Questão 2, resolução: Tome $x: U \to \mathbb{R}^n$ uma carta em torno de $p \in M^n$ tal que: e centrada em p

$$X_p = \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p$$

Podemos fazer isso, já que basta aplicar uma transformação linear constante nas (x^i) para que esse seja o caso. Do teo. fund. das EDOs, existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança W de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que a aplicação:

$$\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$
$$(t, a_2, \dots, a_n) \mapsto \varphi_t^X(x^{-1}(0, a_2, \dots, a_n))$$

está bem definida e é suave. Uma vez que:

$$d\sigma_0\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_0\right) = X_p = \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p \quad \text{e} \quad \underbrace{d\sigma_0\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_0\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_m}_{i \geq 2}$$

Então $\det(d\sigma_0) \neq 0$ e segue do teorema da função inversa que $\varphi = \sigma^{-1}$ é uma carta em torno de uma viz. $\mathcal{O}$ de $p \in M$. Sendo $(y^1, \dots, y^n) = \varphi$, temos

$$d\sigma_0\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{(t, a_2, \dots, a_n)}\right) = X_{\sigma(t, a_2, \dots, a_n)}$$

$$\Longrightarrow X|_{\mathcal{O}} = \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{\mathcal{O}} \quad \Big\} \text{ renomeando } y^1 \to x^1 \text{ terminamos a questão}$$

Questão 3 resolução: Suponha por absurdo que p/ algum $p \in M$ o fluxo não está definido em $\mathbb{R}$. Então podemos assumir sem perda de generalidade que o domínio $\mathcal{D}^{(p)}$ de $(\varphi_t^X)^{(p)}$ é limitado superiormente. Seja $b = \sup \mathcal{D}^{(p)}$, e seja $t_0 > 0$ tal que $t_0 \in (b - \varepsilon, b)$, e ponha $q = (\varphi_t^X)^{(p)}(t_0)$. Por hipótese $(\varphi_t^X)^{(q)}(t)$ está definido em $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Defina uma curva $\gamma : (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to M$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\varphi_t^X)^{(p)}(t), & -\varepsilon < t < b \\ (\varphi_t^X)^{(q)}(t - t_0), & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon \end{cases}$$

Essas duas definições de γ concordam onde se intersectam, pois $(\varphi_t^X)^{(q)}(t - t_0) = \varphi_{t-t_0}^X(q) = \varphi_{t-t_0}^X \circ \varphi_{t_0}^X(p) = \varphi_t^X(p) = (\varphi_t^X)^{(p)}(t)$. Como reparametrizações por translação preservam curvas integrais, segue que γ é uma curva integral de X passando por p. Como $t_0 + \varepsilon > b$, isso é um absurdo.

Se X tem suporte compacto, digamos $K = \operatorname{supp} X$, então $\forall p \in K$, $\exists$ uma vizinhança U_p de p e um $\varepsilon_p > 0$ tal que o fluxo de X está definido pelo menos em $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p$. Por compacidade, um número finito de tais conjuntos, digamos $U_{p_1}, \dots, U_{p_k}$ cobrem K. Pondo $\varepsilon = \min_{1 \le i \le k} \varepsilon_{p_i}$, segue que toda curva integral maximal começando em K está definida pelo menos em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Como $X \equiv 0$ fora de K, toda curva integral começando em $M \setminus K$ é constante e portanto pode ser definida sobre todo $\mathbb{R}$. Pela primeira parte da questão o resultado desejado está então provado.

Questão 10, resolução:

a) : Suponha que X seja ϕ-relacionado com si mesmo e seja $p \in M$ arbitrário. Seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva integral de X passando por p, ou seja, vale $\gamma(0) = p$ e $\gamma' = X \circ \gamma$. Afirmo que $\phi \circ \gamma$ é uma curva integral de X passando por $\phi(p)$. De fato,

$$\begin{aligned}(\phi \circ \gamma)'(t) = d(\phi \circ \gamma)_t(1) &= d\phi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \\ &= d\phi_{\gamma(t)}(X(\gamma(t))) \\ &= X_{(\phi \circ \gamma)(t)}\end{aligned}$$

por X estar ϕ relacionado com si próprio

Assim, pela definição do fluxo, temos:

$$\begin{aligned}\varphi_t^X(\phi(p)) = (\phi \circ \gamma)(t) &= \phi(\gamma(t)) \\ &= \phi(\varphi_t^X(p)), \ \forall t\end{aligned}$$

como desejado. Reciprocamente, suponha que $\phi \circ \varphi_t^X = \varphi_t^X \circ \phi$ $\forall t$ e seja $p \in M$ arbitrário. Sendo então $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva integral de X passando por p, a igualdade dessas composições quer dizer exatamente que $\phi \circ \alpha$ é uma curva integral de X passando por $\phi(p)$, e portanto:

$$X(\phi(p)) = (\phi \circ \alpha)'(0) = d\phi_p(\alpha'(0)) = d\phi_p(X_p)$$

de forma que X está ϕ-relacionado com si próprio, como queríamos mostrar.

b) : Diremos que um campo X é invariante sob um fluxo θ quando X é θ_t-relacionado com si próprio $\forall t$. Note que X e Y comutarem equivale a Y ser invariante sob o fluxo de X, e vice-versa: de fato, se Y é invariante sob φ_t^X, então:

$$d(\varphi_t^X)_p(Y_p) = Y_{\varphi_t^X(p)} \quad \forall (t,p) \in \text{domínio}(\varphi_t^X)$$

e aplicando $d(\varphi_{-t}^X)_{\varphi_t^X(p)}$ aos dois lados concluímos que $d(\varphi_{-t}^X)_{\varphi_t^X(p)}(Y_{\varphi_t^X(p)}) = Y_p$, o que pelo exercício 9 nos garante que $[X,Y] = \mathcal{L}_X Y = 0$, e o mesmo argumento serve p/ mostrar que X invariante sob $\varphi_t^Y \Rightarrow [X,Y] = [Y,X] = 0$. E supondo que X e Y comutam, então dado $p \in M$, definindo $V(t) = d(\varphi_{-t}^X)_{\varphi_t^X(p)}(Y_{\varphi_t^X(p)})$, temos pelo exercício 9 que $\cancel{V}(t) \equiv 0$. Como $V(0) = X_p$, temos $X(t) = W_p$
$V'(t)$

$\forall t$, e aplicando $d(\varphi_t^X)_p$ aos dois lados obtemos que Y é invariante sob φ_t^X. Analogamente se mostra que X é invariante sob φ_t^Y.

Sejam então $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e suponha que $[X,Y] = 0$. Sendo $p \in M$ qualquer e J, K intervalos abertos tais que $(\varphi_t^Y \circ \varphi_t^X)(p)$ está definido $\forall (s,t) \in J \times K$ (a mesma prova a seguir com X e Y trocados funciona se assumirmos que a outra expressão está definida em um tal retângulo). Pelas observações anteriores, temos que X é invariante sob φ_t^Y. Fixado $s \in J$, considerando a curva $\gamma : K \to M$ dada por $\gamma(t) = \varphi_t^Y \circ \varphi_t^X(p) = \varphi_t^Y(\varphi_t^X(p))$, temos $\gamma(0) = \varphi_t^Y(\underbrace{\varphi}_{p})$, e sua velocidade em $t \in K$ é dada por:

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(\varphi_t^Y(\underbrace{\varphi_t^X(p)}_{=\varphi^{(p)}(t)})) = d(\varphi_t^Y)(\varphi^{(p)'}(t)) = d(\varphi_t^Y)(X_{\varphi^{(p)}(t)})$$
$$= X_{\gamma(t)}$$

de forma que γ é uma curva integral de X passando por $\varphi_t^Y(p)$, e por unicidade vale:

$$\gamma(t) = (\varphi_t^X)^{\varphi_t^Y(p)}(t) = \varphi_t^X(\varphi_t^Y(p))$$

e portanto φ_t^X e φ_t^Y comutam. Reciprocamente, suponha que os fluxos comutam, e seja $p \in M$ arbitrário. Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\varphi_t^Y \circ \varphi_t^X(p)$ está definido sempre que $|s| < \varepsilon$ e $|t| < \varepsilon$, a hipótese nos garante que $\varphi_t^Y \circ \varphi_t^X(p) = \varphi_t^X(p) \circ \varphi_t^Y(p)$ para todos tais s e t. Podemos reescrever isso na forma

$$(\varphi_t^Y)^{\varphi_t^X(p)}(s) = \varphi_t^X((\varphi_t^Y)^{(p)}(s))$$

e derivando essa rel. com respeito a s, obtemos:

$$Y_{\varphi_t^X(p)} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\varphi_t^Y)^{\varphi_t^X(p)}(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\varphi_t^X((\varphi_t^Y)^{(p)}(s))) = d(\varphi_t^X)_p(Y_p)$$

Aplicando $d(\varphi_{-t}^X)_{\varphi_t^X(p)}$ a ambos os lados, concluímos

$$d(\varphi_{-t}^X)_{\varphi_t^X(p)}(Y_{\varphi_t^X(p)}) = Y_p$$

e derivando em t e aplicando o exercício 9 temos

$(\mathcal{L}_X Y)_p = [X,Y](p) = 0$.

c) Seja $p \in M$ arbitrário e denotamos o fluxo de X_i por $\varphi_t^{X_i}$, e por φ_t^i a curva de $\varphi_t^{X_i}$ (ou seja, temos $\varphi_t^{X_i}(q) = \varphi_t^i(q) = \varphi^{X_i}(t,q)$). Para t's suficientemente pequenos, cada φ_t^i é um difeomorfismo numa vizinhança de p. Seja C_ε o ε-cubo em $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$C_\varepsilon = \{(t_1, \dots, t_m) \mid |t_i| < \varepsilon\}$$

e defina uma aplicação $\psi : C_\varepsilon \to M$ por:

$$\psi(t_1, \dots, t_m) = \varphi_{t_m}^{X_m} \circ \dots \circ \varphi_{t_1}^{X_1}(p)$$

Como os $X_1, \dots, X_m$ comutam, pelo item anterior os seus fluxos também, ou seja,

$$\varphi_s^i \circ \varphi_t^j = \varphi_t^j \circ \varphi_s^i \text{ onde faz sentido}$$

Segue que p/ cada permutação σ de $\{1, \dots, m\}$, temos

$$\psi(t_1, \dots, t_m) = \varphi_{t_{\sigma(m)}}^{\sigma(m)} \circ \dots \circ \varphi_{t_{\sigma(1)}}^{\sigma(1)}(p)$$

É claro que $\psi(0, \dots, 0) = p$. Afirmo que $d\psi_0$ é um isomorfismo. De fato,

$$d\psi_0(\partial/\partial t_m|_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(0, \dots, 0, t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^m(p)$$
$$= X_m(p)$$

E se $i \neq n$, usando a comutatividade dos fluxos

p/ trazer $\varphi^i_{t_i}$ à esquerda, temos analogamente:

$$d_0(\psi)(\partial/\partial t_i|_0) = X_i(p)$$

E de maneira similar:

$$d\psi_t(\partial/\partial t_i) = (X_i \circ \psi)(t), \forall t \in C_\varepsilon \quad (*)$$

Como $X_1, \dots, X_n$ são L.I, segue que $d\psi_0$ é um isomorfismo. Pelo teo. da função inversa, $\exists$ uma vizinhança $\mathbb{R}^n \supset V \ni 0$ e uma viz. U de p em M tal que $\psi: V \to U$ é um difeomorfismo. Por $(*)$, pondo $x = \psi^{-1}: U \to V$, temos a carta desejada.

A outra direção é trivial, pois $[\partial_i, \partial_j] = 0 \ \forall i, j$ pelo teo. de Schwarz.