Lema 1: Sejam N_1 e N_2 duas subvariedades fechadas de uma variedade Riemanniana compacta M e $\gamma:[0,1]\to M$ uma geodésica minimizante (que sabemos ser ortogonal a ambas N_1 e N_2) que liga N_1 a N_2, ou seja,

$$d(N_1,N_2)=\inf_{\substack{p\in N_1\\ q\in N_2}} d(p,q)=d(\gamma(0),\gamma(1))$$

Então para qualquer variação de γ com $h(0,s)\in N_1$ e $h(1,s)\in N_2$, temos a seguinte expressão p/ a fórmula da segunda variação:

$$\frac{1}{2}E''(0)=I_1(V,V)+\Big\langle \underbrace{\nabla^{(2)}_{\frac{\partial h}{\partial s}}\frac{\partial h}{\partial s}+\alpha^{(2)}\Big(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial s}\Big)}_{\text{avaliados em }(0,1)},\underbrace{\gamma'(1)}_{\gamma'(1)\text{ ortogonal a }N_2}\Big\rangle$$

$$-\Big\langle \nabla^{(1)}_{\frac{\partial h}{\partial s}}\frac{\partial h}{\partial s}+\underbrace{\alpha^{(1)}\Big(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial s}\Big)}_{\text{avaliados em }(0,0)},\gamma'(0)\Big\rangle \quad \gamma'(0) \text{ é ortogonal a } N_1$$

$$=I_1(V,V)+\Big\langle A^{(2)}_{\gamma'(1)}\Big(\frac{\partial h}{\partial s}(0,1)\Big),\gamma'(1)\Big\rangle$$
$$-\Big\langle A^{(1)}_{\gamma'(0)}\Big(\frac{\partial h}{\partial s}(0,0)\Big),\gamma'(0)\Big\rangle$$

$$=I_1(V,V)+\langle A^{(2)}_{\gamma'(1)}(V(1)),\gamma'(1)\rangle$$
$$-\langle A^{(1)}_{\gamma'(0)}(V(0))\ \gamma'(0)\rangle$$
$$=I_1(V,V)+\langle \alpha^{(2)}(V(1),V(1)),\gamma'(1)\rangle$$
$$-\langle \alpha^{(1)}(V(0),V(0)),\gamma'(0)\rangle$$

onde V é o campo variacional e $\alpha^{(i)}$ corresponde à segunda forma fundamental de N_i, e

$$I_1(V,V) = \int_0^1 (\|V'(t)\|^2 - \langle R(\gamma'(t), V(t))\gamma'(t), V(t)\rangle)\, dt$$

<u>Demonstração</u>: Basta lembrar que:

$$\frac{1}{2} E''(0) = I_1(V,V) - \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\rangle(0,0)$$

$$+ \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\rangle(0,1)$$

E que:

$$\frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial h}{\partial s}}\frac{\partial h}{\partial s} = \nabla^{(i)}_{\frac{\partial h}{\partial s}}\frac{\partial h}{\partial s} + \alpha^{(i)}\left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right)$$

E também observar que por γ ser ortogonal a N_1 e N_2 em $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$, vale:

$$\langle \gamma'(0), v\rangle = \langle \gamma'(1), w\rangle = 0 \quad \forall v \in T_{\gamma(0)}N_1 \text{ e } \forall w \in T_{\gamma(1)}N_2$$

■

<u>Questão 1</u>: Suponha por absurdo que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Então $\exists$ uma geodésica $\gamma: [0,1] \to M$ minimizante, ligando M_1 a M_2 que é ortogonal a M_1 e M_2 em $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$, respectivamente. Seja $V_0 = T_{\gamma(0)}M_1$. Via transporte

paralelo ao longo de γ, obtemos o subespaço V_1 de $T_{\gamma(1)}M$, que denotaremos $T_{\gamma(1)}M := U$. Como V_0 é ortogonal a γ em $\gamma(0)$, V_1 também é ortogonal a γ em $\gamma(1)$. Denotemos $W := T_{\gamma(1)}M_2$. Temos então que V_1 e W são ambos dois subespaços de $T_{\gamma(1)}M$ ortogonais a γ em $\gamma(1)$, de forma que

$$\begin{aligned}\dim(V_1 \cap W) &= \dim(V_1) + \dim(W) - \dim(V_1 + W) \quad \text{por hipótese} \\ &\geqslant \dim(M_1) + \dim(M_2) - (n-1) \\ &\geqslant 1\end{aligned}$$

Portanto V_1 e W possuem pelo menos um subespaço unidimensional em comum. Logo existe um vetor unitário v_0 tangente a M_1 em $\gamma(0)$ cujo transporte paralelo é tangente a M_2 em $\gamma(1)$. Seja $V(t)$ o campo variacional dado pelo transporte paralelo de v_0 ao longo de γ, e considere a variação gerada por $V(t)$ da seguinte maneira: escolha geodésicas de M por cada $V(t)$ - como v_0 é tangente a M_1 em p e como M_1 é totalmente geodésica, a geodésica por v_0 estará inteiramente contida em M_1, e analogamente as geodésicas por $V(1)$ terão seus extremos contidos em M_2, de forma que as curvas $h(c, \cdot)$ terão seus extremos em M_1 e M_2 como é pedido pelo lema 1. Mas uma vez que v_0 e $V(1)$ são tangentes a geodésicas de M, temos $\nabla_V V = 0$ em $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$. Logo, pelo lema 1, teremos p/ essa variação:

$$\frac{1}{2} E''(0) = -\int_0^1 \underbrace{K_{\gamma(t)}(\gamma'(t), V(t))}_{>0 \text{ por hipótese}} \, dt < 0$$

o que contradiz o fato de γ ser geodésica minimizante. Concluímos então que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

Questão 3: Suponha por absurdo que $N \cap P = \emptyset$. Então $\exists$ uma geodésica minimizante $\gamma: [0,1] \to M$ ligando N a P ortogonal a N e a P em $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$, respectivamente. Dado qualquer vetor v_0 unitário tangente a N em $\gamma(0)$, podemos transportá-lo paralelamente ao longo de γ, de forma que geramos um campo tangente $V(t)$ ao longo de γ que é tangente a P em $\gamma(1)$. Considerando a variação gerada por V, segue do lema que:

$$\frac{1}{2} E_V''(0) = \langle \alpha^P(V(1), V(1)), \gamma'(1) \rangle - \langle \alpha^N(V(0), V(0)), \gamma'(0) \rangle - \int_0^1 K_{\gamma(t)}(\gamma'(t), V(t)) \, dt$$

Fazendo isso para n vetores ortonormais $v_1, \dots, v_n$ que geram o espaço tangente $T_{\gamma(0)} N$ e somando os resultados, obtemos:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} E_{V_i}''(0) = \sum_{i=1}^{m} \langle \alpha^P(V_i(1), V_i(1)), \gamma'(1)\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle \alpha^N(V_i(0), V_i(0)), \gamma'(0)\rangle$$
$$- \int_0^1 Ric_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt$$

Como N e P são mínimas, temos que
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha^P(V_i(1), V_i(1)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha^N(V_i(0), V_i(0)) = 0$$

Logo $\sum_{i=1}^{m} E_{V_i}''(0) < 0$, o que implica a existência de $1 \leq g \leq n$ tal que $E_{V_g}''(0) < 0$. Isso contradiz o fato de γ ser uma geodésica minimizante. Portanto $N \cap P \neq \emptyset$, como desejado

Questão 4: Seja $\gamma : [0,1] \to M$ arbitrária, e $r > 0$ tal que $\varepsilon = 1/r^2$. Se γ não intersecta c, argumentando analogamente à prova de Bonnet-Myers, concluímos que $l(\gamma) \leq \pi r$. Suponha agora que γ intersecta c e suponha sem perda de generalidade que $\gamma(1) \notin C$ (note que de fato, não há problema nisso, pois se $\gamma(1) \in C$, então é claro por γ ser minimizante que $l(\gamma) \leq \pi r + diam(C)$ - que é a cota superior que iremos obter -, pois γ não pode sair de C mais de uma vez [antes da primeira interseção], pois nesse caso não seria minimizante). Como γ é minimizante, $\gamma([0,1]) \cap C = \{\gamma(s_1), \gamma(s_2)\}$ com $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$ e $s_2 > s_1$

É claro que pela prova de Bonnet-Myers,

$$\ell(\gamma|_{[0,s_1]}) \leq \pi r$$

$$\ell(\gamma|_{[s_2,1]}) \leq \pi r$$

E portanto:

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma|_{[0,s_1]}) + \underbrace{\ell(\gamma|_{[s_1,s_2]})}_{\leq \operatorname{diam}(C)} + \ell(\gamma|_{[s_2,1]})$$

$$\leq 2\pi r + \operatorname{diam}(C)$$

Em todo caso, concluímos então que:

$$\operatorname{diam}(M) \leq 2\pi r + \operatorname{diam}(C)$$

Assim M é fechada e limitada, portanto compacta.

Questão 5: a) Em coordenadas locais,

$$\mathrm{Vol}_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}$$ } abuso de notação inofensivo

Pela fórmula de Jacobi,

$$\frac{d}{dt}\left(\det(A(t))\right) = \operatorname{tr}(\operatorname{Adj}(A(t))A'(t))$$

$$= \det(A(t)) \operatorname{tr}(A^{-1}(t)A'(t))$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Vol}_t) = \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \det(g_{ij}(t)) \operatorname{tr}([g_{ij}^{-1}(t)][g_{ij}'(t)])$$

$$= \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \operatorname{tr}(g_{ij}^{-1}(t)\, g_{ij}'(t))$$

$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}(g_{ij}^{-1}(t)\, g_{ij}'(t))\, Vol_t$$

Por outro lado,

$$g_{ij}'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(g(F_{x_i}, F_{x_j})\right) = g(\bar{\nabla}_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \bar{\nabla}_{F_t} F_{x_j})$$

Como $\bar{\nabla}_{F_t} F_{x_e} - \bar{\nabla}_{F_{x_e}} F_t = [F_{x_t}, F_{x_e}] = 0$ (pois são campos coordenados), segue que:

$$g_{ij}'(t) = g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) + g(\bar{\nabla}_{F_{x_j}} F_t, F_{x_i})$$

Agora, se A e B são duas matrizes quadradas de mesma dimensão, temos:

$$\operatorname{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$$

Observando também que $[g_{ij}]^T = [g_{ij}]$, então escrevendo $[g^{ij}] := [g_{ij}]^{-1}$, temos que $[g^{ij}] = [g^{ij}]^T$, de forma que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Vol_t) = \frac{\operatorname{tr}(g_{ij}^{-1}(t)\, g_{ij}'(t))}{2}\, Vol_t$$

$$= \sum_{i,j} \frac{g^{ij}(t)\, g_{ij}'(t)}{2}\, Vol_t$$

$$= \sum_{i,j} \frac{g^{ij}(t)}{2} \left[g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) + g(\bar{\nabla}_{F_{x_j}} F_t, F_{x_i}) \right] Vol_t$$

$$= \sum_{i,j} g^{ij}(t) \left[g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) \right] Vol_t$$

Escrevendo $F_t = (F_t)^T + (F_t)^N = df(Z) + \eta$, temos que:

$$g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) = g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} (F_t)^T, F_{x_j}) + g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} (F_t)^N, F_{x_j})$$

$$= g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} (F_t)^T, F_{x_j}) - g(\alpha(F_{x_i}, F_{x_j}), (F_t)^N)$$

Assim:

$$\sum_{i,j} g^{ij} \left[g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) \right] = \sum_{i,j} g^{ij} g(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} (F_t)^T, F_{x_j}) - \sum_{i,j} g^{ij} g(\alpha(F_{x_i}, F_{x_j}), (F_t)^N)$$

Escrevendo p/ uma base ortonormal $\{e_l\}_{l=1}^{K}$ como $e_l = \sum_j a_{lj} F_{x_j}$, temos que $\sum_m a_{mi} a_{mj} = g^{ij}$. Assim, i

sendo o vetor curvatura média dado por:

$$\vec{H} = \sum_m \alpha(e_m, e_m) = \sum_{i,j,m} a_{mi} a_{mj} \alpha(F_{x_i}, F_{x_j})$$

$$= \sum_{i,j} g^{ij} \alpha(F_{x_i}, F_{x_j})$$

Lembrando que se $\{e_1, \dots, e_K\}$ é um referencial ortonormal em $F_t(M)$, então:

$$(\operatorname{div}_{F_0} X)(p) = tr(V \mapsto (\nabla_V X)(p)) = \sum_m g(\nabla_{e_m} X, e_m)(p)$$

$$= \sum_{i,j} g^{ij} g(\nabla_{F_{x_i}} X, F_{x_j})$$

Temos então:

$$\sum_{i,j} g^{ij} [g(\overline{\nabla}_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j})] = \sum_{i,j} g^{ij} g(\overline{\nabla}_{F_{x_i}} (F_t)^T, F_{x_j})$$

$$- \sum_{i,j} g^{ij} g(\alpha(F_{x_i}, F_{x_j}), (F_t)^N)$$

$$= \operatorname{div}((F_t)^T) - g(\vec{H}, (F_t)^N)$$

$$= \operatorname{div}(Z) - g(\vec{H}, \eta)$$

Concluímos então que:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Vol_t = (\operatorname{div}(Z) - \langle \vec{H}, \eta \rangle) Vol_0$$

como desejado.

b) Note que

$$\int_{F_0(M)} \operatorname{div}((F_t)^T) = \int_{\partial M} \langle (F_t)^T, \underset{\sim}{\xi} \rangle = 0$$

normal exterior

pelo teorema da divergência e pois $(F_t)|_{\partial\Sigma} = 0$, já que

F fora de um compacto é a identidade

Logo:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V_t = \int_{-M} \langle \vec{H}, \eta \rangle \, Vol_0$$

Questão 6: Seja $\gamma: [0,1] \to M$ uma geodésica minimizante ligando N a p, com comprimento l, que assumiremos por absurdo satisfazer $l > \frac{\pi r}{2}$. Considere campos paralelos $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)$ ao longo de γ que são ortonormais e pertencem ao complemento ortogonal de $\gamma'(t)$. Defina $e_n(t) := 1/_l \, \gamma'(t)$ e seja V_j, para $1 \leq j \leq n-1$ o campo vetorial ao longo de γ dado por:

$$V_j(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) e_j(t)$$

E defina $V_n(t)$. Considere agora as n-variações de γ geradas pelos campos variacionais $V_1, \dots, V_n$. Para $1 \leq i \leq n-1$, temos pelo lema inicial que:

$$1/_2 \, E_i''(0) = \int_0^1 \left[\frac{\pi^2}{4} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) - l^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) K_{\gamma(t)}(e_n(t), e_i(t)) \right] dt$$
$$- \langle \alpha^N(e_i(0), e_i(0)), \gamma'(0) \rangle$$

E para $i = n$, temos $1/_2 \, E_i''(0) = -\langle \alpha(e_n(0), e_n(0)), \gamma'(0) \rangle$.

Portanto:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} E_i''(0) = \int_0^1 \left((n-1)\frac{\pi^2}{4} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \ell^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) Ric_{\gamma(t)}(e_n(t)) \right) dt$$

onde usamos a hipótese de N ser mínima para garantir que $\sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i(0), e_i(0)) = 0$. Agora, como:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \cos^2\left(\pi/2\, t\right) - \cos(\pi t)$$

$$\int_0^1 \cos(\pi t) = 0$$

$$\ell^2 Ric_{\gamma(t)}(e_n(t)) \geq \frac{\ell^2}{r^2} > \frac{\pi^2}{4}$$ pela hipótese de absurdo

Concluímos então que:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} E_i''(0) = \int_0^1 (n-1)\cos^2(\pi/2\, t) \underbrace{\left(\frac{\pi^2}{4} - \ell^2 Ric_{\gamma(t)}(e_n(t)) \right)}_{<0} dt$$

$$< 0$$

o que implica a existência de $1 \leq g \leq n$ tal que $E_g''(0) < 0$. Isso contradiz o fato de γ ser geodésica minimizante. Concluímos então que

$$\ell(\gamma) < \frac{\pi r}{2}$$

Pela arbitrariedade de γ segue o resultado desejado.