Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Notas de Aula

Equações Diferenciais Parciais 2

(Baseadas na Apostila "Notas de EDP2" do Prof. Marcelo Furtado)

Profa. Dra. Mayra Soares Costa Rodrigues

Professora Adjunta do Magistério Superior - IE - MAT/UnB

E-mail: mayra.soares@unb.br

Agosto, 2023

Sumário

1 Funções Harmônicas

1.1 Aula 01: A Propriedade da Média

O objetivo dessa aula é estudar propriedades satisfeitas por funções harmônicas.

Definição 1.1. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, se ela satisfaz a equação $\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega$, em que $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$ é o operador Laplaciano.*

Exemplo 1.1. *O exemplo mais simples de função harmônica é uma função constante. De uma maneira mais geral, qualquer função da forma*

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_0 + \sum_{i=1,\ldots,n} b_i x_i + \sum_{i,j=1..n,\, i\neq j} a_{ij} x_i x_j,$$

com a_0, b_i $a_{ij} \in \mathbb{R}$ é também harmônica. Outro exemplo importante de função harmônica (Exercício 6.1.1) é a chamada solução fundamental da equação de Laplace $\Gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{se } n = 2 \\ \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

Nosso objetivo presente é estudar algumas propriedades básicas das funções harmônicas.

Definição 1.2 (A Propriedade da Média)**.** *Se $u \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $B_r(x_0) \subset \Omega$ é uma bola aberta, então a média de u em $\partial B_r(x_0)$ e a média de u em $B_r(x_0)$ são definidas, respectivamente, por*

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x, \qquad \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) \mathrm{d}x,$$

onde ω_n é o volume da bola unitária $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função u satisfaz a Propriedade da Média se

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \tag{1}$$

e

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

para qualquer bola $B_r(x_0) \subset \Omega$.

Proposição 1.1. *As igualdades* (1) *e* (2) *são equivalentes.*

Prova. Suponha que $u \in C(\Omega)$ satisfaz (1), de modo que para todo $0 < s \leq r$ vale $u(x_0) n s^{n-1} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$. Integrando no intervalo $[0, r]$ com relação à variável s, obtemos

$$r^n u(x_0) = \int_0^r u(x_0) n s^{n-1}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \right) \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x,$$

e, portanto, a equação (2) é satisfeita. Reciprocamente, suponha que

$$r^n u(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \right) \mathrm{d}s.$$

Derivando com respeito à variável r, observando que a função $s \mapsto \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$ é contínua e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos $n r^{n-1} u(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$, que é exatamente a equação (1). □

Exemplo 1.2. *Para motivar o nosso primeiro resultado observe que, se $u:(a,b)\to\mathbb{R}$ é contínua, podemos utilizar o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de $x_0\in(a,b)$ tal que $u(x_0)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$, isto é, a média de u em (a,b) é atingida em algum ponto do intervalo. Se, além disso, soubermos que a função u é harmônica, então por integração básica concluímos que $u(x)=c_1x+c_2$, para constante c_1, $c_2\in\mathbb{R}$. Desse modo,*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b (c_1x+c_2)\mathrm{d}x=c_1\left(\frac{b+a}{2}\right)+c_2=u\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

o que mostra que a média é atingida exatamente no centro do intervalo (a,b) e, por conseguinte, u satisfaz a Propriedade da Média.

O resultado principal dessa aula mostra que o mesmo vale em dimensões maiores.

Teorema 1.1. *Uma função $u\in C^2(\Omega)$ é harmônica em Ω se, e somente se, ela satisfaz a Propriedade da Média, isto é, as igualdades (1) e (2) se verificam para toda bola $B_r(x_0)\subset\Omega$.*

Para provar o resultado acima, vamos aplicar um importante resultado da Teoria de Integração. Como ele será usado várias vezes ao longo dessas notas, convém enunciá-lo.

Teorema 1.2 (Teorema da Divergência)**.** *Considere $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe C^1 e $F=(F_1,\dots,F_n)$ um campo vetorial tal que $F^i\in C^1(\overline{\Omega})$, para cada coordenada $i=1,\dots,n$. Então $\displaystyle\int_\Omega div\,F(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}F(x)\cdot\eta(x)\,\mathrm{d}\sigma_x$, onde $divF=\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ é o divergente de F e $\eta(x)$ é o vetor unitário normal exterior em $x\in\partial\Omega$.*

Observação 1.1. *As condições de regularidade podem ser enfraquecidas sem afetar a validade do teorema. Podemos supor somente que $F^i\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ e que o divergente seja integrável. As condições sobre a regularidade de $\partial\Omega$ também podem ser mais fracas (cf. [18]).*

Teorema 1.3. *Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe C^1, $\eta(x)=(\eta^1(x),\dots,\eta^n(x))$ o vetor unitário normal exterior em um ponto $x\in\partial\Omega$ e $u,v\in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

(a) $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i}\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}u\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(b) $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i}v\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega uv_{x_i}\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}uv\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(c) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(d) $\displaystyle\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(e) $\displaystyle\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\eta}-v\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\sigma_x$,

Prova. O item (a) é uma consequência imediata da aplicação do Teorema 1.2 ao campo $F=(F_1,\dots,F_n)$ definido por $F_i(x)=u(x)$ e $F_j(x)=0$, se $i\neq j$. As demais afirmações podem ser provadas de maneira análoga escolhendo o campo adequado (Exercício 6.1.2). Para (b) use o campo $F_i(x)=u(x)v(x)$, $F_j(x)=0$ para $j\neq i$. Para (c) use o campo $F(x)=\nabla u(x)$. Para (d) use o campo $F(x)=u(x)\nabla v(x)$. Para (e) use o campo $F(x)=u(x)\nabla v(x)-v(x)\nabla u(x)$. $\square$

1.2 Aula 02: Regularidade

Começamos nossa aula apresentando a prova do Teorema 1.1.

Prova do Teorema 1.1. Seja $u \in C^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$. Defina a função

$$\varphi(s) := \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_x, \quad s \in (0, r],$$

que nada mais é do que a média da função u na esfera $\partial B_s(x_0)$. Vamos inicialmente verificar que, se u é harmônica, então a função acima é constante. Para tanto, fazemos a mudança de variáveis $x \mapsto x_0 + sz$, obtendo

$$\varphi(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz)s^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma_z = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz)\,\mathrm{d}\sigma_z.$$

Considere agora, para $s \in (0, r)$ fixo,

$$\psi(h) := \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} - \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) \cdot z\,\mathrm{d}\sigma_z$$

e note que, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} \psi(h) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{u(x_0 + sz + hz) - u(x_0 + sz)}{h} - \nabla u(x_0 + sz) \cdot z \right) \mathrm{d}\sigma_z \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \Big([\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)] \cdot z \Big) \mathrm{d}\sigma_z, \ \text{com } \theta(z) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Logo, $|\psi(h)| \leq \dfrac{1}{n\omega_n} \displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \Big|\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)\Big| \mathrm{d}\sigma_z$. Como o integrando é contínuo e $\partial B_1(0)$ é compacto, esse mesmo integrando é uniformemente contínuo. Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $\Big|\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)\Big| < \varepsilon$, para $|h| < \delta$, de onde se conclui que $|\psi(h)| < \varepsilon$, sempre que $|h| < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) \cdot z\,\mathrm{d}\sigma_z, \quad s \in (0, r). \tag{3}$$

Aplicando novamente uma mudança de variáveis, obtemos

$$\varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} \nabla u(x) \cdot \left(\frac{x - x_0}{s} \right) \mathrm{d}\sigma_x = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} \nabla u(x) \cdot \eta(x)\,\mathrm{d}\sigma_x,$$

em que usamos também o fato de que o vetor normal exterior no ponto $x \in \partial B_s(x_0)$ é exatamente $(x - x_0)/s$. A expressão acima e o Teorema 1.2 aplicado ao campo $F = \nabla u$ implicam que

$$\varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{B_s(x_0)} \mathrm{div}(\nabla u(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{B_s(x_0)} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Supondo que u é harmônica, a igualdade acima implica que $\varphi'(s) = 0$ para todo $s \in (0, r)$, isto é, φ é constante em $(0, r)$. Uma vez que φ é contínua em $(0, r]$, temos que

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_x = \varphi(r) = \lim_{s \to 0^+} \varphi(s) = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_x = u(x_0),$$

em que usamos na última igualdade o fato da função u ser contínua no ponto x_0 (Exercício 6.1.3). Isso prova a veracidade de (1) e, equivalentemente, de (2). Para provar a recíproca suponha, por contradição, que u satisfaz a Propriedade da Média, mas não é harmônica.

Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Delta u(x_0) \neq 0$, digamos $\Delta u(x_0) > 0$. Como $u \in C^2(\Omega)$, o laplaciano de u é uma função contínua. Logo, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ e $\Delta u > 0$ em $B_r(x_0)$. Como a equação (1) se verifica, temos que φ é constante em $(0, r)$. Por outro lado, usando a expressão (4), concluímos que $0 = \varphi'(s) = \dfrac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \displaystyle\int_{B_s(x_0)} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x > 0$, o que é absurdo. $\square$

Observação 1.2. *Nas próximas aulas, discutiremos algumas consequências importantes do Teorema 1.1. Conforme será notado, a prova de muitas dessas consequências utiliza somente as equações (1) e (2), sendo portanto válidas, não só para funções harmônicas, mas também para qualquer função contínua que satisfaça a Propriedade da Média.*

A primeira propriedade que veremos está relacionada com a regularidade das funções harmônicas. Lembremos que, por definição, as funções harmônicas tem pelo menos todas as derivadas de ordem 2 contínuas. Contudo, vale o seguinte resultado de regularidade.

Teorema 1.4. *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz a Propriedade da Média, então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Na prova do Teorema 1.4 vamos usar as **funções regularizantes** ou *mollifiers*. A fim de introduzir esse importante conceito, lembremos inicialmente que o **suporte** de uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é definido por $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Definição 1.3. *a) Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \eta(t)dt = 1$ e cujo suporte esteja contido no intervalo $(-1,1)$. Uma escolha possível para essa função é*

$$\eta(t) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(\dfrac{1}{(2t)^2 - 1}\right), & \text{se } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{se } |t| \geq 1/2, \end{cases} \quad \text{com } c := \left(\int_{-1/2}^{1/2} \exp(1/((2t)^2-1))\,dt\right)^{-1}.$$

*Dado $\varepsilon > 0$, definimos o **núcleo regularizante** $\eta_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\dfrac{|x|}{\varepsilon}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Devido às propriedades de η segue que:*

(i) $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; *(ii)* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$; *(iii)* $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$;

*b) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua, dado $\varepsilon > 0$, defina $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Denote por $f^\varepsilon := (\eta_\varepsilon * f)$ a **convolução** de η_ε com f, isto é, a função $f^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f^\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Observação 1.3. *Pela definição de Ω_ε, se $x \in \Omega_\varepsilon$ e $y \in B_\varepsilon(x)$, então $x - y \in \Omega$, de modo que as duas integrais acima fazem sentido. Além disso, usando uma mudança de variáveis concluímos que f^ε também pode ser escrita como $f^\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$*

1.3 Aula 03: O Princípio do Máximo

Iniciamos nossa aula com a prova de uma propriedade importante das funções regularizantes. Observamos que um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é uma $n-$upla em que $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ representa o número de derivadas na variável x_i no operador D^α.

Proposição 1.2. *Se f é contínua e α é um multi-índice qualquer, vale $D^\alpha f^\varepsilon = f * D^\alpha \eta_\varepsilon$. Em particular, $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, o que justifica o nome de **núcleo regularizante** para η_ε.*

Prova. Fixado $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, seja $\alpha = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, com o 1 estando na i-ésima entrada, e considere $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno de modo que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Nestas condições, temos que

$$\frac{f^\varepsilon(x + he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} = \int_{\widetilde{\Omega}} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

em que $\widetilde{\Omega}$ é um conjunto compacto totalmente contido em Ω. Usando agora a regularidade de η_ε, a compacidade de $\widetilde{\Omega}$ e o mesmo argumento da prova de (3), obtemos

$$\begin{aligned}
D^\alpha f^\varepsilon(x) = \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \to 0} \int_{\widetilde{\Omega}} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} \lim_{h \to 0} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) f(y)\,\mathrm{d}y = \left(D^\alpha \eta_\varepsilon * f \right)(x),
\end{aligned}$$

o que mostra o resultado para o multi-índice com apenas uma derivada $\alpha = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Um processo de indução conclui o resultado para qualquer multi-índice α, visto que este pode ser decomposto em um número finito de multi-índices com apenas uma derivada. $\square$

Agora apresentamos a prova do nosso resultado de regularidade, Teorema 1.4.

Prova do Teorema 1.4. Seja $u \in C(\Omega)$ satisfazendo a Propriedade da Média e considere, para $\varepsilon > 0$ pequeno, $u^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * u)(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x - y) u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon$. Vamos mostrar que $u_{|\Omega_\varepsilon} \equiv u^\varepsilon$ e portanto, das considerações acima, segue que $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Feito isso, basta agora notar que, qualquer que seja $x \in \Omega$, devemos ter $x \in \Omega_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Seja então $x \in \Omega_\varepsilon$ fixado e observe que, usando a definição de η_ε e (1), obtemos

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) u(y)\, d\sigma_y \right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \left(\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \left(u(x) n\omega_n r^{n-1} \right) \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \left(\int_{\partial B_r(x)} 1\, d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = u(x) \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) d\sigma_y \right) \mathrm{d}r \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta_\varepsilon(x - y) d\sigma_y \right) \mathrm{d}r = u(x) \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x - y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança de variáveis $x - y \mapsto z$ e usando as propriedades (ii) e (iii) da função regularizante, obtemos $u^\varepsilon(x) = u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = u(x)$, o que conclui a prova. $\square$

Observação 1.4. *Quando a função u é harmônica, vale um resultado mais forte do que o Teorema 1.4. Nesse caso, pode-se provar que $u \in C^2(\Omega)$ é analítica em Ω (Exercício 6.1.7).*

Exemplo 1.3. *Seja* $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ *é harmônica, de modo que* $u(t) = c_1 + c_2 t$*, para constantes* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*. Como o gráfico de* u *é um segmento de reta vemos que, qualquer que sejam os valores das constantes, o máximo (mínimo) de* u *é sempre atingido na fronteira de* $[a,b]$*, que é exatamente o conjunto* $\{a,b\}$*. Além disso, se o máximo (mínimo) de* u *for atingido em um ponto interior* $x_0 \in (a,b)$*, então necessariamente* $c_2 = 0$ *e, portanto,* u *é constante em* $[a,b]$*.*

O resultado a seguir mostra que a propriedade do Exemplo 1.3 permanece válida em dimensões maiores.

Teorema 1.5 (Princípio do Máximo)**.** *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto limitado e* $u \in C(\overline{\Omega})$ *satisfaz a Propriedade da Média.*

(i) *Se* Ω *é conexo e existe* $x_0 \in \Omega$ *tal que* $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$*, então* u *é constante em* Ω*;*

(ii) *Independente da conexidade de* Ω*, vale que* $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$*.*

Prova. Para provar (i), considere $x_0 \in \Omega$ tal que $M := \max\limits_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$, e considere o conjunto $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Como $x_0 \in \Omega_M$, este conjunto é não vazio. Além disso, a continuidade de u garante que $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$ é fechado em Ω. Vamos mostrar que Ω_M é aberto em Ω, assim, segue da conexidade de Ω que $\Omega_M = \Omega$ e, portanto, u é constante em Ω. De fato, seja $y \in \Omega_M$ um ponto qualquer e $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset\subset \Omega$. Então,

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} M \, \mathrm{d}x = M = u(y) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} u(x) \, \mathrm{d}x \Longrightarrow \int_{B_r(y)} (M - u(x)) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Como o integrando acima é não-negativo e contínuo devemos ter $u \equiv M$ em $B_r(y)$ e, portanto, $B_r(y) \subset \Omega_M$. Logo Ω_M é aberto e, portanto, aberto em Ω e o item (i) está provado. Para o item (ii), basta considerar o caso constante separadamente e para o caso geral aplicar o item (i) na componente conexa onde o máximo é atingido (Exercício 6.1.9). $\square$

Observação 1.5. *O Teorema* 1.5 *continua válido se substituirmos o máximo pelo mínimo de* u*. Além disso, a conclusão do item (i) pode ser falsa se* Ω *não for conexo (Exercício* 6.1.9*).*

Uma aplicação interessante do Teorema 1.5 está relacionada à unicidade de solução do problema de Poisson.

Teorema 1.6. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto limitado, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

Prova. Suponha que Ω é limitado e que u_1 e u_2 são duas soluções do problema de Poisson. Então a função $v := u_1 - u_2$ é tal que

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo item (ii) do Teorema 1.5 temos que $v \le 0$ em Ω. Por outro lado, aplicando o mesmo raciocínio para a função $-v$ concluímos que $-v \le 0$, isto é, $v \ge 0$ em Ω. Logo v se anula em todo o conjunto Ω, isto é, $u_1 \equiv u_2$ em Ω. $\square$

Observação 1.6. *É importante salientar que a conclusão do Teorema* 1.6 *pode ser falsa se* Ω *não for limitado. De fato, basta considerar* $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ *e observar que, nesse caso, o problema*

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

admite, além da solução trivial $u \equiv 0$*, a função* $u(x_1, \ldots, x_n) = x_n$ *como solução.*