Introdução a Métodos Computacionais em EDOs

Solução de Equações Algébricas

A. Escreva um programa computacional, na linguagem de sua preferência, que encontre a solução das equações algébricas não-lineares abaixo. O seu programa deve permitir escolher o método de solução (ponto fixo, bisseção ou Newton-Raphson), a precisão desejada e deve pedir ao usuário a informação sobre o intervalo no qual se encontra a função. Além disto, o programa deve verificar se o intervalo especificado é adequado. Finalmente, seu programa deve dizer quantas iterações foram necessárias para se obter a precisão estipulada.

1. $x\sqrt{x} - \cos(x) = 0$, em $[0, 1]$
2. $x^3 - 7x^2 + 14x = 6$, em $[0, 1]$
3. $x^3 - 7x^2 + 14x = 6$, em $[1, 3.2]$
4. $x^3 - 7x^2 + 14x = 6$, em $[3.2, 4]$
5. $x^x + 2^{-x} + 2\cos(x) = 6$, em $[1, 2]$
6. $(x - 2)^2 - \log(x) = 0$, em $[e, 4]$
7. $\sin(x) = e^{-x}$, em $[0, 1]$
8. $2x\cos(x) = (x - 2)^2$, em $[2, 4]$

B. Resolva as questões abaixo, que podem envolver métodos analíticos e computacionais.

1. A função $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$ tem apenas dois zeros reais. Encontre-os com precisão de 10^{-6}.
2. A equação $e^{-x} = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, 1]$? Por que? Em caso afirmativo, podemos garantir que ela seja única?
3. Determine $\sqrt[6]{3}$ com precisão de 5 casas decimais.
4. A soma de dois números x e y é 20. Se somarmos a cada um destes números sua raiz quadrada, o produto destes novos números é 155.55. Determine estes dois números com precisão de 10^{-4}.
5. Qual método converge mais rápido para a solução da equação $\log(x) + 3\sqrt[3]{x} = \pi$, para mesmos chutes iniciais, com precisão de 6 casas decimais: Newton-Raphson, secante ou bisseção?

C. Considere a equação $x^3 - x - \dfrac{1}{5} = 0$, que admite três soluções reais no intervalo $[-1, 1.5]$.

1. Encontre, pelo método de sua preferência, as três soluções desta equação.
2. Faça um estudo detalhado do chute inicial para o método de Newton-Raphson, isto é, escolha cerca de 50 pontos no intervalo acima e determine para que raiz o método convergirá. Com isto, você irá determinar a zona de influência de cada solução da equação.
3. Determine um processo iterativo isolando o termo x^3 e encontre uma das raízes por este método. Compare a quantidade de iterações necessárias com o método de Newton-Raphson para um mesmo chute.
4. Encontre pelo menos outros dois processos iterativos baseados nesta equação e tente encontrar a solução que você escolheu por estes processos. Compare com os resultados que você obteve no item anterior e perceba que a convergência depende fortemente da escolha

do processo iterativo. Por quê? Note que nem todos os processos que você encontrará serão convergentes!

D. (O Método da Posição Falsa) Uma pequena variação do Método da Secante é o Método da Posição Falsa. Tal como no Método da Secante, neste método o processo de aproximação da raiz de uma equação do tipo $f(x) = 0$ é feito a partir do zero da reta secante obtida a partir das aproximações $x^{(i)}$ e $x^{(i-1)}$, mas agora a escolha do ponto que será usado na próxima iteração, juntamente com $x^{(i+1)}$, é feita com base no critério $f(x^{(\alpha)})f(x^{(i+1)}) < 0$, com $\alpha = i$ ou $i-1$. Desta forma, tem-se a certeza que a raiz sempre estará contida no intervalo $[x^{(i+1)}, x^{(i)}]$. Com base nesta definição, responda às questões abaixo:

1. Determine o processo iterativo que define este método e faça uma interpretação geométrica.
2. Aplique-o para encontrar a solução não-nula da equação $\sin(x) - \dfrac{x}{2} = 0$ com precisão de 5 casas decimais.
3. Trace um gráfico do erro cometido em cada iteração e determine qual é a ordem deste método. Compare seus resultados com o Método da Secante e com Newton-Raphson.

E. (Raízes múltiplas) Uma raiz p de uma equação $f(x) = 0$ é dita de multiplicidade m se, para todo $x \neq p$, pudermos escrever

$$f(x) = (x-p)^m q(x), \quad \text{com} \quad \lim_{x \to p} q(x) \neq 0. \tag{$\star$}$$

Note, portanto, que se uma função possui um zero com multiplicidade 1 em $x = p$ se e somente se $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$. Desta forma, vemos que não temos problemas para aplicar o método de Newton-Raphson para encontrar raízes de multiplicidade 1. Porém, se uma raiz tem multiplicidade m, então $f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) = 0$ e $f^{(m)}(p) \neq 0$. Desta forma, teremos problemas para encontrá-la com o método de Newton-Raphson. Uma maneira de resolver este problema é descrita nos ítens abaixo.

1. Chame $\mu(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ e suponha que $f(x) = 0$ tenha uma raiz de multiplicidade m em $x = p$. Use eq.($\star$) para mostrar que

   $$\mu(x) = (x-p)\underbrace{\frac{q(x)}{mq(x) + (x-p)q'(x)}}_{\clubsuit}.$$

   Mostre que a fração ($\clubsuit$) não tem um zero em p e, portanto, $x = p$ é uma raiz simples de $\mu(x)$.

2. Aplique, então, o método de Newton-Raphson para $\mu(x)$ e mostre que o método pode ser escrito como:

   $$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})f'(x^{(n)})}{[f'(x^{(n)})]^2 - f(x^{(n)})f''(x^{(n)})}.$$

   Qual é a ordem deste método? Note que a dificuldade deste método está em determinar a segunda derivada de $f(x)$ e nas possíveis subtrações de valores muito próximas de zero no denominador, para valores de x próximos à raiz.

3. Identifique que tipo de raiz é $p = 0$ da equação $f(x) = e^x - x - 1$. Aplique o método acima para encontrá-lo numericamente, com precisão de 10^{-5}.

4. Repita o procedimento do item anterior para $f(x) = x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 27$ para o zero $p = 3$.