harmônicas tem pelo menos todas as derivadas de ordem 2 contínuas. Contudo, vale o seguinte resultado de regularidade.

Teorema 1.4. *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz a Propriedade da Média, então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Na prova do Teorema 1.4 vamos usar as **funções regularizantes** ou *mollifiers*. A fim de introduzir esse importante conceito, lembremos inicialmente que o **suporte** de uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é definido por $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Definição 1.3. *a) Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \eta(t)dt = 1$ e cujo suporte esteja contido no intervalo $(-1, 1)$. Uma escolha possível para essa função é*

$$\eta(t) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(\dfrac{1}{(2t)^2 - 1}\right), & \text{se } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{se } |t| \geq 1/2, \end{cases} \quad \text{com } c := \left(\int_{-1/2}^{1/2} \exp(1/((2t)^2-1))\,dt\right)^{-1}.$$

*Dado $\varepsilon > 0$, definimos o **núcleo regularizante** $\eta_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\dfrac{|x|}{\varepsilon}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Devido às propriedades de η segue que:*

(i) $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; *(ii)* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$; *(iii)* $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$;

*b) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua, dado $\varepsilon > 0$, defina $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Denote por $f^\varepsilon := (\eta_\varepsilon * f)$ a **convolução** de η_ε com f, isto é, a função $f^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f^\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Observação 1.3. *a) Pela definição de Ω_ε, se $x \in \Omega_\varepsilon$ e $y \in B_\varepsilon(x)$, então $x - y \in \Omega$, de modo que as duas integrais acima fazem sentido. Além disso, usando uma mudança de variáveis concluímos que f^ε também pode ser escrita como $f^\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon$;*

b) Observamos que um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é uma $n-$upla em que $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ representa o número de derivadas na variável x_i no operador D^α.

Proposição 1.2. *Se f é contínua e α é um multi-índice qualquer, vale $D^\alpha f^\varepsilon = f * D^\alpha \eta_\varepsilon$. Em particular, $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, o que justifica o nome de **núcleo regularizante** para η_ε.*

1.3 Aula 03: O Princípio do Máximo

Iniciamos nossa aula com a prova de uma propriedade importante das funções regularizantes.

Prova. Fixado $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, seja $\alpha = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, com o 1 estando na i-ésima entrada, e considere $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno de modo que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Nestas condições, temos que

$$\frac{f^\varepsilon(x + he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} = \int_{\widetilde{\Omega}} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)}{h} \right) f(y)\, \mathrm{d}y,$$

em que $\widetilde{\Omega}$ é um conjunto compacto totalmente contido em Ω. Usando agora a regularidade de η_ε, a compacidade de $\widetilde{\Omega}$ e o mesmo argumento da prova de (3), obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha f^\varepsilon(x) = \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \to 0} \int_{\widetilde{\Omega}} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)}{h} \right) f(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}} \lim_{h \to 0} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)}{h} \right) f(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) f(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) f(y)\, \mathrm{d}y = \left(D^\alpha \eta_\varepsilon * f \right)(x), \end{aligned}$$

o que mostra o resultado para o multi-índice com apenas uma derivada $\alpha = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Um processo de indução conclui o resultado para qualquer multi-índice α, visto que este pode ser decomposto em um número finito de multi-índices com apenas uma derivada. □

Agora apresentamos a prova do nosso resultado de regularidade, Teorema 1.4.

Prova do Teorema 1.4. Seja $u \in C(\Omega)$ satisfazendo a Propriedade da Média e considere, para $\varepsilon > 0$ pequeno, $u^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * u)(x) = \displaystyle\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x - y) u(y)\, \mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon$. Vamos mostrar que $u_{|\Omega_\varepsilon} \equiv u^\varepsilon$ e portanto, das considerações acima, segue que $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Feito isso, basta agora notar que, qualquer que seja $x \in \Omega$, devemos ter $x \in \Omega_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Seja então $x \in \Omega_\varepsilon$ fixado e observe que, usando a definição de η_ε e (1), obtemos

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) u(y)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) u(y)\, d\sigma_y \right) \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \left(\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \left(u(x) n \omega_n r^{n-1} \right) \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \left(\int_{\partial B_r(x)} 1\, d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = u(x) \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) d\sigma_y \right) \mathrm{d}r \\ &= u(x) \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta_\varepsilon(x - y) d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = u(x) \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x - y)\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança de variáveis $x - y \mapsto z$ e usando as propriedades (ii) e (iii) da função regularizante, obtemos $u^\varepsilon(x) = u(x) \displaystyle\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)\, \mathrm{d}z = u(x)$, o que conclui a prova. □

Observação 1.4. *Quando a função u é harmônica, vale um resultado mais forte do que o Teorema 1.4. Nesse caso, pode-se provar que $u \in C^2(\Omega)$ é analítica em Ω (Exercício 6.1.7).*

Exemplo 1.3. *Seja $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ é harmônica, de modo que $u(t) = c_1 + c_2 t$, para constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como o gráfico de u é um segmento de reta vemos que, qualquer que sejam os valores das constantes, o máximo (mínimo) de u é sempre atingido na fronteira de $[a, b]$, que é exatamente o conjunto $\{a, b\}$. Além disso, se o máximo (mínimo) de u for atingido em um ponto interior $x_0 \in (a, b)$, então necessariamente $c_2 = 0$ e, portanto, u é constante em $[a, b]$.*

O resultado a seguir mostra que a propriedade do Exemplo 1.3 permanece válida em dimensões maiores.

Teorema 1.5 (Princípio do Máximo). *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e $u \in C(\overline{\Omega})$ satisfaz a Propriedade da Média.*

(i) *Se Ω é conexo e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, então u é constante em Ω;*

(ii) *Independente da conexidade de Ω, vale que $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.*

Prova. Para provar (i), considere $x_0 \in \Omega$ tal que $M := \max_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$, e considere o conjunto $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Como $x_0 \in \Omega_M$, este conjunto é não vazio. Além disso, a continuidade de u garante que $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$ é fechado em Ω. Vamos mostrar que Ω_M é aberto em Ω, assim, segue da conexidade de Ω que $\Omega_M = \Omega$ e, portanto, u é constante em Ω. De fato, seja $y \in \Omega_M$ um ponto qualquer e $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset\subset \Omega$. Então,

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} M \,\mathrm{d}x = M = u(y) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} u(x) \,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_{B_r(y)} (M - u(x)) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Como o integrando acima é não-negativo e contínuo devemos ter $u \equiv M$ em $B_r(y)$ e, portanto, $B_r(y) \subset \Omega_M$. Logo Ω_M é aberto e, portanto, aberto em Ω e o item (i) está provado. Para o item (ii), basta considerar o caso constante separadamente e para o caso geral aplicar o item (i) na componente conexa onde o máximo é atingido (Exercício 6.1.9). $\square$

Observação 1.5. *O Teorema* 1.5 *continua válido se substituirmos o máximo pelo mínimo de u. Além disso, a conclusão do item (i) pode ser falsa se Ω não for conexo (Exercício* 6.1.9*).*

Uma aplicação interessante do Teorema 1.5 está relacionada à unicidade de solução do problema de Poisson.

Teorema 1.6. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Prova. Suponha que Ω é limitado e que u_1 e u_2 são duas soluções do problema de Poisson. Então a função $v := u_1 - u_2$ é tal que

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo item (ii) do Teorema 1.5 temos que $v \leq 0$ em Ω. Por outro lado, aplicando o mesmo raciocínio para a função $-v$ concluímos que $-v \leq 0$, isto é, $v \geq 0$ em Ω. Logo v se anula em todo o conjunto Ω, isto é, $u_1 \equiv u_2$ em Ω. $\square$

Observação 1.6. *É importante salientar que a conclusão do Teorema* 1.6 *pode ser falsa se Ω não for limitado. De fato, basta considerar $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ e observar que, nesse caso, o problema*

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

admite, além da solução trivial $u \equiv 0$, a função $u(x_1, \ldots, x_n) = x_n$ como solução.

2 O Problema de Poisson

2.1 Aula 04: A Solução Fundamental e O Potencial Newtoniano

O objetivo desta aula é estudar a existência de solução clássica, isto é, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para o problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

As hipóteses sobre Ω, f e g serão colocadas no decorrer da discussão. A ideia básica e estudar separadamente os problemas

$$\Delta u = f \ \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \tag{5}$$

e

$$\Delta u = 0 \ \text{ em } \Omega, \quad u = g \ \text{ em } \partial\Omega, \tag{6}$$

e observar que, se u_1 é solução de (5) e u_2 é solução de (6), então a função $u := u_1 + u_2$ é uma solução do problema (P). Na Aula 6, vamos nos concentrar na solução de um caso particular do problema (6). No que segue, vamos considerar o problema $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.1. *Se $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$ e $A = A_{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, então a função $v(x) := u(Ax)$ também satisfaz a mesma equação (Exercício 6.2.1). Por conta disso, vamos tentar simplificar o problema procurando uma solução radial da equação, isto é, uma solução que é constante ao longo de esferas centradas na origem.*

Supondo que u é uma solução radial, vamos denotar por $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função que satisfaz $v(r) = u(x)$, $\ r = |x|$. Como a função v só depende da variável radial r, podemos reescrever a equação de Laplace em coordenadas radiais, obtendo assim uma equação diferencial ordinária.

A fim de obter essa EDO note que, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, podemos usar a regra da cadeia para obter $u_{x_i} = v'(r)r_{x_i}$, e $u_{x_ix_i} = v''(r)r_{x_i}^2 + v'(r)r_{x_ix_i}$. Como $r = |x| = (|x|^2)^{1/2}$, então

$$r_{x_i} = \frac{1}{2}\left(|x|^2\right)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{r} \ \text{ e } \ r_{x_ix_i} = \left(\frac{x_i}{r}\right)_{x_i} = \frac{1}{r} + x_i(-1)r^{-2}r_{x_i} = \frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}.$$

Portanto,

$$\Delta u = \sum_{i}^{n} u_{x_ix_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(v''(r)r_{x_i}^2 + v'(r)r_{x_ix_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \sum_{i=1}^{n} v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

ou ainda, $\Delta u = v''(r) + v'(r)\left(\dfrac{n}{r} - \dfrac{1}{r}\right)$. Logo a equação $-\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é equivalente a

$$v''(r) + v'(r)\left(\frac{n-1}{r}\right) = 0, \quad r > 0.$$

Supondo $v'(r) \neq 0$, podemos reescrever a equação acima na forma $(\ln v'(r))' = \dfrac{v''(r)}{v'(r)} = \dfrac{1-n}{r}$ e integrar para obter $\ln v'(r) = (1-n)\ln r + c_1 = \ln r^{1-n} + c_1$, ou ainda $v'(r) = c_2 r^{1-n}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. Integrando novamente obtemos $v(r) = \begin{cases} c_3 \ln r + c_4, & \text{se } n = 2, \\ c_3 r^{2-n} + c_4, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$ para constantes $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Com essa motivação, temos a seguinte definição.

Definição 2.1. *Definimos a solução fundamental do Laplaciano por*

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & \text{se } n = 2, \\ \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Observação 2.2. *a) A função Γ é harmônica e ilimitada quando $x \to 0$ (Exercício 6.1.1). Porém, ela é localmente integrável. De fato, para ver isso basta mostrar que a integral em bolas é finita. Considerando o caso 2-dimensional temos que,*

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(0)} \ln|x|\,\mathrm{d}\sigma_x\right) dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^\varepsilon \ln r \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r, \quad \text{para qualquer } \varepsilon > 0.$$

Portanto,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^2}{4}\left(1 - 2\ln\varepsilon\right), \quad \text{se } n = 2. \tag{7}$$

No caso de dimensões maiores, podemos proceder de modo análogo para obter

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(0)} r^{2-n}\,\mathrm{d}\sigma_x\right) dr = \frac{1}{2-n}\int_0^\varepsilon r\,\mathrm{d}r = \frac{\varepsilon^2}{2(2-n)}, \ \text{se } n \geq 3. \tag{8}$$

b) É interessante notar que, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua, a função dada por $x \mapsto \Gamma(x-y)f(y)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Da mesma forma, se $\{y^1, \ldots, y^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma família finita de pontos, então a função $x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \Gamma(x-y^i)f(y^i)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{y^1, \ldots, y^k\}$.

Suponha que f é tal que possamos fazer a soma na Observação 2.2 (b) sobre todos os pontos de $\mathbb{R}^n$, isto é, que a função chamada de **Potencial Newtoniano** gerado por f, $\omega_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\omega_f(x) := (\Gamma * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$, esteja bem definida. Se fosse possível derivar sob o sinal da integral teríamos

$$\Delta\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x\Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Contudo, $D^2\Gamma(x)$ se comporta como $|x|^{-n}$ perto da origem, que não é localmente integrável. Portanto, não há como justificar a passagem da derivada para dentro da integral. De fato, a igualdade acima não é correta, conforme podemos ver pelo próximo resultado.

Lema 2.1. *Suponha que $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto. Então o Potencial Newtoniano gerado por f, isto é, $\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$ está bem definido, $\omega_f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta\omega_f = f$.*

Prova. Como $\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, temos que

$$\frac{\omega_f(x+he_i) - \omega_f(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\right)\Gamma(y)\,\mathrm{d}y.$$

O termo entre parênteses acima converge para para $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$, quando $h \to 0$. Além disso, usando a Desigualdade do Valor Médio concluímos que ele é limitado no suporte (compacto) de f. Uma vez que Γ é localmente integrável, podemos passar a igualdade acima ao limite e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\frac{\partial\omega_f}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\Gamma(y)\,\mathrm{d}y = \left(\Gamma * \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x). \tag{9}$$

De maneira análoga, mostra-se que $D^\alpha\omega_f = (\Gamma * D^\alpha f)$, sempre que α é um multi-índice qualquer com ordem $|\alpha| \leq 2$. Com isso, concluímos que $\omega_f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Para calcular $\Delta\omega_f(x)$ vamos tomar $0 < \varepsilon < 1$ e usar (9) para escrever $\Delta\omega_f(x) = A_\varepsilon + C_\varepsilon$, com

$$A_\varepsilon := \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y \ \text{ e } \ C_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Como Δf é limitado, podemos usar (7) e (8) para estimar

$$|A_\varepsilon| \leq \int_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)\Delta f(x-y)| \mathrm{d}y \leq \|\Delta f\|_\infty \int\limits_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)| \, \mathrm{d}y = \|\Delta f\|_\infty \times \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2(1-2\ln\varepsilon)}{4}, & \text{se } n=2, \\ \dfrac{\varepsilon^2}{2(n-2)}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Usando a regra de L'Hopital no caso $n=2$, concluímos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon = 0$ para todo $n \geq 2$. Para estimar o termo C_ε, vamos inicialmente usar o Teorema 1.3(d) para obter

$$C_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y) \, \mathrm{d}y = D_\varepsilon + E_\varepsilon$$

com $D_\varepsilon := \displaystyle\int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))} \Gamma(y) \frac{\partial f}{\partial \eta}(x-y) \, \mathrm{d}\sigma_y$ e $E_\varepsilon := -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\Gamma(y) \cdot \nabla f(x-y) \, \mathrm{d}y.$
Para estimar D_ε podemos usar (7) e (8) e que $\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)) = \partial B_\varepsilon(0)$, obtendo assim

$$|D_\varepsilon| \leq \|\nabla f\|_\infty \int\limits_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))} |\Gamma(y)| \, \mathrm{d}\sigma_y = \|\nabla f\|_\infty \times \begin{cases} (-\varepsilon \ln \varepsilon), & \text{se } n=2, \\ \dfrac{\varepsilon}{(n-2)}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \tag{11}$$

Isto mostra que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} D_\varepsilon = 0$. Usando uma vez mais o Teorema 1.3(d), obtemos $E_\varepsilon = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} f(x-y)\Delta\Gamma(y) \, \mathrm{d}y - \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))} f(x-y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(y) \, \mathrm{d}\sigma_y$. Como a função Γ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a primeira integral acima é nula. Com relação à segunda notemos que, como a integral é tomada na fronteira do exterior da bola, o vetor normal exterior é $-y/|y|$. Ademais, usando a definição de Γ, obtemos

$$\Gamma_{x_i} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y|} \frac{y_{x_i}}{|y|} \quad \text{para } n=2, \quad \text{e} \quad \Gamma_{x_i} = \frac{|y|^{1-n}}{n\omega_n} \frac{y_{x_i}}{|y|} \quad \text{para } n \geq 3. \quad \text{Logo,}$$

$$\nabla\Gamma(y) = \frac{y}{n\omega_n |y|^n}, \text{ para } n \geq 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(y) = \nabla\Gamma(y) \cdot \eta(y) = \frac{y}{n\omega_n|y|^n} \cdot \left(-\frac{y}{|y|}\right) = \frac{-1}{n\omega_n |y|^{n-1}}. \tag{12}$$

$$\text{Portanto,} \quad E_\varepsilon = \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))} f(x-y) \frac{1}{n\omega_n|y|^{n-1}} \, \mathrm{d}\sigma_y = \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y) \, \mathrm{d}\sigma_y.$$

Segue então da mudança de variáveis $z = x-y$ e da continuidade de f em x que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} E_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z) \, \mathrm{d}\sigma_z = f(x). \tag{13}$$

Lembrando que $C_\varepsilon = D_\varepsilon + E_\varepsilon$ e que $D_\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, concluímos que $C_\varepsilon \to f(x)$. Como já havíamos provado que $A_\varepsilon \to 0$, podemos passar a equação (10) ao limite para concluir que $\Delta\omega_f(x) = f(x)$, o que finaliza a prova do lema. $\square$

Observação 2.3. *O Lema 2.1 pode ser provado com uma exigência muito menor de regularidade para a função f. Por exemplo, uma adaptação da sua prova nos permite concluir que se $f \in C(\overline{\Omega})$ para algum domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então $\omega_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Para formular precisamente esse resultado mais geral, de maneira a conseguir melhor regularidade para ω_f, precisamos introduzir um novo espaço de funções para tratar o problema.*

2.2 Aula 05: Funções Hölder Contínuas, o Método de Perron

Começamos nossa aula relembrando que um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|_E)$ é um **espaço de Banach** quando ele é completo com relação à topologia induzida pela norma. Isso significa dizer que toda sequência de Cauchy $(u_m) \subset E$ converge em E.

Observação 2.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, pode-se mostrar que $C(\overline{\Omega})$, munido com a norma $\|u\|_0 := \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$, para todo $u \in C(\overline{\Omega})$, é um espaço de Banach. De uma maneira mais geral, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o conjunto $C^k(\overline{\Omega})$ munido da norma $\|u\|_k := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_0$, para todo $u \in C^k(\overline{\Omega})$ é também um espaço de Banach.*

No que segue vamos introduzir um novo espaço que, em certo sentido, é o espaço correto para trabalhar com o problema de Poisson.

Definição 2.2. *Dado $0 < \gamma \leq 1$ e uma função $u \in C(\overline{\Omega})$, dizemos que u é Hölder contínua com expoente γ se existe uma constante $c > 0$ tal que $|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\gamma, \quad \forall\ x, y \in \Omega$. Para uma tal função definimos o quociente de Hölder por $H_\gamma[u] := \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty$.*

Definição 2.3. *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \gamma \leq 1$. O espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\Omega)$ é definido por*

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : H_\gamma[D^\alpha u] < \infty \text{ para todo multi-índice } |\alpha| \leq k\}.$$

Definimos ainda $C^{k,\gamma}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) : u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega_0}) \text{ para todo aberto } \Omega_0 \subset\subset \Omega\}$.

Observação 2.5. *O espaço $C^{k,\gamma}(\Omega)$ munido da norma $\|u\|_{k,\gamma} := \|u\|_k + \sum_{|\alpha|\leq k} H_\gamma[D^\alpha u]$ para todo $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach (Exercício 6.2.3).*

Voltando ao Potencial Newtoniano ω_f, lembremos que o Lema 2.1 foi provado para funções $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto. Porém, se exigirmos apenas um pouco mais de regularidade que a continuidade de f temos o seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \gamma \leq 1$, então o Potencial Newtoniano ω_f está bem definido e satisfaz*

(i) $\omega_f \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap C^{2,\gamma}(\Omega)$;   (ii) $\Delta\omega_f(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Observação 2.6. *A prova da Proposição 2.1 segue as mesmas linhas daquela feita para o Lema 2.1. Contudo, são necessárias algumas adaptações para contornar o fato de não existirem as derivadas da função f. Para mais detalhes veja [6, Corolário 1.2 da Seção 1.3] e também [7, Lemma 4.2] ou [15, Teorema 1.1]. Vale observar que, se f for apenas contínua, então ω_f* ***pode não ser de classe*** *C^2 em Ω (Exercício 6.2.4).*

Com a Proposição 2.1 reduzimos o estudo do problema de Poisson (P) ao problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{D}$$

De fato, se $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ e $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é tal que $\Delta v = 0$ em Ω, $v = g - \omega_f$ em $\partial\Omega$, onde ω_f é o Potencial Newtoniano gerado por f, então a função $u := v + \omega_f$ satisfaz $\Delta u = \Delta v + \Delta\omega_f = f$ em Ω, $u = g - \omega_f + \omega_f = g$ em $\partial\Omega$, ou seja, é solução de (P).

Para tratar da existência de solução para o problema (D) é importante discutirmos o seguinte exemplo, conhecido como exemplo de Zaremba.

Exemplo 2.1. *Suponha que* $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ *e defina* $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *por*

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \partial B_1(0), \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que, apesar de g *ser uma função regular, o problema de Dirichlet não possui solução clássica para essa escolha de* Ω *e* g *(Exercício* 6.2.5*). Portanto, a solubilidade do problema* (D) *não depende somente da regularidade do dado de fronteira* g*, ela depende também da geometria do domínio* Ω*.*

Vamos introduzir o conceito de regularidade de conjuntos do espaço euclidiano.

Definição 2.4. *Dados* $k \in \mathbb{N}$ *e um aberto limitado* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, dizemos que* Ω *é de classe* C^k *se, para cada* $x_0 \in \partial\Omega$*, existe uma bola* $B = B_r(x_0)$ *e uma bijeção* ψ *de* B *em* $A \subset \mathbb{R}^n$ *tais que:*
(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$*;* *(ii)* $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$*;* *(iii)* $\psi \in C^k(B)$*,* $\psi^{-1} \in C^k(A)$*,*

em que $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$*. Dessa forma, o aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é de classe* C^k *se, e somente se, cada ponto da sua fronteira possui uma vizinhança cuja intersecção com* $\partial\Omega$ *é o gráfico de uma função de classe* C^k *dependendo de* $n-1$ *das coordenadas* $x_1, \ldots, x_n$*.*

Observação 2.7. *O problema de Dirichlet pode ser resolvido por vários métodos, cada qual com uma hipótese de regularidade sobre* g *e* Ω*. Entre todos os métodos, o que parece fornecer solução clássica com hipóteses mais fracas é o* ***método das funções subharmônicas****, ou* ***Método de Perron****. Ele fornece solução* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *para funções* g *contínuas e domínios* Ω *de classe* C^2*. Na verdade, basta que* Ω *satisfaça a* ***condição da esfera exterior****, isto é, que para cada* $x_0 \in \partial\Omega$ *exista uma bola* $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $\overline{\Omega} \cap \overline{B_r(y)} = \{x_0\}$*.*

Enunciamos abaixo um resultado de existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet (D), baseado no Método de Perron, supondo que o conjunto Ω é de classe C^2. A prova de uma versão mais geral pode ser encontrada em [7, Teorema 2.14].

Teorema 2.1. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio limitado de classe* C^2 *e* $g \in C(\partial\Omega)$*, então o problema de Dirichlet* $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$ *possui uma única solução em* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

Com o auxílio do Teorema 2.1, podemos enunciar e provar o seguinte resultado de existência de solução para o problema de Poisson.

Teorema 2.2. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto limitado de classe* C^2*,* $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *e* $g \in C(\partial\Omega)$*, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui exatamente uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

Prova. Para a existência, é suficiente encontrarmos $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo os problemas

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_1 = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = f & \text{em } \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

pois, nesse caso, a função $u := u_1 + u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é solução de (P). A existência de u_1 é consequência imediata do Teorema 2.1. Para obter u_2 consideramos $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta v = 0$ em Ω, e $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Como $\omega_f \in C(\partial\Omega)$, a existência de uma tal função é novamente garantida pelo Teorema 2.1. Considere agora $u_2 := \omega_f - v$ e observe que $\Delta u_2 = \Delta\omega_f - \Delta v = f$ em Ω, $u_2 = \omega_f - \omega_f = 0$ em $\partial\Omega$, e portanto, o problema possui pelo menos uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. A unicidade segue do Teorema 1.6. $\square$

Observação 2.8. *Exigindo mais regularidade em* g *e* Ω*, obtemos soluções mais regulares. De fato, se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $0 < \gamma \leq 1$*, podemos definir o conceito de abertos* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *de classe* $C^{k,\gamma}$ *do mesmo modo que fizemos para* C^k*, considerando agora a regularidade das aplicações* ψ *e* ψ^{-1} *como sendo de classe* $C^{k,\gamma}$*. Dizemos que uma função* $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *definida na fronteira de um aberto* Ω *de classe* $C^{k,\gamma}$ *pertence à* $C^{k,\gamma}(\partial\Omega)$ *quando* $g \circ \psi^{-1} \in C^{k,\gamma}(A \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$*.*

O próximo resultado é devido à Kellog [9] que fornece uma versão do Teorema 2.1 para domínios e dados de fronteira mais regulares. Note que a regularidade da solução encontrada é também maior que aquela garantida pelo Teorema 2.1.

Teorema 2.3. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$ e $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, então o problema de Dirichlet* $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$ *possui exatamente uma solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.*

Observação 2.9. *Com relação ao Teorema 2.3 é importante ressaltar que a mera continuidade de g não implica na existência de derivadas na fronteira. Por exemplo, a função* $u(x_1, x_2) = x_2 \ln\left((x_1-1)^2+x_2^2\right)+2(1-x_1)\arctan\left(\dfrac{x_2}{1-x_1}\right)$ *satisfaz $\Delta u = 0$ em $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, é contínua em $\overline{B_1(0)}$, mas $|\nabla u(x_1, x_2)|$ se comporta como $|\ln(x_1-1)^2+x_2^2|$ quando $(x_1, x_2) \to (1, 0)$.*

Aplicando o Teorema 2.3 ao invés do Teorema 2.1 obtemos a seguinte versão do Teorema 2.2 para domínios e condições de fronteira mais regulares.

Corolário 2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de classe $C^{2,\gamma}$, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui exatamente uma solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Prova. Argumentando como na prova do Teorema 2.2, vamos usar o Teorema 2.3 no lugar do Teorema 2.1 e fazer uma pequena adaptação no argumento. De fato, nas condições enunciadas acima, é imediata a obtenção de u_1 satisfazendo (14). Mas, a obtenção de u_2 requer um argumento mais fino, visto que a aplicação direta da Proposição 2.1 nos garante somente que ω_f pertence a $C^1(\partial\Omega)$, o que não é suficiente para usar o Teorema 2.3 e obter $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta v = 0$ em Ω, $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Para contornar tal dificuldade, considere uma bola B tal que $\overline{\Omega} \subset B$. A regularidade de f e do conjunto Ω nos permite estender f para toda a bola B, de modo que a extensão (que denotaremos ainda por f) esteja contida em $C^{0,\gamma}(\overline{B})$, conforme [7, Lemma 6.37]. Pela Proposição 2.1 temos que $\omega_f \in C^{2,\gamma}(B)$. Podemos, então aplicar o Teorema 2.3 para obter $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta v = 0$ em Ω, e $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Procedendo como antes temos que $u_2 := \omega_f - v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é solução do problema (P). A unicidade segue outra vez pelo Princípio do Máximo, Teorema 1.6. □

2.3 Aula 06: A Função de Green

Nessa aula vamos supor que o problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui uma solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e usar o Teorema da Divergência apropriadamente para obter uma expressão explícita para tal solução. Para isso, introduzimos a definição a seguir.

Definição 2.5. *Definimos a **Função de Green** associada ao problema de Dirichlet em Ω como sendo a função $G(x,y) := \Gamma(x-y) + h^x(y)$, para x, $y \in \Omega$, $x \neq y$, em que Γ é a Solução Fundamental do Laplaciano e a função $h^x(y)$, chamada **parte regular** da função de Green, satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta h^x(y) = 0, & y \in \Omega, \\ h^x(y) = -\Gamma(x-y), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observação 2.10. *Para cada $x \in \Omega$ fixado, a função $y \mapsto \Gamma(x-y)$ é regular em $\partial\Omega$. Desse modo, se Ω é de classe C^2, podemos sempre garantir a existência de h^x e, portanto, da função de Green. Isso motiva o seguinte resultado.*

Teorema 2.4. *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

e existe a função de Green associada ao problema de Dirichlet em Ω, então u satisfaz a seguinte fórmula de representação

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y) g(y)\,\mathrm{d}\sigma_y. \tag{16}$$

Prova. Fixado um ponto $x \in \Omega$, considere $\varepsilon > 0$ pequeno e defina $\Lambda_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$. Usando o Teorema 1.3(e) obtemos

$$\int_{\Lambda_\varepsilon} (u(y)\Delta\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\Delta u(y))\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Lambda_\varepsilon} \left(u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Como $\Delta\Gamma(x-y) = 0$ para todo $y \neq x$, segue que

$$-\int_{\Lambda_\varepsilon} \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = C_\varepsilon + D_\varepsilon + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \right) \mathrm{d}\sigma_y \tag{17}$$

em que $C_\varepsilon := -\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y$, $D_\varepsilon := \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\,\mathrm{d}\sigma_y$. Argumentando como na prova de (13) e (11), respectivamente, mostramos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} C_\varepsilon = -u(x)$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} D_\varepsilon = 0$. Além disso, como $\Lambda_\varepsilon \to \Omega$ quando $\varepsilon \to 0^+$, Γ é localmente integrável e $u \in C^2(\overline{\Omega})$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Lambda_\varepsilon} \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0^+$ em (17) obtemos

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \right) \mathrm{d}\sigma_y, \tag{18}$$

que é conhecida como **Fórmula de Representação de Green.** Entretanto, como $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ não é um dado do problema (P), para reescrever u e obter (16), observemos que, por hipótese, $h^x \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma função harmônica em Ω, então podemos usar Teorema 1.3(e) novamente para obter

$$-\int_\Omega h^x \Delta u \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h^x}{\partial \eta} - h^x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Como $G(x,y) = \Gamma(x-y) + h^x(y)$, somando a equação acima a (18), segue que

$$u(x) = \int_\Omega G \Delta u \, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Como $G = 0$ em $\partial\Omega$, então obtemos $u(x) = \displaystyle\int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma_y$, como queríamos demonstrar. □

Observação 2.11. *a) O Teorema 2.4 nos permite resolver o problema (15) desde que exista, e saibamos calcular, a função de Green. De fato, nesse caso basta utilizar a definição de u dada pela fórmula de representação e mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz as equações do problema. A dificuldade em tal procedimento reside no fato de que calcular a função de Green não é, em geral, uma tarefa fácil. Porém, isso pode ser feito quando Ω possui algum tipo de simetria. Um caso particular importante é o da bola, onde vale a Fórmula de Poisson, dada pelo seguinte resultado (cf. [7, Teorema 2.6] ou [5, Teorema 15, Seção 2.2]).*

Teorema 2.5. *Seja $r > 0$ e $g : B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \displaystyle\int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y, & \text{se } x \in B_r(0), \\ g(x), & \text{se } x \in \partial B_r(0), \end{cases}$$

é tal que $u \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ e $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_r(0), \\ u = g & \text{em } \partial B_r(0). \end{cases}$

b) Algumas propriedades da função de Green e também a sua fórmula explícita quando $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, podem ser encontradas em [5, Seção 2.2.4]. Citamos ainda [15, Seção 2.2], onde são apresentadas considerações históricas acerca da função de Green, bem como um resultado de existência desta para certas classes de domínios.

3 Operadores Lineares de 2° Ordem

3.1 Aula 07: Princípios do Máximo

A partir de agora, vamos estender os resultados precedentes para o operador linear de 2° ordem dado pela expressão

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{19}$$

onde $u \in C^2(\Omega)$ e os coeficientes a^{ij}, b^i, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções dadas. Além disso, a menos que se diga o contrário, consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Como para qualquer função $u \in C^2(\Omega)$, o Teorema de Schwarz nos assegura que $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$ para todo i, $j \in \{1, \dots, n\}$, então, daqui por diante, podemos reescreveer L como

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(a^{ij}(x) + a^{ji}(x)\right) u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

e supor, sem perda de generalidade, que para cada $x \in \Omega$ a matriz

$$A(x) := \begin{bmatrix} a^{11}(x) & \cdots & a^{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1}(x) & \cdots & a^{nn}(x) \end{bmatrix} \text{ é simétrica.} \tag{20}$$

Definição 3.1. *Dizemos que o operador L definido em (19) é:*

(i) ***elíptico*** *no ponto $x \in \Omega$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ definida em (20) é positiva, isto é, se $\theta(x)$ denota o menor autovalor de A, então*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta(x)|\xi|^2, \quad \forall\, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$

(ii) ***elíptico em*** *Ω se $\theta > 0$ em Ω;*

(iii) ***uniformemente elíptico em*** *Ω se existe $\theta_0 > 0$ tal que $\theta(x) \geq \theta_0$, para todo $x \in \Omega$.*

Exemplo 3.1. *O mais simples operador uniformemente elíptico é o Laplaciano em qualquer domínio Ω. Se considerarmos $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, então o operador $Lu = u_{x_1x_1} + x_1u_{x_2x_2}$ é elíptico, embora não seja uniformemente elíptico. Entretanto, esse mesmo operador, em uma faixa do tipo $(a, b) \times \mathbb{R}$ com $0 < a < b$, é uniformemente elíptico (Justifique!).*

Observação 3.1. *Quando L é uniformemente elíptico, vale a seguinte desigualdade*

$$\xi A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta_0|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Tomando $\xi = e_i$ como sendo o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$e_iA(x)e_i = a^{ii}(x) \geq \theta_0|e_i|^2 = \theta_0, \quad i = 1, \dots, n, \; x \in \Omega. \tag{21}$$

Vamos supor que os coeficientes a^{ij}, b^i e c do operador L definido em (19) estão em $L^\infty(\Omega)$. Com isso, temos o seguinte resultado que é uma versão do item (ii) do Teorema 1.5, e uma generalização do Exercício 6.1.11.

Teorema 3.1. *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

(i) *se* $Lu \geq 0$ *em* Ω, *então* $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$;(ii) *se* $Lu \leq 0$ *em* Ω, *então* $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

Prova. Suponha inicialmente que $Lu > 0$ em Ω e que existe $\widetilde{x} \in \Omega$ tal que $u(\widetilde{x}) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Como L é uniformemente elíptico, a matriz dos coeficientes $A = A(\widetilde{x})$ é positiva definida e, portanto, existe uma matriz ortogonal, isto é, $O = O_{n\times n}$ tal que $O^{-1} = O^T$ e

$OAO^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ com $\lambda_i \geq \theta_0 > 0$, $i = 1, \ldots, n$. O termo geral da matriz é dado por

$$\delta_{kl}\lambda_k = \sum_{i=1}^n o_{ki} \sum_{j=1}^n a^{ij} o^T_{jl} = \sum_{i,j=1}^n o_{ki} a^{ij} o_{lj}. \tag{22}$$

Considere agora a nova variável $y := \widetilde{x} + O(x - \widetilde{x})$, de modo que as componentes do vetor y são dadas por $y_k = \widetilde{x}_k + \sum_{j=1}^n o_{kj}(x_j - \widetilde{x}_j)$, $\quad k = 1, \ldots, n$. Uma vez que $O^T = O^{-1}$, vale $x = \widetilde{x} + O^T(y - \widetilde{x})$ e podemos derivar $u(x) = u(\widetilde{x} + O^T(y - \widetilde{x}))$ para obter

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n u_{y_k} o_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj}, \ \forall\ i,\, j \in \{1, \ldots n\}. \tag{23}$$

Usando que $\widetilde{x} \in \Omega$ é ponto de máximo, segue que $\nabla u(\widetilde{x}) = 0$ e por (22)-(23), obtemos

$$\begin{aligned} Lu(\widetilde{x}) &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\widetilde{x}) u_{x_i x_j}(\widetilde{x}) + \sum_{i=1}^n b^i(\widetilde{x}) u_{x_i}(\widetilde{x}) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\widetilde{x}) \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} \\ &= \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\widetilde{x}) o_{ki} o_{lj} = \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} \delta_{kl} \lambda_k = \sum_{k=1}^n u_{y_k y_k} \lambda_k. \end{aligned}$$

Como $D^2 u(\widetilde{x}) \leq 0$, o mesmo raciocínio usado em (21) mostra que $u_{y_k y_k}(\widetilde{x}) \leq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Como os números $\lambda_i' s$ são positivos, concluímos que $Lu(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^n v_{y_k y_k}(\widetilde{x})\lambda_k \leq 0$, o que é um absurdo, pois $Lu > 0$ em Ω. Portanto, função u não pode assumir seu máximo em Ω, isto é, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Para o caso geral $Lu \geq 0$, tome $\gamma \in \mathbb{R}$ arbitrário e $u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon \mathrm{e}^{\gamma x_1}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

Usando a definição de L, obtemos $Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon L(\mathrm{e}^\gamma x_1) = Lu + \varepsilon \mathrm{e}^{\gamma x_1}(a^{11}(x)\gamma^2 + b^1(x)\gamma)$. Usando (21), a regularidade dos coeficientes e $Lu \geq 0$, obtemos

$$Lu_\varepsilon \geq \varepsilon \mathrm{e}^{\gamma x_1}(\theta_0 \gamma^2 - \|b^1\|_\infty \gamma) > 0, \quad \text{em } \Omega,$$

desde que o número γ seja tal que $\gamma > \|b^1\|_\infty / \theta_0$. Assim, podemos usar a primeira parte da prova para concluir que $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$. Mas $u_\varepsilon \geq u$, e portanto,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} \mathrm{e}^{\gamma x_1}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, concluímos que $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u$, pois $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$, portanto, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Para provar o item (ii) basta usar o item (i) com a função $-u$. $\square$

Observação 3.2. *A conclusão do Teorema* 3.1 *pode não ser válida nas situações abaixo:*

1. *Se Ω é ilimitado, pois basta considerar $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi)$, $Lu = \Delta u$ e $u(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$.*

2. *Se $c \not\equiv 0$, bastando para isso considerar $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, $Lu = \Delta u + 2u$ e $u(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.*

3. *Se os coeficientes do operador são ilimitados, bastando para isso considerar $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $Lu = u'' + b(x)u'$, com $b(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ e a função $u(x) = 1 - x^4$.*

Além disso, uma análise cuidadosa da prova mostra que teorema permanece válido supondo somente que L é elíptico e que, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, a função $|b^i|/a^{ii}$ permanece limitada em qualquer compacto contido em Ω (Justifique!).

Consideramos agora uma versão do Teorema 3.1 para o caso em que o termo de ordem zero c é não-positivo. Lembremos que se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então a **parte positiva** u^+ e a **parte negativa** u^- da função u são definidas por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}, \quad \text{para } x \in \Omega.$$

Observe que essas duas funções são não-negativas e vale que $|u| = u^+ + u^-$ e $u = u^+ - u^-$.

Teorema 3.2 (Princípio do Máximo Fraco)**.** *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

(i) *se $Lu \geq 0$ em Ω, então $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \leq \max\limits_{\partial\Omega} u^+$;*

(ii) *se $Lu \leq 0$ em Ω, então $\min\limits_{\overline{\Omega}} u \geq -\max\limits_{\partial\Omega} u^-$;*

(iii) *se $Lu = 0$ em Ω, então $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| = \max\limits_{\partial\Omega} |u|$.*

Prova. (i) Se o conjunto $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ for vazio não há nada a fazer pois, nesse caso, $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e portanto $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \leq 0 = \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. Logo, podemos supor que $\Omega^+ \neq \varnothing$. A continuidade de u nos assegura que o conjunto Ω^+ é aberto em Ω, e portanto aberto em $\mathbb{R}^n$. Desse modo, como $c \leq 0$ em Ω, $Ku := Lu - c(x)u \geq 0$ em Ω^+. Note que

$$Ku = Lu - c(x)u = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i}$$

e que $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$. Segue então do Teorema 3.1(i), aplicado ao operador K, que $\max\limits_{\overline{\Omega^+}} u = \max\limits_{\partial\Omega^+} u$. Uma vez que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega^+} \cup \overline{\Omega \setminus \Omega^+}$ e $u \leq 0$ nesse último conjunto, segue que $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\overline{\Omega^+}} u = \max\limits_{\partial\Omega^+} u$. É suficiente então mostrar que $\max\limits_{\partial\Omega^+} u \leq \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. Para tanto, considere $x_0 \in \partial\Omega^+$ tal que $u(x_0) = \max\limits_{\partial\Omega^+} u$. A continuidade de u e a definição de Ω^+ implicam que $u(x_0) \geq 0$. Se $u(x_0) = 0$ então $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega^+} u = 0$, o que implicaria $\Omega^+ = \varnothing$. Logo, $u(x_0) > 0$ e podemos usar o fato de Ω^+ ser aberto em Ω para concluir que $x_0 \in \partial\Omega$. De fato, se não fosse assim, então u seria positiva em toda uma bola $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega^+$, contrariando o fato de que $x_0 \in \partial\Omega^+$. Daí, $\max\limits_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) = u^+(x_0) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. Com isso temos o item (i). O item (ii) segue de (i), basta notar que se $Lu \leq 0$, então $L(-u) \geq 0$. Daí, $-\min\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\overline{\Omega}} (-u) \leq \max\limits_{\partial\Omega} (-u)^+ = \max\limits_{\partial\Omega} u^-$, pois $(-u)^+ = \max\{-u, 0\} = u^-$. Por outro lado, para provar (iii), tomemos $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|u(x_0)| = \max\limits_{\overline{\Omega}} |u|$ e consideremos dois casos:

Caso 1. $u(x_0) \geq 0$: Usando o item (i) e a definição de u^+ temos

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Caso 2. $u(x_0) < 0$: Usando agora o item (ii) e a definição de u^- obtemos

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = -\min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^- \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Segue então que $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max\limits_{\partial\Omega} |u|$. Como a desigualdade reversa é trivialmente satisfeita, o teorema está provado. $\square$

3.2 Aula 08: O Lema de Hopf e O Princípio do Máximo Forte

Começamos nossa aula recordando que os princípios de máximos são úteis para obter resultados de **unicidade de solução**, bem como **princípios de comparação**. Como exemplo, temos os dois resultados abaixo, cujas provas serão deixadas como exercício.

Teorema 3.3. *Se L é uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$, então o problema*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.4 (Princípio de Comparação)**.** *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Se $Lu \geq 0$ em Ω e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Nosso objetivo agora é estabelecer uma versão do item (i) do Teorema 1.5 para o operador L. Vamos utilizar um importante resultado que provaremos a seguir.

Lema 3.1 (Lema de Hopf)**.** *Suponha que L é uniformemente elíptico e $Lu \geq 0$ em Ω, com $u \in C^2(\Omega)$. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

(i) *u é contínua em x_0;*

(ii) *$u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$;*

(iii) *existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$.*

Então, caso uma das hipóteses abaixo se verifique:

(a) $c \equiv 0$ em B; *(b) $c \leq 0$ em B e $u(x_0) \geq 0$,*

quando existe, a derivada normal exterior em x_0 satisfaz $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$.

Observação 3.3. *Se $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaz $(i)-(iii)$ e a derivada normal existe, é sempre verdade que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{u(x_0 + h\eta) - u(x_0)}{h} \geq 0$, independente do sinal de Lu. A informação adicional dada pelo lema é, de fato, a desigualdade estrita.*

Prova do Lema 3.1. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \in C(\overline{B})$ e que $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \overline{B} \setminus \{x_0\}$. De fato, se não for esse o caso, é suficiente tomar uma nova bola $B' \subset B$ que é internamente tangente à B no ponto x_0. Além disso, conforme veremos posteriormente, podemos também supor que $B = B_r(0)$. Feitas tais considerações, vamos assumir inicialmente a hipótese (b) e considerar, para $\gamma > 0$ a ser determinado, a função $v(x) := \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} - \mathrm{e}^{-\gamma r^2}$, $\quad x \in B$. Para cada $i, j = 1, \ldots, n$, temos que $v_{x_i} = -2\gamma x_i \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}$ e

$$v_{x_i x_j} = \begin{cases} 4\gamma^2 x_i x_j \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i \neq j \\ 4\gamma^2 x_i^2 \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} - 2\gamma \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i = j \end{cases} = (4\gamma^2 x_i x_j - 2\gamma\delta_{ij})\mathrm{e}^{-\gamma|x|^2},$$

em que $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Substituindo no operador L, podemos calcular

$$Lv(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(4\gamma^2 a^{ij}(x) x_i x_j - 2\gamma\delta_{ij} a^{ij}(x)\right) - 2\gamma \sum_{i=1}^{n} (b^i(x) x_i) + c(x) \right) - c(x)\mathrm{e}^{-\gamma r^2}.$$

Usando as hipóteses sobre os coeficientes de L, obtemos c_1, $c_2 \geq 0$ tais que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) x_i x_j \geq \theta_0 |x|^2, \; \sum_{i=1}^{n} b^i(x) x_i \leq |x| \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_\infty \leq c_1 \;\text{ e }\; \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} a^{ij}(x) \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_\infty = c_2.$$

Estas estimativas e $c \leq 0$ implicam que $Lv(x) \geq \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} \left(4\gamma^2\theta_0|x|^2 - 2\gamma(c_1 + c_2) - \|c\|_\infty\right)$. Desse modo, fazendo $c_3 := c_1 + c_2$ e denotando $A_r := B_r(0) \setminus B_{r/2}(0)$ temos que, para todo

$x \in A_r$, vale $Lv(x) \geq \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}\left(4\gamma^2\theta_0(r/2)^2 - 2\gamma c_3 - \|c\|_\infty\right)$. Escolhendo $\gamma > 0$ grande de modo que o termo entre parênteses acima seja positivo, concluímos que $Lv \geq 0$ em A_r. Uma vez que x_0 é um ponto de máximo estrito de u e a função v é positiva e contínua no compacto $\partial B_{r/2}(0)$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ pequeno de tal modo que $u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x),\ x \in \partial B_{r/2}(0)$. Note ainda que a desigualdade acima permanece válida em $\partial B_r(0)$ pois, nesse conjunto, a função v se anula. Desse modo, a função $w(x) = u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)$ é tal que

$$\begin{cases} Lw = Lu + \varepsilon Lv - c(x)u(x_0) \geq 0, & \text{em } A_r, \\ w \leq 0, & \text{em } \partial A_r. \end{cases} \tag{24}$$

Segue então do Princípio de Comparação, Teorema 3.4, que $w \leq 0$ em A_r. Observe agora que, como $x_0 \in \partial B$, temos que $v(x_0) = 0$. Logo $w(x_0) = 0$ e, portanto, x_0 é um ponto de máximo de w em $\overline{A_r}$. Supondo que exista a derivada normal de u no ponto x_0, pela Observação 3.3, devemos ter $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) \geq 0$, o que implica que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = -\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\left(\frac{x_0}{r}\right) = -\varepsilon\left(-2\gamma x_0\mathrm{e}^{-\gamma|x_0|^2}\right)\cdot\left(\frac{x_0}{r}\right) = 2\gamma\varepsilon\frac{|x_0|^2}{r}\mathrm{e}^{-\gamma|x_0|^2} > 0.$$

Isso estabelece a veracidade do lema sob a hipótese (b) no caso em que a bola B está centrada na origem. Para o caso geral em que $B = B_r(y)$, basta considerar $v(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x-y|^2} - \mathrm{e}^{-\gamma r^2}$ para $x \in B_r(y)$ e proceder como acima. A prova do lema sob a hipótese (a) pode ser feita repetindo os mesmos passos acima com $c \equiv 0$ em vez de $c \leq 0$. (Exercício 6.3.6). □

Observação 3.4. *Sob as hipóteses do Lema de Hopf, mesmo quando não existe a derivada normal no ponto x_0, a prova nos mostra que, para toda direção exterior ν tal que $\nu\cdot\eta(x_0) > 0$, vale $\liminf_{h\to 0^-}\dfrac{u(x_0+h\nu)-u(x_0)}{h} > 0$, pois $-\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\nu > 0$, já que $-\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\eta(x_0) > 0$.*

Agora podemos aplicar o Lema de Hopf para provar o Princípio do Máximo Forte.

Teorema 3.5 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo, L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então*

(i) *se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge máximo em Ω, então u é constante em Ω;*

(ii) *se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo em Ω, então u é constante em Ω.*

No caso em que $c \leq 0$ vale o seguinte:

(iii) *se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge máximo não-negativo em Ω, então u é constante em Ω;*

(iv) *se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo não-positivo em Ω, então u é constante em Ω.*

Prova. (i) Suponha que $Lu \geq 0$ e que u atinge máximo em Ω. Seja $M := \max_{\overline{\Omega}} u$, $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\} \neq \varnothing$ e suponha, por contradição, que $\Sigma \neq \varnothing$, em que $\Sigma := \Omega \setminus \Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) < M\}$. Como existe $x_0 \in \Omega$ com $u(x_0) = M$, pela continuidade de u, existe $y \in \Sigma$ tal que $\mathrm{dist}(y, \Omega_M) < \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$. Considere $r > 0$ o raio da maior bola $B = B_r(y)$ tal que $B \subset \Sigma$. Note que podemos escolher y de forma que $r = \mathrm{dist}(y, x_0)$ (Exercício 6.3.8). Por construção, $x_0 \in \partial B \cap \Omega_M$. Uma vez que $x_0 \in \Omega$ é um ponto de máximo de u, temos $\nabla u(x_0) = 0$ e, portanto, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \nabla u(x_0)\cdot\eta(x_0) = 0$. Por outro lado, segue do Lema de Hopf, com a hipótese (a), que a derivada normal acima deve ser positiva. Esta contradição mostra que $\Omega_M = \Omega$ e, portanto, $u \equiv M$ em Ω. A prova do item (ii) segue de (i) aplicado a função $-u$. No caso em que $c \leq 0$ em Ω a prova é análoga à apresentada acima utilizando, porém, a hipótese (b) do Lema de Hopf. □

Observação 3.5. *Note que o teorema acima vale para* ***domínios ilimitados.*** *A elipticidade uniforme e a limitação dos coeficientes não é essencial. É suficiente supor que as funções* $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a^{ij}(x)}{\theta(x)}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{b^{i}(x)}{\theta(x)}, \quad \frac{c(x)}{\theta(x)}$ *são limitadas em todo compacto contido em* Ω.

Em seguida provamos um princípio do máximo para L sem restrições no sinal de $c(x)$.

Teorema 3.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto conexo,* L *um operador uniformemente elíptico e suponha que existe* $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $w > 0$ *em* Ω *e* $Lw \leq 0$ *em* Ω. *Dada* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *temos que*

(i) *se* $Lu \geq 0$ *e* $\frac{u}{w}$ *assume máximo não-negativo em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *é constante em* Ω.

(ii) *se* $Lu \leq 0$ *e* $\frac{u}{w}$ *assume mínimo não-positivo em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *é constante em* Ω.

Prova. Denotando $v = \frac{u}{w}$ e supondo $Lu \geq 0$, um cálculo direto (Verifique!) mostra que

$$\widetilde{L}v = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)v_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}^i(x)v_{x_i} + \widetilde{C}v = \frac{Lu}{w} - \frac{u}{w^2}Lw + \frac{u}{w^2}Lw \geq 0 \quad \text{em } \Omega,$$

com $\displaystyle\widetilde{B}^i(x) := b^i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{w}a^{ij}(x)w_{x_j}$, para cada $i = 1, \ldots, n$ e $\displaystyle\widetilde{C} = \frac{Lw}{w} \leq 0$. Com isso, o caso (i) segue do Teorema 3.5 (iii). Para o caso (ii), basta aplicar o Teorema 3.5 (iv). □

A aplicabilidade do Teorema 3.6 depende de podermos encontrar uma função w como no enunciado do teorema. No que segue exibimos uma classe de domínios para os quais essa função pode ser construída facilmente.

Teorema 3.7. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto satisfazendo* $|\langle x - y, e\rangle| < d$, $\forall\, x, y \in \Omega$, *para algum* $e \in \mathbb{R}^n$ *satisfazendo* $|e| = 1$ *e* L *um operador uniformemente elíptico em* Ω. *Então existe* $d_0 = d_0(n, \theta_0, \|b^i\|_\infty, \|c^+\|_\infty) > 0$ *tal que o Teorema 3.6 é aplicável se* $d \leq d_0$.

Prova. Vamos exibir uma função w satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.6. Para simplificar a notação vamos supor que $e = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ e que $\Omega \subset (0, d) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Considerando $\gamma > 0$ a ser escolhido posteriormente, definimos $w(x) := \mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}$, $\;x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Observe inicialmente que $w \in C^\infty(\Omega)$. Além disso, como para todo $x \in \Omega$ vale $0 < x_1 < d$, temos que $w > 0$ em Ω. Note que $w_{x_1} = -\gamma \mathrm{e}^{\gamma x_1}$, $\;w_{x_1x_1} = -\gamma^2 \mathrm{e}^{\gamma x_1}$ e as demais derivadas de ordem 1 e 2 são nulas. Sendo assim, usando novamente que $0 < x_1 < d$, obtemos

$$\begin{aligned} Lw &= -(a^{11}(x)\gamma^2 + \gamma b^1(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1} + (c^+(x) - c^-(x))(\mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}) \\ &\leq -(a^{11}(x)\gamma^2 + \gamma b^1(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1} + c^+(x)\mathrm{e}^{\gamma d}. \end{aligned}$$

Denotando $M := \max\{\|b^1\|_\infty, \|c^+\|_\infty\}$ e usando (21), obtemos então

$$Lw \leq -\theta_0\gamma^2\mathrm{e}^{\gamma x_1} + \|b^1\|_\infty\gamma\mathrm{e}^{\gamma x_1} + \|c^+\|_\infty\mathrm{e}^{\gamma d} \leq -(\theta_0\gamma^2 - M\gamma)\mathrm{e}^{\gamma x_1} + M\mathrm{e}^{\gamma d}.$$

Escolhendo $\gamma > 0$ grande o suficiente de modo que $\theta_0\gamma^2 - M\gamma > 2M$, concluímos que

$$Lw \leq -2M\mathrm{e}^{\gamma x_1} + M\mathrm{e}^{\gamma d} \leq M(-2 + \mathrm{e}^{\gamma d})$$

de sorte que $Lw \leq 0$ em Ω, sempre que $0 < d \leq d_0 := \ln(2)/\gamma$. □

Apresentamos agora um princípio de comparação devido a Varadhan que também independe do sinal de $c(x)$, mas que, por outro lado, exige que Ω tenha volume pequeno. Mais especificamente, vale o seguinte resultado, cuja prova se encontra em [8, Teorema 2.32].

Teorema 3.8. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *em aberto,* L *uniformemente elíptico em* Ω *e* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tal que* $Lu \geq 0$ *em* Ω *e* $u \leq 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então existe* $\delta = \delta(n, \|b^i\|_\infty, \|c\|_\infty, \theta_0, diam(\Omega)) > 0$ *tal que, se o volume de* Ω *é menor que* δ, *então* $u \leq 0$ *em* Ω.

3.3 Aula 09: O Princípio da Continuação

A partir de agora vamos discutir a existência de solução para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} Lu &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, L é um operador diferencial de 2° ordem da forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u,$$

com os coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. O Corolário 2.1 nos assegura que, sob as condições acima e no caso em que $L = \Delta$, o problema sempre possui solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Estamos interessados em obter um resultado análogo para o caso em que L tem a forma acima.

Observação 3.6. *Sem perda de generalidade, podemos considerar $g \equiv 0$ na formulação do problema (P). Sendo assim, definindo*

$$X := \left\{ u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) : u \equiv 0 \quad \text{em } \partial\Omega \right\}, \quad Y := C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \tag{25}$$

a solubilidade do problema (P) é equivalente a mostrar que $L : X \to Y$ é sobrejetivo. De fato, supondo que o problema $Lv = \widetilde{f}$ em Ω, $v = 0$ em $\partial\Omega$, tenha solução de classe $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ para toda $\widetilde{f} \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, uma vez que o dado de fronteira g e o conjunto Ω são de classe $C^{2,\gamma}$, podemos estender g para todo $\overline{\Omega}$ com a sua extensão, que denotaremos ainda por g, sendo de classe $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ (Confira [7, Lemma 6.38]). Sendo então, $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ a solução do problema em questão com $\widetilde{f} := f - Lg \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, temos que a função $u := v + g$ satisfaz $Lu = Lv + Lg = f$ em Ω, $u = v + g = g$ em $\partial\Omega$, sendo, portanto, solução de (P).

Vamos começar nossa aula provando o seguinte resultado a respeito do operador L.

Proposição 3.1. *Se $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $Lu \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e o operador $L : X \to Y$ está bem definido, e além disso, é contínuo.*

Prova. Tendo em vista a definição de L, basta verificar que se $v, w \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, então o produto $vw \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Dados $x, y \in \Omega$, com $x \neq y$, observe que

$$\begin{aligned} \frac{|v(x)w(x) - v(y)w(y)|}{|x-y|^\gamma} &= \frac{|v(x)w(x) - v(x)w(y) + v(x)w(y) - v(y)w(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq |v(x)| \frac{|w(x) - w(y)|}{|x-y|^\gamma} + |w(y)| \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v]. \end{aligned}$$

Tomando o supremo para $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, obtemos $H_\gamma[vw] \leq \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v] < \infty$, e, portanto, $vw \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Além disso, obtemos

$$\begin{aligned} \|vw\|_{0,\gamma} &= \|vw\|_0 + H_\gamma[vw] \leq \|v\|_0 \|w\|_0 + \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v] \\ &\leq (\|v\|_0 + H_\gamma[v])(\|w\|_0 + H_\gamma[w]) = \|v\|_{0,\gamma} \|w\|_{0,\gamma}. \end{aligned} \tag{26}$$

Afirmamos agora que o operador L, além de bem definido, é também contínuo. Para isso, como L é linear, considere $(u_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, tal que $u_m \to 0$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. A estimativa (26) nos fornece

$$\begin{aligned} \|Lu_m\|_{0,\gamma} &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a^{ij} (u_m)_{x_i x_j} \right\|_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^{n} \left\| b^i (u_m)_{x_i} \right\|_{0,\gamma} + \|c u_m\|_{0,\gamma} \\ &\leq c_1 \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|(u_m)_{x_i x_j}\|_{0,\gamma} + \sum_{i}^{n} \|(u_m)_{x_i}\|_{0,\gamma} + \|u_m\|_{0,\gamma} \right), \end{aligned}$$

em que $c_1 := \max\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma}\}$. Uma vez que $\|D^\alpha(u_m)\|_{0,\gamma} \to 0$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq 2$, segue da expressão acima que $Lu_m \to 0 = L0$ em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Dessa forma, se $u_m \to u$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $u_m - u \to 0$, e concluímos que $L(u_m - u) \to 0$, isto é, $Lu_m \to Lu$ em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e o operador L é contínuo. □

Observação 3.7. *Conforme a Observação 3.6, resolver o problema (P) é equivalente a mostrar a sobrejetividade do operador linear e contínuo correspondente $L : X \to Y$. A fim de provar tal sobrejetividade, vamos considerar a família de problemas*

$$\begin{cases} L_t u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{onde } L_t := (1-t)L + t\Delta, \ t \in [0,1],$$

*e usar um resultado abstrato chamado **Princípio da Continuação** para mostrar que $L_0 = L$ é sobrejetivo se, e somente se, $L_1 = \Delta$ é sobrejetivo. Dessa forma, o resultado de existência de solução para (P) será uma consequência direta do Corolário 2.1 que nos dá a sobrejetividade de Δ.*

Definição 3.2. *Se X e Y são espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma aplicação linear, então dizemos que T é* limitada *se*

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty.$$

Além disso, T é limitada se, e somente se, T é contínua.

Teorema 3.9 (Princípio da Continuação)**.** *Seja $X \subset Y$ um espaço de Banach, Y um espaço vetorial normado e $\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1 : X \to Y$ operadores lineares limitados. Para $t \in [0,1]$, considere o operador*

$$\mathscr{L}_t u := (1-t)\mathscr{L}_0 u + t\mathscr{L}_1 u, \quad u \in X. \tag{27}$$

Suponha que existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_X \leq c \, \|\mathscr{L}_t u\|_Y \,, \quad \forall\, u \in X,\, t \in [0,1]. \tag{28}$$

Então $\mathscr{L}_0$ é sobrejetivo se, e somente se, $\mathscr{L}_1$ é sobrejetivo.

Observação 3.8. *Se o operador linear $\mathscr{L} : X \to Y$ é tal que existe $c > 0$ com $\|x\|_X \leq c \, \|\mathscr{L}x\|_Y$, para todo $x \in X$, então é injetivo. Nesse caso, podemos considerar o operador inverso $\mathscr{L}^{-1} : \mathscr{L}(X) \to X$, que também é linear. Além disso, para todo $y = \mathscr{L}x \in \mathscr{L}(X)$ vale $\|\mathscr{L}^{-1}y\|_X \leq c \, \|y\|_Y$, isto é, $\mathscr{L}^{-1}$ também é limitado. Assim, a condição (28) no Teorema 3.9 é equivalente a dizer que $\left\|\mathscr{L}_t^{-1}\right\|$ é uniformemente limitado para $t \in [0,1]$.*

Para provar o Teorema 3.9 vamos usar o resultado abaixo (Exercício 6.3.20).

Teorema 3.10 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração, isto é, existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$d(Tx_1, Tx_2) \leq \theta d(x_1, x_2), \ \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

Então T possui exatamente um ponto fixo, isto é, um elemento $x \in X$ tal que $Tx = x$.

Prova do Teorema 3.9. Suponha que $\mathscr{L}_s$ é sobrejetivo para algum $s \in [0,1]$. Dado $t \in [0,1]$, observe que para cada $y \in Y$, $\mathscr{L}_t x = y \iff \mathscr{L}_s x = y + (\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x)$. Como pela Observação 3.8 o operador $\mathscr{L}_s^{-1}$ está bem definido, sabemos que $\mathscr{L}_t$ é sobrejetivo se, e somente se, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $\mathscr{L}_t x = y$, o que equivale a

$$\begin{aligned} x &= \mathscr{L}_s^{-1}[y + (\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x)] = \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x)] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(1-s)\mathscr{L}_0 x + s\mathscr{L}_1 x - (1-t)\mathscr{L}_0 x - t\mathscr{L}_1 x] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(t-s)\mathscr{L}_0 x - (t-s)\mathscr{L}_1 x] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x)] \end{aligned}$$

Assim, dado $y \in Y$, se definirmos $T_y : X \to X$ por $T_y x := \mathscr{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x)]$, resolver a equação $\mathscr{L}_t x = y$ é equivalente a obter um ponto fixo para T_y.

A ideia agora é mostrar que, se $|t-s|$ é pequeno, então T_y é uma contração e podemos aplicar o Teorema 3.10. Para tanto, considere $x_1, x_2 \in X$ e note que

$$\begin{aligned} \|T_y x_1 - T_y x_2\|_X &= \left\|(t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)]\right\|_X \\ &\leq |t-s| \left\|\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)]\right\|_X . \end{aligned}$$

Segundo a Observação 3.8, a condição (28) implica que $\|\mathscr{L}_s^{-1} x_0\| \leq c\|x_0\|$, para qualquer $x_0 \in X$. Logo,

$$\begin{aligned} \|T_y x_1 - T_y x_2\|_X &\leq c|t-s| \,\|(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)\|_X \\ &\leq c|t-s| \left(\|\mathscr{L}_0(x_1 - x_2)\|_X + \|\mathscr{L}_1(x_1 - x_2)\|_X\right) \\ &\leq c|t-s| \left(\|\mathscr{L}_0\| + \|\mathscr{L}_1\|\right) \|x_1 - x_2\|_X , \end{aligned}$$

o que mostra que T_y é uma contração desde que $|t-s| < \delta := \dfrac{1}{c(\|\mathscr{L}_0\| + \|\mathscr{L}_1\|)}$, onde estamos supondo, sem perda de generalidade, que $\mathscr{L}_0 \neq \mathscr{L}_1$. Segue agora do Teorema 3.10 que T_y possui exatamente um ponto fixo $x \in X$ e como y é arbitrário, $\mathscr{L}_t$ é sobrejetivo para todo $t \in [0,1]$ tal que $|t-s| < \delta$. Note agora que podemos cobrir $[0,1]$ com intervalos da forma $(s-\delta, s+\delta)$ quando fazemos s percorrer o intervalo $[0,1]$. A conclusão do teorema segue então por iteração, visto que $\delta > 0$ é uma constante que não depende de t. □

Observação 3.9. *A aplicabilidade do Teorema* 3.9 *ao problema* (P) *depende da existência de uma constante* $c > 0$ *satisfazendo (*28*). A obtenção dessa constante é uma parte delicada no estudo do problema* (P) *e depende de algumas propriedades dos espaços de Hölder, veja a Definição* 2.3*. Portanto, é necessário estudar com mais detalhes esses espaços.*

Definição 3.3. *Sejam* X *e* Y *dois espaços vetoriais normados com* $X \subseteq Y$*. Dizemos que* X *está* ***imerso continuamente*** *em* Y *se existe* $c > 0$ *tal que* $\|x\|_Y \leq C\,\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$*. Nesse caso, escrevemos* $X \hookrightarrow Y$*.*

Observação 3.10. *Dizer que a imersão de* $X \subseteq Y$ *em* Y *é contínua é equivalente a dizer que a aplicação inclusão* $i : X \to Y$ *dada por* $i(x) = x$, $x \in X$*, é contínua. Um exemplo simples de imersão ocorre no espaços das funções diferenciáveis. Se* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, então* $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$*, visto que, para toda função* $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$*, vale*

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_0 \leq \sum_{|\alpha| \leq k+1} \|D^\alpha u\|_0 = \|u\|_{k+1} .$$

3.4 Aula 10: Espaços de Hölder, Imersões Contínuas e Compactas

Iniciamos essa aula generalizando o exemplo da Observação 3.10 e fornecendo também uma hierarquia entre os espaços de Hölder.

Teorema 3.11. *Se* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *e* $0 < \nu < \gamma \leq 1$*, então*

(1) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$; (2) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$; (3) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Além disso, se Ω *é convexo, então*

(4) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega})$; (5) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Observação 3.11. *A hipótese de convexidade em (4) e (5) não pode ser retirada, pois existem funções* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *que não estão em* $C^{0,1}(\overline{\Omega})$*. Como exemplo, considere*

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt{|x|},\, x^2 + y^2 < 1\} \quad \text{e} \quad u(x,y) := \begin{cases} (sgn\, x) y^\beta, & se\ y > 0, \\ 0, & se\ y \leq 0, \end{cases}$$

em que $1 < \beta < 2$ *e* $sgn(\cdot)$ *é a função sinal. Então* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *mas, para todo* $\gamma > 0$ *satisfazendo que* $\beta/2 < \gamma < 1$*, pode-se mostrar que* $u \notin C^{0\,\gamma}(\overline{\Omega})$*. Em particular, pelo item (3), temos que* $u \notin C^{0,1}(\overline{\Omega})$*.*

Prova. O item (1) segue da Observação 3.10. Para (2), basta notar que

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 \le \|u\|_k + \sum_{|\alpha|\le k} H_\gamma\,[D^\alpha u] = \|u\|_{k,\gamma}\,,$$

para toda $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$. Para verificar (3), vamos fixar $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ e α um multi-índice com $|\alpha| \le k$. Dados $x,\, y \in \Omega$ com $0 < |x-y| < 1$, temos que

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} \le \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma} \le H_\gamma[D^\alpha u].$$

Por outro lado, se $|x-y| \ge 1$, então

$$\begin{aligned}\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} &\le |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \le |D^\alpha u(x)| + |D^\alpha u(y)| \\ &\le \|D^\alpha u\|_0 + \|D^\alpha u\|_0 = 2\,\|D^\alpha u\|_0\,.\end{aligned}$$

Assim, $H_\nu[D^\alpha u] \le 2\,\|D^\alpha u\|_0 + H_\gamma[D^\alpha u]$, de onde se conclui que

$$\begin{aligned}\|u\|_{k,\nu} &= \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 + \sum_{|\alpha|\le k} H_\nu[D^\alpha u] \le \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 + \sum_{|\alpha|\le k} H_\gamma[D^\alpha u] + 2\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 \\ &\le \|u\|_{k,\gamma} + 2\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 + 2\sum_{|\alpha|\le k} H_\gamma[D^\alpha u] = 3\,\|u\|_{k,\gamma}\,,\end{aligned}$$

e, portanto, (3) se verifica. Suponha agora que Ω é convexo e considere $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$. Dados $x,\, y \in \Omega$ com $x \ne y$, e um multi-índice α tal que $|\alpha| \le k$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para escrever $D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) = \nabla D^\alpha u(z)\cdot(x-y)$ para algum $z \in \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$. Desse modo

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|} \le |\nabla D^\alpha u(z)| \le c\,\|u\|_{k+1} \Longrightarrow \|u\|_{k,1} = \|u\|_k + \sum_{|\alpha|\le k} H_1[D^\alpha u] \le (c+1)\,\|u\|_{k+1}\,,$$

o que estabelece (4). Finalmente, vemos que o item (5) também vale ao considerar as imersões contínuas $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$. □

Estamos interessados agora em propriedades especiais das imersões do Teorema 3.11.

Definição 3.4. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \hookrightarrow Y$.*
a) Dizemos que uma aplicação linear $T : X \to Y$ é ***compacta*** *quando T é contínua e leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, isto é, se $A \subseteq X$ é limitado, então $\overline{T(A)} \subset Y$ é compacto;*
b) Dizemos que a ***imersão de** X **em** Y **é compacta*** *se a aplicação inclusão $i : X \to Y$ for compacta. Nesse caso, X está* ***imerso compactamente*** *em Y e escrevemos $X \overset{cpct.}{\hookrightarrow} Y$.*

Observação 3.12. *Uma maneira equivalente de definir uma imersão compacta é dizer que X está imerso compactamente em Y se toda sequência $(u_m) \subset X$ limitada possui subsequência convergente em Y. Conforme veremos adiante, resultados de compacidade são extremamente importantes no estudo de equações diferenciais.*

Enunciamos abaixo um resultado clássico de convergência que será bastante útil nesse contexto.

Teorema 3.12 (Arzelá-Ascoli)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\mathcal{A} \subset C(\overline{\Omega})$ um subconjunto satisfazendo*

(i) *existe $M > 0$ tal que $\|u\|_0 \le M, \quad \forall\, u \in \mathcal{A}$;*

(ii) *dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $u \in \mathcal{A}$, x, $y \in \overline{\Omega}$, vale*
$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon, \quad \textit{sempre que } |x - y| < \delta.$$

Então toda sequência $(u_m) \subset \mathcal{A}$ possui subsequência convergente.

Observação 3.13. *Um conjunto $\mathcal{A} \subset C(\overline{\Omega})$ é dito* ***equilimitado*** *quando satisfaz a condição (i) acima. Quando (ii) é satisfeita, dizemos que o conjunto é* ***equicontínuo****. Note que, quando Ω é convexo, uma condição suficiente para a equicontinuidade de $\mathcal{A}$ é que as suas funções tenham derivadas uniformemente limitadas em $\overline{\Omega}$.*

A seguir, analisamos a compacidade das imersões dadas no Teorema 3.11.

Teorema 3.13. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \nu < \gamma \le 1$, então*

(2') $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$; (3') $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Além disso, se Ω é convexo, então

(1') $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$; (5') $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Prova. Vamos provar primeiro (2') para $k = 0$. Seja $(u_m) \subset C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que
$$\|u_m\|_{0,\gamma} = \|u_m\|_0 + H_\gamma[u_m] \le M, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$
Para ver que existe uma subsequência convergente em $C(\overline{\Omega})$, seja $\mathcal{A} := \{u_m : m \in \mathbb{N}\} \subset C(\overline{\Omega})$. Segue da expressão acima que $\mathcal{A}$ é equilimitado. Além disso, como $H_\gamma[u_m] \le M$, vale $|u_m(x) - u_m(y)| \le M|x - y|^\gamma$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\forall\, x$, $y \in \overline{\Omega}$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ dado, a condição (ii) do Teorema 3.12, de equicontinuidade, se verifica para $\delta = (\varepsilon/M)^{1/\gamma}$. Aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli concluímos que (u_m) possui uma subsequência convergente em $C(\overline{\Omega})$. Considerando agora $k \in \mathbb{N}$, tomamos $(u_m) \subset C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ uma sequência limitada. Então existe uma subsequência de (u_m), que denotaremos ainda por (u_m), tal que $u_m \to u$ em $C(\overline{\Omega})$. Para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \le k$,
$$\|u_m\|_{k,\gamma} = \|u_m\|_k + \sum_{|\alpha| \le k} H_\gamma[D^\alpha u_m] \le M. \text{ Logo, } \|D^\alpha u_m\|_{0,\gamma} = \|D^\alpha u_m\|_0 + H_\gamma[D^\alpha u_m] \le M.$$
Usando a primeira parte da prova e passando para subsequências se necessário, temos que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $C(\overline{\Omega})$. Devido à equicontinuidade, temos que a convergência é uniforme, logo $u_\alpha = D^\alpha u$ (Verifique!). Desse modo, $u \in C^k(\overline{\Omega})$ e $\|u_m - u\|_k = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_0 \to 0$, o que estabelece (2'). Para verificar (3') note inicialmente que, se $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ e x, $y \in \Omega$ com $x \ne y$, então
$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\nu} = \left(\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right)^{\frac{\nu}{\gamma}} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1 - \frac{\nu}{\gamma}}$$
de modo que, tomando o supremo, obtemos $H_\nu[D^\alpha u] \le 2^{1-\nu/\gamma} H_\gamma[D^\alpha u]^{\nu/\gamma} \|D^\alpha u\|_0^{1-\nu/\gamma}$.

Seja agora $(u_m) \subset C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $\|u_m\|_{k,\gamma} \le M$. Usando (2') e passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que (u_m) converge em $C^k(\overline{\Omega})$. Usando a estimativa acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|u_j - u_m\|_{k,\nu} &= \sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha(u_j-u_m)\|_0 + H_\nu[D^\alpha(u_j-u_m)]\right)\\
&\le \sum_{|\alpha|\le k} A_{j,m}\left(\|D^\alpha(u_j-u_m)\|_0^{\nu/\gamma} + 2^{1-\nu/\gamma}H_\gamma[D^\alpha(u_j-u_m)]^{\nu/\gamma}\right),
\end{aligned}
$$

com $A_{j,m} = \|D^\alpha(u_j-u_m)\|_0^{1-\nu/\gamma}$. Usando a desigualdade abaixo (veja o Exercício 6.3.21)

$$
(a+b)^{\nu/\gamma} \le c(a^{\nu/\gamma} + b^{\nu/\gamma}), \quad a,\, b \ge 0, \quad \text{para algum c>0 dependendo de } \nu/\gamma,
$$

e a limitação de (u_m), concluímos que

$$
H_\gamma[D^\alpha u_j - D^\alpha u_m]^{\nu/\gamma} \le (H_\gamma[D^\alpha u_j] + H_\gamma[D^\alpha u_m])^{\nu/\gamma} \le 2cM^{\nu/\gamma},
$$

com uma estimativa análoga valendo para $\|D^\alpha u_j - D^\alpha u_m\|_0^{\nu/\gamma}$. Portanto,

$$
\|u_j - u_m\|_{k,\gamma} \le 2M^{\nu/\gamma}(1+2^{1-\nu/\gamma}) \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha(u_j-u_m)\|_0^{1-\nu/\gamma}.
$$

Como u_n converge em $C^k(\overline{\Omega})$, para todo multi-índice de ordem menor ou igual a k, temos $\|D^\alpha(u_j-u_m)\|_0 \to 0$, quando $j,\, m \to \infty$. Assim, como $1-\nu/\gamma > 0$, segue da expressão acima que (u_m) é sequência de Cauchy em $C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$. Logo, $u_m \to u$ em $C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$, para alguma função $u \in C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$, o que estabelece (3'). A prova dos itens $(1')$ e $(5')$ segue dos diagramas abaixo

$$
C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega}) \quad \text{e} \quad C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega})
$$

e do fato de que a composição de uma aplicação contínua com uma aplicação compacta é uma aplicação compacta. □

3.5 Aula 11: O Teorema de Existência de Schauder

Na aula de hoje, voltaremos à questão de existência de solução para o problema

$$
(P) \qquad \begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega,\\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \le 1$, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$ e L é um operador diferencial de 2° ordem da forma

$$
Lu := \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \text{ com os coeficientes } a^{ij},\, b^i,\, c \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}).
$$

Conforme a Observação 3.7, para resolver esse problema vamos usar o Princípio da Continuação para a família de operadores $L_t := (1-t)L + t\Delta,\ t \in [0,1]$. Para isso, será necessário encontrar $c > 0$, independente de t, tal que

$$
\|u\|_{2,\gamma} \le c\|L_t u\|_{0,\gamma}, \quad \forall\ u \in X,\, t \in [0,1]. \tag{29}
$$

Para obter (29) usaremos o que chamamos de **estimativa a priori** para as soluções do problema (P). Mais especificamente, vamos usar o resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [7, Teorema 6.6].

Teorema 3.14 (Estimativa a priori). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$ e L um operador uniformemente elíptico com* $\max\left\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma} \,:\, i,j = 1\ldots n\right\} \le \alpha$. *Então existe uma constante $C = C(n,\gamma,\theta_0,\alpha,\Omega) > 0$ tal que*

$$
\|u\|_{2,\gamma} \le C\left\{\|Lu\|_{0,\gamma} + \|u\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|u\|_0\right\}, \quad \forall\ u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).
$$

Observação 3.14. *Observe que, se $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é uma solução de (P), a estimativa a priori dada pelo Teorema 3.14 nos fornece* $\|u\|_{2,\gamma} \leq C\left\{\|f\|_{0,\gamma} + \|g\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|u\|_0\right\}$ *e, portanto, não obtemos uma informação precisa a respeito da solução, devido ao termo $\|u\|_0$ que aparece do lado direito. Este termo indesejado atrapalha na aplicação do Método da Continuação.*

Conforme veremos a seguir, o problema apresentado na estimativa do Teorema 3.14 pode ser superado desde que valha o princípio de comparação para o operador L.

Teorema 3.15. *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.14 são satisfeitas e que o problema*

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tenha apenas a solução trivial $u \equiv 0$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Então existe uma constante

$$C = C(n,\gamma,\theta_0,\alpha,\Omega) > 0 \ \ \text{tal que} \ \ \|u\|_{2,\gamma} \leq C\left\{\|Lu\|_{0,\gamma} + \|u\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)}\right\}, \quad \forall\, u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Prova. Suponha, por contradição, que existem $(C_m) \subset (0,+\infty)$ e $(u_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tais que $C_m \to +\infty$, quando $m \to +\infty$ e $\|u_m\|_{2,\gamma} \geq C_m\left\{\|Lu_m\|_{0,\gamma} + \|u_m\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)}\right\}$. Considerando

$$v_m := \frac{u_m}{\|u_m\|_{2,\gamma}} \text{ temos que } \|v_m\|_{2,\gamma} = 1 \quad \text{e} \quad \|Lv_m\|_{0,\gamma} + \|v_m\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} \leq C_m^{-1} \to 0. \tag{30}$$

Uma vez que $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} C^2(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, existe $v \in C(\overline{\Omega})$ e uma subsequência, que ainda denotamos por (v_m), tal que $v_m \to v$ em $C(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema 3.14,

$$\|v_j - v_m\|_{2,\gamma} \leq C\left\{\|Lv_j - Lv_m\|_{0,\gamma} + \|v_j - v_m\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|v_j - v_m\|_0\right\}.$$

A expressão acima, juntamente com (30) e a convergência em $C(\overline{\Omega})$ mostram que $(v_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, $v_m \to v$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Como L é contínuo, temos que $Lv_m \to Lv$. Desse modo, segue de (30) que v satisfaz

$$\begin{cases} Lv = 0, & \text{em } \Omega \\ v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde se conclui que $v \equiv 0$. Mas isso é um absurdo, visto que $1 = \|v_m\|_{2,\gamma} \to \|v\|_{2,\gamma} = 0$. $\square$

Observação 3.15. *Em vista do Teorema 3.3, podemos aplicar o Teorema 3.15 quando o termo c é não-positivo em $\overline{\Omega}$, pois, nesse caso, o problema do enunciado tem, de fato, apenas a solução trivial. Desse modo, podemos enunciar e provar o resultado principal dessa aula.*

Teorema 3.16 (Teorema de Existência de Schauder)**.** *Seja Ω um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, L um operador uniformemente elíptico com coeficientes em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e tal que $c \leq 0$ em Ω. Então, para toda $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

possui solução única em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Prova do Teorema 3.16. Conforme a Observação (3.6) podemos, sem perda de generalidade, supor que $g \equiv 0$. Considere $X := \{u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} \equiv 0\}$ e defina, para $t \in [0,1]$, o operador $L_t : X \to C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ por $L_t u := (1-t)Lu + t\Delta u$, $\forall\, u \in X$. Observe que, se $\theta_0 > 0$ é a constante de elipticidade de L, $A(x) = a^{ij}(x)$, para $x \in \Omega$, e $\xi \in \mathbb{R}^N$, então

$$\xi\big((1-t)A(x) + tId\big)\xi \geq (1-t)\theta_0|\xi|^2 + t|\xi|^2 = [(1-t)\theta_0 + t]\,|\xi|^2 \geq \min\{1,\theta_0\}|\xi|^2.$$

De modo que L_t é uniformemente elíptico com constante de elipticidade igual a $\min\{1,\theta_0\}$, que é independente de t. Além disso, como $t \in [0,1]$, temos que

$$\max\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|(1-t)c\|_{0,\gamma} : i,j = 1,\ldots,n\} \leq \delta,$$

com $\delta = \delta(\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma}) > 0$ independente de t. Finalmente, note que o termo de ordem zero de L_t é $(1-t)c(\cdot)$, que é não-positivo em Ω. Segue do Princípio do Máximo, veja o Teorema 3.3, que o problema homogêneo $L_t u = 0$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, possui somente a solução nula. Com estas considerações podemos aplicar o Teorema 3.15 para obter uma constante $C = C(n,\gamma,\theta_0,\delta,\Omega) > 0$, independente de $t \in [0,1]$, tal que

$$\|u\|_{2,\gamma} \leq C\left\{\|L_t u\|_{0,\gamma} + \|u\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)}\right\} = C\|L_t u\|_{0,\gamma}, \quad \forall\, u \in X,$$

visto que os elementos de X são identicamente nulos na fronteira de Ω. Utilizando agora o Teorema 3.9, concluímos que $L_0 = L$ é sobrejetivo se, e somente se, L_1 é sobrejetivo. O Corolário 2.1 nos assegura que $L_1 = \Delta$ é sobrejetivo e, portanto, o problema (P) tem pelo menos uma solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. A unicidade da solução segue do Princípio do Máximo. $\square$

No próximo teorema estamos interessados em estimativas a priori para subconjuntos no interior de Ω. Por isso, não exigimos regularidade sobre Ω. A prova do resultado abaixo pode ser encontrada em [7, Teorema 6.2].

Teorema 3.17 (Estimativas interiores). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e L um operador uniformemente elíptico com $\max\{\|a^{ij}\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|b^i\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|c\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} : i,j = 1,\ldots,n\} \leq \alpha$. Se $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ e $\overline{\Omega}_1$ é compacto, então existe $C = C(n,\gamma,\theta_0,\alpha) > 0$ constante tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq C\left\{\|Lu\|_{C^{0,\gamma}(\Omega_1)} + \|u\|_{C(\Omega_1)}\right\}, \quad \forall\, u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Como uma aplicação da estimativa interior dada pelo Teorema 3.17, vamos provar o teorema a seguir que pode ser comparado ao Teorema 2.2. Naquela ocasião consideramos o mesmo problema para $L = \Delta$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^2, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$ e obtivemos uma solução única em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.18. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, L um operador uniformemente elíptico com coeficientes em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $c \leq 0$. Então, dada $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} Lu &= f, \quad \text{em } \Omega \\ u &= g, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui solução única em $C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Prova. A regularidade de Ω e g nos permite estender essa última para todo $\overline{\Omega}$ de modo que a extensão, que denotaremos ainda por g, é contínua em $\overline{\Omega}$. Pelo Teorema de Stone-Weirstrass [1, Corolário 1.29], g pode ser aproximada uniformemente por polinômios e, portanto, existe $(g_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $g_m \to g$ em $C(\overline{\Omega})$. Usando $c \leq 0$, podemos aplicar o Teorema 3.16 para obter $u_m \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\begin{cases} Lu_m &= f, \quad \text{em } \Omega \\ u_m &= g_m, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{31}$$

Aplicando o Princípio do Máximo para $u_j - u_m$, concluímos que $\|u_j - u_m\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|g_j - g_m\|_{C(\partial\Omega)}$. A convergência de g_m em $C(\overline{\Omega})$ implica que (u_m) é sequência de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$, e portanto $u_m \to u$ em $C(\overline{\Omega})$. Considerando agora um aberto Ω_0 tal que $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, o Teorema 3.17 nos garante que $\|u_j - u_m\|_{C^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq C\|u_j - u_m\|_{C(\overline{\Omega})}$. Isso nos diz que (u_m) é sequência de Cauchy em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_0)$ e portanto $u_m \to u$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_0)$. Como Ω_0 é arbitrário, podemos passar (31) ao limite para concluir que $u \in C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é solução do problema. A unicidade segue novemente pelo Princípio do Máximo. $\square$.