IMCEDO / 30/04

$$\underbrace{\varepsilon^{p}_{n+1}}_{\text{erro de truncamento local (construção concreta)}} = \mathcal{O}(\underbrace{h}_{\text{incremento temporal}}{}^{p+1}) \Rightarrow \text{erro de ordem } p$$

$\hookrightarrow p \geq 1 \Rightarrow$ método consistente

$$\lim \max \underbrace{e_{n+1}}_{\text{erro global (construção abstrata)}} = 0 \quad , \quad \underline{\text{convergente}}$$

Teorema: O método de Euler é convergente.

Dem: Considere o método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$$

Então:

$$e_{n+1} = |y(t_{n+1}) - y_{n+1}|$$

$$= |y(t_{n+1}) - y_n - hf(t_n, y_n)|$$

$$= \left| y(t_m) + h y'(t_m) + \frac{y''(\tau)}{2!} h^2 - y_m - h f(t_m, y_m) \right|$$

com $t_m < \tau < t_{m+1}$. Usando a EDO:

$$e_{m+1} = \left| y(t_m) + h f(t_m, y(t_m)) + \frac{h^2}{2!} y''(\tau) - y_m - h f(t_m, y_m) \right|$$

$$= \left| y(t_m) - y_m + h \left(f(t_m, y(t_m)) - f(t_m, y_m) \right) + \frac{h^2}{2!} y''(\tau) \right|$$

$$\leq |y(t_m) - y_m| + h \left| f(t_m, y(t_m)) - f(t_m, y_m) \right| + \frac{h^2}{2} |y''(\tau)|$$

Tomando $M = \max_{t \in [t_0, T]} \left| \frac{y''(t)}{2!} \right|$ e assumindo

f Lipschitz, então

$$e_{m+1} \leq e_m + h\lambda |y(t_m) - y_m| + h^2 M$$

$$= e_m(1 + h\lambda) + h^2 M$$

Então:

$$e_1 \leq e_0(1 + h\lambda) + h^2 M = h^2 M \text{, pois } e_0 = |y(t_0) - y_0| = 0$$

$$e_2 \leq e_1(1 + h\lambda) + h^2 M \leq h^2 M(1 + h\lambda) + h^2 M$$

$$= h^2 M (1 + h\lambda + 1)$$

$$= h^2 M \sum_{K=0}^{1} (1 + h\lambda)^K$$

$$e_3 \leq e_2(1 + h\lambda) + h^2 M$$

$$\leq [h^2 M(1 + h\lambda + 1)](1 + h\lambda) + h^2 M$$

$$= h^2 M\left((1 + h\lambda)^2 + (1 + h\lambda)\right) + h^2 M$$

$$= h^2 M\left((1 + h\lambda)^2 + (1 + h\lambda) + 1\right)$$

$$= h^2 M \sum_{K=0}^{2} (1+h\lambda)^K$$

$\vdots$

$$e_n \leq h^2 M \sum_{i=0}^{n-1} (1+h\lambda)^i$$

O termo no somatório nada mais é que uma PG de razão $1+h\lambda$. Então:

$$e_{n+1} \leq Mh^2 \left[\frac{-1+(1+h\lambda)^n}{h\lambda} \right]$$

$$= M \frac{h}{\lambda} \left[(1+h\lambda)^n - 1 \right]$$

Como queremos integrar a EDO no intervalo $[t_0, T]$, o número de passos N depende de $\underline{h}$. Se diminuirmos h, aumentamos N.

De fato, $h = \frac{T - t_0}{N}$, e assim:

$$1+h\lambda \leq 1+h\lambda+\frac{h^2\lambda^2}{2!}+\frac{h^3\lambda^3}{3!}+\dots+\frac{h^m\lambda^m}{m!}+\dots$$

$$= e^{\lambda h}$$

e assim:

$$(1+h\lambda)^m \leq e^{h\lambda m}$$

Portanto:

$$e_{m+1} \leq \frac{Mh}{m}\left[(1+h\lambda)^m - 1\right]$$

$$\leq \frac{Mh}{m}\left[e^{\lambda h m} - 1\right]$$

$$= \frac{Mh}{m}\left[e^{\lambda m \cdot \frac{(T-t_0)}{m}} - 1\right]$$

$$= \frac{Mh}{m}\left[e^{\lambda(T-t_0)} - 1\right]$$

Logo

$$\lim_{h\to 0} \frac{Mh}{\lambda}\left[e^{\lambda(T-t_0)} - 1\right]$$

$\Longrightarrow$ o método de Euler converge!

Obs: Se um método de ordem p for convergente, então

$$e_{n+1} = \mathcal{O}(h^p)$$

$$\xi_n^{\ell} = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Euler é um método de ordem 1.

$$e_{n+1} = \mathcal{O}(h)$$

Com base no resultado anterior, podemos pensar em resolver todos os problemas de erros de soluções numéricas de EDOs reduzindo o passo h. Mas isso não é verdade, pois os computadores reais cometem erros de arredondamento e erros de truncamento a cada passo.

Denotemos por

$$\tilde{y}_0 = \underbrace{y_0}_{\text{C.I}} + \underbrace{\tilde{\delta}_0}_{\text{erro de arredondamento}}$$

Assim, o método de Euler "real" é dado por

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h f(t_n, \tilde{y}_n) + \tilde{\delta}_{n+1} \leftarrow \text{erro de arredondamento do passo}$$

Então, o erro global é dado por

$$|y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}|$$

$$= \left| y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2!} y''(\tau) - (\tilde{y}_n + h f(t_n, y_n) + \tilde{\delta}_{n+1}) \right|$$

$$\leq e_n + h\lambda e_n + h^2 M + \delta_{n+1}$$

Note que

$e_0 = \delta_0$

$$e_1 \leq e_0 (1 + h\lambda) + h^2 M + \delta_1 = \delta_0 (1 + h\lambda) + \delta_1 + h^2 M$$

$$e_2 \leq e_1 (1 + h\lambda) + h^2 M + \delta_2 = \cdots$$

$$= Mh^2 ((1 + h\lambda + 1))$$

$$+ \delta_0 (1 + h\lambda)^2 + \delta_1 (1 + h\lambda) + \delta_2$$

$\vdots$

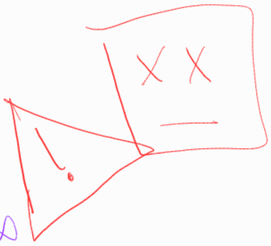
$$e_n \leq Mh^2 \sum_{k=0}^{n-1} (1+h\lambda)^k + \delta_{MAX}\left((1+h\lambda)^n + (1+h\lambda)^{n-1} + \dots + 1\right)$$

em que $\delta_{MAX} = \max\limits_{0 \leq i \leq n} \delta_i$.

Então: (depois de contas!)

$$e_{n+1} \leq \frac{(Mh^2 + \delta_{max})}{h\lambda}\left[e^{\lambda(T-t_0)} - 1\right] + \delta_{MAX}(1+h\lambda)^n$$

$$\leq \frac{(Mh^2 + \delta_{max})}{h\lambda}\left[e^{\lambda(T-t_0)} - 1\right] + \delta_{MAX}\, e^{\lambda h n}$$



$$\therefore \quad e_{n+1} \leq \left[\overbrace{\frac{Mh}{\lambda}}^{\xrightarrow{h\to 0} 0} + \overbrace{\frac{\delta_{MAX}}{\lambda h}}^{\xrightarrow{h\to 0} \infty}\right]\left(e^{\lambda(T-t_0)} - 1\right)$$

$$+ \delta_{MAX}\, e^{\lambda(T-t_0)}$$

Se tomarmos $h \to 0$, o método diverge.

Não podemos diminuir ARBITRARIAMENTE o passo h, pois os erros de arredondamento crescem!

Devemos encontrar um valor ideal de h p/ realizar as contas. Note que sempre haverá um erro (pequeno) de arredondamento.

Conclusão Não melhoramos a qualidade da solução fazendo $h \to 0$. Temos que fazê-lo de outra maneira!. (por exemplo, aumentando a ordem do método)

1.2 Métodos de Taylor

Considere a série de Taylor

$$y(t) = y(t_1) + h y'(t) + \frac{h^2}{2!} y''(t) + \dots + \frac{h^N}{N!} y^{(N)}(t_i)$$

$$+ \underbrace{\frac{h^{N+1}}{(N+1)!} y^{(N+1)}(z_1)}_{\text{resto de Lagrange}}$$

Podemos usar a série de Taylor como uma máquina de construção de métodos de alta ordem e com erro de truncamento local conhecido (resto de Lagrange).

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2}\,y''(t_n) + O(h^3)$$

O erro de Lagrange / truncamento local deste método é $\varepsilon^{l}_{n+1} = \frac{h^3}{3!}\,y'''(\tau)$

PROBLEMA: precisamos de $y''(t_n)$. Vamos olhar de novo p/ EDO!

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \longrightarrow \text{derivada total}$$

$$y''(t) = \frac{d}{dt}\left[f(t, y(t)) \right]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot f \quad \Big\} \text{ todos os termos conhecidos}$$

Assim o método de Taylor de ordem 2 é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t_n, y_n} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{t_n} f(t_n, y_n)\right]$$

<u>Ex</u>: $y'(t) = \text{sen}(y(t)) + 3t^2, \; y(0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 6t, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\text{sen}\, y_n + 3t_n^2\right] + \frac{h^2}{2!}\left[6t_n + \cos(t_n)(\text{sen}(y_n) + 3t_n^2)\right]$$