Prova dia 21

Aula dia 05/05

Conclusão sobre os métodos de Taylor apresentados na aula anterior:

Os métodos de Taylor são uma boa ferramenta teórica para construir e estudar métodos mas com pouca utilidade prática!

Precisamos de outras maneiras para construir métodos de alta ordem!

1.3 Formulação integral equivalente e métodos equivalentes

Até agora, usamos apenas Série de Taylor para construir métodos numéricos para resolver EDOs. Exigir que as funções envolvidas sejam diferenciáveis pode ser muito restritivo!

Uma maneira alternativa de olharmos para o problema é a seguinte:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \text{ com cond. inicial } y(0) = y_0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt$$

$$\Longleftrightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt$$

$$\Longleftrightarrow y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt}$$

Formulação integral equivalente da EDO

i) Método de Euler (revisitado)

A construção do método de Euler a partir da formulação integral equivalente é muito simples! Para tal, assumimos que $f(t, y(t)) \approx ct_e$ no intervalo $[t_0, t]$ e igual a $f(t_0, y_0)$!

$$\int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt \approx \int_{t_0}^{t} f(t_0, y_0)\, dt = f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

Então:

$$y(t) \approx y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

Fazendo $t = t_1 = t_0 + h$:

$$y(t_1) \approx y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0)$$

E, usando (t_1, y_1) construímos:

$$y(t_2) \approx y_2 = y_1 + \int_{t_1}^{t_2} f(t_1, y_1)\, dt = y_1 + h\, f(t_1, y_1)$$

Generalizando,

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)}$$

Método de Euler

Note que podemos fazer uma escolha ligeiramente diferente na aproximação da integral: e se fizermos

$$f(t, y(t)) \approx f(t_{n+1}, y_{n+1}) \; ?$$

Teríamos

$$y(t_{n+1}) \approx y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt$$

$$\approx y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t_{n+1}, y_{n+1})\, dt$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})}$$

O que muda entre uma escolha e outra?

$\underline{n=0}$: $\underbrace{y_1 = y_0 + h f(t_1, y_1)}$

temos que resolver essa equação algébrica p/ encontrar y_1.

Atenção: na grande maioria dos casos, a equação é não-linear!

$\underline{n=1}$ $\underbrace{y_2 = y_1 + h f(t_2, y_2)}$

precisamos resolver essa equação algébrica p/ encontrar y_2

⋮

e assim por diante!

Para usarmos este método, precisaremos resolver uma equação algébrica A CADA PASSO! (por exemplo, com Newton-Raphson)

Def: Dizemos que um método é IMPLÍCITO se ele for dado por

$$y_{n+1} = y(f, h, y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$$

Se o método for dado por

$$y_{n+1} = y(f, h, y_0, y_1, \dots, y_n)$$

este método é EXPLÍCITO

Portanto, o método que acabamos de construir é

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})}$$

Método de Euler Implícito

EQUAÇÕES RÍGIDAS PRECISAM DE MÉTODOS IMPLÍCITOS!!!

A ORDEM É A MEDIDA DE COMO O ERRO VAI A ZERO!

Qual é a ordem deste método (método de Euler implícito)?

ORDEM (ERRO LOCAL) NÃO GARANTE CONVERGÊNCIA!
ERRO GLOBAL QUE GARANTE

Atenção: com esta nova maneira de construir métodos a a partir da formulação integral equivalente, a ordem de um método já não é uma propriedade direta!

Teorema: o método de Euler implícito é de ordem 1.

Dem: para calcular a ordem do método de Euler implícito, precisamos determinar seu erro de truncamento local:

$$\varepsilon^{l}_{n+1} = y(t_{n+1}) - y\big(f, h, y(t_0), y(t_1), \ldots, y(t_n)\big)$$

$$= y(t_{n+1}) - \Big[y(t_n) + h\,\underbrace{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}_{y'(t_{n+1})}\Big]$$

$$= y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n)$$

$+ \ldots$

$\underbrace{}_{}$ expandir até encontrar o balanço

$$- \left[y(t_n) + h\left(y'(t_n) + h\, y''(t_n) + \frac{h^2}{2!} y'''(t_n) + \ldots \right) \right]$$

$$= y(t_n) - y(t_n) + h\left(y'(t_n) - y'(t_n) \right) + h^2 \left(\frac{y''(t_n)}{2!} - y''(t_n) \right)$$

$$+ \ldots$$

$$= h^2 y''(t_n) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - 1 \right)}_{\neq 0} + O(h^3) = O(h^2)$$

Teorema: O método de Euler implícito é convergente!

ii) Método do Trapézio

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fg)'' = f''g + f'g' + f'g' + fg''$$

$$= \binom{2}{1} f'g' + \Big({2 \atop 0}$$

Este método é construído a partir de aproximação da integral por um trapézio!

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right]}$$

Este método é de 2ª ordem, convergente, implícito.

iii) Método Θ tem relevância física

É uma generalização do método do trapézio.

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\Theta f(t_n, y_n) + (1-\Theta) f(t_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

$\Theta = 0$: Euler implícito

$\Theta = 1$: Euler explícito

$\Theta = 1/2$: trapézio

São convergentes p/ $\Theta \in [0,1]$.

Se $\theta = 1/2$, são de ordem 2, senão são de ordem 1.

iv) <u>Regra do ponto médio</u>

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) \approx f(t_{n+1/2}, y_{n+1/2})\, h$$

onde $$y_{n+1/2} \approx \frac{y_n + y_{n+1}}{2}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_0 + h\, f\left(t_{n+h/2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)}$$

Regra do Ponto Médio

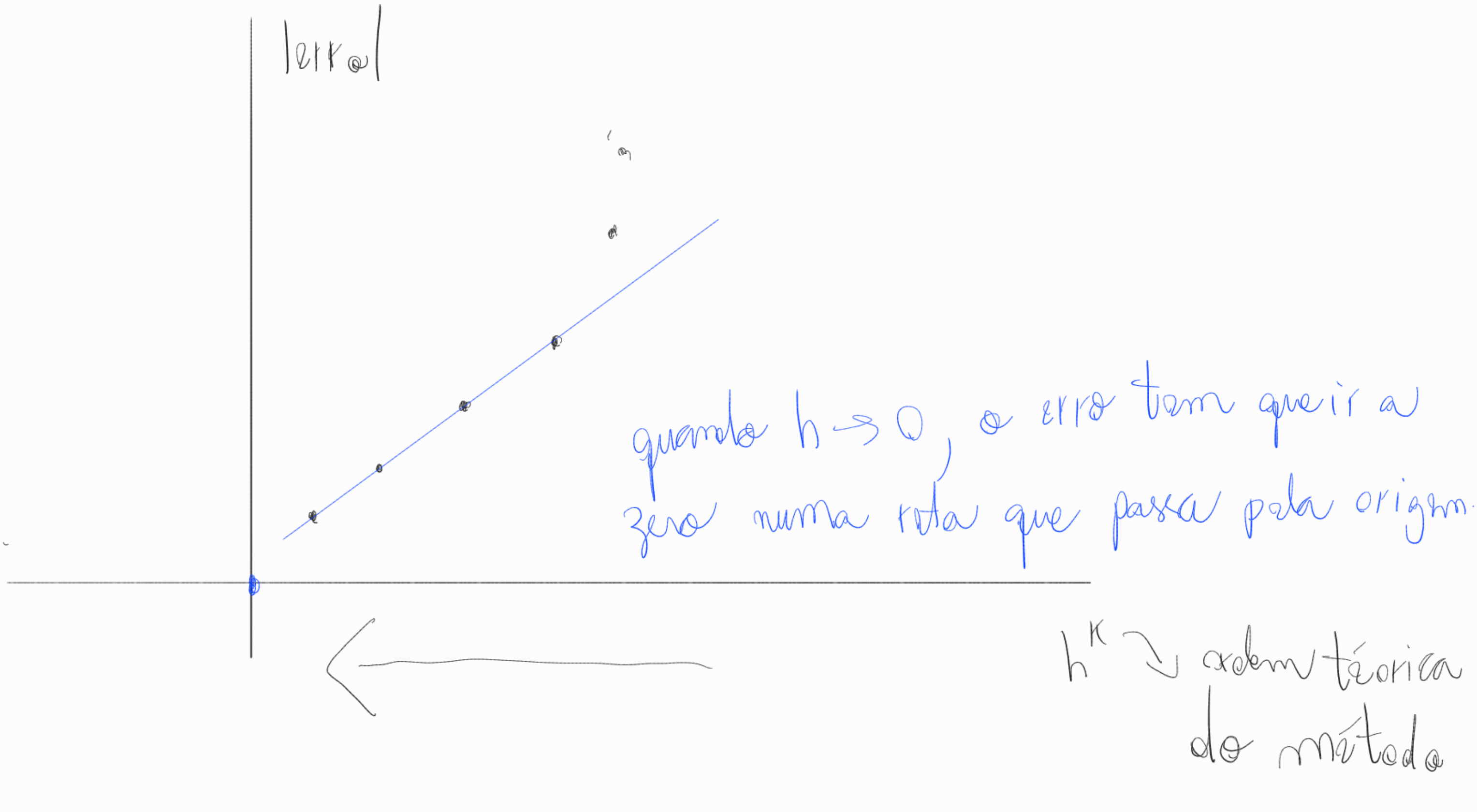
(R.K de ordem 2)

Este método é de ordem 2, convergente e implícito.

1.4 Observações finais

i) Cada método possui uma estrutura própria e, portanto, um comportamento único ao lidar com equações particulares! Por isto, buscamos construir diversos métodos por diferentes métodos.

ii) Para verificar se a ordem do método implementado no computador está de acordo com o que prediz a teoria, devemos traçar o diagrama de erro global.



Para valores suficientemente pequenos de h, o erro deve decair como uma lei de potência h^k.

Atenção: p/ métodos diferentes de mesma ordem as inclinações das retas podem ser distintas.

iii) o método θ mostra que podemos construir métodos novos a partir de ideias abstratas!

Vamos usar ideias semelhantes daqui para frente!