Primeira prova de Geometria Riemanniana

10/5/2021

Em toda a prova, $M = (M^n, g)$ denotara uma variedade Riemanniana conexa, e $K = K_M$ sua curvatura seccional. Justifique devidamente *todas* as afirmações que faça, isto é, *prove*.

1) Seja $p \in M$ e B uma bola normal centrada em p. Prove que existe uma métrica Riemanniana completa em B conforme à métrica original (isto é, existe uma função diferenciável $\rho : B \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\rho g|_B$ é uma métrica completa em B).

2) Sejam $M = I \times \mathbb{S}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$, e $\varphi : I \to \mathbb{R}_{>0}$ diferenciável. Seja g a métrica de M definida por $g = dr^2 + \varphi^2 h$, onde h é a métrica canônica de $\mathbb{S}^n$. Achar a condição necessária e suficiente para que (M, g) tenha curvatura escalar nula.

3) Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície Euclideana. Prove que:

- *i)* $K > 0$ em $p \in M$ se e só se o operador de forma de M é definido (> 0 ou < 0) em p.
- *ii)* Se M é compacta um tal ponto sempre existe (Sug.: Use a função norma de $\mathbb{R}^{n+1}$ restrita a M).
- *iii)* Se $n \geq 3$ não existe nenhum ponto em M com $K < 0$.

4) Suponha que para todo $p \in M$ existe uma isometria T de M tal que $T(p) = p$ e $T_{*p} = -Id$. Prove que M é um espaço homogêneo, isto é, as isometrias de M agem transitivamente em M.

5) Seja f uma isometria de M. Mostre que cada componente conexa do conjunto

$$F := \{p \in M : f(p) = p\}$$

de pontos fixos de f é uma subvariedade mergulhada de M cuja segunda forma fundamental se anula.

6) Sejam N e N' subvariedades de uma variedade Riemanniana completa M. Se N é compacta e N' é fechada, prove que existe uma geodésica minimizante de M unindo N e N'. Encontre contraexemplo se M não for completa. Encontre contraexemplo se N for também apenas fechada.