Referenciais geodésicos

UMa das ferramentais mais úteis aos cálculos de geometria Riemanniana é o uso de *referenciais geodésicos*. Duas perguntas que surgem naturalmente aos alunos são as seguintes:

- como provar a existência de refenciais geodésicos?
- porque não há perda de generalidade nos cálculos ao usar referenciais geodésicos?

O propósito desse texto é responder a primeira pergunta. Para ver uma resposta em detalhes da segunda, consulte [1].

Definição (D.1). Geodésicas partindo de p cujas imagens estão contidas numa vizinhança normal de p são chamadas de *geodésicas radiais*.

Teorema (T.1). *Seja $(\mathcal{M}^n, g)$ uma variedade Riemanniana e $p \in \mathcal{M}$ um ponto arbitrariamente fixado. Então existe uma vizinhança $U_p \ni p$ e um referencial local $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \Gamma(TU_p)$ que satisfaz*

$$g(E_i(q), E_j(q)) = \delta_{ij} \ \forall q \in U_p, \ \text{ e } \nabla_{E_i(p)} E_j = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$.

Demonstração: Seja U_p uma vizinhança normal de p e fixe uma base ortonormal $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de $T_p\mathcal{M}$. Essa base induz um isomorfismo

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R}^n &\to T_p\mathcal{M} \\ (x^1, \cdots, x^n) &\mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} x^i\, b_i. \end{aligned}$$

Considere agora a carta $\varphi = \left(\exp_p \circ B\right)^{-1}$ em torno de p e seja $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$ sua base coordenada associada. Uma vez que

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p &= \mathrm{d}(\exp_p \circ B) \left(\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_0 \right) \\ &= \underbrace{\mathrm{d}(\exp_p)_0}_{=\mathrm{Id}_{T_p\mathcal{M}}} \circ \underbrace{\mathrm{d}B_0}_{=B} \left(\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_0 \right) \\ &= B \left(\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_0 \right) \\ &= b_i, \end{aligned}$$

segue que $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$ é uma base ortonormal de $T_p\mathcal{M}$, de forma que podemos portanto definir $E_i(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ para cada $1 \leq i \leq n$. Para estender tal base a um referencial ortonormal local, basta lembrarmos do fato de que o transporte paralelo é uma isometria e realizarmos o transporte paralelo ao longo de geodésicas radiais. Mais precisamente, para cada $q \in U_p$, existe uma única geodésica radial $\gamma_{p,q} : [0,1] \to \mathcal{M}$ ligando p e q, e podemos então definir

$$E_i(q) = P_{\gamma_{p,q},0,1}(E_i(p)).$$

Em respeito à carta φ, é claro que a representação em coordenadas da única geodésica $\gamma_v : I \to \mathcal{M}$ partindo de p com velocidade inicial $v \in T_p\mathcal{M}$ é dada por $t \mapsto tv$, e portanto a equação das geodésicas se escreve como

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\gamma_v(t)\right)^k + \sum_{1\leq i,j\leq n} \Gamma_{ij}^k\left(\gamma(t)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_v(t)\right)^i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_v(t)\right)^j = 0,\ \forall t \in I \text{ e } \forall 1 \leq k \leq n.$$

Em particular, temos

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \Gamma_{ij}^k(p)\, v^i v^j = 0,\ \forall v = \sum_{1\leq i\leq n} v^i b_i \in T_p\mathcal{M},\ \text{seja qual for } 1 \leq k \leq n.$$

Fazendo $v = \partial_a$ para qualquer $1 \leq a \leq n$ fixado, concluímos que $\Gamma_{aa}^k(p) = 0$ sejam quais forem $1 \leq a, k \leq n$. Finalmente, fazendo $v \in \{\partial_a + \partial_b, \partial_b - \partial_a\}$ para quaisquer indíces fixados $1 \leq a, b \leq n$ e subtraindo as equações resultantes, obtemos $\Gamma_{ab}^k(p) = 0$ para quaiquer $1 \leq a, b, k \leq n$, donde segue que $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ sejam quais forem $1 \leq i, j \leq n$.

■

Observação (O.1). É fácil verificar que em coordenadas normais, todas as primeiras derivadas parciais de g_{ij} se anulam em p. Isso mostra que não existem invariantes geométricos de ordem < 2. Como visto em [4], tal fato também pode ser visto pela expansão da métrica em coordenadas normais, dada por

$$g_{ij}(t) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \mathrm{Rm}_{ik\ell j}\, x^k\, x^\ell + O\left(|t|^3\right).$$

Observação (O.2). Pela tensorialidade de ∇ na primeira entrada, é claro também que o referencial geodésico do lema **(L.1)** satisfaz

$$\nabla_v E_i = 0,$$

seja qual for $v \in T_p\mathcal{M}$.

Referências

[1] **Horácio, M.A.R.M.** One chart to rule them all. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: https://github.com/SaganGromov. Acessado em 12 de fevereiro de 2023.

[2] **Horácio, M.A.R.M.** Estimativas de curvatura para sólitons de Ricci gradiente quadridimensionais. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, (2023).

[3] **Lee, John M.** Introduction to smooth manifolds. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013. xvi+708 pp. ISBN: 978-1-4419-9981-8.

[4] **Lee, John M.** Introduction to Riemannian manifolds. Second edition of [MR1468735]. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham, 2018. xiii+437 pp. ISBN: 978-3-319-91754-2; 978-3-319-91755-9.