Produtos warped

Em geral, a grande maioria dos cálculos de Geometria Riemanniana se resumem a provar igualdades tensoriais. Isso geralmente é realizado de uma das três maneiras a seguir:

- *a maneira livre de coordenadas*: nesse caso, explicitamos a ação de cada tensor em campos arbitrários na variedade em questão, verificando que os resultados coincidem.

- *usando coordenadas locais*: nesse caso, fixamos coordenadas locais apropriadas que facilitem os cálculos (por exemplo, coordenadas normais) e tomamos vantagem da multilinearidade dos tensores, que garante que a igualdade só precisa ser verificada numa base (conforme detalhado em [1]).

- *usando o método do referencial móvel*: nesse caso, fixamos um referencial ortonormal local (que induz um co-referencial ortonormal local) e calculamos as 1-formas e 2-formas de conexão e curvatura, respectivamente, que determinam a conexão e curvatura da variedade.

Dependendo da situação, um dos três métodos acima pode ser significativamente mais fácil de ser aplicado do que os outros dois. Nessa subseção, nos dedicaremos, com base na referência [2], a explorar o suficiente às nossas aplicações do último método citado acima.

Seja $(\mathcal{M}^n, g)$ uma variedade Riemanniana e fixe $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ um referencial local g-ortonormal definido num aberto $U \subset \mathcal{M}$, sendo $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ o co-referencial associado (determinado por $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$). Como qualquer campo $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ se escreve localmente como

$$\Gamma(TU) \ni X|_U = \sum_{1 \leq j \leq n} X^j \, \mathbf{e}_j, \text{ onde } \{X^j\}_{1 \leq j \leq n} \subset \mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$$

então dada $s \in \Gamma(TU)$ podemos determinar (usando a linearidade de ∇ na primeira entrada e a regra de Leibniz) $\nabla_X s$ pelo conhecimento dos campos $\{\nabla_X \mathbf{e}_j\}_{1 \leq j \leq n}$. Sendo um campo em U, $\nabla_X \mathbf{e}_j$ é uma combinação linear dos $\mathbf{e}_i$'s com coeficientes ω^i_j dependendo de X, *id est:*

$$\nabla_X \mathbf{e}_j = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega^i_j(X) \, \mathbf{e}_i$$

A $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$-linearidade de $\nabla_X \mathbf{e}_j$ em X garante a $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$-linearidade de ω^i_j em X, de forma que $\omega^i_j \in \Gamma(T^*U)$ é uma 1-forma em U. As 1-formas ω^i_j em U são chamadas das ***formas de conexão***, e a matriz $\omega = (\omega^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ é chamada da ***matriz de conexão***, da conexão ∇ com respeito ao referencial $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \Gamma(TU)$.

Analogamente, dados $X, Y \in \Gamma(TU)$, o campo $\mathrm{Rm}(X, Y)\mathbf{e}_j$ é uma combinação linear de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, *id est:*

$$\mathrm{Rm}(X, Y)\mathbf{e}_j = \sum_{1 \leq i \leq n} \Omega^i_j(X, Y) \, \mathbf{e}_i$$

Uma vez que

$$\mathrm{Rm}(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

é alternada e $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$-bilinear, Ω^i_j também é alternada e $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$-bilinear. Pelas propriedades de Rm, Ω^i_j é portanto uma 2-forma em U. As 2-formas Ω^i_j são chamadas das ***formas de curvatura***, e a matriz $\Omega = (\Omega^i_j)$ é chamada da matriz de curvatura, da conexão ∇ com respeito ao referencial $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ em U.

Observação (O.1). Note que Ω^i_j é determinada por Rm, pois

$$\begin{aligned}\Omega^i_j &= \frac{1}{2}\sum_{1\leq k,\ell\leq n}\Omega^i_j(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_\ell)\,\mathbf{e}^k\wedge\mathbf{e}^\ell\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{1\leq k,\ell\leq n}\mathrm{Rm}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_\ell)\,\mathbf{e}^k\wedge\mathbf{e}^\ell\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de que

$$\begin{aligned}\Omega^i_j(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_\ell) &= g\left(\sum_{1\leq t\leq n}\Omega^s_j(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_\ell)\mathbf{e}_s,\mathbf{e}_i\right)\\ &= g\left(\mathrm{Rm}(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_\ell)\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i\right)\\ &= -\mathrm{Rm}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_\ell)\end{aligned}$$

Cálculos diretos mostram os seguintes resultados:

Teorema (T.1). *Seja $(\mathcal{M}^n,g)$ uma variedade Riemanniana e $U\subset\mathcal{M}$ um aberto em qual está definido um referencial ortonormal $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, com co-referencial associado $\mathbf{e}^1,\ldots,\mathbf{e}^n$. Então existe uma matriz antissimétrica $\left(\omega^i_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$ de 1-formas tal que*

$$\mathrm{d}\mathbf{e}^i+\sum_{1\leq j\leq n}\omega^i_j\wedge\mathbf{e}^j=0,\ \textit{seja qual for } 1\leq i\leq n$$

Além disso, se $\left(\alpha^i_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$ é qualquer outra matriz antissimétrica de 1-formas satisfazendo

$$\mathrm{d}\mathbf{e}^i+\sum_{1\leq j\leq n}\alpha^i_j\wedge\mathbf{e}^j=0,\ \textit{seja qual for } 1\leq i\leq n \tag{1}$$

então

$$\left(\alpha^i_j\right)_{1\leq i,j\leq n}=\left(\omega^i_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

Teorema (T.2). *As formas de curvatura Ω^i_j se relacionam às formas de conexão ω^i_j pela seguinte equação, comumente chamada da **segunda equação estrutural de Cartan**:*

$$\Omega^i_j=\mathrm{d}\,\omega^i_j+\sum_{1\leq k\leq n}\omega^i_k\wedge\omega^k_j,\ \textit{sejam quais forem } \{i,j\}\subset\{1,\ldots,n\}$$

Demonstração: Consulte [2].

■

Um dos conceitos mais importantes e frutíferos de geometria Riemanniana é o *produto warped* de variedades Riemannianas, que generaliza o produto Riemanniano comum. Tal conceito também tem grande relevância na física, aparecendo na teoria da relatividade como modelo do próprio Cosmos ou de buracos negros (veja, por exemplo, o modelo cosmológico de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker).

Definição (D.1). Sejam $(\mathcal{B},g_\mathcal{B})$ e $(\mathcal{M}_i,g_{\mathcal{M}_i})$ variedades Riemannianas e $b_i:\mathcal{B}\to(0,\infty)$ funções suaves para cada $i\in\{1,2,\cdots,k\}$. O produto warped múltiplo de tais variedades é a variedade produto $\mathcal{N}=\mathcal{B}\times\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2\times\cdots\times\mathcal{M}_k$ munida da métrica $g=g_\mathcal{B}\oplus b_1^2 g_{\mathcal{M}_1}\oplus b_2^2 g_{\mathcal{M}_2}\oplus\cdots\oplus b_k^2 g_{\mathcal{M}_k}$ definida por

$$g=\sigma_0^*(g_\mathcal{B})\oplus(b_1\circ\pi)^2\,\sigma_1^*\left(g_{\mathcal{M}_1}\right)\oplus\cdots\oplus(b_k\circ\pi)^2\,\sigma_k^*\left(g_{\mathcal{M}_k}\right)$$

onde $\sigma_0 : \mathcal{N} \to \mathcal{B}$ é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \sigma_0 : \mathcal{N} &\to \mathcal{B} \\ (p, q_1, \cdots, q_k) &\mapsto p \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

e para $i \geq 1$, $\sigma_i : \mathcal{N} \to \mathcal{M}_i$ é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \sigma_i : \mathcal{N} &\to \mathcal{M}_i \\ (p, q_1, \cdots, q_i, \cdots, q_k) &\mapsto q_i \in \mathcal{M}_i \end{aligned}$$

Observação (O.2).
- É comum denotar a variedade Riemanniana $(\mathcal{N} = \mathcal{B} \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \cdots \times \mathcal{M}_k, g = g_{\mathcal{B}} \oplus b_1^2 g_{\mathcal{M}_1} \oplus b_2^2 g_{\mathcal{M}_2} \oplus \cdots \oplus b_k^2 g_{\mathcal{M}_k})$ simplesmente por $\mathcal{N} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{M}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{M}_k^{d_k}$
- Quando $k = 1$, temos o produto warped simples usual.
- Se todos $b_i \equiv 1$, temos um produto Riemanniano trivial.

Definição (D.2). Se $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma aplicação suave, diremos que dois campos $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ e $Y \in \Gamma(T\mathcal{N})$ estão φ-relacionados (fato que denotaremos por $X \overset{\varphi}{\sim} Y$) quando $Y \circ \varphi = \mathrm{d}\varphi \circ X$.

Lema (L.1). O espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ de um ponto $p = (p_0, p_1, \cdots, p_k) \in \mathcal{M} = \mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \cdots \times \mathcal{N}_k$ é canonicamente isomorfo (no sentido de existir um isomorfismo que não depende de escolhas de bases) ao produto $T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \cdots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k$.

Demonstração: Considere as aplicações

$$\begin{aligned} \iota_0 : \mathcal{B} &\to \mathcal{M} \\ \mathcal{B} \ni q_0 &\mapsto (q_0, p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

e, para $\alpha \geq 1$,

$$\begin{aligned} \iota_\alpha : \mathcal{N}_\alpha &\to \mathcal{M} \\ \mathcal{N}_\alpha \ni q_\alpha &\mapsto (p_0, p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, q_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_k) \end{aligned}$$

Afirmo que a aplicação ψ definida por

$$\begin{aligned} \psi : T_{(p_0, p_1, \cdots, p_k)} (\mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \cdots \times \mathcal{N}_k) &\to T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \cdots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k \\ v &\mapsto \left(\mathrm{d}\left(\sigma_0\right)_p(v), \mathrm{d}\left(\sigma_1\right)_p(v), \mathrm{d}\left(\sigma_2\right)_p(v), \cdots, \mathrm{d}\left(\sigma_k\right)_p(v)\right) \end{aligned}$$

é um isomorfismo, com inversa dada por

$$\begin{aligned} \varphi : T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \cdots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k &\to T_{(p_0, p_1, \cdots, p_k)} (\mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \cdots \times \mathcal{N}_k) \\ (v_0, v_1, \ldots, v_k) &\mapsto \sum_{0 \leq \ell \leq k} \mathrm{d}\left(\iota_\ell\right)_{p_\ell}(v_\ell) \end{aligned}$$

Inicialmente, note que

$$\sigma_i \circ \iota_\ell = \begin{cases} \text{a aplicação identidade } \mathrm{Id}_{\mathcal{N}_i} : \mathcal{N}_i \to \mathcal{N}_i, & \text{se } i = \ell \\ \text{a aplicação constante } \mathcal{N}_\ell \ni q_\ell \mapsto p_i \in \mathcal{N}_i, & \text{se } i \neq \ell \end{cases}$$

E portanto, segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\sigma_i \circ \iota_\ell\right)_{p_\ell} &= \mathrm{d}\left(\sigma_i\right)_p \circ \mathrm{d}\left(\iota_\ell\right)_{p_\ell} \\ &= \begin{cases} \text{a aplicação identidade } \mathrm{Id}_{T_{p_i}\mathcal{N}_i} : T_{p_i}\mathcal{N}_i \to T_{p_i}\mathcal{N}_i, & \text{se } i = \ell \\ \text{a aplicação identicamente nula } T_{p_\ell}\mathcal{N}_\ell \ni v_\ell \mapsto 0 \in T_{p_\ell}\mathcal{N}_\ell, & \text{se } i \neq \ell \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Portanto, seja qual for $(v_0, v_1, \ldots, v_k) \in T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \cdots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k$, temos

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)\left(v_0, v_1, \ldots, v_k\right) &= \left(\mathrm{d}\left(\sigma_0\right)_p\left(\sum_{0\leq\ell\leq k} \mathrm{d}\left(\iota_\ell\right)_{p_\ell}\left(v_\ell\right)\right), \ldots, \mathrm{d}\left(\sigma_k\right)_p\left(\sum_{0\leq\ell\leq k} \mathrm{d}\left(\iota_\ell\right)_{p_\ell}\left(v_\ell\right)\right)\right) \\ &= \left(\sum_{0\leq\ell\leq k} \mathrm{d}\left(\sigma_0\right)_p\left(\mathrm{d}\left(\iota_\ell\right)_{p_\ell}\left(v_\ell\right)\right), \ldots, \sum_{0\leq\ell\leq k} \mathrm{d}\left(\sigma_k\right)_p\left(\mathrm{d}\left(\iota_\ell\right)_{p_\ell}\left(v_\ell\right)\right)\right) \\ &= \left(v_0, v_1, \ldots, v_k\right) \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (2). Segue que ψ é sobrejetiva. Como $T_{(p_0,p_1,\cdots,p_k)}\left(\mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \cdots \times \mathcal{N}_k\right)$ e $T_{p_0}\mathcal{B} \times T_{p_1}\mathcal{N}_1 \times \cdots \times T_{p_k}\mathcal{N}_k$ têm a mesma dimensão, segue que ψ é um isomorfismo. Como uma aplicação bijetora possui um único inverso à direita, segue também que φ é o inverso de ψ.

$\blacksquare$

Observação (O.3). Para cada $i \in \{0, 1, \cdots, k\}$, o conjunto dos campos em $\mathcal{M}$ que surgem como levantamentos de campos em fatores do produto será denotado por

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}_i) = \{X \in \Gamma(T\mathcal{M}) \mid \mathrm{d}\sigma_j(X) = 0, \text{ seja qual for } j \neq i\}$$

Dado $X_i \in \Gamma(T\mathcal{N}_i)$, é fácil ver que existe um único campo $\mathrm{Lev}(X_i) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_i)$ que satisfaz $\left(\mathrm{d}\sigma_i \circ \mathrm{Lev}\right)(X_i) = X_i$ (de fato, $\mathrm{Lev}(X_i) = \psi^{-1}\left((0, \cdots, X_i, 0, \cdots, 0)\right)$). O campo $\mathrm{Lev}(X_i)$ é chamado do levantamento do campo X_i. O abuso de notação de identificar um campo ou uma 1-forma com seu levantamento é portanto inofensivo, e o cometeremos várias vezes daqui em diante. Note que $\mathrm{Lev}(X_i)$ é o único campo σ_i-relacionado com X_i e σ_j-relacionado com $0 \in \Gamma(T\mathcal{N}_j)$ para todo $j \neq i$.

Observação (O.4). Convém agora relembrarmos a equação de Gauss. Dizemos que uma aplicação entre variedades Riemannianas $f : (\mathcal{M}^n, g_{\mathcal{M}}) \to \left(\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}, \widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}}\right)$ é uma imersão isométrica quando vale

$$f^*\left(\widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}}\right) = g_{\mathcal{M}}$$

ou, equivalentemente,

$$g_{\mathcal{M}}(p)\,(v, w) = \widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}}\left(f(p)\right)\left(\mathrm{d}f_p(v), \mathrm{d}f_p(w)\right)$$

sejam quais forem $p \in \mathcal{M}$ e $v, w \in T_p\mathcal{M}$. Nesse caso, cometendo o abuso usual de identificar campos com suas extensões, temos

$$\widetilde{\mathrm{Rm}}(X, Y, Z, W) = \mathrm{Rm}(X, Y, Z, W) - \widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}}\left(\mathbf{II}(X, W), \mathbf{II}(Y, Z)\right) + \widetilde{g}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{n+p}}\left(\mathbf{II}(X, Z), \mathbf{II}(Y, W)\right) \tag{3}$$

sejam quais forem $X, Y, Z, W \in \Gamma(T\mathcal{M})$. Nesse sentido, é importante ressaltar que, uma vez que fixarmos

$$p = (p_0, p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{M} = \mathcal{B} \times \mathcal{N}_1 \times \ldots \times \mathcal{N}_k$$

a inclusão

$$\begin{aligned} \iota_\alpha : (\mathcal{N}_\alpha, g_{\mathcal{N}_\alpha}) &\hookrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1 \times \ldots \times_{h_k} \mathcal{N}_k \\ q_\alpha &\mapsto (p_0, \ldots, p_{\alpha-1}, q_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_k) \end{aligned}$$

não é uma imersão isométrica. De fato, fixando arbitrariamente $q_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$ e denotando

$$P = (p_0, \ldots, p_{\alpha-1}, q_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_k)$$

temos

$$\begin{aligned} \left[(\iota_\alpha)^* (g_{\mathcal{M}})\right](q_\alpha)(v,w) &= g_{\mathcal{M}}(P)\left(\mathrm{d}(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(v), \mathrm{d}(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(w)\right) \\ &= h_\alpha^2(p_0)\,\left[(\sigma_\alpha)^*(g_{\mathcal{N}_\alpha})\right]_P \left(\mathrm{d}(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(v), \mathrm{d}(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(w)\right) \\ &= h_\alpha^2(p_0)\,(g_{\mathcal{N}_\alpha})_{q_\alpha}\left(\mathrm{d}(\sigma_\alpha)_P\left(\mathrm{d}(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(v)\right), \mathrm{d}(\sigma_\alpha)_{q_\alpha}\left(\mathrm{d}(\iota_\alpha)_{q_\alpha}(w)\right)\right) \\ &= h_\alpha^2(p_0)(q_\alpha)\,(g_{\mathcal{N}_\alpha})_{q_\alpha}(v,w) \end{aligned} \tag{4}$$

onde na última igualdade usamos a equação **(2)**. Porém, é claro dos cálculos feitos em **(4)** que com a métrica $(h_\alpha(p_0))^2\, g_{\mathcal{N}_\alpha}$, a inclusão

$$\begin{aligned} \iota_\alpha : \left(\mathcal{N}_\alpha, (h_\alpha(p_0))^2\, g_{\mathcal{N}_\alpha}\right) &\hookrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1 \times \ldots \times_{h_k} \mathcal{N}_k \\ q_\alpha &\mapsto (p_0, \ldots, p_{\alpha-1}, q_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_k) \end{aligned}$$

é uma imersão isométrica, de forma nesse contexto podemos usar a equação **(3)** (como faremos futuramente).

Observação (O.5). Embora usualmente a equação **(3)** seja utilizada para determinar a curvatura de subvariedades, em algumas situações podemos usá-la no sentido contrário: ou seja, via o conhecimento da curvatura de específicas subvariedades, podemos determinar a curvatura da variedade total. Um exercício interessante de Geometria Riemanniana (que comentaremos em mais detalhes no exemplo **(E.1)**) que utiliza essa técnica envolve calcular a curvatura do produto warped $\mathcal{I} \times_\varphi \mathbb{Q}^n(\kappa)$, onde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, $\varphi : \mathcal{I} \to (0,\infty)$ é uma função suave, e definimos

$$\mathbb{Q}^n(\kappa) \doteq \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{se } \kappa = 0 \\ \mathbb{S}^n, & \text{se } \kappa = 1 \\ \mathbb{H}^n, & \text{se } \kappa = -1 \end{cases}$$

Lema (L.2). Se $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma aplicação suave, então

$$\mathrm{d}\varphi([X,Y]) = [\mathrm{d}\varphi(X), \mathrm{d}\varphi(Y)],\ \forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$$

Demonstração: Segue da definição do colchete de Lie e da definição da diferencial de uma aplicação. De fato, para qualquer $p \in \mathcal{M}$ e $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{N})$ temos

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\varphi_p([X,Y](p)))(g) &= [X,Y](p)(g \circ \varphi) \\ &= X_p(Y(g\circ\varphi)) - Y_p(X(g\circ\varphi)) \\ &= X_p(\mathrm{d}\varphi(Y)(g)\circ\varphi) - Y_p(\mathrm{d}\varphi(X)(g)\circ\varphi) \\ &= \mathrm{d}\varphi_p(X_p)(\mathrm{d}\varphi(Y)(g)) - \mathrm{d}\varphi_p(Y_p)(\mathrm{d}\varphi(X)(g)) \\ &= [\mathrm{d}\varphi(X), \mathrm{d}\varphi(Y)]_p(g) \end{aligned}$$

■

Lema (L.3). Se $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma aplicação suave e $X_1, X_2 \in \Gamma(T\mathcal{M}), Y_1, Y_2 \in \Gamma(T\mathcal{N})$ são campos satisfazendo $X_i \overset{\varphi}{\sim} Y_i$ para cada $1 \leq i \leq 2$, então $[X_1, X_2] \overset{\varphi}{\sim} [Y_1, Y_2]$.

Demonstração: Consequência imediata do lema anterior. De fato, dado qualquer $p \in \mathcal{M}$ temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi_p([X_1,X_2](p)) &= [\mathrm{d}\varphi_p(X_1(p)), \mathrm{d}\varphi_p(X_2(p))] \\ &= [Y_1, Y_2](\varphi(p)) \end{aligned}$$

■

Naturalmente, o conhecimento das conexões e curvaturas dos fatores de tal produto determina a conexão e curvatura do próprio produto. Para determinar estes, usaremos o método do referencial móvel. Antes, estabeleceremos algumas notações importantes para as demonstrações dos lemas a seguir (enunciados também em [3] - com um erro de sinal no item (8) da Proposição 2.4, corrigido no item **(8)** do lema **(L.7)**).

Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica

$$g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$$

e conexão $\nabla^g = \nabla$. Denotaremos $\mathcal{N}_0^r \doteq \mathcal{B}$ e $d_i \doteq \dim(\mathcal{N}_i)$ para cada $0 \leq i \leq k$. Para cada $0 \leq i \leq n$, fixaremos referenciais locais $g_{\mathcal{N}_i}$-ortonormais, que denotaremos por $\{\mathbf{e}_{(i,j)}\}_{1 \leq j \leq d_i}$. Seus co-referenciais associados serão denotados por $\{\Theta^{(i,j)}\}_{1 \leq i,j \leq d_i}$ (e estão determinados por $\Theta^{(i,j)}(\mathbf{e}_{(i,s)}) = \delta_s^j$). As 1-formas de conexão e 2-formas de curvatura associadas a tais referenciais serão denotadas por $\{\omega_q^{(i,j)}\}_{1 \leq j,q \leq d_i}$ e $\{\Omega_q^{(i,j)}\}_{1 \leq j,q \leq d_i}$, respectivamente. Sendo assim, note que

$$\left\{\mathbf{e}_{(0,1)}, \ldots, \mathbf{e}_{(0,r)}, \frac{1}{h_1}\mathbf{e}_{(1,1)}, \ldots, \frac{1}{h_1}\mathbf{e}_{(1,d_1)}, \ldots, \frac{1}{h_k}\mathbf{e}_{(k,1)}, \ldots, \frac{1}{h_k}\mathbf{e}_{(k,d_k)}\right\}$$

é um referencial local g-ortonormal. Usaremos a notação

$$\widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)} = \begin{cases} \mathbf{e}_{(0,j)}, & \text{se } i = 0 \\ \dfrac{1}{h_i}\mathbf{e}_{(i,j)}, & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

de forma que

$$\{\widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}\}_{0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i}$$

é um referencial local g-ortonormal, sendo seu co-referencial local associado dado por

$$\{\widetilde{\Theta}^{(i,j))}\}_{0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i}$$

onde

$$\widetilde{\Theta}^{(i,j)} = \begin{cases} \Theta^{(0,j)}, & \text{se } i = 0 \\ h_i \Theta^{(i,j)}, & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

de forma que num aberto $U \subset \mathcal{M}$, todo campo $s \in \Gamma(TU)$ se escreve como

$$s|_U = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \widetilde{s}^{(i,j)}\,\widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \widetilde{\Theta}^{(i,j)}(s)\,\widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}$$

Finalmente, as 1-formas de conexão e 2-formas de curvatura de $(\mathcal{M}, g)$ com respeito a esse referencial serão denotadas por $\{\widetilde{\omega}_{(p,m)}^{(i,j)}\}_{\substack{0 \leq i,p \leq k \\ 1 \leq j,m \leq d_i}}$ e $\{\widetilde{\Omega}_{(p,m)}^{(i,j)}\}_{\substack{0 \leq i,p \leq k \\ 1 \leq j,m \leq d_i}}$, de forma que

$$\nabla_s\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(p,m)}\right) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \widetilde{\omega}_{(p,m)}^{(i,j)}(s)\,\widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}$$

e

$$\mathrm{Rm}(s_1, s_2)\widetilde{\mathbf{e}}_{(p,m)} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d_i}} \widetilde{\Omega}_{(p,m)}^{(i,j)}(s_1, s_2)\,\widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}$$

Lema (L.4). Seguindo a notação acima, seja $\mathcal{M} = \mathcal{B}^r \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$ e conexão $\nabla^g = \nabla$. As 1-formas de conexão $\{\widetilde{\omega}_{(p,m)}^{(i,j)}\}_{\substack{0 \le i,p \le k \\ 1 \le j,m \le d_i}}$ são dadas por

(a)

$$\widetilde{\omega}_{(0,\ell)}^{(0,j)} = \omega_\ell^{(0,j)}, \text{ sejam quais forem } 1 \le j, \ell \le r$$

(b)

$$\widetilde{\omega}_{(\beta,\ell)}^{(0,j)} = -\frac{\mathbf{e}_{(0,j)}(h_\beta)}{h_\beta} \, \widetilde{\Theta}^{(\beta,\ell)}, \text{ para quaisquer } 1 \le j \le r \text{ e } \beta, \ell \ge 1$$

(c)

$$\widetilde{\omega}_{(0,a)}^{(\gamma,j)} = \frac{\mathbf{e}_{(0,a)}(h_\gamma)}{h_\gamma} \, \widetilde{\Theta}^{(\gamma,j)}, \text{ se } 1 \le \gamma \le k \text{ e } 1 \le a, j \le r$$

(d)

$$\widetilde{\omega}_{(\beta,p)}^{(\gamma,q)} = \delta_{\gamma\beta} \, \omega_p^{(\gamma,q)}, \text{ se } 1 \le \gamma, \beta \le k \text{ e } 1 \le p, q \le d_\gamma$$

Demonstração: A ideia da demonstração é clássica: motivados pelo teorema 1, iremos definir uma matriz antissimétrica $\left(\alpha_{(p,m)}^{(i,j)}\right)_{\substack{0 \le i,p \le k \\ 1 \le j,m \le d_i}}$ que satisfaz

$$\begin{cases} \mathrm{d}\widetilde{\Theta}^{(0,j)} + \displaystyle\sum_{1 \le \ell \le r} \alpha_{(0,\ell)}^{(0,j)} \wedge \widetilde{\Theta}^{(0,\ell)} + \sum_{\substack{1 \le \gamma \le k \\ 1 \le \beta \le d_\gamma}} \alpha_{(\gamma,\beta)}^{(0,j)} \wedge \widetilde{\Theta}^{(\gamma,\beta)} = 0 \\ \mathrm{d}\widetilde{\Theta}^{(\beta,\gamma)} + \displaystyle\sum_{1 \le \ell \le r} \alpha_{(0,\ell)}^{(\beta,\gamma)} \wedge \widetilde{\Theta}^{(0,\ell)} + \sum_{\substack{1 \le \xi \le k \\ 1 \le \eta \le d_\xi}} \alpha_{(\xi,\eta)}^{(\beta,\gamma)} \wedge \widetilde{\Theta}^{(\xi,\eta)} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

sejam quais forem $1 \le j \le r$, $1 \le \beta \le k$, $1 \le \gamma \le d_\beta$. Da unicidade enunciada no teorema 1, seguirá que $\left(\alpha_{(p,m)}^{(i,j)}\right)_{\substack{0 \le i,p \le k \\ 1 \le j,m \le d_i}}$ é a matriz de 1-formas da conexão de Levi-Civita de $\mathcal{M}$. Uma vez que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widetilde{\Theta}^{(0,j)} &= \mathrm{d}\Theta^{(0,j)} \\ &= -\sum_{1 \le \ell \le r} \omega_\ell^{(0,j)} \wedge \widetilde{\Theta}^{(0,\ell)} \end{aligned} \tag{6}$$

E também

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widetilde{\Theta}^{(\gamma,j)} &= \mathrm{d}\left(h_\gamma \Theta^{(\gamma,j)}\right) \\ &= \mathrm{d}h_\gamma \wedge \Theta^{(\gamma,j)} + h_\gamma \, \mathrm{d}\Theta^{(\gamma,j)} \\ &= \left(\sum_{1 \le a \le r} \mathbf{e}_{(0,a)}\left(h_\gamma\right) \, \Theta^{(0,a)}\right) \wedge \Theta^{(\gamma,j)} - h_\gamma \sum_{1 \le \ell \le d_\gamma} \omega_\ell^{(\gamma,j)} \wedge \Theta^{(\gamma,\ell)} \\ &= -\sum_{1 \le a \le r} \left(\mathbf{e}_{(0,a)}\left(h_\gamma\right) \, \Theta^{(\gamma,j)}\right) \wedge \widetilde{\Theta}^{(0,a)} - \sum_{1 \le \ell \le d_\gamma} \omega_\ell^{(\gamma,j)} \wedge \widetilde{\Theta}^{(\gamma,\ell)} \end{aligned} \tag{7}$$

Definiremos

$$\begin{aligned} \alpha_{(0,\ell)}^{(0,j)} &= \omega_\ell^{(0,j)} \\ \alpha_{(\gamma,\beta)}^{(0,j)} &= -\frac{\mathbf{e}_{(0,j)}(h_\gamma)}{h_\gamma} \, \widetilde{\Theta}^{(\gamma,\beta)} \end{aligned}$$

$$\alpha^{(\beta,\gamma)}_{(0,\ell)} = \frac{\mathbf{e}_{(0,\ell)}(h_\beta)}{h_\beta}\,\widetilde{\Theta}^{(\beta,\gamma)}$$
$$\alpha^{(\beta,\gamma)}_{(\xi,\eta)} = 0,\ \text{para qualquer } \xi \geq 1 \text{ com } \xi \neq \beta$$

É fácil ver que a matriz α assim definida é antissimétrica. Além disso, segue das equações **(6)** e **(7)** que α assim definida satifaz **(5)**, donde segue o resultado desejado.

■

Lema (L.5). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$ e conexão $\nabla^g = \nabla$. Suponha que $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$ e $W \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\eta)$. Então:

(1) $\nabla_X Y = \nabla^{\mathcal{B}}_X Y$

(2) $\nabla_X V = \nabla_V X = \dfrac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V$

(3) $\nabla_V W = \begin{cases} 0, \ \text{se } \alpha \neq \eta \\ \nabla^{\mathcal{N}_\eta}_V W - \dfrac{g(V,W)}{h_\eta}\text{grad}_{\mathcal{B}} h_\eta, \ \text{se } \alpha = \eta \end{cases}$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_{1\leq a\leq r} \widetilde{Y}^{(0,a)}\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} \right) \\
&= \sum_{1\leq a\leq r} \left\{ X\left(\widetilde{Y}^{(0,a)}\right) \widetilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} + \widetilde{Y}^{(0,a)}\, \nabla_X \left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(0,a)}\right) \right\} \\
&= \sum_{1\leq a\leq r} \left\{ X\left(Y^{(0,a)}\right) \mathbf{e}_{(0,a)} + Y^{(0,a)}\, \nabla_X \left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(0,a)}\right) \right\}
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\nabla_X \left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(0,a)}\right) &= \sum_{\substack{0\leq i\leq k \\ 1\leq j\leq d_i}} \widetilde{\omega}^{(i,j)}_{(0,a)}(X)\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)} \\
&= \sum_{1\leq j\leq r} \widetilde{\omega}^{(0,j)}_{(0,a)}(X)\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(0,j)} + \sum_{\substack{1\leq \gamma\leq k \\ 1\leq j\leq d_\gamma}} \widetilde{\omega}^{(\gamma,j)}_{(0,a)}(X)\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,j)} \\
&= \sum_{1\leq j\leq r} \omega^{(0,j)}_{a}(X)\, \mathbf{e}_{(0,j)} + \sum_{\substack{1\leq \gamma\leq k \\ 1\leq j\leq d_\gamma}} \mathbf{e}_{(0,a)}\,(h_\gamma) \underbrace{\Theta^{(\gamma,j)}(X)}_{=0, \text{ pois } X\in\mathcal{L}(\mathcal{B})} \widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,j)} \\
&= \nabla^{\mathcal{B}}_X \left(\mathbf{e}_{(0,a)}\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_{1\leq a\leq r} \left\{ X\left(Y^{(0,a)}\right) \mathbf{e}_{(0,a)} + Y^{(0,a)}\, \nabla_X \left(\mathbf{e}_{(0,a)}\right) \right\} \\
&= \nabla^{\mathcal{B}}_X \left(\sum_{1\leq a\leq r} Y^{(0,a)}\, \mathbf{e}_{(0,a)} \right) \\
&= \nabla^{\mathcal{B}}_X Y
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos os itens **(a)** e **(c)** do lema **(L.4)**. Uma vez que $X\left(V^{(\alpha,\beta)}\right) = 0$, temos também

$$\begin{aligned}
\nabla_X V &= \nabla_X \left(\sum_{1\leq\beta\leq d_\alpha} \widetilde{V}^{(\alpha,\beta)}\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} \right) \\
&= \sum_{1\leq\beta\leq d_\alpha} \left\{ X\left(\widetilde{V}^{(\alpha,\beta)}\right) \widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)} + \widetilde{V}^{(\alpha,\beta)}\, \nabla_X \left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right) \right\} \\
&= \sum_{1\leq\beta\leq d_\alpha} \left\{ \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V^{(\alpha,\beta)}\, \mathbf{e}_{(\alpha,\beta)} + \widetilde{V}^{(\alpha,\beta)} \left(\sum_{1\leq\ell\leq r} \underbrace{\widetilde{\omega}^{(0,\ell)}_{(\alpha,\beta)}(X)}_{=0,\text{ por (b) de (L.4)}}\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(0,\ell)} + \sum_{\substack{1\leq\gamma\leq k\\ 1\leq s\leq d_\gamma}} \widetilde{\omega}^{(\gamma,s)}_{(\alpha,\beta)}(X)\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,s)} \right) \right\} \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V + \sum_{1\leq s,\beta\leq d_\alpha} \underbrace{\omega^{(\alpha,s)}_{\beta}(X)}_{=0,\text{pois } X\in\mathcal{L}(\mathcal{B})}\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,s)} \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o item **(d)** do lema **(L.4)**.

Finalmente, usando novamente o lema **(L.4)**, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_V W &= \nabla_V \left(\sum_{1\leq\beta\leq d_\eta} \widetilde{W}^{(\eta,\beta)}\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} \right) \\
&= \sum_{1\leq\beta\leq d_\eta} V\left(\widetilde{W}^{(\eta,\beta)}\right) \widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} + \sum_{1\leq\beta\leq d_\eta} \widetilde{W}^{(\eta,\beta)}\, \nabla_V\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)}\right) \\
&= \sum_{1\leq\beta\leq d_\eta} V\left(\widetilde{W}^{(\eta,\beta)}\right) \widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} + \sum_{1\leq\beta\leq d_\eta} \widetilde{W}^{(\eta,\beta)} \left\{ \sum_{1\leq a\leq r} \widetilde{\omega}^{(0,a)}_{(\eta,\beta)}(V)\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} + \sum_{\substack{1\leq\xi\leq k\\ 1\leq\gamma\leq d_\xi}} \widetilde{\omega}^{(\xi,\gamma)}_{(\eta,\beta)}(V)\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\xi,\gamma)} \right\} \\
&= \sum_{1\leq\beta\leq d_\eta} V\left(\widetilde{W}^{(\eta,\beta)}\right) \widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} + \sum_{1\leq\beta\leq d_\eta} \widetilde{W}^{(\eta,\beta)} \left\{ -\sum_{1\leq a\leq r} \frac{\mathbf{e}_{(0,a)}(h_\eta)}{h_\eta} \widetilde{V}^{(\eta,\beta)}\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(0,a)} + \sum_{1\leq\gamma\leq d_\eta} \omega^{(\eta,\gamma)}_{\beta}(V)\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\gamma)} \right\} \\
&= \sum_{1\leq\beta\leq d_\eta} \left\{ V\left(\widetilde{W}^{(\eta,\beta)}\right) \widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)} + \widetilde{W}^{(\eta,\beta)}\, \nabla_V\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\beta)}\right) \right\} - \sum_{1\leq a\leq r} \frac{\mathbf{e}_{(0,a)}(h_\eta)}{h_\eta} g(V,W)\, \mathbf{e}_{(0,a)} \\
&= \nabla^{\mathcal{N}_\eta}_{\mathrm{d}\sigma_\eta(V)} W - \delta_{\alpha\eta} \frac{g(V,W)}{h_\eta} \mathrm{grad}_{\mathcal{B}} h_\eta \\
&= \delta_{\alpha\eta} \left(\nabla^{\mathcal{N}_\eta}_V W - \frac{g(V,W)}{h_\eta} \mathrm{grad}_{\mathcal{B}} h_\eta \right)
\end{aligned}$$

■

Observação (O.6). A progressão "natural" após termos calculado as 1-formas de conexão no lema **(L.4)** seria usarmos o teorema 2 para calcularmos as 2-formas de curvatura. Não faremos isso pois para determinarmos Rm, esse caminho é bem mais complicado em comparação a simplesmente usarmos a definição de Rm nos cálculos, amparados do lema **(L.4)**. Faremos isso na demonstração do lema **(L.7)**.

Lema (L.6). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$. Denotemos $\mathrm{grad}^{\mathcal{M}} = \mathrm{grad}$ e $\Delta^{\mathcal{M}} = \Delta$. Se $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{B})$ e $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{N}_i)$, então

(1) $\operatorname{grad}(\phi \circ \pi) = \operatorname{grad}_{\mathcal{B}} \phi$

(2) $\operatorname{grad}(\psi \circ \sigma_i) = \dfrac{\operatorname{grad}_{\mathcal{N}_i} \psi}{h_i^2}$

(3) $\Delta(\phi \circ \pi) = \Delta_{\mathcal{B}} \phi + \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq k} d_i \frac{g_{\mathcal{B}}\left(\operatorname{grad}_{\mathcal{B}} \phi, \operatorname{grad}_{\mathcal{B}} h_i\right)}{h_i}$

(4) $\Delta(\psi \circ \sigma_i) = \dfrac{\Delta_{\mathcal{N}_i} \psi}{h_i^2}$

Demonstração: Fixe $p = (p_0, q_1, \ldots, q_k) \in \mathcal{M}$. Uma vez que $\phi \circ \pi$ é constante em $\{p_0\} \times \mathcal{N}_1 \times \ldots \times \mathcal{N}_k$ seja qual for $p_0 \in \mathcal{B}$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\phi \circ \pi)(p) &= \sum_{1 \leq i \leq r} \mathbf{e}_{(0,i)}(p)\,(\phi \circ \pi)\; \mathbf{e}_{(0,i)}(p) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq r} \mathrm{d}\,(\phi \circ \pi)_p \left(\mathbf{e}_{(0,i)}(p)\right)\, \mathbf{e}_{(0,i)}(p) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq r} \mathrm{d}\phi_{p_0} \left(\mathbf{e}_{(0,i)}(p_0)\right)\, \mathbf{e}_{(0,i)}(p) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq r} \mathbf{e}_{(0,i)}(p_0)\,(\phi)\; \mathbf{e}_{(0,i)}(p) \\
&= \left(\operatorname{grad}_{\mathcal{B}} \phi\right)(p)
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\psi \circ \sigma_i)(p) &= \sum_{1 \leq j \leq d_i} \widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}(p)(\psi)\, \widetilde{\mathbf{e}}_{(i,j)}(p) \\
&= h_i^{-2} \left(\operatorname{grad}_{\mathcal{N}_i} \psi\right)(p)
\end{aligned}$$

Da definição do Laplaciano, do item **(2)** do lema **(L.5)** e do item **(1)** do lema atual, segue também que

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi \circ \pi) &= \sum_{1 \leq i \leq r} g\left(\nabla_{\mathbf{e}_{(0,i)}} \nabla^{\mathcal{B}} \phi, \mathbf{e}_{(0,i)}\right) + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_\alpha}} g\left(\nabla_{\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}} \nabla^{\mathcal{B}} \phi, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right) \\
&= \Delta_{\mathcal{B}} \phi + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_\alpha}} g\left(\frac{\left(\nabla^{\mathcal{B}} \phi\right)(h_\alpha)}{h_\alpha} \widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right) \\
&= \Delta_{\mathcal{B}} \phi + \sum_{1 \leq \alpha \leq k} d_\alpha \frac{\left(\nabla^{\mathcal{B}} \phi\right)(h_\alpha)}{h_\alpha} \\
&= \Delta_{\mathcal{B}} \phi + \sum_{1 \leq \alpha \leq k} d_\alpha \frac{g_{\mathcal{B}}\left(\nabla^{\mathcal{B}} \phi, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\right)}{h_\alpha}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\Delta(\psi \circ \sigma_i) &= \sum_{1 \leq j \leq r} g\left(\nabla_{\mathbf{e}_{(0,j)}} \nabla \psi, \mathbf{e}_{(0,j)}\right) + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_\alpha}} g\left(\nabla_{\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}} \nabla \psi, \widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right) \\
&= \sum_{1 \leq j \leq r} g\left(\nabla_{\mathbf{e}_{(0,j)}} \left(\frac{\nabla^{\mathcal{N}_i} \psi}{h_i^2}\right), \mathbf{e}_{(0,j)}\right) + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq d_\alpha}} g\left(\nabla_{\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}} \left(\frac{\nabla^{\mathcal{N}_i} \psi}{h_i^2}\right), \widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\le j\le r} g\left(-\frac{2\,\mathbf{e}_{(0,j)}(h_i)}{h_i^3}\,\nabla^{\mathcal{N}_i}\psi + \frac{1}{h_i^2}\,\nabla_{\mathbf{e}_{(0,j)}}\nabla^{\mathcal{N}_i}\psi, \mathbf{e}_{(0,j)}\right)\\
&+ \sum_{\substack{1\le\alpha\le k\\ 1\le\beta\le d_\alpha}} h_i^{-4}\, g\left(\nabla_{\mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}}\nabla^{\mathcal{N}_i}\psi, \mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}\right)\\
&= \sum_{\substack{1\le\alpha\le k\\ 1\le\beta\le d_\alpha}} h_i^{-2}\, g^{\mathcal{N}_i}\left(\nabla_{\mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}}\nabla^{\mathcal{N}_i}\psi, \mathbf{e}_{(\alpha,\beta)}\right)\\
&= h_i^{-2}\,\Delta_{\mathcal{N}_i}\psi
\end{aligned}
$$

■

Lema (L.7). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B}\times_{h_1}\mathcal{N}_1^{d_1}\times\cdots\times_{h_k}\mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}}\oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1}\oplus\cdots\oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$. Denotemos $\mathrm{Rm}^{\mathcal{M}} = \mathrm{Rm}$ e tomemos $X, Y, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha), W \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\eta)$ e $U \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\beta)$. Então

(1) $\mathrm{Rm}(X,Y)Z = \mathrm{Rm}_{\mathcal{B}}(X,Y)Z$.

(2) $\mathrm{Rm}(V,X)Y = -\dfrac{\left(\nabla^2_{\mathcal{B}}h_\alpha\right)(X,Y)}{h_\alpha}V$.

(3) $\mathrm{Rm}(X,V)W = \mathrm{Rm}(V,W)X = \mathrm{Rm}(V,X)W = 0$ sempre que $\alpha\notin\{\eta\}$.

(4) $\mathrm{Rm}(X,Y)V = 0$.

(5) $\mathrm{Rm}(V,W)X = 0$ sempre que $\alpha = \eta$.

(6) $\mathrm{Rm}(V,W)U = 0$ sempre que $\alpha\in\{\eta\}\neq\{\beta\}$.

(7) $\mathrm{Rm}(U,V)W = -g(V,W)\,\dfrac{g_{\mathcal{B}}(\mathrm{grad}_{\mathcal{B}}h_\alpha, \mathrm{grad}_{\mathcal{B}}h_\beta)}{h_\alpha h_\beta}\,U$ sempre que $\alpha\in\{\eta\}\neq\{\beta\}$.

(8) $\mathrm{Rm}(X,V)W = -\dfrac{g(V,W)}{h_\alpha}\nabla^{\mathcal{B}}_X(\mathrm{grad}_{\mathcal{B}}h_\alpha)$ sempre que $\alpha\in\{\eta\}$.

(9) $\mathrm{Rm}(V,W)U = \mathrm{Rm}_{\mathcal{N}_\alpha}(V,W)U + \dfrac{\|\mathrm{grad}_{\mathcal{B}}h_\alpha\|^2}{(h_\alpha^2)}\cdot\left(g(V,U)W - g(W,U)V\right)$ sempre que $\{\alpha,\eta\} = \{\beta\}$.

Demonstração: O item **(1)** é uma consequência direta do item **(1)** do lema **(L.5)**. Para provar o item **(2)**, note inicialmente que $[X,V] = 0$ como consequência imediata do lema **(L.3)**, de forma que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rm}(V,X)Y &= \nabla_V\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_V Y\\
&= \nabla_V\nabla^{\mathcal{B}}_X Y - \nabla_X\left(\frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha}V\right)\\
&= \frac{\left(\nabla^{\mathcal{B}}_X Y\right)(h_\alpha)}{h_\alpha}V - X\left(\frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha}\right)V - \frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha}\,\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha}V\\
&= \frac{\nabla_{\nabla^{\mathcal{B}}_X Y}(h_\alpha)}{h_\alpha}V - \frac{X(Y(h_\alpha))}{h_\alpha}V + \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha^2}Y(h_\alpha)\,V - \frac{X(h_\alpha)\,Y(h_\alpha)}{h_\alpha^2}V\\
&= -\frac{\left(\mathrm{Hess}_g(h_\alpha)\right)(X,Y)}{h_\alpha}V
\end{aligned}
$$

O item (3) segue como consequência direta do item (3) do lema (L.5). Agora, segue do item (2) do lema (L.5) que

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V &= \nabla_X \left(\frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} V \right) - \nabla_Y \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V \right) \\
&= X \left(\frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} \right) V + \frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_X V - Y \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \right) V - \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_Y V \\
&= \frac{X(Y(h_\alpha))}{h_\alpha} V - \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} Y(h_\alpha)\, V + \frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V \\
&\quad - \frac{Y(X(h_\alpha))}{h_\alpha} V + \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} Y(h_\alpha)\, V - \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \frac{Y(h_\alpha)}{h_\alpha} V \\
&= \frac{[X,Y](h_\alpha)}{h_\alpha} V \\
&= \nabla_{[X,Y]} V
\end{aligned}$$

e portanto $\mathrm{Rm}(X,Y)V = 0$, como afirmado no item (4). O item (5) é uma consequência simples do item (2) do lema (L.5). De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rm}(V,W)X &= \nabla_V \nabla_W X - \nabla_W \nabla_V X - \nabla_{[V,W]} X \\
&= \nabla_V \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} W \right) - \nabla_W \left(\frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} V \right) - \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} [V,W] \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \left(\nabla_V W - \nabla_W V - [V,W] \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

O item (6) é uma consequência direta dos itens (3) e (1) do lema (L.5). Para provar o item (7), note que novamente como consequência do lema (L.3), temos $[U,V] = 0$, de forma que usando o lema (L.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rm}(U,V)W &= \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \underbrace{\nabla_U W}_{=0} \\
&= \nabla_U \left(\nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{g(V,W)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \right) \\
&= -\frac{g(V,W)}{h_\alpha} \nabla_U \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&= -\frac{g(V,W)}{h_\alpha} \frac{\left(\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\right)(h_\beta)}{h_\beta} U \\
&= -g(V,W) \frac{g_{\mathcal{B}}(\mathrm{grad}_{\mathcal{B}} h_\alpha, \mathrm{grad}_{\mathcal{B}} h_\beta)}{h_\alpha h_\beta} U
\end{aligned}$$

Iremos agora provar o item (8). Primeiramente, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_V W &= \nabla_X \left(\nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{g(V,W)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \right) \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - X \left(\frac{g(V,W)}{h_\alpha} \right) \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha - \frac{g(V,W)}{h_\alpha} \nabla_X \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&= \frac{X(h_\alpha)}{h_\alpha} \nabla_V^{\mathcal{N}_\alpha} W - \frac{\left(g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)\right)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha + \frac{X(h_\alpha)}{(h_\alpha)^2} g(V,W)\, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{g(V,W)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}}_X \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&= \frac{X\left(h_\alpha\right)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{N}_\alpha}_V W - 2\frac{X\left(h_\alpha\right)}{\left(h_\alpha\right)^2} g(V,W)\, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha + \frac{X\left(h_\alpha\right)}{\left(h_\alpha\right)^2} g(V,W)\, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha - \frac{g(V,W)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}}_X \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \\
&= \frac{X\left(h_\alpha\right)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{N}_\alpha}_V W - \frac{X\left(h_\alpha\right)}{\left(h_\alpha\right)^2} g(V,W)\, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha - \frac{g(V,W)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{B}}_X \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha
\end{aligned}
$$

E também:

$$
\begin{aligned}
\nabla_V \nabla_X W &= \nabla_V \left(\frac{X\left(h_\alpha\right)}{h_\alpha} W \right) \\
&= \frac{X\left(h_\alpha\right)}{h_\alpha} \left(\nabla^{\mathcal{N}_\alpha}_V W - \frac{g(V,W)}{h_\alpha}\, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha \right) \\
&= \frac{X\left(h_\alpha\right)}{h_\alpha} \nabla^{\mathcal{N}_\alpha}_V W - \frac{X\left(h_\alpha\right)}{\left(h_\alpha\right)^2} g(V,W)\, \nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha
\end{aligned}
$$

Como $[X,V]=0$, segue então que

$$
\operatorname{Rm}(X,V)W = -\frac{g(V,W)}{h_\alpha}\, \nabla^{\mathcal{B}}_X (\operatorname{grad}_{\mathcal{B}} h_\alpha)
$$

Finalmente, para provar **(9)**, note primeiramente que $\operatorname{Rm}(V,W)U \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$, já que dados $X \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ e $L \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\xi)$ com $\xi \neq \alpha$, temos

$$
\begin{aligned}
g\left(\operatorname{Rm}(V,W)U, X\right) &= -g\left(\operatorname{Rm}(V,W)X, U\right) = 0, \text{ pelo item } \mathbf{(5)} \\
g\left(\operatorname{Rm}(V,W)U, L\right) &= -g\left(\operatorname{Rm}(V,W)L, U\right) = 0, \text{ pelo item } \mathbf{(6)}
\end{aligned}
$$

Segue então da equação de Gauss e do item **(3)** do lema **(L.5)** que dado qualquer $C \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$, temos

$$
\begin{aligned}
g\left(\operatorname{Rm}(V,W)U, C\right) &= \left(h_\alpha\right)^2 \operatorname{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}(V,W,U,C) - g\left(\mathbf{II}(V,C), \mathbf{II}(W,U)\right) + g\left(\mathbf{II}(V,U), \mathbf{II}(W,C)\right) \\
&= \left(h_\alpha\right)^2 \operatorname{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}(V,W,U,C) - \frac{g(V,C)\, g(W,U)}{\left(h_\alpha\right)^2} \left\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\right\|^2 + \frac{g(V,U)\, g(W,C)}{\left(h_\alpha\right)^2} \left\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\right\|^2
\end{aligned}
$$

Equivalentemente, como $\operatorname{Rm}(V,W)U \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$,

$$
\flat^g \left(\operatorname{Rm}(V,W)U\right) = \flat^g \left(\operatorname{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}(V,W)U + \frac{\left\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\right\|^2}{\left(h_\alpha\right)^2} \cdot \left\{ g(V,U)\, W - g(W,U)\, V \right\} \right)
$$

Como $\flat^g$ é um isomorfismo em cada fibra de $T\mathcal{M}$, segue, como queríamos mostrar, que

$$
\operatorname{Rm}(V,W)U = \operatorname{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}(V,W)U + \frac{\left\|\nabla^{\mathcal{B}} h_\alpha\right\|^2}{\left(h_\alpha\right)^2} \cdot \left\{ g(V,U)\, W - g(W,U)\, V \right\}
$$

■

Lema (L.8). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g = g_{\mathcal{B}} \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$. Suponha que $X, Y, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\alpha)$ e $W \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_\eta)$. Então:

(1) $\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{Ric}_{\mathcal{B}}(X,Y) - \sum_{1 \leq \mu \leq k} \frac{d_\mu}{h_\mu} \nabla^2_{\mathcal{B}}(h_\mu)(X,Y)$.

(2) $\mathrm{Ric}(X,V)=0$.

(3) $\mathrm{Ric}(V,W)=0$ se $\alpha\neq\eta$.

(4)

$$\mathrm{Ric}(V,W)=\mathrm{Ric}^{\mathcal{N}_\alpha}(V,W)-\left(\begin{array}{c}\dfrac{\Delta_{\mathcal{B}}h_\alpha}{h_\alpha}+(d_\alpha-1)\,\dfrac{\|\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2}\\[2em] +\displaystyle\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\ \gamma\neq\alpha}}d_\gamma\,\dfrac{g_{\mathcal{B}}\left(\nabla^{\mathcal{B}}h_\gamma,\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\right)}{h_\gamma\,h_\alpha}\end{array}\right)g(V,W)\,,\ \text{se } \alpha=\eta.$$

Demonstração: Primeiramente, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y)&=\sum_{1\le i\le r}\mathrm{Rm}\left(\mathbf{e}_{(0,i)},X,Y,\mathbf{e}_{(0,i)}\right)+\sum_{\substack{1\le\mu\le k\\1\le\beta\le d_\mu}}\mathrm{Rm}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\mu,\beta)},X,Y,\widetilde{\mathbf{e}}_{(\mu,\beta)}\right)\\&=\mathrm{Ric}^{\mathcal{B}}(X,Y)+\sum_{\substack{1\le\mu\le k\\1\le\beta\le d_\mu}}g\left(-\frac{\left(\nabla^2_{\mathcal{B}}h_\mu\right)(X,Y)}{h_\mu}\,\widetilde{\mathbf{e}}_{(\mu,\beta)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\mu,\beta)}\right)\\&=\mathrm{Ric}^{\mathcal{B}}(X,Y)-\sum_{1\le\mu\le k}\frac{d_\mu}{h_\mu}\left(\nabla^2_{\mathcal{B}}h_\mu\right)(X,Y)\end{aligned}$$

Pela $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$-bilinearidade de Ric, para provar os itens restantes podemos supor sem perda de generalidade que $V=\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}$ e $W=\widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)}$. Temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,V)&=\sum_{1\le i\le r}g\left(\mathrm{Rm}\left(\mathbf{e}_{(0,i)},X\right)V,\mathbf{e}_{(0,i)}\right)+\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\1\le\ell\le d_\gamma}}g\left(\mathrm{Rm}\left(\mathbf{e}_{(\gamma,\ell)},X\right)V,\mathbf{e}_{(\gamma,\ell)}\right)\\&=-\sum_{1\le i\le r}\underbrace{g\left(\mathrm{Rm}\left(\mathbf{e}_{(0,i)},X\right)\mathbf{e}_{(0,i)},V\right)}_{=0,\text{ por } \mathbf{(1)} \text{ de } \mathbf{(L.7)}}-\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\1\le\ell\le d_\gamma}}\underbrace{g\left(\mathrm{Rm}\left(X,\mathbf{e}_{(\gamma,\ell)}\right)\mathbf{e}_{(\alpha,\beta)},\mathbf{e}_{(\gamma,\ell)}\right)}_{=0,\text{ por } \mathbf{(3)} \text{ e } \mathbf{(8)} \text{ de } \mathbf{(L.7)}}\\&=0\end{aligned}$$

Se $\alpha\neq\eta$, temos:

$$\mathrm{Ric}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)}\right)=\sum_{1\le i\le r}\underbrace{g\left(\mathrm{Rm}\left(\mathbf{e}_{(0,i)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)\widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)},\mathbf{e}_{(0,i)}\right)}_{=0,\text{ por } \mathbf{(3)} \text{ de } \mathbf{(L.7)}}+\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\1\le p\le d_\gamma}}g\left(\mathrm{Rm}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)\widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}\right)$$

É óbvio que os termos do último somatório do lado direito acima todos se anulam. De fato, se $\gamma=\alpha$ isso é absolutamente trivial, e quando γ,α e η são todos distintos, o item **(3)** do lema **(L.5)** garante que

$$\mathrm{Rm}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)\widetilde{\mathbf{e}}_{(\eta,\xi)}=0$$

Agora, quando $\alpha=\eta$, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}\right)&=\sum_{1\le i\le r}g\left(\mathrm{Rm}\left(\mathbf{e}_{(0,i)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)},\mathbf{e}_{(0,i)}\right)+\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\1\le p\le d_\gamma}}g\left(\mathrm{Rm}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}\right)\\&=\sum_{1\le i\le r}g\left(\frac{-\delta_{\beta\xi}}{h_\alpha}\,\nabla^{\mathcal{B}}_{\mathbf{e}_{(0,i)}}\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha,\mathbf{e}_{(0,i)}\right)+\sum_{1\le p\le d_\alpha}g\left(\mathrm{Rm}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)}\right)\end{aligned}$$

$$+\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\ \gamma\ne\alpha\\ 1\le p\le d_\gamma}} g\left(\mathrm{Rm}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}\right)$$

$$=-\frac{\delta_{\beta\xi}}{h_\alpha}\,\Delta_{\mathcal{B}}h_\alpha$$

$$+\sum_{1\le p\le d_\alpha} g\left(\mathrm{Rm}^{\mathcal{N}_\alpha}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}\right)\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}+\frac{\|\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2}\left\{\delta_{p\xi}\,\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)}-\delta_{\beta\xi}\,\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)}\right\},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,p)}\right)$$

$$-\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\ \gamma\ne\alpha\\ 1\le p\le d_\gamma}} g\left(\delta_{\beta\xi}\,\frac{g_{\mathcal{B}}\left(\nabla^{\mathcal{B}}h_\gamma,\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\right)}{h_\gamma\,h_\alpha}\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\gamma,p)}\right)$$

$$=-\frac{\delta_{\beta\xi}}{h_\alpha}\,\Delta_{\mathcal{B}}h_\alpha+\mathrm{Ric}^{\mathcal{N}_\alpha}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}\right)+\frac{\|\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2}\,\delta_{\beta\xi}-\frac{\|\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2}\,\delta_{\beta\xi}\,d_\alpha$$

$$-\,\delta_{\beta\xi}\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\ \gamma\ne\alpha}} d_\gamma\,\frac{g_{\mathcal{B}}\left(\nabla^{\mathcal{B}}h_\gamma,\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\right)}{h_\gamma\,h_\alpha}$$

$$=\mathrm{Ric}^{\mathcal{N}_\alpha}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}\right)-\begin{pmatrix}\dfrac{\Delta_{\mathcal{B}}h_\alpha}{h_\alpha}+(d_\alpha-1)\,\dfrac{\|\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2}\\[2ex] +\displaystyle\sum_{\substack{1\le\gamma\le k\\ \gamma\ne\alpha}} d_\gamma\,\frac{g_{\mathcal{B}}\left(\nabla^{\mathcal{B}}h_\gamma,\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\right)}{h_\gamma\,h_\alpha}\end{pmatrix} g\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\beta)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\xi)}\right)$$

■

Lema (L.9). Seja $\mathcal{M}=B\times_{h_1}\mathcal{N}_1^{d_1}\times\cdots\times_{h_k}\mathcal{N}_k^{d_k}$ um produto warped múltiplo com métrica $g=g_B\oplus h_1^2g_{\mathcal{N}_1}\oplus\cdots\oplus h_k^2g_{\mathcal{N}_k}$. Então a curvatura escalar de $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{aligned}R=R_B-2\sum_{1\le i\le k}d_i\frac{\Delta_Bh_i}{h_i}+\sum_{1\le i\le k}\frac{R_{\mathcal{N}_i}}{h_i^2}-\sum_{1\le i\le k}d_i(d_i-1)\frac{\|\mathrm{grad}_Bh_i\|_B^2}{h_i^2}\\ +\sum_{1\le i\le k}\sum_{\substack{1\le\ell\le k\\ \ell\ne i}}d_id_\ell\frac{g_B(\mathrm{grad}_Bh_i,\mathrm{grad}_Bh_\ell)}{h_ih_\ell}\end{aligned}\tag{8}$$

Demonstração: Temos

$$R=\sum_{1\le i\le r}\mathrm{Ric}\left(\mathbf{e}_{(0,i)},\mathbf{e}_{(0,i)}\right)+\sum_{\substack{1\le\alpha\le k\\ 1\le\varphi\le d_\alpha}}\mathrm{Ric}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}\right)$$

$$=R_{\mathcal{B}}-\sum_{\substack{1\le\mu\le k\\ 1\le i\le r}}\frac{d_\mu}{h_\mu}\left(\nabla^2_{\mathcal{B}}h_\mu\right)\left(\mathbf{e}_{(0,i)},\mathbf{e}_{(0,i)}\right)$$

$$+\sum_{\substack{1\leq\alpha\leq k\\1\leq\varphi\leq d_\alpha}}\mathrm{Ric}^{\mathcal{N}_\alpha}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}\right)-\sum_{\substack{1\leq\alpha\leq k\\1\leq\varphi\leq d_\alpha}}\begin{pmatrix}\dfrac{\Delta_{\mathcal{B}}h_\alpha}{h_\alpha}+(d_\alpha-1)\,\dfrac{\|\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\|^2}{(h_\alpha)^2}\\ \\ +\displaystyle\sum_{\substack{1\leq\gamma\leq k\\\gamma\neq\alpha}}d_\gamma\,\dfrac{g_{\mathcal{B}}\left(\nabla^{\mathcal{B}}h_\gamma,\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\right)}{h_\gamma\,h_\alpha}\end{pmatrix}g\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)},\widetilde{\mathbf{e}}_{(\alpha,\varphi)}\right)$$

$$=R_{\mathcal{B}}-2\sum_{1\leq\mu\leq k}d_\mu\frac{\Delta_{\mathcal{B}}h_\mu}{h_\mu}+\sum_{1\leq\mu\leq k}\frac{R_{\mathcal{N}_\mu}}{(h_\mu)^2}-\sum_{1\leq\mu\leq k}d_\mu\,(d_\mu-1)\,\frac{\|\mathrm{grad}_{\mathcal{B}}h_\mu\|^2}{(h_\mu)^2}$$
$$+\sum_{1\leq\alpha\leq k}\sum_{\substack{1\leq\gamma\leq k\\\gamma\neq\alpha}}d_\alpha\,d_\gamma\,\frac{g_{\mathcal{B}}\left(\nabla^{\mathcal{B}}h_\gamma,\nabla^{\mathcal{B}}h_\alpha\right)}{h_\gamma\,h_\alpha}$$

■

Exemplo (E.1). Para este exemplo, lembramos primeiramente que uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M},g)$ tem curvatura seccional constante igual a $S\in\mathbb{R}$ se, e somente se, seu tensor de curvatura é dado por

$$\mathrm{Rm}=S\ (g\owedge g)$$

(onde $\owedge$ denota o produto de Kulkarni-Nomizu), ou, equivalentemente, se e só se,

$$\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W)=S\ (g(X,W)\,g(Y,Z)-g(X,Z)\,g(Y,W))$$

sejam quais forem $X,Y,Z,W\in\Gamma\,(T\mathcal{M})$. Agora, denotando

$$\mathbb{Q}^n(\kappa)\doteq\begin{cases}\mathbb{R}^n,\ \text{se }\kappa=0\\\mathbb{S}^n,\ \text{se }\kappa=1\\\mathbb{H}^n,\ \text{se }\kappa=-1\end{cases}$$

Temos (conforme demonstrado em [4]) que o tensor Riemanniano de $\mathcal{I}\times_h\mathbb{Q}^n(\kappa)$ (onde $\mathcal{I}\subset\mathbb{R}$ é um intervalo aberto e h é uma função real suave e positiva definida em $\mathcal{I}$) é dado por

$$\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W)=\left(\frac{(h')^2-\kappa}{h^2}\circ\pi_{\mathcal{I}}\right)(g(X,Z)\,g(Y,W)-g(X,W)\,g(Y,Z))$$
$$+\left(\frac{h\,h''-(h')^2+\kappa}{h^2}\circ\pi_{\mathcal{I}}\right)\begin{pmatrix}g(X,Z)\,g\,(Y,\partial_t)\ g\,(W,\partial_t)-g(Y,Z)\,g\,(X,\partial_t)\ g\,(W,\partial_t)\\ \\ -\,g(X,W)\,g\,(Y,\partial_t)\ g\,(Z,\partial_t)+g(Y,W)\,g\,(X,\partial_t)\ g\,(Z,\partial_t)\end{pmatrix}$$

Em particular, $\mathcal{I}\times_h\mathbb{Q}^n(\kappa)$ tem curvatura seccional constante igual a $C\in\mathbb{R}$ se, e somente se,

$$-C=\frac{(h')^2-\kappa}{h^2}\text{ é constante e }\frac{h''}{h}=\frac{(h')^2-\kappa}{h^2}$$

Consequentemente,

$\mathbb{S}^n$ é localmente isométrico a $\mathcal{I}\times_{\mathrm{sen(t)}}\mathbb{S}^{n-1}$
$\mathbb{H}^n$ é localmente isométrico a $\mathcal{I}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}$ e a $\mathcal{I}\times_{\mathrm{senh}(t)}\mathbb{S}^{n-1}$
$\mathbb{R}^n$ é localmente isométrico a $\mathcal{I}\times_t\mathbb{S}^{n-1}$

Pelo lema a seguir, a variedade Riemanniana do exemplo **(E.2)** é localmente conformemente plana.

Lema (L.10). Seja $\mathcal{M} = \mathcal{I} \times_h \mathcal{N}$ um produto warped. Então

$$\mathcal{M} \text{ é localmente conformemente plana } \iff (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \text{ tem curvatura seccional constante}$$

Demonstração: Consulte [5].

■

Exemplo (E.2) (Sóliton de Bryant). Seja $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ a métrica usual na esfera redonda unitária $(n-1)$-dimensional. Procuraremos sólitons de Ricci steady que surgem como produtos warped em $(0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$. Consideremos então métricas da forma

$$g = \mathrm{d}r^2 + (\phi(r))^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Tomando um referencial ortonormal local em $\mathbb{S}^{n-1}$, digamos

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right\}_{1\le i\le n-1}$$

vemos que $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right\}_{1\le i\le n-1}$ é um referencial ortonormal local em $(0,\infty)\times_\phi \mathbb{S}^{n-1}$. Pelo item item (8) do lema **(L.7)**, vemos que a curvatura radial de um plano passando pelo vetor radial $\frac{\partial}{\partial r}$ é dada por

$$\begin{aligned}
K_{\text{rad}} = K\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right) &= g\left(\mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right)\frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial r}\right)\\
&= \frac{1}{\phi^2}\cdot g(\mathrm{Rm}(\partial_r, \partial_{\theta^i})\partial_{\theta^i}, \partial_r)\\
&= -\frac{1}{\phi^2}\cdot\frac{\phi^2}{\phi}\cdot\phi''\\
&= -\frac{\phi''}{\phi}
\end{aligned}$$

Analogamente, usando o item item (9) do lema do lema **(L.7)**, vemos que a curvatura seccional de um plano P_{sph} perpendicular a $\frac{\partial}{\partial r}$ é dada por

$$\begin{aligned}
K_{\text{sph}} = K\left(\frac{1}{\phi}\partial_{\theta^i}, \frac{1}{\phi}\partial_{\theta^j}\right) &= \frac{1}{\phi^4}\cdot g\left(\mathrm{Rm}(\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j})\partial_{\theta^j}, \partial_{\theta^i}\right)\\
&= \frac{1}{\phi^4}\cdot\phi^2\cdot g_{\mathbb{S}^{n-1}}\left([\pi^*_{\mathbb{S}^{n-1}}\mathrm{Rm}]\left(\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j})\partial_{\theta^j}\right), \partial_{\theta^i}\right)\\
&= \frac{1}{\phi^2}\cdot\left(1 - \frac{(\phi')^2}{\phi^2}\cdot\phi^2\right)\\
&= \frac{1-(\phi')^2}{\phi^2}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \sum_{1\le i\le n-1} K_{\text{rad}} = -(n-1)\frac{\phi''}{\phi}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i},\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right) &= \phi^2\cdot\operatorname{Ric}\left(\frac{1}{\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta^i},\frac{1}{\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right)\\ &= \phi^2\cdot\left(\left[\sum_{\substack{1\le i\le n-2\\ i\le j}} K_{\text{sph}}\right]+K_{\text{rad}}\right)\\ &= (n-2)\left(1-(\phi')^2\right)-\phi\phi''\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\operatorname{Ric}(g) = -(n-1)\frac{\phi''}{\phi}\cdot \mathrm{d}r^2+\left((n-2)\left(1-(\phi')^2\right)-\phi\phi''\right)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Agora, como consequência direta do lema **(L.6)**, temos também

$$\nabla^2 f = f''(r)\cdot \mathrm{d}r^2+\phi\phi' f'\cdot g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Vemos que a equação para os sólitons de Ricci steady $\operatorname{Ric}(g)+\nabla^2 f = 0$ nesse caso é equivalente ao seguinte sistema de EDOs de segunda ordem:

$$\begin{cases} f'' = (n-1)\dfrac{\phi''}{\phi}\\ \phi\phi' f' = -(n-2)\left(1-(\phi')^2\right)+\phi\phi''\end{cases}$$

Estudando detalhadamente esse sistema, pode-se provar a existência de um sóliton de Ricci gradiente steady rotacionalmente simétrico e completo, que é único a menos de homotetias.

Referências

[1] **Horácio, M.A.R.M.** One chart to rule them all. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: **https://github.com/SaganGromov**. Acessado em 12 de fevereiro de 2023.

[2] **Tu, Loring W.** Differential geometry. Connections, curvature, and characteristic classes. Graduate Texts in Mathematics, 275. *Springer, Cham,* 2017. xvi+346 pp. ISBN: 978-3-319-55082-4; 978-3-319-55084-8.

[3] **Dobarro, Fernando; Ünal, Bülent.** Curvature of multiply warped products. *J. Geom. Phys.* **55** (2005), no. 1, 75–106. **MR2157416.**

[4] **Marie-Amélie Lawn, Miguel Ortega,** A fundamental theorem for hypersurfaces in semi-Riemannian warped products, Journal of Geometry and Physics, Volume **90**, 2015, Pages 55-70, ISSN 0393-0440, **https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2015.01.002.**

[5] **Brozos-Vázquez, M.; García-Río, E.; Vázquez-Lorenzo, R.** Warped product metrics and locally conformally flat structures. *Mat. Contemp.* 28 (2005), 91–110. **MR2195191.**