2. Seja $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq T_pM$ uma base ortonormal. Considere a carta $\varphi : B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ dada por:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exp_p(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$$

(carta exponencial) Mostrar que nesta carta:

(a) $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$

(b) $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$

(c) $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(0) = 0$

Comentário: em particular temos a expansão de Taylor. Esta carta é muito útil para fazer contas. $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + o(|x|)$

a) Primeiramente, note que $\varphi = \exp_p \circ F$, onde $F : B_\varepsilon(0) \to T_pM$ é dada por $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Assim, temos que:

$$g_{ij}(0) = g_p\big(d(\exp_p \circ F)_0(e_i), d(\exp_p \circ F)_0(e_j)\big)$$
$$= g_p(v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

pois $\dfrac{\partial F}{\partial x^i}(0) = v_i$ (óbvio)

como desejado. Obs.: Aqui usamos $d(\exp_p)_0 = Id_{T_pM}$ e a regra da cadeia.

b) Primeiramente, mostraremos o seguinte lema:

Lema: A representação em coordenadas de uma geodésica $\gamma : I \to M$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v = \tilde{v}^i v_i \in T_pM$ é dada por $t \mapsto t\tilde{v} = (t\tilde{v}^1, \dots, t\tilde{v}^n)$.

notação de Einstein

Denotaremos $\gamma = \gamma_v$

Demonstração: Lembramos primeiro que se $|t| < \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Logo:

$$\varphi^{-1} \circ \gamma_v(t) = (\exp_p \circ F)^{-1} \circ \exp_p(tv)$$
$$= F^{-1} \circ (\exp_p)^{-1} \circ (\exp_p)(tv)$$
$$= F^{-1}(tv)$$
$$= (t\tilde{v}^1, \dots, t\tilde{v}^n) \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$$

pois $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base

como queríamos mostrar. ■

Seja agora $v = \tilde{v}^i \partial_{x_i}|_p = \tilde{v}^i v_i \in T_pM$ arbitrário. Então a

$(\partial_{x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$

equação em coordenadas locais das geodésicas p/ a geodésica $\gamma_v(t) = (t\tilde{v}^1, \dots, t\tilde{v}^n)$ (note que aqui usamos o lema)

se escreve como:

$$\Gamma_{ij}^{K}(tv)\, v^i v^j = 0 \quad \forall K$$

Em particular, avaliando em $t=0$ temos $\Gamma_{ij}^K(0) v^i v^j = 0$ p/ todo índice K e todo vetor v. Logo, pondo $v = \partial_{x_a}$ p/ um a fixo, isso mostra que $\Gamma_{aa}^K = 0$ p/ cada a e K (note que sem somatório agora. Substituindo $v = \partial_{x_a} + \partial_{x_b}$ e $v = \partial_{x_b} - \partial_{x_a}$ p/ qualquer par fixado de índices a e b e subtraindo, concluímos que $\Gamma_{ab}^K(p) = 0 \ \forall a,b,K$, ou equivalentemente na notação do exercício que $\Gamma_{ij}^K(0) = 0 \ \forall i,j,K$.

c) Consequência imediata de b) e da seguinte fórmula avaliada em p, (ou em 0, como na notação do exerc.)

$$\Gamma_{Ki}^{l}\, g_{lj} + \Gamma_{Kj}^{l}\, g_{il} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_K}$$

Resolução da questão 1 : Como pedido, mostraremos que φ é uma imersão. Note que $\forall (u_0, v_0) \in U$, temos:

do capítulo 3 do Do Carmo, exerc. 6 da lista

$$d\varphi_{(u_0,v_0)} = \begin{pmatrix} -f(v_0)\,\mathrm{sen}(u_0) & f'(v_0)\cos(u_0) \\ f(v_0)\cos(u_0) & f'(v_0)\,\mathrm{sen}(u_0) \\ 0 & g'(v_0) \end{pmatrix}$$

Para mostrar que φ é uma imersão basta provarmos que $d\varphi_{(u_0,v_0)}$ é injetiva, ou equivalentemente que $d\varphi_{(u_0,v_0)}(e_1)$ e $d\varphi_{(u_0,v_0)}(e_2)$ são L.I. De fato, se $g'(v_0) \neq 0$, é claro que isso é satisfeito, e se $g'(v_0) = 0$, da condição dada vem $f'(v_0) \neq 0$, portanto a existência de $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $d\varphi_{(u_0,v_0)}(e_1) = \lambda\, d\varphi_{(u_0,v_0)}(e_2)$ é equivalente a:

$$-f(v_0)\,\mathrm{sen}(u_0) = \lambda f'(v_0)\cos(u_0)$$
$$f(v_0)\cos(u_0) = \lambda f'(v_0)\,\mathrm{sen}(u_0)$$

o que implica em:

$$\frac{f(v_0)}{f'(v_0)} = \lambda \tan(u_0) = \frac{-\lambda}{\tan(u_0)} \Rightarrow \underbrace{(\tan(u_0))^2 = -1}_{\text{absurdo}}$$

Segue que φ é uma imersão.

a) $g_{11} = \langle \partial_u \varphi, \partial_u \varphi \rangle = \langle (-f(v)\,\mathrm{sen}(u), f(v)\cos(u), 0), (-f(v)\,\mathrm{sen}(u), f(v)\cos(u), 0) \rangle$

$$= (f(v))^2(\mathrm{sen}^2(u) + \cos^2(u)) = (f(v))^2$$

$g_{12} = g_{21} = \langle \partial_u \varphi, \partial_v \varphi \rangle = \langle (-f(v)\,\mathrm{sen}(u), f(v)\cos(u), 0), (f'(v)\cos(u), f'(v)\,\mathrm{sen}(u), g'(v)) \rangle$

$$= -\frac{(ff')(v)}{2}\mathrm{sen}(2u) + \frac{(ff')(v)}{2}\mathrm{sen}(2u) = 0$$

$$g_{22} = \langle \partial_v f, \partial_v f \rangle$$
$$= \langle (f'(v)\cos(u), f'(v)\operatorname{sen}(u), g'(v)), (f'(v)\cos(u), f'(v)\operatorname{sen}(u), g'(v)) \rangle$$
$$= (f'(v))^2 \cdot 1 + (g'(v))^2 \cdot 1 = (f'(v))^2 + (g'(v))^2$$

b) Lembrando que em uma superfície as eq. locais de uma geodésica são dadas por:

$$u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + \Gamma_{22}^1 (v')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' = 0 \qquad (1)$$
$$v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + \Gamma_{22}^2 (v')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' = 0$$

E usando as expressões locais dos símbolos de Christoffel em termos da métrica, obtemos:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$$
$$\Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2}$$
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}$$

donde o resultado desejado segue prontamente via substituição no sistema (1).

c) Como $g_{12} = g_{21} = \langle \partial_u f, \partial_v f \rangle = 0$, temos:

$$|\gamma'|^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle u' f_u + v' f_v, u' f_u + v' f_v \rangle$$
$$= (u')^2 f^2 + (v')^2 ((f')^2 + (g')^2)$$

Suponhamos que $|\gamma'|^2 = c$ p/ algum $c \in \mathbb{R}$. Note que multiplicando a 1ª eq. de b) por $(f(v))^2$ obtemos:

$$f^2 u'' + 2ff'u'v' = 0 \Leftrightarrow (f^2 u')' = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2u'u''f^2 + 4ff'(u')^2 v' = 0$$

$\hookrightarrow$ fora de meridianos, i.e onde $u' = 0$

Mas derivando $|\gamma'|^2 = c$, obtemos:

$$2u'u''f^2 + 2ff'v'(u')^2 + 2v'v''((f')^2+(g')^2) + (v')^2(2f'f''v' + 2g'g''v') = 0$$

$$\Longleftrightarrow -4ff'v'(u')^2 + 2ff'v'(u')^2 + 2v'v''((f')^2+(g')^2) + (v')^2(2f'f''v' + 2g'g''v') = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2v'v''((f')^2+(g')^2) - 2ff'v'(u')^2 + 2v'(v')^2[f'f'' + g'g''] = 0$$

Dividindo por $2v'((f')^2+(g')^2)$ (que podemos fazer fora de paralelos pela condição dada) obtemos a segunda equação.

Agora, sendo $\beta(t)$ o ângulo entre um paralelo e uma $\underbrace{\text{geodésica}}_{\gamma}$, obtemos:

$$\cos(\beta(t)) = \frac{\langle \varphi_u, \gamma'(t) \rangle}{\|\varphi_u\| \cdot \|\gamma'(t)\|}$$

$$= \frac{\langle \varphi_u, u'\varphi_u + v'\varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \cdot \|\gamma'(t)\|} = u' \frac{\|\varphi_u\|^2}{\|\varphi_u\|} = u' f$$

Mas ~~o~~ raio dos paralelos satisfazem $r^2 = f^2(\operatorname{sen}^2(u) + \cos^2(u)) = f^2$, logo $r\cos(\beta(t)) = u' f^2 = cte$ (condição 1 obtida em b) pelo que já observamos), como desejado.

5. Seja $f \in C^\infty(M)$ tal que grad(f) é unitário. Mostrar que as curvas integrais do gradiente são geodésicas.

Obs: ∇ aqui denota a conexão de Levi-Civita

Dados $X, V \in \mathfrak{X}(M)$, temos:

$$(XV)(f) = X(Vf) = X(\langle \operatorname{grad} f, V \rangle)$$

pela definição de grad f

$$= \langle \nabla_X(\operatorname{grad} f), V \rangle + \langle \operatorname{grad} f, \nabla_X V \rangle$$

$$= \langle \nabla_X(\operatorname{grad} f), V \rangle + (\nabla_X V)(f) \quad (1)$$

E analogamente:

$$(VX)(f) = \langle \nabla_V(\operatorname{grad} f), X \rangle + (\nabla_V X)(f) \quad (2)$$

Como ∇ é a conexão de Levi-Civita, ∇ é livre de torção, de forma que subtraindo (1) e (2), obtemos:

$$0 = [X,V](f) - (\nabla_X V)(f) + (\nabla_V X)(f)$$

$$= \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, V \rangle - \langle \nabla_V \operatorname{grad} f, X \rangle$$

Logo $\langle \nabla_X \operatorname{grad} f, V \rangle = \langle \nabla_V \operatorname{grad} f, X \rangle \; \forall X, V \in \mathfrak{X}(M)$.

Em particular, $\underbrace{\langle \nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f), V \rangle = \langle \nabla_V \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle \; \forall V \in \mathfrak{X}(M)}_{(3)}$

Por outro lado, como $\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle = 1$ por hipótese, temos também:

$$0 = V(\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle) = 2\langle \nabla_V \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle \; \forall V \in \mathfrak{X}(M).$$

Por (3) temos então $\langle \nabla_{\mathrm{grad}\, f}(\mathrm{grad}\, f), V \rangle = 0 \ \forall V \in \mathfrak{X}(M)$;
logo $\nabla_{\mathrm{grad}\, f}(\mathrm{grad}\, f) = 0$, donde segue do exercício 5 da lista 3 que as curvas integrais de grad f são geodésicas, como desejado.