Introdução a Métodos Computacionais em EDOs

Métodos Iterativos para Sistemas Lineares e Não-Lineares

A. Determine se as matrizes abaixo são convergentes ou não. Você pode precisar usar ferramentas de cálculo numérico que você já conhece.

1. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} \pi & -e & \sqrt{2} \\ \pi^2 & e & -e^2 \\ \sqrt{5} & -\sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

B. Considere um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em que a matriz A pode ser decomposta em $A = L + D + U$. A matriz L é uma matriz estritamente triangular inferior, D é uma matriz diagonal e U é uma matriz estritamente triangular superior. Mostre que o método de Gauss-Jacobi aplicado a este sistema linear pode ser escrito como

$$\mathbf{x}^{n+1} = -D^{-1}(L+U)\mathbf{x}^n + D^{-1}\mathbf{b},$$

e o método de Gauss-Seidel aplicado a este sistema linear pode ser escrito como

$$\mathbf{x}^{n+1} = -(L+D)^{-1}U\mathbf{x}^n + (L+D)^{-1}\mathbf{b}.$$

C. Escreva um programa para resolver os sistemas lineares abaixo usando os métodos de Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel e SOR. Tente determinar, por tentativa e erro, o melhor valor do parâmetro de relaxação que pode er usado. Por que é possível saber a priori que a solução destes sistemas pode ser encontrada por estes métodos? Note que é fácil verificar se seu resultado está correto com uma simples substituição dos valores encontrados.

1. $\begin{cases} 3x & -y & +z & = & 1 \\ 3x & +6y & +2z & = & 0 \\ 3x & +3y & +7z & = & 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 10x & -y & & = & 9 \\ -x & +10y & -2z & = & 7 \\ & -2y & +10z & = & 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x & +y & -z & +w & = & -2 \\ x+ & 4y & -z & -w & = & -1 \\ -x & -y & +5z & +z & = & 0 \\ x & -y & +z & +3w & = & 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 10x & +5y & & & = & 6 \\ 5x & +10y & -4z & & = & 25 \\ & -4y & +8z & -z & = & -11 \\ & & -z & +5w & = & -11 \end{cases}$

D. Vamos comparar os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel em dois sistemas lineares diferentes.

1. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Encontre o processo iterativo que representa os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel e mostre que apenas o último é válido para encontrar a solução. Por quê? Quantas iterações são necessárias para encontrar a solução $[1\ 2\ \ -1]^T$ com precisão 10^{-5}.

2. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encontre o processo iterativo que representa os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel e mostre que apenas o primeiro é válido para encontrar a solução. Por quê? Quantas iterações são necessárias para encontrar a solução $[1\ 2\ -1]^T$ com precisão 10^{-5}.

E. [**Método das potências**] Vamos estudar um dos métodos mais simples para determinar o autovalor dominante de uma matriz A, de tamanho $N \times N$. Este processo tem como base o processo iterativo linear $\mathbf{x}^{n+1} = A\mathbf{x}^n$, com chute inicial $\mathbf{x}^0 = \mathbf{a}$. Para isto, suponha que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ seja a base de autovetores da matriz A e $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N\}$ os seus respectivos autovalores. Considere os ítens abaixo.

1. Mostre que a solução geral do processo iterativo é $\mathbf{x}^n = A^n\mathbf{a}$. Posteriormente, usando a base de autovetores, escreva que $\mathbf{a} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_N\mathbf{v}_N$ e mostre que a solução geral do processo iterativo é $\mathbf{x}^n = \lambda_1^n c_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2^n c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_N^n c_N\mathbf{v}_N$.

2. Note que se a matriz A tiver um autovalor dominante, isto é, $|\lambda_i| > |\lambda_k|,\ k \neq i$, a solução para algum $n \gg 1$ será do tipo $\mathbf{x}^n = \lambda_i^n c_i\mathbf{v}_i$ e, assim, cada uma das componentes x_j do vetor $\mathbf{x}^n$ também serão do tipo $x_j^n = \lambda_i^n c_i v_{ij}$, com v_{ij} a j-ésima componente do autovetor $\mathbf{v}_i$. O autovalor dominante será determinado, então, como sendo $\lambda_i = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_j^{n+1}}{x_j^n},\ \forall j$, desde que $c_i, x_j^n \neq 0$.

3. Determine, usando o procedimento acima, o autovalor dominante das matrizes abaixo:

   (a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \\ -3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

4. Como você determinaria o autovetor associado ao autovalor encontrado por este método?

F. Resolva os seguintes sistemas de equações não-lineares usando o método de Newton-Raphson para sistemas. O chute inicial $\mathbf{x}^0$ é dado em alguns casos. Lembre-se que você deve escolher um método para a solução do sistema linear que aparecerá no procedimento. Teste diferentes escolhas e compare a eficiência global de cada processo.

1. $\begin{cases} 4x^2 - 20x + \dfrac{1}{4}y^2 = -8 \\ \dfrac{1}{2}xy^2 - 2x - 5y = -8 \\ \mathbf{x}^0 = [0\ 0]^T \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - \cos(xy) = \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 625y^2 + 2y = 1 \\ \mathrm{e}^{-xy} + 20z + \dfrac{10}{3}\pi = 1 \\ \mathbf{x}^0 = [0\ 0\ 0]^T \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 3 \\ x^2 - y^2 = 2 \\ \text{Todas as soluções} \end{cases}$

Teste a sensibilidade da solução à condição inicial. É possível encontrar um chute inicial que leve a outras soluções dos sistemas 1 a 3?