Introdução a Métodos Computacionais em EDOs

Processos Iterativos

A. Considere o processo iterativo $x^{(n+1)} = ax^{(n)} + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Assuma, inicialmente, $b = 0$. Neste caso, temos um processo iterativo linear. Escreva um programa que, para um dado valor da constante a, calcula os 100 primeiros termos da seqüência gerada por este processo iterativo e salva o resultado em um arquivo de saída.

2. Ainda para o caso $b = 0$, identifique todos os 7 casos relevantes para os valores constante a e avalie, a partir de um gráfico para cada um dos casos, a estabilidade do ponto fixo $x^\star = 0$.

3. Considere, agora, que $b \neq 0$, mas que seja muito pequeno quando comparado a 1, isto é $|b| << 1$. Com isto em mente, faça um estudo analítico do ponto fixo do processo iterativo para os sete casos estudados no item 2 e compare com o caso $b = 0$. Há mudanças na estabilidade dos pontos fixos por esta pequena perturbação no sistema? Identifique um critério para que o ponto fixo seja assintóticamente estável. Este critério dependerá de b?

4. Estude computacionalmente os exemplos abaixo, traçando gráficos que ilustrem a estabilidade do ponto fixo do processo iterativo.

   (a) $x^{(n+1)} = \dfrac{1}{3}x^{(n)} + 1$

   (b) $x^{(n+1)} = \dfrac{4}{23}x^{(n)} + \dfrac{2}{5}$

   (c) $x^{(n+1)} = 3x^{(n)} + 1$

   (d) $x^{(n+1)} = 0.035x^{(n)} + 12$

B. Considere os cinco processos iterativos abaixo e responda às questões:

i. $x^{(n+1)} = x^{(n)} - (x^{(n)})^3 - 4(x^{(n)})^2 + 10$

ii. $x^{(n+1)} = \sqrt{\left(\dfrac{10}{x^{(n)}} - 4x^{(n)}\right)}$

iii. $x^{(n+1)} = \sqrt{\left(\dfrac{10}{4 + x^{(n)}}\right)}$

iv. $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{(x^{(n)})^3 + 4(x^{(n)})^2 - 10}{3(x^{(n)})^2 + 8x^{(n)}}$

v. $x^{(n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(10 - (x^{(n)})^3\right)^{\frac{1}{2}}$

1. Mostre que todos os processos acima têm pelo menos um ponto fixo idêntico. Não é necessário encontrá-lo explicitamente, mas apenas mostrar que o ponto fixo é o mesmo.

2. Classifique este ponto fixo idêntico para cada um dos cinco processos e compare seus resultados. O que acontece?

3. Escreva um programa computacional para implementar estes processos iterativos e mostre que o ponto fixo é $x^* = 1{,}365230013$. Parta sempre de $x^{(0)} = 1{,}5$. Seu código deverá convergir para este ponto fixo em apenas três dos processos acima. Qual deles é mais rápido? Por quê? Faça uma tabela com a quantidade de iterações necessárias para se chegar neste ponto fixo para cada um dos métodos e compare seus resultados.

C. Considere os processos iterativos $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$ dados abaixo. Escreva um programa para encontrar os pontos fixos destes processos, com precisão de 6 casas decimais (isto é, o valor absoluto entre dois valores consecutivos $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$ deve ser menor que 10^{-6}). Posteriormente, faça um estudo da convergência deste processo iterativo em função do chute inicial dado. Para tal, considere 200 chutes iniciais $x^{(0)} \in [0, 100]$ e salve, num arquivo, a quantidade de iterações para se alcançar a precisão de 10^{-6} em função da distância do chute ao ponto fixo. Qual é o comportamento observado? Identifique a influência do chute no resultado obtido.

$$(a)\ g(x) = \cos(x) \qquad\qquad (b)\ g(x) = \frac{4x^3 - 420x^2 + 10600x - 40000}{3x^2 - 280x + 5300}.$$

D*. Considere um processo iterativo do tipo $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$ em que a função $g(x) \in [a, b]\ \forall x \in [a, b]$, seja contínua num intervalo $[a, b]$, tenha um ponto fixo x^* no intervalo $[a, b]$, e seja tal que $|g'(x)| \leq k,\ \forall x \in (a, b)$, com $0 < k < 1$.

1. Defina $e^{(n)} = |x^{(n)} - x^*|$ o erro cometido em aproximar o ponto fixo x^* pela iteração $x^{(n)}$. Mostre que $e^{(n)} \leq k^n e^{(0)}$ e que, portanto, este processo iterativo converge para o ponto fixo.

2. Use o teorema do valor médio para mostrar que $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| \leq k^n |x^{(1)} - x^{(0)}|$. Posteriormente, usando a desigualdade triangular, mostre que, para $m > n \geq 1$, temos que

$$|x^{(m)} - x^{(n)}| \leq k^n |x^{(1)} - x^{(0)}|(1 + k + k^2 + k^3 + \cdots + k^{m-n-1}).$$

   Tomando o limite $m \to \infty$, mostre que

$$e^{(n)} \leq \frac{k^n}{1-k} |x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

   Com este resultado, é possível obtermos uma estimativa *a priori* para o erro da aproximação do ponto fixo na iteração n, conhecendo-se apenas os valores de $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$.

E. Para os processos iterativos abaixo, determine seus pontos fixos computacionalmente com precisão de 10^{-6}. Posteriormente, usando os resultados da questão **D**, determine um intervalo $[a, b]$ no qual a iteração de ponto fixo tem convergência garantida. Além disto, determine, a priori, quantas iterações serão necessárias para se atingir uma aproximação para o ponto fixo com erro menor que 10^{-6} e compare com seu resultado.

$$(a)\ g(x) = \frac{2 - e^x + x^2}{3} \qquad (b)\ g(x) = \frac{5}{x^2} + 2 \qquad (c)\ g(x) = 6^{-x}.$$

F. Seja $\alpha \in I\!R$ uma constante e considere o processo iterativo determinado por $g(x) = 2x - \alpha x^2$. Mostre que este processo iterativo tem dois pontos fixos: $x^* = 0$, que é instável, e $x^* = \alpha^{-1}$, que é estável. Este processo iterativo, portanto, permite calcular o inverso de um número fazendo apenas operações de somas e produtos entre numeros. Determine, computacionalmente, uma estimativa para o intervalo em que podemos tomar com segurança $x^{(0)}$. Os resultados da questão **D** podem ser úteis.

G. Considere o processo iterativo de ordem 2 dado por

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \quad a_0,\ a_1 \in I\!R, \quad a_0 \neq 0.$$

O que aconteceria caso $a_0 = 0$? Mostre que a solução geral deste processo iterativo está associada à solução da equação característica $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ e que, portanto, há três possibilidades para a solução do processo iterativo. Elenque as três soluções e explique cada uma delas. Posteriormente, resolva explicitamente os três processos iterativos a seguir e verifique computacionalmente a sua estabilidade, assumindo $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

(a) $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 6x_n = 0$ $\quad$ (b) $x_{t+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$ $\quad$ (c) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0$.

H. Vamos considerar processos iterativos de ordem 2 não-homogêneos, ou seja, processos iterativos do tipo

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f(n), \quad a_0,\ a_1 \in I\!R, \quad a_0 \neq 0,$$

e com $f(n)$ uma função qualquer de n. A solução geral deste problema é dada pela soma da solução homogênea do processo iterativo (ver questão **G.**) com uma solução particular do processo iterativo. Para encontrar a solução particular, precisamos usar o método dos coeficientes indeterminados: por exemplo, se $f(n) = 4^n + n^2 + 3$, podemos propor como solução particular deste processo iterativo

$$x_p^* = A \cdot 4^n + Bn^2 + Cn + D,$$

e, substituindo no processo iterativo, podemos encontrar os valores dos coeficientes A, B, C, D. Estas combinações lineares podem ser feitas, também para não-homogeneidades do tipo $\cos(\alpha n)$ e $\sin(\alpha n)$.

1. Resolva, com base no exemplo acima, o processo iterativo $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4^n + n^2 + 3$.
2. Encontre a solução do processo iterativo $x_{n+1} - 4x_n = n$, com $x_0 = 0$ e $x_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. Trace no computador a evolução do processo iterativo do item anterior para os primeiros 10 passos. O que está acontecendo?
4. Faça o mesmo procedimento descrito nos dois itens anteriores para o processo iterativo $6x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 1$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. O que está acontecendo agora?
5. Mostre que um processo iterativo de ordem 2 só terá um ponto fixo para o caso $f(n) =$ constante.