Resol. da questão 3: Dados $X, Y \in T_pM$, denotaremos por $\tilde{R}$ o mapa $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\tilde{R}(X,Y)(Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$$

Denotaremos também por $X \mapsto X^* = \langle X, \cdot \rangle$ o isomorfismo ao dual de T_pM via a métrica. Tomando uma base $X_1, \dots, X_n$ de T_pM, considere o mapa $\Omega^2(T_pM) \to \Omega^2(T_pM)$ dado por:

$$X_i^* \wedge X_j^* \mapsto \tilde{R}(X_i, X_j)$$

que está bem definido pois $\{X_i^* \wedge X_j^*\}_{i<j}$ é uma base de $\Omega^2(T_pM)$ e $\tilde{R}(X_j, X_i) = -\tilde{R}(X_i, X_j)$. É claro da definição que via esse mapa:

$$\left(\sum_i a_i X_i\right)^* \wedge \left(\sum_j b_j X_j\right)^* \mapsto \tilde{R}\left(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j X_j\right)$$

portanto tal mapa pode ser descrito, sem qualquer escolha de bases, via:

$$\Omega^2(T_pM) \ni X^* \wedge Y^* \longmapsto \tilde{R}(X,Y) \quad (1)$$

Uma vez que $\dim(\Omega^2(T_pM)) = \binom{n}{2}$, esse mapa possui $\binom{n}{2}$ autovalores (contando multiplicidades). Mas se $X_1, \dots, X_n$ são vetores principais em p com autovalores correspondentes $K_1, \dots, K_n$, então segue da equação de Gauss que:

$$\hat{R}(X_i, X_j) = -K_i K_j X_i^* \wedge X_j^*$$

Logo o conjunto $\{-K_i K_j \mid i<j\}$ é o conjunto de autovalores do mapa (1). Como (1) está definido em termos do tensor curvatura R e da métrica $\langle , \rangle$, isso prova que $\{-K_i K_j \mid i<j\}$ é invariante sob isometrias, ou seja, o produto de quaisquer duas curvaturas principais é intrínseco. Assim, sendo K a curvatura Gaussiana, temos:

$$K^{n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n} K_i\right)^{n-1} = \prod_{i<j} K_i K_j$$

donde concluímos que se n é par, K é completamente intrínseca, e se n é ímpar, K é intrínseca a menos de sinal.

Resol. da questão 4: Fixado $x = (x_1, \dots, x_n)$, considere a geodésica radial $\gamma_x(t) = (tx_1, \dots, tx_n)$. Então o campo $J(t) = tW = tW^i \partial_i$ é o campo variacional da variação por geodésicas $F(s,t) = \exp_p(t(x+sW))$, onde $p = \gamma(0)$. Definamos $f(t) = \langle J(t), J(t) \rangle = \|J(t)\|^2$, e denotemos por $\hat{R}$ o operador dado por $\hat{R}(X) = R(\gamma', X)\gamma'$. Então de $\langle R(\gamma', X)\gamma', Y\rangle = \langle R(\gamma', Y)\gamma', X\rangle$ concluímos que $\hat{R}$ é simétrico, e derivando $\langle \hat{R}X, Y\rangle = \langle \hat{R}Y, X\rangle$ temos que $\hat{R}'$, $\hat{R}''$, ..., também são simétricos, e podemos também escrever a equação de Jacobi como simplesmente:

$$J'' = \hat{R}J$$

Note que:

$$f = \langle J, J\rangle \Rightarrow f' = 2\langle J', J\rangle$$

$$\Rightarrow f'' = 2\langle \hat{R}J, J\rangle + 2\langle J', J'\rangle$$

$$\Rightarrow f''' = 2\langle (\hat{R})'J, J\rangle + 8\langle \hat{R}J', J\rangle$$

$$\Rightarrow f'''' = 2\langle (\hat{R})''(J), J\rangle + 12\langle (\hat{R})'J', J\rangle + 8\langle RJ, RJ\rangle + 8\langle RJ', J'\rangle$$

Logo:

$$f(t) = \langle d(\exp_p)_{tx}(tW), d(\exp_p)_{tx}(tW)\rangle$$

pelo lema de Gauss

$$= t^2 g_{i\delta}(t)\, W^i W^\delta$$

expandindo a série de Taylor de f

$$= \sum_{i=0}^{4} \tfrac{1}{i!} f^{(i)}(0)\, t^i + O(t^5)$$

Agora, como $J(0) = 0$, temos:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = \|W\|^2 \text{ e}$$

$$f''''(0) = 8\langle W, \hat{R}W\rangle = -8\langle R(W', \gamma')\gamma', W\rangle$$

Assim:

$$g_{i\delta} = \sum_{i=0}^{4} \tfrac{1}{i!} f^{(i)}(0)\, t^{i-2} + O(\|x\|^3)$$

$$= \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikl j} x^k x^l + O(\|x\|^3)$$

como desejado.

Resol. da questão 5: Denotemos por A a matriz dada por $A_{ij} = \log(g_{ij})$. Uma vez que:

$$\log(I+B) = B + \frac{B^2}{2} + \dots + \frac{B^k}{k} + \dots$$

e pelo exercício anterior:

$$g_{ij} = I + \left(\frac{1}{3} R_{iklj}(p) x^k x^l + O(\|x\|^3)\right)$$

vemos que:

$$A = \left(\frac{1}{3} R_{iklj}(p) x^k x^l + O(\|x\|^3)\right)$$

em particular:

$$tr(A) = \frac{1}{3} R_{ikli}(p) x^k x^l + O(\|x\|^3)$$

$$= -\frac{1}{3} Ric_{kl}(p) x^k x^l + O(\|x\|^3)$$

onde usamos que $\delta^{ij} = g^{ij}(0)$. Portanto temos:

$$\det(g_{ij}) = \det(\exp(A)) = \exp(tr(A)) = 1 - \frac{1}{3} R_{kl}(p) x^k x^l + O(\|x\|^3)$$

$$\Rightarrow \det(g_{ij}) = 1 - \tfrac{1}{3} Ric(x,x)\big|_p + O(\|x\|^3)$$

Usando a expansão em Taylor da raíz quadrada, teremos então:

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = 1 - \tfrac{1}{6} Ric(x,x)\big|_p + O(\|x\|^3)$$

Denotando por $w = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ a forma de volume de g, temos então:

$$Vol(B_p(r)) = \int_{B_p(r)} w$$

$$= \int_{x \in B^{\mathbb{R}^n}(r)} \left(1 - \tfrac{1}{6} Ric(x,x)\big|_p + O(\|x\|^3)\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Como a curvatura de Ricci é uma $\overbrace{\text{forma}}^{\text{claro que não no sentido de forma diferencial}}$ bilinear simétrica, segue do teorema espectral que a mesma possui autovetores ortonormais $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e autovalores correspondentes $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Sejam (y^i) coordenadas normais correspondentes à base $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Teremos então:

$$\int_{x \in B^{\mathbb{R}^n}(r)} Ric(x,x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_{y \in B^{\mathbb{R}^n}(r)} (\lambda_1 (y^1)^2 + \ldots + \lambda_n (y^n)^2)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$$

$$= \sum_i \lambda_i \int_{y \in B\mathbb{R}^n(r)} (y^i)^2 \, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

$$= \left(\sum_i \lambda_i \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\int_{y \in B\mathbb{R}^n(r)} \rho^2 \, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \right)$$

onde definimos $\rho^2 = \sum_i (y^i)^2$. Notando que $\sum_i \lambda_i = S|_p$ e usando coordenadas esféricas n-dimensionais, temos então:

$$\int_{y \in B\mathbb{R}^n(r)} \rho^2 \, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \int_{B\mathbb{R}^n(r)} \rho^2 \cdot \rho^{n-1} d\rho \wedge d\Omega$$

onde $d\Omega$ é a forma de volume de $\partial(B\mathbb{R}^n(1)) = S^{n}(1)$.

Assim:

$$\int_{B\mathbb{R}^n(r)} \rho^2 \rho^{n-1} d\rho \wedge d\Omega = \left(\int_0^r \rho^{n+1} d\rho \right) \left(\int_{\partial(B\mathbb{R}^n(1))} d\Omega \right)$$

$$= \frac{r^{n+2}}{n+2} \operatorname{Vol}(\partial(B\mathbb{R}^n(1)))$$

$$= \frac{r^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{n}{r^n} \operatorname{Vol}(B\mathbb{R}^n(r))$$

Portanto:

$$\mathrm{Vol}(B_p(r)) = \int_{x\in B^{\mathbb{R}^n}(r)} \left(1 - 1/6\, \mathrm{Ric}(x,x)|_p + O(\|x\|^3)\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$= \mathrm{Vol}(B^{\mathbb{R}^n}(r)) - 1/6\, \frac{S}{6(n+2)} \cdot \mathrm{Vol}(B^{\mathbb{R}^n}(r)) \cdot r^2 + O(r^4)$$

$$= \mathrm{Vol}(B^{\mathbb{R}^n}(r))\left(1 - \frac{S|_p\, r^2}{6(n+2)} + O(r^3)\right),$$ como desejado.

Obs: Adotamos a convenção $\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_i \langle R(X,E_i)Y, E_i\rangle$, que é o motivo da leve diferença da fórmula da lista com a fórmula final aqui que usa a convenção de do Carmo.