1) Conceitos fundamentais e o método de Euler

* Queremos resolver EDOs a partir de diferentes métodos

* equações diferenciais que envolvem funções que dependem somente de uma variável independente. O caso mais geral

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

* No contexto de análise numérica usamos a notação

$$\underset{\sim}{y}' = \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$$

* De fato, qualquer EDO de ordem n pode ser reescrita como um sistema de EDOs de primeira ordem

  • Ex: $y''' + 3y'' + 5ty' + \cos(t)\,y - \text{sen}\,t = 0$

$$\begin{aligned} y' &= \omega \\ y'' &= \omega' = z \\ y''' &= \omega'' = z' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y' = \omega \\ \omega' = z \\ z' = -3z - 5t\omega - \cos t\, y + \text{sen}\, t \end{cases}$$

* Então, quando escrevemos

$$\underset{\sim}{y}' = \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$$

estamos representando um sistema de N equações de 1ª ordem

$$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N, \quad \underset{\sim}{f}: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad t \geq t_0$$

E, com isso, definimos

$$\underset{\sim}{y}' = \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \geq t_0$$

como um problema de valor inicial (PVI)

Também podemos estudar problemas do tipo

$$\underset{\sim}{y}' = \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}), \quad \underset{\sim}{y}\Big|_{\partial\Omega} = \underset{\sim}{y_0}(t) \quad \text{e} \quad t \in \Omega \quad \text{em que } \Omega = [a, b]$$

Este tipo de problemas são os problemas de Valor de Contorno (PVC)

Além disso, vamos pedir que a função f que define a EDO seja "suficiente bem comportada". (por exemplo podemos pedir analiticidade, continuidade etc). Às vezes, pedimos que f seja uma função Lipschitz

$$\|\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) - \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{x})\| \leq \lambda \|\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{x}\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ t \geq t_0$$

↳ cte de Lipschitz

• Obs: Se f for contínua e Lipschitz então o PVI admite uma solução única em $[t_0, t_0+T]$ (Teorema de Picard-Lindelöf)

1.1 O Método de Euler

Suponha que tenhamos um PVI do tipo $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ (*)
Como conhecemos a solução em $t = t_0$ (pelo PVI), podemos pensar em calcular uma aproximação para $y(t)$ a partir de sua série de Taylor!

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + \frac{y''}{2!}(t-t_0) + \dots$$

Tomando uma aproximação linear para $y(t)$: → Resto de Lagrange

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + \frac{y''}{2!}(\xi)(t-t_0)^2 \quad t_0 < \xi < t$$

Para construirmos uma aproximação para $y(t_1)$ usaremos a expressão acima

$$y(t_1) \approx y(t_0) + y'(t_0)(t_1 - t_0)$$

$$\Longrightarrow y_1 = y_0 + y'(t_0)\overbrace{(t_1 - t_0)}^{h}$$

$$\boxed{y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\, h}$$

Partindo desta aproximação, podemos construir uma aproximação para $y(t_2)$ onde $t_2 = t_1 + h$

$$y_2 = y(t_1) + y'(t_1)(t_2 - t_1)$$
$$= y_1 + f(t_1, y(t_1))\, h$$

Podemos generalizar este processo

$$y_3 = y_2 + h f(t_2, y_2)$$
$$\vdots$$
$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)} \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+$$

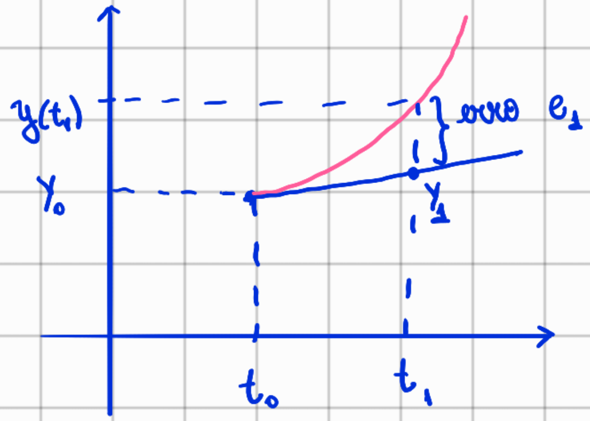
Método de Euler

Notação : $h \rightarrow$ passo de tempo (cte)

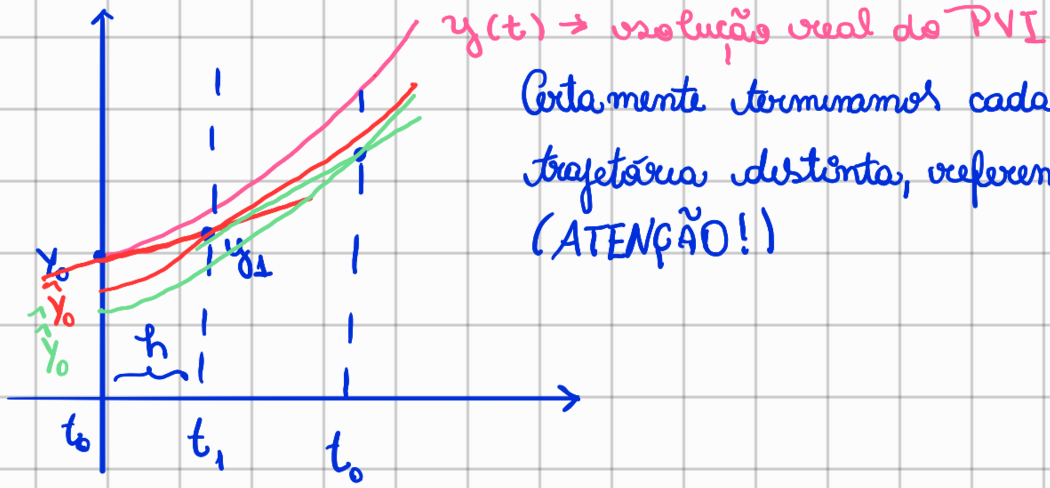
$y(t_i) \rightarrow$ valor exato de $y(t)$ em $t = t_i$

$y_i \rightarrow$ valor aproximado de $y(t_i)$

Geometricamente, o método de Euler pode ser interpretado como avançar a solução a cada passo pela reta tangente ao ponto (t_i, y_i)



O erro inevitavelmente vai se acumular a cada interação



Certamente terminamos cada passo em uma trajetória distinta, referente a outro PVI (ATENÇÃO!)

Nosso objetivo nesse curso não é evitar erros, pois estamos falando de aproximações, mas sim garantir e entender que o erro acumulado nesse processo esteja sob controle!

- Tipos de erro:

i) erro de truncamento local:

Considere que um método seja dado por

$$y_{n+1} = y(f, h, y_0, y_1, \dots, y_n)$$

Ex: $y_{euler} = y_n + h f(t_n, y_n)$

$$\varepsilon^{\ell}_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(f, h, y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N))$$

É o erro cometido exclusivamente pela aproximação que o método faz para determinar $y(t_{n+1})$

Ex: Euler

$$\varepsilon^{e}_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{euler}(f, h, y(t_0), \dots, y(t_n))$$

$$= y(t_{n+1}) - [y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))]$$

$$= \cancel{y(t_n)} + \cancel{h y'(t_n)} + \frac{h^2}{2!} y''(\tau) - \cancel{y(t_n)} - \cancel{h y'(t_n)}$$

$$= \frac{h^2}{2!} y''(\sigma)$$