



# Universidade de Brasília

## Perguntas para preparação ao exame de qualificação em Análise (Segunda Área)

Para ter acesso à versão mais recente, consulte o link abaixo:

[https://horatiomarm.com/meus\\_textos/preparatorio\\_exame.pdf](https://horatiomarm.com/meus_textos/preparatorio_exame.pdf)

Correções e sugestões de melhorias são bem-vindas, envie-as para [matheus.andrade5488@gmail.com](mailto:matheus.andrade5488@gmail.com)

Versão 16 de março de 2025 às 00h26m

Departamento de Matemática,  
Universidade de Brasília

Brasília, Março de 2025

---

# Agradecimentos

---

Agradeço a Gabriel Nogueira, Jonatas Peralta, Jeverson Silva, Jailson Oliveira e Thiago Guimarães pelas prévias, que ajudaram demais! Valeu!!!

Agradeço também à Franchesca Cappellesso pelo empréstimo de muitos materiais de estudo, que foram essenciais. Valeu!!!

# Sumário

1	Operadores lineares contínuos	4
2	Teoremas de Hahn-Banach	11
3	Topologias Fraca e Fraca*	16
4	Espaços de Hilbert	26
5	Teoria Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos	32
6	Espaços de Sobolev	37
7	Equações Lineares Elípticas de Segunda ordem	46
8	Regularidade de Soluções de EDPs Elípticas	53
9	Perguntas do meu exame	63
	Apêndice	68
	Bibliografia	72

# Capítulo 1

## Operadores lineares contínuos

### Pergunta 1.

$E'$  é Banach? Justifique.

**Solução:** Sim, pois  $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , e  $\mathcal{L}(E, F)$  é Banach sempre que  $F$  for. De fato:

**Proposição (P.1.1).**  $L(E, F)$  é Banach sempre que  $F$  é Banach.

**Demonstração:** Seja  $(T_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(E, F)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$  sempre que  $n, m \geq n_0$ . Logo

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (2.1)$$

para todos  $x \in E$  e  $n, m \geq n_0$ . Segue que para cada  $x \in E$ , a sequência  $(T_n(x))_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $F$ , logo convergente pois  $F$  é Banach. Podemos então definir

$$T : E \longrightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

A linearidade de  $T$  segue das propriedades dos limites. Fazendo  $m \longrightarrow \infty$  em (2.1) obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (2.2)$$

para todos  $x \in E$  e  $n \geq n_0$ . Em particular,

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

para todo  $x \in E$ , o que nos garante que  $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$ . Portanto  $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$ . De (2.2) segue também que  $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ , e assim segue que  $T_n \longrightarrow T$  em  $\mathcal{L}(E, F)$ .

■



### Pergunta 2.

O que é uma base de Schauder? Dê um exemplo de um sistema ortonormal completo para um espaço de dimensão infinita.

**Solução:** Seja  $E$  um espaço de Banach. Uma base de Schauder para  $E$  é um conjunto de vetores

$$\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$$

tal que todo vetor  $x \in E$  pode ser escrito de maneira única como uma série infinita

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

para alguns escalares únicos  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

**Definição (D.1.1).** Seja  $H$  um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que  $S = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset H$  é um **sistema ortonormal** se  $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = 0$  para todos  $\alpha \neq \beta$  e  $\|e_\lambda\| = 1$  para todo  $\lambda$ . Dizemos que um sistema ortonormal  $S$  é **completo** se não existir nenhum sistema ortonormal em  $H$  que contenha  $S$  propriamente.

**Definição (D.1.2).** Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Definimos o espaço  $\ell^p(n)$  como sendo o espaço  $\mathbb{R}^n$  dotado da norma

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1.1)$$

se  $1 \leq p < \infty$ , e

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (1.2)$$

Em  $\ell^2(n)$ , a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  é um sistema ortonormal completo. Em  $\ell^2$ , a base canônica

$$(e_n)_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = n, \\ 0, & \text{se } i \neq n, \end{cases}$$

é um sistema ortonormal completo. Se  $\Omega$  é um aberto limitado, em  $L^2(\Omega)$ , as autofunções do operador Laplaciano, isto é, as soluções linearmente independentes do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

formam um sistema ortonormal completo.



**Pergunta 3.**

Enuncie os teoremas de Banach-Steinhaus, da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado.

**Solução:**

**Teorema (T.1.1) (Banach-Steinhaus/Princípio da limitação uniforme).** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado e  $(T_i)_{i \in I}$  uma família de operadores em  $\mathcal{L}(E; F)$  satisfazendo a condição de que para cada  $x \in E$  existe  $C_x < \infty$  tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x. \quad (1.3)$$

*Então  $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$ .*

**Teorema (T.1.2) (Teorema da Aplicação Aberta).** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T : E \rightarrow F$  linear, contínuo e sobrejetor. Então  $T$  é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

**Teorema (T.1.3) (Teorema do Gráfico Fechado).** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T : E \rightarrow F$  um operador linear. Então  $T$  é contínuo se, e somente se,  $G(T)$  é fechado em  $E \times F$ .*

■

**Pergunta 4.**

Qual é o teorema principal que se usa na prova do Teorema de Banach-Steinhaus? Aplicação deste teorema.

**Solução:** O teorema principal usado é

**Teorema (T.1.4) (Teorema de Baire).** *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $(F_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de subconjuntos fechados de  $M$  tais que*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

*Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $F_{n_0}$  tem interior não-vazio.*

Da Análise na Reta sabemos que o limite uniforme de funções contínuas definidas em um intervalo da reta tomando valores na reta é uma função contínua, enquanto que o limite pontual de funções contínuas pode não ser uma função contínua. Veremos abaixo que, na presença da linearidade, a convergência pontual é suficiente.

**Corolário (C.1.1).** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado e  $(T_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $\mathcal{L}(E; F)$  tal que  $(T_n(x))_{n=1}^\infty$  é convergente em  $F$  para todo  $x$  em  $E$ . Se definirmos*

$$T : E \rightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x),$$

então  $T$  é um operador linear contínuo.

**Demonstração:** A linearidade de  $T$  segue das propriedades aritméticas dos limites. Por hipótese, para cada  $x \in E$  a sequência  $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$  é convergente, e portanto limitada. Assim  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$  para todo  $x \in E$ . Pelo Teorema 2.3.2 existe  $c > 0$  tal que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \leq c$ . Segue então que

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq c\|x\|$$

para todos  $x \in E$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  obtemos  $\|T(x)\| \leq c\|x\|$  para todo  $x \in E$ , o que completa a demonstração de que  $T$  é contínuo. ■

#### Pergunta 5.

Qual é o teorema principal que se usa na prova do Teorema da Aplicação Aberta? Aplicação deste teorema.

**Solução:** O teorema principal usado é o Teorema de Baire, enunciado em (T.1.4). Algumas aplicações muito úteis são as seguintes:

**Corolário (C.1.2).** *Sejam  $E, F$  espaços de Banach. Se  $T : E \rightarrow F$  é uma aplicação linear limitada bijetiva, então a aplicação linear  $T^{-1} : F \rightarrow E$  é contínua.*

**Corolário (C.1.3).** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Se  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  são duas normas tais que existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \text{para todo } x \in E,$$

*então elas são normas equivalentes.* ■

#### Pergunta 6.

Não podemos dispensar a hipótese da sobrejetividade no Teorema da Aplicação Aberta, por quê? Os espaços têm que ser Banach, por quê?

**Solução:** A sobrejetividade é necessária, pois toda aplicação linear aberta é sobrejetiva (dada uma bola aberta centrada na origem do domínio, a sua imagem por  $T$  contém uma bola centrada na origem do contra-domínio, donde a sobrejetividade segue facilmente por linearidade). O exemplo abaixo mostra que a hipótese dos espaços serem completos é essencial:

**Exemplo (E.1.1).** Por  $c_0$  denotamos o conjunto de todas as seqüências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixado  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,

$$c_0 = \left\{ (a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \longrightarrow 0 \right\}.$$

É claro que  $c_0$  é um espaço vetorial com as operações usuais de seqüências (operações coordenada a coordenada). É fácil comprovar que a expressão

$$\left\| (a_k)_{k=1}^{\infty} \right\|_{\infty} = \sup \left\{ |a_k| : k \in \mathbb{N} \right\}$$

torna  $c_0$  um espaço normado. Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência de Cauchy em  $c_0$ . Digamos que  $x_n = (a_n^k)_{k=1}^{\infty}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , a desigualdade

$$\left| a_n^j - a_m^j \right| \leq \sup \left\{ |a_n^k - a_m^k| : k \in \mathbb{N} \right\} = \|x_n - x_m\|_{\infty}$$

deixa claro que a seqüência de escalares  $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy em  $\mathbb{K}$ , logo convergente. Digamos  $a_n^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_j$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Chamando  $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$  não é difícil checar que  $x \in c_0$  e que  $x_n \longrightarrow x$  em  $c_0$ . Concluimos então que  $c_0$  é um espaço de Banach.

Chame agora de  $c_{00}$  o subespaço de  $c_0$  formado pelas seqüências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \left\{ (a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0 : \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0 \right\}.$$

Considere os seguintes vetores de  $c_{00}$ :

$$x_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right), \dots, \quad x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right), \dots$$

É claro que  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma seqüência em  $c_{00}$ . Tomando  $x = \left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty} \in c_0$ , de

$$\|x_n - x\|_{\infty} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0,$$

concluimos que  $x_n \longrightarrow x$  em  $c_0$ . Como  $x \notin c_{00}$  segue que  $c_{00}$  é um subespaço não-fechado de  $c_0$ . Da proposição a seguir, segue que  $c_{00}$  é um espaço normado incompleto.

**Proposição (P.1.2).** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $F$  um subespaço vetorial de  $E$ . Então  $F$  é um espaço de Banach, com a norma induzida de  $E$ , se, e somente se,  $F$  é fechado em  $E$ .*

**Demonstração:** Suponha  $F$  Banach e tome  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência em  $F$  tal que  $x_n \longrightarrow x \in E$ . Então  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy em  $F$ , e portanto convergente pois  $F$  é completo por hipótese. Existe então  $y \in F$  tal que  $x_n \longrightarrow y$ . Da unicidade do limite temos  $x = y \in F$ , provando que  $F$  é fechado em  $E$ .

Reciprocamente, suponha  $F$  fechado em  $E$  e seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência de Cauchy em  $F$ . Logo  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy em  $E$ , e portanto existe  $x \in E$  tal que  $x_n \longrightarrow x$ . Como  $F$  é fechado segue que  $x \in F$ , o que prova que  $F$  é completo.



Seja agora  $T : c_{00} \longrightarrow c_{00}$  o operador linear dado por

$$T\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right).$$

$T$  é evidentemente linear, bijetor e contínuo, mas o operador inverso  $T^{-1}$  não é contínuo, pois a imagem do conjunto limitado  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por  $T^{-1}$  é ilimitada.

### Pergunta 7.

Qual é o teorema principal que se usa na prova do Teorema do Gráfico Fechado? Aplicação deste teorema.

**Solução:** O teorema principal usado é o Teorema da Aplicação Aberta.

A grande utilidade do Teorema do Gráfico Fechado reside na seguinte observação: para mostrar a continuidade de um operador  $T : E \longrightarrow F$  (linear ou não) via definição, devemos provar que, para toda sequência convergente  $x_n \longrightarrow x$  em  $E$ , é verdade que:

- (a)  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$  é convergente em  $F$ , isto é, existe  $y \in F$  tal que  $T(x_n) \longrightarrow y$ ;
- (b)  $y = T(x)$ .

Em geral, provar (a), isto é, provar que  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$  converge, é uma tarefa difícil, especialmente em dimensão infinita. O Teorema do Gráfico Fechado nos fornece, no caso em que  $T$  é linear e atua entre espaços de Banach, o item (a) gratuitamente, ou seja, podemos supor a convergência de  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ , restando apenas verificar (b). O exemplo a seguir ilustra o que acabamos de dizer:

**Exemplo (E.1.2).** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T : E \longrightarrow E'$  um operador linear *simétrico*, isto é,  $T$  é linear e

$$T(x)(y) = T(y)(x) \text{ para todos } x, y \in E.$$

Mostremos que  $T$  é contínuo. Em vista do Teorema do Gráfico Fechado, basta verificar que  $G(T)$  é fechado. Para isto, seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência convergindo para  $x$  em  $E$  e suponha que  $T(x_n) \longrightarrow \varphi$  em  $E'$ . Fixado  $y \in E$ , tomando o limite quando  $n \longrightarrow \infty$ ,

$$\varphi(y) \longleftarrow T(x_n)(y) = T(y)(x_n) \longrightarrow T(y)(x) = T(x)(y),$$

o que nos permite concluir que  $T(x)(y) = \varphi(y)$ . Como  $y \in E$  foi escolhido arbitrariamente, segue que  $\varphi = T(x)$ , e portanto  $G(T)$  é fechado.

**Pergunta 8.**

Os teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado são equivalentes? Justifique.

**Solução:** Sim, são equivalentes. Veja esse [post no MSE](#) e esse [blog](#).



---

# Capítulo 2

## Teoremas de Hahn-Banach

---

**Teorema (T.2.1) (Teorema de Hahn–Banach – caso real).** *Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e  $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz*

$$p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in E, \quad (2.1)$$

e

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

*Sejam também  $G$  um subespaço vetorial de  $E$  e  $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear tal que  $\varphi(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in G$ . Então existe um funcional linear  $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$  que estende  $\varphi$ , isto é  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$  para todo  $x \in G$ , e que satisfaz  $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in E$ .*

**Corolário (C.2.1) (Teorema de Hahn–Banach).** *Seja  $G$  um subespaço de um espaço normado  $E$  sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e seja  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo  $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$  cuja restrição a  $G$  coincide com  $\varphi$  e  $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ .*

**Corolário (C.2.2).** *Se  $0 \neq x_0 \in E$ , onde  $E$  é um e.v. real,  $\exists f_0 \in E'$  tal que  $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$  e  $\|f_0\| = \|x_0\|$ .*

**Demonstração:** Ponha  $G = \langle x_0 \rangle$  e defina  $g$  por  $G \ni tx_0 \mapsto g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ . É fácil verificar que  $g$  é limitada e tem norma  $= \|x_0\|$ .

■

**Corolário (C.2.3).** *Seja  $x \in E$ , onde  $E$  é um espaço vetorial normado sobre os reais. Então*

$$\|x\| = \sup_{0 \neq f \in E'} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|f\|}$$

**Pergunta 9.**

O Teorema de Hahn-Banach vale para espaços de Hilbert? Vale para espaços de dimensão finita? Sabe provar?

**Solução:** Sim, vale, pois por definição todo espaço de Hilbert (ou espaço de dimensão finita) é um espaço vetorial. Porém, nesses casos a prova é bem mais simples. De fato, se  $H$  é um espaço de Hilbert, basta usar o seguinte

**Teorema (T.2.2) (Teorema da representação de Riesz).** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear contínuo. Então existe um único  $y_0 \in H$  tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \text{ para todo } x \in H.$$

Além disso,  $\|\varphi\| = \|y_0\|$ .

Em espaços de dimensão finita veja [esse post do MSE](#).

■

**Pergunta 10.**

Sejam  $H$  um espaço de Hilbert,  $F$  um subespaço fechado de  $H$  e  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear limitada (ou seja,  $\varphi \in F'$ ). Prove que existe uma única extensão linear limitada  $\psi : H \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\varphi$  tal que  $\|\psi\| = \|\varphi\|$ .

**Solução:** a ser preenchido

■

**Pergunta 11.**

Considere  $F = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  com a norma da soma, e  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Note que podemos estender (preservando normas ainda, ao munir  $\mathbb{R}^2$  com a norma da soma)  $\varphi$  via

$$g(x, y) = x + y \quad \text{e} \quad h(x, y) = x - y.$$

Por que isso não contradiz a questão anterior?

**Solução:** a ser preenchido

■

**Pergunta 12.**

A extensão do Teorema de Hahn-Banach é única? Quando é única? Exemplos de quando a extensão é única e quando não é.

**Solução:** Considere  $g : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x_1, 0) = x_1$ , onde  $A$  é o eixo  $x$  de  $\mathbb{R}^2$ , com  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $p(a, b) = |a| + 3|b|$ . Claramente  $g(x) \leq p(x)$  sejam quais forem  $x \in A$ , e evidentemente  $p$  é sublinear. Note também que as funções  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f_1(a, b) = a + b$  e  $f_2(a, b) = a + 2b$  são ambas sublineares, estendem  $g$  e satisfazem  $f_1(x) \leq p(x)$ ,  $f_2(x) \leq p(x)$  para quaisquer  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Quando o subespaço é denso, temos unicidade da extensão, como afirma a seguinte

**Proposição (P.2.1).** Seja  $G \subset E$  um subespaço denso de um espaço vetorial normado  $E$  e  $\varphi : G \rightarrow F$  um operador linear limitado, onde  $F$  é um espaço de Banach. Então existe uma única extensão linear e limitada de  $\varphi$ . Além disso, a norma de tal extensão coincide com a de  $\varphi$ .

**Demonstração:** Seja  $x \in E \setminus G$ . Como  $\overline{G} = E$ , existe uma sequência  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de  $G$  tal que  $x_m \rightarrow x$ . Definimos  $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\Psi(a) = \begin{cases} \varphi(a), & \text{se } a \in G, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(a_m), & \text{se } a \notin G, \text{ onde } \{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ é tal que } a_m \rightarrow a. \end{cases}$$

Precisamos mostrar que  $\Psi$  está bem definida (não depende da escolha da sequência e o limite existe),  $\Psi \in G'$  e  $\|\Psi\|_{E'} = \|\varphi\|_G$ .

De fato, se  $x \in E \setminus G$  e  $x_m \rightarrow x$ ,  $y_m \rightarrow x$  (onde  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  são sequências distintas), temos que

$$|\varphi(x_m) - \varphi(y_m)| \leq \|\varphi\|_G \|x_m - y_m\| \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Como  $\varphi \in G'$ ,  $\|\varphi\|_G = M$  para algum  $M \in \mathbb{R}$ . E como  $x_m \rightarrow x$ ,  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy. Por (2.2) temos então que  $\{\varphi(x_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy em  $\mathbb{R}$  que é Banach, logo existe  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(x_m)$ .

Além disso, como:

$$\|\varphi(x_m) - \varphi(y_m)\|_{\mathbb{R}} \leq M \|x_m - y_m\|$$

segue que  $\varphi(x_m) \rightarrow \varphi(y_m)$  sempre que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$ . Logo  $\Psi$  está bem definida. Pelas propriedades do limite,  $\Psi$  é linear. Como  $\|\varphi(x_m)\| \leq \|\varphi\| \|x_m\|$  e  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$  é contínua, segue que

$$\|\Psi(x)\| \leq \|\varphi\| \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Logo  $\Psi$  é limitada e satisfaz  $\|\Psi\| \leq \|\varphi\|$ . Como a norma não pode diminuir ao estender (pois  $\sup A \geq \sup B$  sempre que  $A \geq B$  e  $A$  e  $B$  são limitados superiormente), temos também que  $\|\Psi\| \geq \|\varphi\|$ . Logo  $\|\Psi\|_E = \|\varphi\|_G$ , o que conclui a prova. ■

O seguinte resultado, que não demonstraremos mas é clássico, também está relacionado a esse contexto:

**Proposição (P.2.2).** Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espaços métricos, com  $(Y, d_Y)$  completo. Seja  $A \subseteq X$  um subconjunto de  $X$ . Dada  $f : A \rightarrow Y$  uniformemente contínua, então  $f$  pode ser unicamente estendida a  $\bar{A}$  mantendo a continuidade uniforme.



**Pergunta 13.**

Enuncie a primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach. Dê uma ideia da prova. Sabe uma aplicação?

**Solução:**

**Definição (D.2.1).** Seja  $E$  um espaço vetorial e  $A, B \subset E$  subconjuntos quaisquer.

Dizemos que o hiperplano  $H = f^{-1}(\alpha)$  **separa  $A$  e  $B$  no sentido amplo** se  $f(x) \leq \alpha$  para todo  $x \in A$  e  $f(x) \geq \alpha$  para todo  $x \in B$ .

Dizemos que o hiperplano  $H = f^{-1}(\alpha)$  **separa  $A$  e  $B$  no sentido estrito** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$  para todo  $x \in A$  e  $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$  para todo  $x \in B$ .

**Teorema (T.2.3) (Teorema de Hahn-Banach, primeira forma geométrica).** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Sejam  $A, B \subset E$  conjuntos convexos não-vazios disjuntos, com  $A$  aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa  $A$  e  $B$  no sentido amplo.*

**Teorema (T.2.4) (Primeira forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach).** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado  $E$ . Se  $A$  é aberto, então existem um funcional  $\varphi \in E'$  e  $a \in \mathbb{R}$  tais que*

$$\varphi(x) < a \leq \varphi(y) \quad \text{para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Neste caso diz-se que o hiperplano fechado  $[\varphi = a]$  separa  $A$  e  $B$ .

A ideia da prova é trabalhar com um funcional de Minkowski definido no conjunto (a ser demonstrado aberto, convexo e não vazio)  $C = A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$ .

Como a primeira forma é usada para provar a segunda forma geométrica, uma aplicação é a segunda forma geométrica.



**Pergunta 14.**

Enuncie a segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach. Dê uma ideia da prova. Sabe uma aplicação?

**Solução:**

**Teorema (T.2.5) (Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica).** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Sejam  $A, B \subset E$  conjuntos convexos não-vazios disjuntos, com  $A$  fechado e  $B$  compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa  $A$  e  $B$  no sentido estrito.*

**Teorema (T.2.6) (Segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach).** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado  $E$ . Se  $A$  é fechado e  $B$  é compacto, então existem um funcional  $\varphi \in E'$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que*

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y) \quad \text{para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

*Para  $c \in (a, b)$  diz-se que o hiperplano fechado  $[\varphi = c]$  separa  $A$  e  $B$  estritamente.*

Uma aplicação é a caracterização de fechados convexos sob as topologia forte e fraca. De fato, temos a seguinte

**Proposição (P.2.3).** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado e  $C \subset E$  um conjunto convexo. Então  $C$  é fechado na topologia fraca se e somente se  $C$  é fechado na topologia forte.*

**Demonstração:** Suponha que  $C$  é fortemente fechado. Seja  $x_0 \notin C$ . De acordo com o teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica, existem  $f \in E^*$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que

$$f(y) < \alpha < f(x_0)$$

para todo  $y \in C$  (de fato, basta tomar  $A = C$  e  $B = \{x_0\}$ ). Então  $V = f^{-1}(\alpha, \infty)$  é uma vizinhança aberta fraca de  $x_0$  que não intercepta  $C$ . Portanto  $E \setminus C$  é fracamente aberto, logo  $C$  é fracamente fechado. ■

#### Pergunta 15.

Na Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, se retiramos a hipótese de que um dos conjuntos é compacto, mas mantemos ambos fechados e convexos, o resultado ainda continua válido? Justifique. ■

**Solução:** Não. Considere, por exemplo, no  $\mathbb{R}^2$  os conjuntos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\} \quad \text{e} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}.$$

Ambos são fechados, convexos e disjuntos (porque?), porém não podem ser separados estritamente. ■

---

# Capítulo 3

## Topologias Fraca e Fraca\*

---

Dado um conjunto de funções  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de um conjunto  $X$  para um espaço topológico  $Y$ , a topologia  $\mathcal{T}$  mais grosseira (ou menos fina) para  $X$  é aquela com o número mínimo de abertos que tornam todas as funções  $f_\lambda$  contínuas. Ela é evidentemente a topologia que tem como sub-base a coleção  $\{f_\lambda^{-1}(V) : V \text{ é aberto em } Y \text{ e } \lambda \in \Lambda\}$ .

**Definição (D.3.1).** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. A **topologia fraca** sobre  $E$  é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares  $f \in E^*$  são contínuos.

**Proposição (P.3.1).** *Seja  $\tau \doteq \sigma(E, E')$  a topologia fraca. Então:*

- (a) *Para cada  $f \in E'$  a função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua com respeito a  $\tau$ .*
- (b)  *$\tau$  é a menor topologia em  $X$  tal que vale (a).*
- (c)  *$\tau$  é a interseção de todas as topologias em  $X$  em relação às quais todas as  $f \in E'$  são contínuas.*
- (d) *Para cada  $x \in X$ , os conjuntos da forma  $f_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(A_n)$  onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_i \in E'$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , e  $A_j$  é vizinhança de  $f_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , constituem uma base de vizinhanças para  $x$ .*
- (e) *Seja  $(x_\lambda)$  uma sequência em  $X$ . Então  $x_n \rightarrow x$  em  $(X, \tau)$  se, e somente se,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  em  $\mathbb{R}$  para qualquer  $f \in E'$ .*
- (f) *Sejam  $Z$  um espaço topológico e  $h: Z \rightarrow (X, \tau)$ . Então  $h$  é contínua se, e somente se,  $f \circ h: Z \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua para qualquer  $f \in E'$ .*
- (g)  *$\tau$  é Hausdorff.*

**Proposição (P.3.2).** *Seja  $E$  um espaço normado. Então:*

- (a) *Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo  $\varphi \in E'$ ,  $\varphi: (E, \sigma(E, E')) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínuo.*



(b) Para cada  $x_0 \in E$ , os conjuntos da forma

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in E \mid |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

onde  $J$  é um conjunto finito,  $\varphi_i \in E'$  para todo  $i \in J$  e  $\varepsilon > 0$ , formam uma base de vizinhanças abertas de  $x_0$  para a topologia fraca.

(c) Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência em  $E$ . Então  $x_n \rightharpoonup x$  se, e somente se,  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$  para todo  $\varphi \in E'$ .

**Solução:** (a) é evidente. Para (b), seja  $U$  uma vizinhança de  $x_0$  na topologia fraca. Pela Proposição (P.3.1) existem um conjunto finito  $J$ , funcionais  $\varphi_j \in E'$  e abertos  $V_j$  em  $\mathbb{R}$  contendo  $\varphi_j(x_0)$ ,  $j \in J$ , tais que

$$\bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(V_j)$$

é um aberto da topologia fraca contendo  $x_0$  e contido em  $U$ . Como  $J$  é finito e  $\varphi_j(x_0) \in V_j$  para todo  $j \in J$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$B(\varphi_j(x_0), \varepsilon) \subseteq V_j$$

para todo  $j \in J$ . Disso segue que

$$\begin{aligned} V_{J,\varepsilon} &= \{x \in E \mid |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } j \in J\} \\ &= \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(B(\varphi_j(x_0), \varepsilon)) \subseteq \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(V_j) \subseteq U. \end{aligned}$$

Para (c), suponhamos  $x_n \rightharpoonup x$ . Então  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  para todo  $f \in E^*$  porque  $f$  é contínua na topologia fraca. Reciprocamente, suponha que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  para todo  $f \in E^*$ . Para provar que  $x_n \rightharpoonup x$ , mostraremos que dada qualquer vizinhança aberta fraca  $U$  de  $x$ , temos  $x_n \in U$  para todo  $n$  suficientemente grande.

De fato, seja

$$\bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(V_i) \subset U$$

um elemento-base da topologia fraca contendo  $x$ , com  $V_1, \dots, V_m$  abertos em  $\mathbb{R}$ . Para cada  $i$ , existe  $N_i \in \mathbb{N}$  tal que  $f_i(x_n) \in V_i$  para todo  $n > N_i$ .

Tomando  $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$ , segue que se  $n > N$  então  $f_i(x_n) \in V_i$  para todo  $i$ , logo

$$x_n \in \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(V_i) \subset U$$

para todo  $n > N$ . ■

#### Pergunta 16.

Dê uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach no estudo das Topologias Fracas.

**Solução:** Veja a proposição (P.2.3). O fato da topologia fraca ser Hausdorff também segue de Hahn-Banach:

**Proposição (P.3.3).** *Um espaço vetorial normado  $E$  sob a topologia fraca é um espaço de Hausdorff.*

**Demonstração:** Se  $x, y \in E$  com  $x \neq y$ , pelo teorema de Hahn-Banach (veja o corolário ??) existe  $f \in E^*$  tal que  $f(x - y) = \|x - y\|^2$ . Em particular,  $f(x) \neq f(y)$  e se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é tal que  $f(x) < \alpha < f(y)$ , então os abertos  $f^{-1}(-\infty, \alpha)$  e  $f^{-1}(\alpha, \infty)$  separam  $x$  e  $y$ . ■

Um dos corolários de Hahn-Banach garante também que sequências que convergem fracamente são limitadas:

**Proposição (P.3.4).** *Se  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $E$ , então a sequência  $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$  é limitada.*

**Demonstração:** Seja  $\{x_n\}$  uma sequência fracamente convergente em  $X$ . Definamos  $T_n \in X^{**}$  por  $T_n(\ell) = \ell(x_n)$  para toda  $\ell \in X^*$ . Fixemos uma  $\ell \in X^*$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a convergência de  $\{\ell(x_n)\}$  garante que  $\{T_n(\ell)\}$  é um conjunto limitado. Pelo Princípio da Limitação Uniforme e pelo **inserir corolario HB Depois**,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ , i.e.  $\{x_n\}$  é limitada. ■

#### Pergunta 17.

Por que há a necessidade de se obtermos compactos no estudo das topologias fracas?

**Solução:** Uma topologia enfraquecida naturalmente tem mais compactos, e compacidade é muito importante em técnicas de existência e minimização (geralmente na forma de compacidade sequencial). Leia a seguir a tradução [dessa resposta no MSE](#):

Muitos problemas importantes em matemática e física matemática podem ser formulados como problemas de minimização de algum funcional integral, ou seja, queremos encontrar

$$\bar{u} \in S \quad \text{tal que} \quad \bar{u} = \min\{I(u) : u \in S\},$$

onde

$$I(u) := \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx.$$

Aqui  $S$  é algum espaço de funções, por exemplo,

$$S = \{u \in W^{1,1} \mid u|_{\partial\Omega} = f\},$$

para algum  $f \in W^{1,1}$  fixo, e  $\Omega$  é um domínio limitado em um espaço euclidiano. O integrando  $L$  representa a característica do problema que queremos resolver. Por exemplo,  $L$  pode

representar a densidade de energia para o funcional de energia de Dirichlet ou a energia interna de um corpo elástico.

Um método para resolver isso é chamado de **Método Direto**. Suponha que o funcional  $I$  seja limitado inferiormente em  $S$ ; podemos então escolher uma sequência minimizadora  $(u_n)_n \subset S$  tal que

$$I(u_n) \rightarrow \inf_S I.$$

O problema de minimização é resolvido se pudermos estabelecer o seguinte:

- (a).  $(u_n)_n$  possui uma subsequência que converge (em um sentido apropriado) para um  $u \in S$ .
- (b).  $I(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n)$ .

O modo apropriado de convergência geralmente é a convergência fraca, já que a compacidade fraca é mais fácil de se estabelecer do que a compacidade forte. Aqui vemos que a compacidade é crucial para garantir que  $(u_n)_n$  possua uma subsequência convergente.

Neste caso, queremos que o funcional  $I$  seja fracamente semicontínuo inferiormente para que a segunda condição seja satisfeita.

■

#### Pergunta 18.

Construa a Topologia Fraca. Dê exemplos de abertos dessa topologia. A Topologia Fraca tem menos funções contínuas que a topologia forte? Justifique.

**Solução:** A construção foi feita acima. Um aberto genérico é uma união de interseções finitas descritas anteriormente. Para que uma função  $f : (E, \sigma(E, E')) \rightarrow Y$  seja contínua, é necessário que  $f^{-1}(O)$  seja aberto em  $\sigma(E, E')$  para todo aberto  $O$  em  $Y$ , o que é evidentemente mais difícil de acontecer ao retirarmos abertos de  $E$ , como fazemos quando enfraquecemos a topologia.

Observamos que um aberto na topologia fraca nunca é limitado, pois sempre contém uma reta, como veremos na demonstração do seguinte resultado:

**Proposição (P.3.5).** *Se  $E$  é um espaço vetorial normado com dimensão infinita, então a esfera unitária não é fechada na topologia fraca.*

*De fato, o fecho fraco da esfera unitária é a bola unitária fechada.*

**Demonstração:** Sejam

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

a esfera unitária de  $E$ ,

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

a bola unitária fechada e denote por  $\overline{S}^W$  o fecho de  $S$  na topologia fraca. Queremos então provar que

$$\overline{S}^W = \overline{B_1(0)}.$$

Seja  $x_0 \in B_1(0)$  e  $U$  é qualquer aberto fraco contendo  $x_0$ . Pela Proposição 5.4,  $U$  contém uma vizinhança aberta fraca de  $x_0$  da forma

$$V = \{x \in E : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \quad f_1, \dots, f_n \in E^*\}.$$

Como  $E$  possui dimensão infinita, existe  $y_0 \in E$  tal que

$$f_i(y_0) = 0 \quad \text{para todo } i,$$

caso contrário a aplicação linear  $T : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$Tx = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

seria injetiva, o que implicaria  $\dim E \leq n$ . (outra maneira de ver isso é invocar a proposição **(P.10.1)**: o núcleo de um funcional linear tem codimensão 1, logo a interseção de um número finito de núcleos de funcionais lineares em um espaço vetorial de dimensão infinita também tem dimensão infinita). Em particular,  $V$  contém a reta  $t \mapsto x_0 + ty_0$ , pois

$$f_i(x_0 + t_0 y_0) - f_i(x_0) = f_i(x_0 + t_0 y_0 - x_0) = t_0 f_i(y_0) = 0$$

para todo  $i$ . (Assim, em um espaço vetorial normado de dimensão infinita, toda vizinhança aberta fraca de um ponto  $x_0$  contém uma reta passando por  $x_0$ ; na verdade, infinitas tais retas.)

Considere agora a função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(t) = \|x_0 + ty_0\|.$$

Esta função é contínua e satisfaz  $\varphi(0) < 1$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$ , o que implica pelo teorema do valor intermediário que existe  $t_0 > 0$  tal que  $\varphi(t_0) = 1$ , isto é,  $x_0 + t_0 y_0 \in S \cap V$ . Concluimos que toda vizinhança aberta fraca de  $x_0$  intercepta  $S$ , portanto  $x_0 \in \overline{S}^W$ .

Este argumento prova que  $\overline{B_1(0)} = B_1(0) \cup S \subseteq \overline{S}^W$ . Como  $B_1(0)$  é fechado na topologia fraca pela proposição **(P.2.3)**, não existem pontos do fecho fraco de  $S$  fora de  $B_1(0)$ . Portanto vale a igualdade

$$\overline{S}^W = \overline{B_1(0)}.$$

■

■

#### Pergunta 19.

Continuidade forte implica em continuidade fraca? Vale a volta?

**Solução:** Na presença de linearidade, continuidade forte implica continuidade fraca. Com efeito, suponhamos  $T : E \rightarrow F$  fortemente contínua. Para provar a continuidade fraca, pela proposição **(P.3.1)**,

basta provarmos que  $g \circ T$  é contínua para cada  $g \in F'$ , o que segue imediatamente do fato de que  $g \circ T \in E'$ .

Na ausência de linearidade, continuidade forte não implica continuidade fraca. De fato, tomando a sequência  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2$ , é claro que  $(e_n)$  converge fracamente a 0 em  $\ell^2$ , mas  $|e_n|_2$  não converge a  $|0|_2 = 0$ .

A topologia da norma contém todos os abertos da topologia fraca (e em dimensão infinita, abertos que não são abertos fracos), portanto toda função  $h : E \rightarrow F$  fracamente contínua (ou seja, considerando  $E$  com a topologia fraca) é fortemente contínua. ■

### Pergunta 20.

Qual a relação entre as Topologias Fraca e Fraca\*?

### Solução:

**Definição (D.3.2).** Seja  $E$  um espaço vetorial normado e considere a imersão canônica  $J : E \rightarrow E^{**}$ . A **topologia fraca\*** sobre o dual  $E^*$ , que denotaremos por  $\sigma(E^*, E)$ , é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares na imagem  $J(E)$  são contínuos.

Evidentemente, se  $E$  for um espaço reflexivo então a topologia fraca\* coincide com a topologia fraca de  $E^*$ . Caso contrário, em geral a topologia fraca\* de  $E^*$  é mais grosseira que a topologia fraca de  $E^*$ , que por sua vez é mais grosseira que a topologia forte de  $E^*$ .

Na verdade, pelos teoremas de Banach–Alaoglu–Bourbaki e Kakutani, as topologias fraca e fraca\* no dual coincidem se, e somente se, o espaço for reflexivo! ■

### Pergunta 21.

Exemplos de: (i) fraco que não é forte; (ii) fraco\* que não é fraco; (iii) fraco\* que não é forte.

**Solução:** A topologia da norma contém todos os abertos fracos, portanto não existe aberto fraco que não é forte. Por outro lado, pela demonstração da proposição (P.3.5), qualquer aberto forte limitado não é um aberto fraco. Para exibirmos um aberto fraco\* que não é aberto fraco basta exibirmos um fechado fraco\* que não é fechado fraco. Isso é possível se e só se o espaço não for reflexivo. Nesse caso, tomando  $\xi \notin J(E)$ , o conjunto

$$F = \xi^{-1}(\{0\})$$

é evidentemente fechado fraco mas não é fechado fraco\* devido ao seguinte resultado (Corollary 3.15. do Brezis)

**Proposição (P.3.6).** Seja  $H$  um hiperplano em  $E^*$  que é fechado fraco\*. Então existem  $0 \neq x_0 \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que

$$H = \{f \in E^* \mid f(x_0) = \alpha\}$$

De fato, se  $F$  fosse fechado fraco\*, existiriam  $0 \neq x_0 \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que

$$F = \ker(\xi) = \{f \in E^* \mid f(x_0) = \alpha\}$$

Uma vez que  $\ker(\xi)$  é um subespaço, não podemos ter  $\alpha \neq 0$ . Segue que  $\xi$  e  $J(x_0)$  possuem o mesmo núcleo, o que implica que  $\xi \in J(E)$  pela proposição (P.10.1).

Não existe aberto fraco\* que não é aberto forte, pois a topologia da norma contém a topologia fraca, em particular contém a topologia fraco\*. Porém, a bola unitária é um aberto forte que não é aberto fraco, portanto não é aberto fraco\*, já que todo aberto fraco\* é aberto fraco.

■

### Pergunta 22.

Qual a relação entre separável e metrizável?

**Solução:** Temos os seguintes resultados:

**Proposição (P.3.7).** Se  $E$  é separável então  $(B_E, \sigma(E', E))$  é metrizável.

**Proposição (P.3.8).** Se  $E$  é separável então  $E'$  é separável na topologia fraca-estrela.

**Proposição (P.3.9).** Se  $E'$  é separável então  $(B_E, \sigma(E, E'))$  é metrizável.

**Proposição (P.3.10).** (a) Se  $E$  é um espaço normado de dimensão infinita, então a topologia fraca em  $E$  não é metrizável.

(b) Se  $E$  é um espaço de Banach de dimensão infinita, então a topologia fraca-estrela em  $E'$  não é metrizável.

■

### Pergunta 23.

Por que  $B_1(0)$  não é aberto na topologia fraca?

**Solução:** Como vimos na demonstração da proposição (P.3.5), todo aberto fraco é ilimitado.

■

### Pergunta 24.

Dê uma ideia da prova do seguinte resultado: todo fechado convexo forte é um fechado fraco.

**Solução:** A ideia é usar a segunda forma geométrica de Hahn-Banach para garantir a existência de vizinhanças fracas de cada  $x_0 \in E \setminus C$ , conforme vimos na demonstração da proposição (P.2.3).

**Pergunta 25.**

Enuncie o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Dê a ideia central da prova.

**Solução:**

**Teorema (T.3.1) (Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki).** *Para todo espaço normado  $E$ , a bola  $B_{E'}$  é compacta na topologia fraco-estrela  $\sigma(E', E)$  de  $E'$ .*

A ideia central da prova consiste em identificar a bola com um produto de discos compactos e aplicar o teorema de Tychonoff,

**Pergunta 26.**

Enuncie o Teorema de Kakutani. Dê a ideia central da prova.

**Solução:**

**Teorema (T.3.2) (Teorema de Kakutani).** *Um espaço de Banach  $E$  é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada  $B_E$  é compacta na topologia fraca  $\sigma(E, E')$ .*

A ideia na ida (assumindo  $E$  reflexivo) é usar o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki e o fato de que em espaços reflexivos a injeção canônica é um homeomorfismo.

Na volta, a ideia é trabalhar com a imagem pela injeção canônica de  $B_E$ , considerando a topologia fraco-estrela no bidual. Como a topologia fraco-estrela é Hausdorff, tal imagem é fechada, e pelo teorema de Goldstine teremos então que  $J_E(B_E) = B_{E''}$ , o que por linearidade garante que  $E$  é reflexivo.

**Teorema (T.3.3) (Teorema de Goldstine).** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $J_E : E \rightarrow E''$  o mergulho canônico. Então  $J_E(B_E)$  é denso em  $B_{E''}$  na topologia fraco-estrela.*

**Pergunta 27.**

Defina espaços uniformemente convexos. Dê exemplos de espaços que são e não são uniformemente convexos. Dê uma aplicação.

**Solução:** Nossa intuição geométrica nos diz claramente que a bola unitária fechada do espaço euclidiano  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  é redonda, enquanto que as dos espaços  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$  e  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  não são nada redondas; na verdade são quadradas. Esses dois últimos exemplos são extremos, pois suas esferas unitárias contêm segmentos de retas.

Para evitar que a esfera unitária fechada  $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$  de um espaço  $E$  contenha segmentos de reta, basta pedir que se  $x, y \in B_E$ , então o ponto médio do segmento que liga  $x$  a  $y$  esteja no interior da bola, isto é,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 \quad \text{sempre que} \quad \|x\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|y\| \leq 1.$$

Mas a esfera unitária de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ , ou seja, a circunferência, satisfaz uma propriedade bem mais forte do que simplesmente não conter segmentos de reta. Fixe uma distância  $\varepsilon > 0$  e tome dois pontos  $x$  e  $y$  quaisquer na circunferência que distem (pelo menos)  $\varepsilon$  entre si. Apelando novamente para a intuição geométrica, percebemos que, independentemente de onde se localizam os pontos  $x$  e  $y$  na circunferência, o ponto médio do segmento que os une permanece dentro da circunferência e, mais importante, a uma distância segura da circunferência. Ou seja, podemos variar os pontos  $x$  e  $y$  na circunferência, apenas mantendo-os a uma distância  $\varepsilon$ , que não há risco do ponto médio do intervalo que os une se aproximar perigosamente da circunferência. Os espaços normados que compartilham com os espaços euclidianos esse comportamento uniforme dos pontos da bola unitária são chamados de espaços uniformemente convexos.

**Definição (D.3.3).** Dizemos que um espaço normado  $E$  é *uniformemente convexo* ou, mais precisamente, que sua norma é *uniformemente convexa* se, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \quad \text{sempre que} \quad x, y \in B_E \quad \text{e} \quad \|x - y\| \geq \varepsilon.$$

Como dois pontos de  $B_E$  distam no máximo 2 entre si, é suficiente mostrar a condição acima para  $0 < \varepsilon \leq 2$ .

**Exemplo (E.3.1).** Todo espaço de Hilbert  $H$  é uniformemente convexo. Com efeito, dados  $x, y \in B_H$  e  $0 < \varepsilon \leq 2$ , da Lei do Paralelogramo, resulta que se  $\|x - y\| \geq \varepsilon$  então

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4} \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Basta então tomar  $\delta = 1 - (1 - \varepsilon^2/4)^{\frac{1}{2}} > 0$ .

**Exemplo (E.3.2).** Os espaços  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  e  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$  não são uniformemente convexos. De fato, dado  $0 < \varepsilon < 1$ , basta tomar dois vetores que estão no mesmo segmento de reta da esfera unitária e distam  $\varepsilon$  um do outro. Completando com zero nas demais coordenadas, transformamos esses pares ordenados em seqüências, o que prova que os espaços  $c_0$ ,  $\ell_1$  e  $\ell_\infty$  não são uniformemente convexos.

**Exemplo (E.3.3).**  $L^p(\Omega)$  é uniformemente convexo para qualquer  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $1 < p < \infty$ .

Uma aplicação muito usada é a seguinte:

**Proposição (P.3.11).** *Sejam  $E$  um espaço de Banach uniformemente convexo e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma seqüência em  $E$ . Se  $x_n \rightharpoonup x$  e  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ , então  $x_n \rightarrow x$ .*

■



**Pergunta 28.**

Quando a topologia fraca no dual coincide com a topologia fraco-estrela?

**Solução:** Coincidem se e somente se o espaço for reflexivo.

**Pergunta 29.**

Dê exemplos de uma sequência que converge fracamente mas não fortemente e de uma sequência que converge na topologia fraco-estrela mas não na topologia fraca.

**Solução:** a ser preenchido

**Pergunta 30.**

Relacione separabilidade e reflexividade.

**Solução:**

**Teorema (T.3.4).** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Então  $E$  é um espaço reflexivo se e somente se  $E^*$  for.*

**Teorema (T.3.5).** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Se  $E^*$  é separável, então  $E$  também é.*

**Teorema (T.3.6).** *Se  $E$  é um espaço reflexivo separável, então  $E^*$  também é.*

Portanto, um espaço separável é reflexivo se, e somente se, seu dual for separável (e reflexivo).



# Capítulo 4

## Espaços de Hilbert

CONSIDERAREMOS ESPAÇOS DE HILBERT SOMENTE SOBRE O CORPO DOS REAIS.

### Pergunta 31.

Em espaços de Hilbert, qual a relação entre bases de Schauder e Hilbertianas? Em quais condições uma base de Schauder é uma base Hilbertiana? Uma base Hilbertiana é uma base de Schauder, por quê?

**Solução:** Uma base Hilbertiana é um sistema ortonormal completo, conforme definido em (D.1.1).

**Teorema (T.4.1).** *Seja  $S = \{x_i : i \in I\}$  um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert  $H$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Para cada  $x \in H$ ,  $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$ .*
- (b)  *$S$  é um sistema ortonormal completo.*
- (c)  *$\overline{[S]} = H$ .*
- (d) *Para cada  $x \in H$ ,  $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$ . (Identidade de Parseval)*
- (e) *Para todos  $x, y \in H$ ,  $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \langle y, x_i \rangle$ .*

**Proposição (P.4.1).** No caso separável, a representação do Teorema (T.4.1)(a) é única, isto é, se  $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ , então  $b_n = \langle x, x_n \rangle$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema (T.4.2).** *Um espaço de Hilbert  $H$  de dimensão infinita é separável se, e somente se, existe em  $H$  um sistema ortonormal completo enumerável.*

Combinando os resultados acima, concluímos que sistemas ortonormais completos em espaços de Hilbert separáveis são bases de Schauder. Multiplicando uma base de Hilbert por 2, por exemplo, temos uma base de Schauder que não é de Hilbert. Em espaços de Hilbert separáveis sempre podemos transformar uma base de Schauder em uma base de Hilbert pelo processo de Gram-Schmidt.

■

**Pergunta 32.**

Enuncie e dê uma ideia da prova do Teorema da Representação de Riesz.

**Solução:** A prova do teorema usa a seguinte propriedade dos espaços de Hilbert:

**Teorema (T.4.3) (Decomposição ortogonal).** *Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $M$  um subespaço completo de  $E$ . Então  $E = M \oplus M^\perp$ , isto é, cada  $x \in E$  admite uma única representação na forma*

$$x = p + q \quad \text{com } p \in M \text{ e } q \in M^\perp.$$

Além disso,

$$\|x - p\| = \text{dist}(x, M).$$

O vetor  $p$  é chamado de projeção ortogonal de  $x$  sobre  $M$ .

**Teorema (T.4.4) (Teorema da Representação de Riesz).** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear contínuo. Então existe um único  $y_0 \in H$  tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \quad \text{para todo } x \in H.$$

Além disso,  $\|\varphi\| = \|y_0\|$ .

**Demonstração:** Se  $\varphi$  é o funcional identicamente nulo, basta tomar  $y_0 = 0$ . Consideremos agora o caso em que  $\varphi$  não é identicamente nulo. Nesse caso o núcleo de  $\varphi$ ,

$$M := \{x \in H : \varphi(x) = 0\},$$

é um subespaço fechado próprio de  $H$ . Do teorema anterior sabemos que  $M^\perp \neq \{0\}$ , e então podemos escolher  $x_0 \in M^\perp$  de norma 1 (lembre-se que  $M^\perp$  é subespaço vetorial). Provemos que  $y_0 := \varphi(x_0)x_0$  é o vetor procurado. Dado  $x \in H$ ,

$$x = \left( x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0,$$

onde  $\left( x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \right) \in M$  e  $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \in M^\perp$ . Como  $y_0 \in M^\perp$  e  $\|x_0\| = 1$ ,

$$\langle x, y_0 \rangle = \left\langle x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0, y_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0, y_0 \right\rangle.$$

Como  $\left\langle x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0, y_0 \right\rangle = 0$ , temos

$$\langle x, y_0 \rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \langle x_0, \varphi(x_0)x_0 \rangle = \varphi(x).$$

Da desigualdade de Cauchy–Schwarz temos  $\|\varphi\| \leq \|y_0\|$ . A igualdade  $|\varphi(x_0)| = \|y_0\|$  garante a desigualdade inversa e portanto  $\|\varphi\| = \|y_0\|$ . A unicidade é evidente. ■

**Pergunta 33.**

Todo espaço de Hilbert é reflexivo? Justifique. ■

**Solução:** Sim, por exemplo pelo Teorema da Representação de Riesz. ■

**Pergunta 34.**

Quando os espaços  $L^p$  e  $\ell^p$  são espaços separáveis? E reflexivos? E de Hilbert?

**Solução:**  $\ell^p$  é separável e reflexivo para  $1 \leq p < \infty$ .  $L^p$  é separável para  $1 \leq p < \infty$  e reflexivo para  $1 < p < \infty$ . Ambos são espaços de Hilbert somente para  $p = 2$ .

$\ell^\infty$  não é separável.  $\ell^1$  e  $\ell^\infty$  não são reflexivos.  $L^1$  e  $L^\infty$  não são reflexivos. ■

**Pergunta 35.**

Existe algum espaço de Hilbert não separável? Justifique.

**Solução:** O espaço  $l^2(\mathbb{R})$  é um exemplo de um espaço de Hilbert não separável: ele consiste de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f(x) \neq 0$  apenas para uma quantidade enumerável de  $x$ , e

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x)^2 < \infty.$$

É fácil ver que este é um espaço de Hilbert, sendo a união enumerável de conjuntos enumeráveis.

As funções  $f_y$  definidas por

$$f_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

formam um conjunto não enumerável de elementos com distância  $\sqrt{2}$ , logo  $l^2(\mathbb{R})$  não é separável.

**Pergunta 36.**

Dê uma aplicação do Teorema da Representação de Riesz em EDP.

**Solução:** Veja o capítulo 6.

**Pergunta 37.**

Enuncie e dê uma ideia da prova do Teorema de Lax-Milgram.

**Solução:**

**Teorema (T.4.5) (Lax-Milgram).** *Seja  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{B} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear satisfazendo*

(i) *existe  $\alpha > 0$  tal que, para todo  $u, v \in H$ ,*

$$|\mathcal{B}[u, v]| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) *existe  $\beta > 0$  tal que,*

$$\mathcal{B}[u, u] \geq \beta \|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

*Então, dado um funcional linear contínuo  $T : H \rightarrow \mathbb{R}$ , existe um único  $u_T \in H$  tal que*

$$T(u) = \mathcal{B}[u_T, u], \quad \forall u \in H.$$

**Demonstração:** A ideia da prova é usar o teorema da representação de Riesz para representar  $B$  por um endomorfismo contínuo  $A : H \rightarrow H$ , e então reduzir o problema original a mostrar que  $A$  é bijetora. Sendo  $\varphi : H \rightarrow H^*$  o isomorfismo isométrico cuja existência é garantida pelo teorema da representação de Riesz, definimos a aplicação  $A$  por

$$u \mapsto A(u) = \varphi\left(\mathcal{B}[u, \cdot]\right).$$

Note que  $A$  é linear e contínua, pois  $\mathcal{B}$  é bilinear e contínua. Além disso,

- (a)  $A$  é injetora (consequência direta da coercividade de  $\mathcal{B}$ ),
- (b)  $\text{Im}(A)$  é fechado, pois  $\beta|v| \leq |Av| \quad \forall v \in H$  (também consequência da coercividade de  $\mathcal{B}$ ). Logo, se  $y_n = A(v_n) \rightarrow y$ , então  $v_n$  é de Cauchy em  $H$  e, pela completude de  $H$ , existe  $v \in H$  tal que  $v_n \rightarrow v$ . Segue da continuidade de  $A$  que  $y = A(v) \in \text{Im}(A)$ . Isso garante a sobrejetividade de  $A$  (note que a coercividade de  $\mathcal{B}$  garante que  $(\text{Im}(A))^\perp = \{0\}$  - como estamos em espaços de Hilbert, isso é equivalente a  $\text{Im}(A) = H$ ).

Dado agora  $T \in H^*$ , basta aplicarmos o teorema da representação de Riesz para  $T$  e a sobrejetividade de  $A$  para concluir que existe  $u_T \in H$  tal que  $T(u) = \mathcal{B}[u_T, u]$ , como desejado. A unicidade de  $u_T$  segue da coercividade de  $A$ .

■

■

### Pergunta 38.

Dê um exemplo em que podemos aplicar o Teorema de Lax-Milgram mas não é possível aplicarmos o Teorema da representação de Riesz.

**Solução:** Considere o problema

$$-\Delta u + \partial_x u = f, u \in H_0^1(\Omega),$$

para  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $f \in L^2(\Omega)$ . A forma bilinear associada à formulação fraca do problema não é simétrica, portanto não podemos aplicar o Teorema da Representação de Riesz. No entanto, podemos aplicar o Teorema de Lax-Milgram.

■

### Pergunta 39.

Seja  $\mathcal{B} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear que satisfaz as hipóteses de Lax-Milgram (ou seja, é contínua e coerciva) mas que também é simétrica. Nesse caso podemos simplesmente aplicar o Teorema da Representação de Riesz? Justifique.

**Solução:** Sim, podemos.  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  é um espaço de Hilbert com uma norma, digamos  $\|\cdot\|_1$ , que é induzida de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ , ou seja,

$$\|\cdot\|_1(v) \doteq \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \forall v \in H.$$

Trivialmente  $\mathcal{B}$  também define um produto interno em  $H$ . Agora, dado  $T : H \rightarrow \mathbb{R}$  linear e contínuo com respeito a  $\|\cdot\|_1$ , ou seja, satisfazendo

$$|T(u)|_{\mathbb{R}} \leq C\|u\|_1, \text{ para qualquer } u \in H \text{ e alguma constante } C > 0;$$

a priori, poderia acontecer que  $T$  não fosse contínuo com respeito a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  definida por:

$$H \ni v \mapsto \|\cdot\|_{\mathcal{B}}(v) \doteq \sqrt{\mathcal{B}(v, v)}$$

Mas, na verdade, a continuidade e coercividade de  $\mathcal{B}$  garantem que  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  e  $\|\cdot\|_1$  são equivalentes, de forma que

$$T \text{ é contínuo com respeito a } \|\cdot\|_{\mathcal{B}} \iff T \text{ é contínuo com respeito a } \|\cdot\|_1.$$

Portanto, o Teorema da Representação de Riesz garante a existência de um único  $u_T \in H$  tal que

$$T(u) = \mathcal{B}[u_T, u], \quad \forall u \in H.$$

■

---

# Capítulo 5

## Teoria Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos

---

**Pergunta 40.**

Enuncie a Alternativa de Fredholm.

**Solução:**

**Teorema (T.5.1) (Alternativa de Fredholm).** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert real e  $K : H \rightarrow H$  um operador linear compacto. Então*

- (i)  $\dim \ker(\text{Id} - K) < \infty$ ;
- (ii)  $\text{Im}(\text{Id} - K)$  é um subespaço fechado e  $\text{Im}(\text{Id} - K) = (\ker(\text{Id} - K^*))^\perp$ ;
- (iii)  $(\text{Id} - K)$  é injetivo se, e somente se, é sobrejetivo;
- (iv)  $\dim \ker(\text{Id} - K) = \dim \ker(\text{Id} - K^*)$ .

**Teorema (T.5.2) (Alternativa de Fredholm).** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T : E \rightarrow E$  um operador compacto. Então uma e apenas uma das possibilidades abaixo ocorre:*

- (a)  $T$  tem um ponto fixo não-nulo.
- (b) A equação  $T(x) - x = y$  tem solução para todo  $y \in E$ .

A alternativa de Fredholm trata da solvabilidade da equação  $u - Tu = f$ . Ela afirma que

- ou para todo  $f \in E$  a equação  $u - Tu = f$  possui uma solução única,



- ou a equação homogênea  $u - Tu = 0$  admite  $n \geq 1$  soluções linearmente independentes, e, nesse caso, a equação não homogênea  $u - Tu = f$  é solúvel se e somente se  $f$  satisfaz  $n$  condições de ortogonalidade, ou seja,

$$f \in N(I - T^*)^\perp.$$

A equivalência de injetividade e sobrejetividade é familiar em espaços de dimensão finita. Se  $\dim E < \infty$ , um operador linear de  $E$  em si mesmo é *injetivo* (= um para um) se e somente se é *sobrejetivo* (= sobre). No entanto, *em espaços de dimensão infinita, um operador limitado pode ser injetivo sem ser sobrejetivo e vice-versa*, como, por exemplo, o shift para a direita (resp. shift para a esquerda) em  $\ell^2$ . Portanto, a afirmação (iii) é uma propriedade notável dos operadores da forma  $I - T$  com  $T \in \mathcal{K}(E)$ . ■

#### Pergunta 41.

Qual é o espectro pontual do operador de Volterra? Sabe justificar?

**Solução:** Lembramos do seguinte

**Teorema (T.5.3) (Teoria espectral de operadores compactos).** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert real com dimensão infinita e  $K : H \rightarrow H$  um operador compacto. Então,*

- (i)  $0 \in \sigma(K)$ ;
- (ii)  $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ ;
- (iii) se  $\sigma(K) \setminus \{0\}$  é um conjunto infinito então  $\sigma(K) \setminus \{0\} = (\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$  com  $\lambda_m \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ .

O operador de Volterra  $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  é definido por

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Se mostrarmos que

$$\sigma(T) = \{0\}$$

então, pelo teorema acima, teremos que  $\sigma_p(T) = \{0\}$ . Segue abaixo uma tradução (do chatGPT, por falta de tempo no momento da escrita) da [seguinte resposta no MSE](#), que mostra em particular que  $T$  não possui autovalores não nulos (em particular o seu espectro pontual é  $\{0\}$ ).

Seja  $f \in L^2[0, 1]$  com  $\|f\|_2 \leq 1$ . Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &\leq \int_y^x |1 \cdot f(t)| dt \leq \left( \int_y^x dt \right)^{1/2} \left( \int_y^x |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_2 |x - y|^{1/2} = |x - y|^{1/2}. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $Tf$  é Hölder contínuo de expoente  $1/2$ . Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, segue que o operador  $T : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  é compacto. Como a aplicação identidade de  $C[0, 1]$  em  $L^2[0, 1]$  é limitada, conclui-se que  $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  também é compacto. Pelo Teorema Espectral para Operadores Compactos, todos os elementos não nulos do espectro de  $T$  são autovalores.

Agora, suponha que  $\lambda \neq 0$  e que  $f \neq 0$  seja uma autofunção correspondente de  $T$ , ou seja,

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda f(x).$$

Como o lado esquerdo da equação é contínuo, segue que o lado direito também o é, o que implica que  $f$  é contínua. Sendo  $f$  contínua, a integral à esquerda é diferenciável, o que implica que  $f$  é continuamente diferenciável. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$f(x) = \lambda f'(x),$$

cuja solução geral é da forma  $f(x) = Ce^{x/\lambda}$ . Contudo, impondo a condição  $f(0) = 0$ , obtemos  $C = 0$ , o que contradiz a hipótese  $f \neq 0$ . Logo,  $T$  não possui autovalores não nulos, e conclui-se que  $\sigma(T) = \{0\}$ . Assim, segue da definição que o raio espectral de  $T$  é  $r(T) = 0$ .

Agora, considere a função  $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq y, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com isso, podemos expressar  $T$  como

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy.$$

Pelo Teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned} \langle g, Tf \rangle &= \int_0^1 \overline{g(x)} \int_0^1 k(x, y) f(y) dy dx \\ &= \int_0^1 f(y) \int_0^1 \overline{g(x)} k(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \overline{g(x) k(y, x)} dx f(y) dy \\ &= \left\langle \int_0^1 g(x) \overline{k(y, x)} dx, f \right\rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a expressão para o operador adjunto:

$$(T^*f)(y) = \int_y^1 f(t) dt.$$

Podemos agora calcular  $T^*T$ :

$$(T^*Tf)(x) = \int_x^1 \int_0^y f(t) dt dy.$$

Para determinar a norma de  $T$ , utilizamos a identidade de  $B^*$ :  $\|T\| = \sqrt{\|T^*T\|}$ . Como  $S = T^*T$  é compacto e autoadjunto, seu conjunto de autovalores contém um de maior valor absoluto, que corresponde à norma de  $S$  pelo Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos.

Usando um argumento semelhante ao anterior, se  $\lambda \neq 0$  e  $f \neq 0$  são um autovalor e uma autofunção de  $S$ , então  $f$  é duas vezes continuamente diferenciável e satisfaz

$$\lambda f''(x) = -f(x).$$

As soluções dessa equação são da forma

$$f(x) = \alpha e^{i\omega x} + \beta e^{-i\omega x}, \quad \text{com } \omega^2 = 1/\lambda.$$

Um cálculo direto mostra que as autofunções devem ser da forma

$$f(x) = 2\alpha \cos(\omega x),$$

com autovalores

$$\lambda_n = \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

Maximizando  $\lambda_n$ , obtemos que o maior autovalor ocorre em  $n = 0$ , resultando em  $\|S\| = 4/\pi^2$  e, portanto, a norma de  $T$  é

$$\|T\| = \sqrt{4/\pi^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Para mais referências sobre este assunto, consulte a literatura sobre o *Operador de Volterra e Núcleos de Hilbert-Schmidt*.

■

#### Pergunta 42.

Quando o espectro pontual de um operador (distingua o espaço onde se encontra definido este operador) coincide com o espectro?

**Solução:** Dado um espaço de Hilbert real  $H$ , lembramos que o espectro pontual é definido por:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(T - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}\}$$

Quando  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , dizemos que  $\lambda$  é um autovalor de  $T$ . O espectro é dado por:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda \text{Id não é bijetora}\}.$$

Pelo Teorema **(T.5.3)**, em dimensão infinita sempre temos  $0 \in \sigma(K)$ , e o espectro de um operador compacto é composto inteiramente por autovalores, com a única possível exceção sendo o 0. Segue que o espectro pontual coincide com o espectro sempre que 0 for um autovalor. Em dimensão finita nem

sempre  $0 \in \sigma(K)$  (lembre-se também que em dimensão finita qualquer operador linear é compacto), mas nesse caso o espectro e o espectro pontual sempre coincidem. ■

**Pergunta 43.**

O que pode ser dito do espectro de um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert?

**Solução:**

**Teorema (T.5.4).** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H)$  um operador autoadjunto. Sejam*

$$m = \inf_{x \in B_H} \langle Tx, x \rangle = \inf_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2},$$

$$M = \sup_{x \in B_H} \langle Tx, x \rangle = \sup_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Então  $\sigma(T) \subset [m, M]$ . Além disso,  $m, M \in \sigma(T)$  e

$$\|T\| = \max(|m|, |M|).$$

**Pergunta 44.**

O que pode ser dito sobre um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert cujo espectro é  $\{0\}$ ? ■

**Solução:** Pela resposta da pergunta anterior, tal operador é identicamente nulo. ■

**Pergunta 45.**

O que pode ser dito sobre os autovetores de operadores compactos e auto-adjuntos em um espaço de Hilbert? ■

**Solução:**

**Teorema (T.5.5) (Decomposição Espectral de Operadores Autoadjuntos Compactos).** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert separável e  $T \in \mathcal{L}(H)$  um operador autoadjunto compacto. Então os autovetores linearmente independentes de  $T$  formam uma base de Hilbert para  $H$ .* ■

# Capítulo 6

## Espaços de Sobolev

### Pergunta 46.

Defina derivada fraca.

### Solução:

**Definição (D.6.1) (Espaço das funções localmente integráveis).** O espaço  $L^1_{loc}(\Omega)$  consiste das funções Lebesgue mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que, para todo conjunto compacto  $K \subset \Omega$ , temos

$$\int_K |u(x)| dx < \infty.$$

**Definição (D.6.2).** O espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  é o conjunto das funções  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que são infinitamente diferenciáveis e possuem suporte compacto em  $\Omega$ , i.e., existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}} \subset K;$$

em particular  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x \in \Omega \setminus K$ .

**Definição (D.6.3).** Dado um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , uma função  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  e um multi-índice  $\alpha$ , dizemos que  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$  é uma  $\alpha$ -ésima derivada fraca de  $u$  se

$$\int_{\Omega} u \cdot D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \cdot \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

■

### Pergunta 47.

Porque pedimos que a derivada fraca esteja em  $L^1_{loc}(\Omega)$ ?

**Solução:** Para garantir que a derivada fraca está bem definida (ou seja, é única - i.e., duas funções que são derivadas fracas da mesma função coincidem q.t.p. em  $\Omega$ ).

**Pergunta 48.**

Exiba um exemplo de função que não tem derivada clássica mas tem derivada fraca.

**Solução:**  $g$  é a derivada fraca de  $f(x) = |x|$  se, e somente se,  $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , tivermos

$$\int_{\mathbb{R}} f \phi' \, dx = - \int_{\mathbb{R}} g \phi \, dx \quad (6.1)$$

Definamos

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  é uma constante qualquer. Vamos verificar que (6.1) é satisfeita. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \phi'(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 (-x) \phi'(x) \, dx + \int_0^{+\infty} x \phi'(x) \, dx.$$

Integramos por partes ambas as integrais:

$$\int_{-\infty}^0 (-x) \phi'(x) \, dx = [-x \phi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \phi(x) \, dx.$$

Como  $\phi$  tem suporte compacto, o termo em  $-\infty$  é zero, restando:

$$-0 \cdot \phi(0) + \int_{-\infty}^0 \phi(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 \phi(x) \, dx.$$

De modo análogo,

$$\int_0^{+\infty} x \phi'(x) \, dx = [x \phi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \phi(x) \, dx.$$

O termo em  $+\infty$  também desaparece, resultando em

$$0 \cdot \phi(0) - \int_0^{+\infty} \phi(x) \, dx = - \int_0^{+\infty} \phi(x) \, dx.$$

Somando as contribuições,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \phi'(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 \phi(x) \, dx - \int_0^{+\infty} \phi(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}} g(x) \phi(x) \, dx.$$

Logo, (6.1) é satisfeita com  $\alpha$  arbitrário, o que mostra que  $g$  é a derivada fraca de  $f$ .

**Pergunta 49.**

Exiba um exemplo de função que não tem derivada fraca.

**Solução:** Consideramos sobre  $\mathbb{R}$  a função de Heaviside

$$H : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

Então  $u$  não possui derivada fraca em  $\mathbb{R}$ . Para a demonstração, consideramos  $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Seja  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  com suporte compacto em  $(-1, 1)$  e tal que  $\phi(0) = 1$ . Para  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $x \in \mathbb{R}$ , definimos  $\phi_n(x) = \phi(nx)$ . Assim,  $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . Por um lado, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}} v(x) \phi_n(x) dx \right| \leq \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |v(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Por outro lado, temos

$$- \int_{\mathbb{R}} H(x) \phi'_n(x) dx = - \int_0^{+\infty} \phi'_n(x) dx = \phi_n(0) = 1.$$

Portanto, nenhuma  $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  é uma derivada fraca para  $H$ . ■

#### Pergunta 50.

Defina espaços de Sobolev.

**Solução:**

**Definição (D.6.4).** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Definimos o espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  como sendo

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\},$$

com as derivadas  $D^\alpha u$  acima sendo tomadas no sentido fraco.

**Definição (D.6.5).** A norma em  $W^{k,p}(\Omega)$  é definida por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

#### Pergunta 51.

Defina os espaços  $W_0^{m,p}$ . Qual caracterização você conhece sobre tais espaços?

**Solução:**

**Definição (D.6.6).** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . O espaço  $W_0^{k,p}(\Omega)$  é definido como sendo o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  na norma  $\|\cdot\|_{k,p}$ , i.e.,

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

**Teorema (T.6.1) (Teorema do Traço).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que,

(i)  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  se  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ;

(ii) existe  $C = C(p, \Omega) > 0$  tal que

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

**Teorema (T.6.2) (Caracterização de  $W_0^{1,p}$  em relação ao traço).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  se, e somente se,  $Tu = 0$  em  $\partial\Omega$ .*

■

#### Pergunta 52.

Enuncie as imersões contínuas dos espaços de Sobolev.

#### Solução:

**Teorema (T.6.3).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Então,*

(i) se  $kp < n$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $1 \leq q \leq \frac{np}{n - kp}$ ;

(ii) se  $kp = n$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $q \geq 1$ ;

(iii) se  $kp > n$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1, \gamma}(\Omega),$$

onde

$$\gamma = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 - \frac{n}{p}, & \text{se } \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ \text{qualquer número pertencente a } (0, 1), & \text{se } \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$



e  $\lfloor n/p \rfloor$  é o maior inteiro que é menor ou igual a  $n/p$ .

O teorema continua válido se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto qualquer (possivelmente ilimitado) de classe  $C^1$  com a restrição  $q \geq p$  nos dois primeiros itens.

■

### Pergunta 53.

Enuncie as imersões compactas dos espaços de Sobolev.

### Solução:

**Teorema (T.6.4) (Rellich-Kondrachov).** Suponha que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado de classe  $C^1$ .

(i) Se  $1 \leq p < n$  e  $1 \leq q < p^*$ , então

$$W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{cpt.} L^q(\Omega).$$

(ii) Se  $p = n$  e  $q \geq 1$ , então

$$W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{cpt.} L^q(\Omega).$$

(iii) Se  $n < p$  e  $0 < \gamma < 1 - (n/p)$ , então

$$W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{cpt.} C^{0,\gamma}(\Omega).$$

Além disso, as imersões de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  nos espaços acima são sempre compactas, independentemente da regularidade de  $\Omega$ .

■

### Pergunta 54.

Defina os espaços de Hilbert  $H^k$ . Esses espaços estão imersos em quais outros espaços de regularidade maior?

### Solução:

**Definição (D.6.7).** Quando  $p = 2$ , vamos denotar  $W^{k,p}$  simplesmente por  $H^k(\Omega)$ , isto é,  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ .

**Teorema (T.6.5).** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Então,

(i) se  $2k < n$

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$\text{para todo } 1 \leq q \leq \frac{2n}{n-2k};$$

(ii) se  $2k = n$

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $q \geq 1$ ;

(iii) se  $2k > n$

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \gamma}(\Omega),$$

onde

$$\gamma = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 - \frac{n}{2}, & \text{se } \frac{n}{2} \notin \mathbb{Z}, \\ \text{qualquer número pertencente a } (0, 1), & \text{se } \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

e  $\lfloor n/2 \rfloor$  é o maior inteiro que é menor ou igual a  $n/2$ .

O teorema continua válido se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto qualquer (possivelmente ilimitado) de classe  $C^1$  com a restrição  $q \geq 2$  nos dois primeiros itens.

■

#### Pergunta 55.

Quando  $W^{m,p}$  é reflexivo  $1 < p < \infty$ ? Quando é separável?

#### Solução:

**Teorema (T.6.6).** O espaço  $W^{k,p}(\Omega)$  é reflexivo se  $1 < p < \infty$  e separável se  $1 \leq p < \infty$ .

**Demonstração:** Vamos considerar o caso geral para  $k \geq 1$ . Observe que  $W^{k,p}(\Omega)$  pode ser imerso isometricamente em  $(L^p(\Omega))^N$  para  $N = \binom{n+k}{k}$  através da aplicação

$$I : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))^N$$

definida por

$$I(u) := (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq k},$$

onde  $D^\alpha u$  representa as derivadas fracas de  $u$  até a ordem  $k$ , e o espaço  $X := (L^p(\Omega))^N$  está munido com a norma

$$\|(v_\alpha)_{|\alpha| \leq k}\|_{(L^p(\Omega))^N} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|v_\alpha\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo  $(v_\alpha)_{|\alpha| \leq k} \in (L^p(\Omega))^N$ .

Isso significa que podemos identificar  $W^{k,p}(\Omega)$  com o subespaço correspondente  $Y := I(W^{k,p}(\Omega))$  de  $X$ . Uma vez que  $W^{k,p}(\Omega)$  é completo, segue que  $Y$  é um subespaço fechado de  $X$ . Mas  $X$  é reflexivo quando  $1 < p < \infty$  e separável quando  $1 \leq p < \infty$ , o que mostra que o subespaço fechado  $Y$  (e portanto  $W^{k,p}(\Omega)$ ) tem essas mesmas propriedades.

■

**Pergunta 56.**

Enuncie o Teorema de Extensão e dê um (uma) exemplo (aplicação).

**Solução:**

**Teorema (T.6.7) (Teorema de Extensão).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  um aberto tal que  $\Omega \Subset \tilde{\Omega}$ . Existe um operador linear limitado*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

*tal que, para todo  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , vale*

$$(i) \quad (Eu)(x) = u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega;$$

$$(ii) \quad \text{supp } Eu \subset \tilde{\Omega};$$

$$(iii) \quad \text{existe } C = C(p, \Omega, \tilde{\Omega}) > 0 \text{ tal que}$$

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

**Pergunta 57.**

Enuncie o Teorema do Traço e dê um (uma) exemplo (aplicação).

**Solução:**

**Teorema (T.6.8) (Teorema do Traço).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

*tal que,*

$$(i) \quad Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ se } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega});$$

$$(ii) \quad \text{existe } C = C(p, \Omega) > 0 \text{ tal que}$$

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

**Teorema (T.6.9) (Caracterização de  $W_0^{1,p}$  em relação ao traço).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  se, e somente se,  $Tu = 0$  em  $\partial\Omega$ .*

**Pergunta 58.**

É possível definir o traço de funções em  $L^p$ ?

**Solução:** Não. Como  $C_c^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$ , existe uma sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow 1$ . Portanto, temos  $1 = T(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = 0$ , o que é um absurdo.

**Pergunta 59.**

O que se ganha quando se trabalha com o espaço  $H_0^1$ ? Por que não trabalhar simplesmente com o espaço  $\mathcal{C}_0^\infty$ ?

**Solução:**  $C_0^\infty$  não é um espaço de Hilbert (em particular, não podemos aplicar os teoremas de Riesz ou Lax-Milgram), e ao trabalharmos somente com  $C_0^\infty$  estamos pedindo soluções clássicas, que são muito mais difíceis de encontrar do que soluções fracas.

Além disso, o espaço  $H_0^1$  incorpora naturalmente as condições de fronteira de Dirichlet.

**Pergunta 60.**

Enuncie a desigualdade de Poincaré. Qual a importância dessa desigualdade? Como ela é provada e como é utilizada? Vale para abertos ilimitados?

**Solução:** a ser preenchido

**Pergunta 61.**

Qual é a melhor constante para a desigualdade de Poincaré? Justifique.

**Solução:** a ser preenchido

**Pergunta 62.**

Dada uma função  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , como estendê-la para o fecho?

**Solução:** Tendo continuidade uniforme.

**Pergunta 63.**

$W^{1,2}$  está imerso onde? E imerso compactamente onde?

**Solução:**

(i) Se  $n = 1$ , então

$$W^{1,2}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{cpt.}} L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q < 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

(ii) Se  $n = 2$ , então

$$W^{1,2}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{cpt.}} L^q(\Omega), \quad \forall q \geq 1.$$

(iii) Se  $n > 2$  e  $0 < \gamma < 1 - \frac{2}{n}$ , então

$$W^{1,2}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{cpt.}} C^{0,\gamma}(\Omega).$$



---

# Capítulo 7

## Equações Lineares Elípticas de Segunda ordem

---

**Pergunta 64.**

É necessário impormos condições de fronteira para conseguirmos unicidade de soluções?

**Solução:** Sim. Como exemplo concreto, note que em  $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ , as funções  $(x_1, x_2) \mapsto x_1$  e  $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$  são ambas obviamente harmônicas, mas seus valores na fronteira  $\{0\} \times \mathbb{R}$  são diferentes.



**Pergunta 65.**

Dê um exemplo de alguma EDP elíptica e resolva-a.

**Solução:** a ser preenchido



**Pergunta 66.**

Dê um exemplo de uma EDP elíptica que não tenha solução fraca.

**Solução:** a ser preenchido



**Pergunta 67.**

Dê um exemplo de uma EDP elíptica que não tenha solução clássica.

**Solução:** a ser preenchido

**Pergunta 68.**

Uma solução fraca que possui regularidade suficiente, digamos  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , é solução clássica?

**Solução:** Sim, basta integrar por partes de trás para frente e usar o Lema Fundamental do Cálculo das Variações.

**Pergunta 69.**

Dê um exemplo de uma EDP elíptica que possui solução fraca mas não clássica.

**Solução:** Seja  $B \subset \mathbb{R}^3$  a bola unitária aberta e considere a função

$$w(x) = |x|^{-\lambda} - 1, \quad \lambda < \frac{1}{2}.$$

Esta função claramente não é contínua, mas  $w \in H_0^1(B)$ .

Defina  $f = -\Delta w$  e considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } B, \\ u \in H_0^1(B). \end{cases}$$

Esta equação possui uma única solução fraca  $u = w$  (onde nos referimos à definição de solução fraca dada na questão). Esta função não é contínua no 0, portanto, não é uma solução clássica.

**Pergunta 70.**

Considere a EDP a seguir, em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P_{2\pi}) \quad \begin{cases} -\Delta u = 2\pi, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

$(P_{2\pi})$  tem solução fraca? Caso tenha, a solução fraca é única?

**Solução:** Sim, pois  $(\Omega \ni x \mapsto 2\pi) \in L^2(\Omega)$  (pois  $\Omega$  é limitado).

**Pergunta 71.**

Considere a EDP a seguir, em que  $f \in L^2(\Omega)$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Imponha condições sobre  $\Omega$  e  $f$  a fim de fazer a formulação fraca. Defina solução fraca e use o Teorema da Representação de Riesz para garantir a existência de solução.

Solução: a ser preenchido

**Pergunta 72.**

Considere a EDP a seguir, em que  $f \in L^2(\Omega)$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

O que impor sobre  $g$  para tornar o problema bem posto?  $(P)$  tem solução fraca? Caso tenha, a solução fraca é única?

Solução: a ser preenchido

**Pergunta 73.**

Considere a EDP a seguir, em que  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Imponha condições sobre  $\Omega$  e  $\lambda$  a fim de fazer a formulação fraca. Quando é possível obter alguma solução fraca? Tal solução é única?

Solução: a ser preenchido





**Pergunta 74.**

Considere a EDP a seguir, em que  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Imponha condições sobre  $\Omega$ ,  $f$  e  $\lambda$  a fim de fazer a formulação fraca. Defina solução fraca e use o Teorema de Lax-Milgram para garantir a existência de solução. Nesse caso poderia ser usado o Teorema da Representação de Riesz? Justifique.

**Solução:** Veja o Apêndice. A continuidade e coercividade da forma bilinear associada à formulação fraca garantem que a norma induzida por  $B$  é equivalente à norma de  $H_0^1(\Omega)$ , o que torna possível a aplicação do Teorema da Representação de Riesz.

■

**Pergunta 75.**

Enuncie o Princípio do Máximo Fraco ( $c \geq 0$ ) e dê uma ideia da demonstração. Dê uma aplicação deste princípio.

**Solução:**

Seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer. Definimos a *parte positiva*  $u^+$  e a *parte negativa*  $u^-$  da função  $u$  como

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}, \quad \text{para } x \in \Omega.$$

Observe que as funções acima são não negativas e satisfazem as seguintes igualdades:

$$|u| = u^+ + u^-, \quad u = u^+ - u^-.$$

Consideraremos operadores uniformemente elípticos da forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

**Teorema (T.7.1) (Princípio do Máximo Fraco).** *Seja  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \leq 0$  em  $\Omega$ . Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , então valem os seguintes itens:*

(i) Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

(ii) Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-.$$

(iii) Se  $Lu = 0$  em  $\Omega$ , então

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Se considerarmos, como Evans faz, operadores uniformemente elípticos da forma

$$\tilde{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

então temos a versão correspondente para  $c \geq 0$  (bastando trabalhar com  $L \doteq -\tilde{L}$ ), ou seja,

**Teorema (T.7.2).** *Seja  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \leq 0$  em  $\Omega$ . Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , então valem os seguintes itens:*

(i) Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

(ii) Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-.$$

(iii) Se  $Lu = 0$  em  $\Omega$ , então

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Uma aplicação comum é garantir unicidade de soluções clássicas. A ideia da demonstração é usar o princípio do máximo para  $c \equiv 0$  para o operador  $Ku = Lu - c(x)u$ , trabalhando no conjunto  $\Omega^+ \doteq u^{-1}((0, \infty))$ .

■

#### Pergunta 76.

Enuncie o Lema de Hopf. Qual é a informação mais relevante que ele traz?

#### Solução:

**Teorema (T.7.3).** *Suponha que  $L$  é uniformemente elíptico e  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , com  $u \in C^2(\Omega)$ . Seja  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que*

(i)  $u$  é contínua em  $x_0$ ;

(ii)  $u(x_0) > u(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ ;

(iii) existe uma bola aberta  $B \subseteq \Omega$  tal que  $x_0 \in \partial B$ .

Então a derivada normal exterior em  $x_0$ , se existe, satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0,$$

desde que uma das hipóteses abaixo se verifique:

(a).  $c \equiv 0$  em  $B$ ;

(b).  $c \leq 0$  em  $B$  e  $u(x_0) \geq 0$ .

A informação mais relevante é que a derivada normal exterior de uma função que atinge um máximo não negativo em um ponto de fronteira é *estritamente* positiva. ■

### Pergunta 77.

Enuncie o Princípio do Máximo Forte e dê uma ideia da demonstração. Dê uma aplicação deste princípio.

### Solução:

**Teorema (T.7.4) (Princípio do Máximo Forte).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo,  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \equiv 0$  e  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Então*

(i) *se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge máximo em  $\Omega$ , então  $u$  é constante em  $\Omega$ ;*

(ii) *se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge mínimo em  $\Omega$ , então  $u$  é constante em  $\Omega$ .*

*No caso em que  $c \leq 0$  vale o seguinte:*

(iii) *se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge máximo não negativo em  $\Omega$ , então  $u$  é constante em  $\Omega$ ;*

(iv) *se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge mínimo não positivo em  $\Omega$ , então  $u$  é constante em  $\Omega$ .*

A demonstração baseia-se em um argumento por contradição e na aplicação do *Lema de Hopf*. Os principais passos são:

(a). Suponha que  $u$  atinge um máximo em um ponto interno de  $\Omega$  e defina o conjunto

$$\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\},$$

onde  $M = \max_{\overline{\Omega}} u$ .

(b). Suponha, por contradição, que  $\Omega_M \neq \Omega$ , ou seja, existe uma região  $\Sigma = \Omega \setminus \Omega_M$  onde  $u(x) < M$ .

(c). Escolha um ponto  $y \in \Sigma$  mais próximo de  $\Omega_M$  e construa uma bola ao redor de  $y$  contida em  $\Sigma$ .

(d). Como  $x_0 \in \partial B \cap \Omega_M$  é um ponto de máximo em  $\Omega$ , o gradiente de  $u$  se anula em  $x_0$ , ou seja,

$$\nabla u(x_0) = 0.$$

(e). Pelo *Lema de Hopf*, se  $u$  não for constante, a derivada normal em  $x_0$  deve ser estritamente positiva, o que contradiz  $\nabla u(x_0) = 0$ .

(f). Concluimos que  $\Omega_M = \Omega$ , ou seja,  $u$  é constante em  $\Omega$ .

O mesmo argumento vale para o caso do mínimo, considerando  $v = -u$ . Se  $c \leq 0$ , a prova segue de forma análoga, utilizando a versão correspondente do *Lema de Hopf*.

■

---

# Capítulo 8

## Regularidade de Soluções de EDPs Elípticas

---

Suponha que  $U \subset \mathbb{R}^n$  seja um conjunto aberto e limitado. Suponha também que  $u \in H_0^1(U)$  seja uma solução fraca da EDP  $Lu = f$  (em  $U$ ), onde  $L$  tem a forma divergente

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \left( a^{ij}(x) u_{x_i} \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u. \quad (8.1)$$

Continuamos a exigir a condição de elipticidade uniforme (i.e, para cada  $x \in U$ , a matriz  $A(x) = ((a^{ij}(x)))$  é positiva definida, com seu menor autovalor sendo  $\geq \theta > 0$ ) e, conforme necessário, faremos várias suposições adicionais sobre a regularidade dos coeficientes  $a^{ij}, b^i, c$ .

**Teorema (T.8.1) (Regularidade  $H^2$  no interior - veja 6.3.1 do Evans, pag 327 do livro).** *Suponha que*

$$a^{ij} \in C^1(U), \quad b^i, c \in L^\infty(U) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (8.2)$$

*e que*

$$f \in L^2(U). \quad (8.3)$$

*Suponha ainda que  $u \in H^1(U)$  seja uma solução fraca da EDP elíptica*

$$Lu = f \quad \text{em } U. \quad (8.4)$$

*Então*

$$u \in H_{loc}^2(U); \quad (8.5)$$

*e, para cada subconjunto aberto  $V \subset\subset U$ , temos a estimativa*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right), \quad (8.6)$$

onde a constante  $C$  depende apenas de  $V$ ,  $U$  e dos coeficientes de  $L$ .

**Observação (O.1).** (i) Observe cuidadosamente que não exigimos que  $u \in H_0^1(U)$ ; isto é, não estamos necessariamente assumindo a condição de contorno  $u = 0$  em  $\partial U$  no sentido de traço.

(ii) Observe adicionalmente que, como  $u \in H_{\text{loc}}^2(U)$ , temos

$$Lu = f \quad \text{a.e. em } U.$$

Assim,  $u$  de fato resolve a EDP, pelo menos para quase todo ponto dentro de  $U$ . (Para ver isso, observe que para cada  $v \in C_c^\infty(U)$ , temos

$$B[u, v] = (f, v).$$

Como  $u \in H_{\text{loc}}^2(U)$ , podemos integrar por partes e obter:

$$B[u, v] = (Lu, v).$$

Assim,  $(Lu - f, v) = 0$  para todo  $v \in C_c^\infty(U)$ , e portanto  $Lu = f$  q.t.p)

**Teorema (T.8.2) (Regularidade maior no interior - pag 332 do Evans).** *Seja  $m$  um número inteiro não negativo, e suponha que*

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(U) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (8.7)$$

e que

$$f \in H^m(U). \quad (8.8)$$

Suponha que  $u \in H^1(U)$  seja uma solução fraca da EDP elíptica

$$Lu = f \quad \text{em } U. \quad (8.9)$$

Então

$$u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(U); \quad (8.10)$$

e, para cada  $V \subset\subset U$ , temos a estimativa

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C \left( \|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right), \quad (8.11)$$

onde a constante  $C$  depende apenas de  $m, U, V$  e dos coeficientes de  $L$ .

Aplicando recursivamente o Teorema (T.8.2) e a imersão de Sobolev, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema (T.8.3) (Diferenciabilidade infinita no interior - pag 334 do Evans).** *Suponha que*

$$a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(U) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (8.12)$$

e que

$$f \in C^\infty(U). \quad (8.13)$$

Suponha que  $u \in H^1(U)$  seja uma solução fraca da EDP elíptica

$$Lu = f \quad \text{em } U. \quad (8.14)$$

Então

$$u \in C^\infty(U). \quad (8.15)$$

**Observação (O.2).** Note novamente que não estamos fazendo nenhuma suposição sobre o comportamento de  $u$  em  $\partial U$ . Portanto, estamos afirmando que quaisquer possíveis singularidades de  $u$  na fronteira não se propagam para o interior.

Em particular, para *qualquer aberto, limitado ou ilimitado*,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , a solução fraca  $u$  da EDP elíptica  $Lu = f$  é suave (e, portanto, clássica!) em  $\text{int } \Omega = \Omega$  sempre que os coeficientes de  $L$  forem suaves, independentemente de quaisquer singularidades que possam existir em  $\partial\Omega$ . De fato, basta lembrarmos que suavidade é uma propriedade local e aplicarmos o Teorema (T.8.3) a cada bola  $B_r(x) \subset \Omega$  contida em  $\Omega$ . Podemos fazer isso, uma vez que o Teorema (T.8.3) não faz nenhuma suposição sobre o comportamento de  $u$  na fronteira da bola (você poderia argumentar que não é garantido que  $u = 0$  na fronteira da bola  $\partial B_r(x_0)$ , e de fato não é, mas o Teorema (T.8.3) não se importa com isso).

**Teorema (T.8.4) (Regularidade  $H^2$  até a fronteira - pag 334 do Evans).** *Suponha que*

$$a^{ij} \in C^1(\overline{U}), \quad b^i, c \in L^\infty(U) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (8.16)$$

e que

$$f \in L^2(U). \quad (8.17)$$

Suponha que  $u \in H_0^1(U)$  seja uma solução fraca do problema de valor de contorno elíptico

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U, \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases} \quad (8.18)$$

Suponha, finalmente, que

$$\partial U \text{ é } C^2. \quad (8.19)$$

Então

$$u \in H^2(U), \quad (8.20)$$

e temos a estimativa

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right), \quad (8.21)$$

onde a constante  $C$  depende apenas de  $U$  e dos coeficientes de  $L$ .

**Observação (O.3).** Observe que, em forte contraste com o Teorema (T.8.1), estamos assumindo que  $u \in H_0^1(U)$ , ou seja, estamos impondo a condição de contorno  $u = 0$  em  $\partial U$  no sentido de traço.

**Teorema (T.8.5) (Regularidade maior até a fronteira).** *Seja  $m$  um número inteiro não negativo, e suponha que*

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\overline{U}) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (8.22)$$

e que

$$f \in H^m(U). \quad (8.23)$$

Suponha que  $u \in H_0^1(U)$  seja uma solução fraca do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U, \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases} \quad (8.24)$$

Suponha, finalmente, que

$$\partial U \text{ é } C^{m+2}. \quad (8.25)$$

Então

$$u \in H^{m+2}(U), \quad (8.26)$$

e temos a estimativa

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C \left( \|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right), \quad (8.27)$$

onde a constante  $C$  depende apenas de  $m, U$  e dos coeficientes de  $L$ .

Iterando infinitamente as conclusões do Teorema (T.8.5), obtemos o seguinte resultado:

**Teorema (T.8.6) (Diferenciabilidade infinita até a fronteira).** *Suponha que*

$$a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\overline{U}) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (8.28)$$

e que

$$f \in C^\infty(\overline{U}). \quad (8.29)$$

Suponha que  $u \in H_0^1(U)$  seja uma solução fraca do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U, \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases} \quad (8.30)$$

Suponha também que  $\partial U$  seja  $C^\infty$ . Então

$$u \in C^\infty(\overline{U}). \quad (8.31)$$



**Pergunta 78.**

Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  uma função harmônica em um aberto possivelmente ilimitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . O que podemos dizer sobre a regularidade interior de  $u$ ?

**Solução:** *Independentemente* de  $\Omega$  ser ou não limitado, o fato de  $u$  ser harmônica implica que satisfaz a propriedade da média, o que garante a suavidade de  $u$  em  $\text{int}(\Omega) = \Omega$ .

■

**Pergunta 79.**

Suponha que  $f \in C^0(\Omega)$ , onde  $\Omega$  é um domínio suave. O problema  $-\Delta u = f$  admite solução clássica  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  nesse caso? Note que não estamos impondo condições de fronteira.

**Solução:** Não! Veja os exemplos abaixo.

**Exemplo (E.8.1).** A função  $\rho(x) = \rho(x_1, x_2)$  definida no disco  $B_a = \{x : x_1^2 + x_2^2 < a\}$  de raio  $a < 1$  por

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|^{-2} [\log |x|]^{-1} x_1 x_2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é uma função contínua em  $B_a$ , cujo potencial newtoniano correspondente não é  $C^2$  em  $x = 0$ .

**Exemplo (E.8.2).** ( $f \in L^\infty$ , mas  $u \notin C^{1,1}$ ).

$$u(x_1, x_2) = |x_1||x_2| \log(|x_1| + |x_2|).$$

Calculamos (para  $x_1, x_2 > 0$ )

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} [x_2 \log(x_1 + x_2)] = \frac{2x_2}{x_1 + x_2} - \frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{2x_1}{x_1 + x_2} - \frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}.$$

Assim,

$$\Delta u = 2 - \frac{2x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}$$

e o lado direito é uma função limitada. Porém, note também que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \log(x_1 + x_2) + 1 - \frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} \notin L^\infty.$$

**Exemplo (E.8.3).** ( $f$  contínua, mas  $u \notin C^{1,1}$ ).

$$\Delta u = f(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2} \left[ \frac{n+2}{(-\log|x|)^{1/2}} + \frac{1}{2(-\log|x|)^{3/2}} \right], \quad x \in B_R \subset \mathbb{R}^n.$$

$f(x)$  é contínua após definir  $f(0) = 0$ . No entanto, a solução

$$u(x) = (x_2^2 - x_1^2)(-\log|x|)^{1/2}$$

satisfaz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad x \rightarrow 0.$$

Portanto,  $u \notin C^{1,1}$ . ■

### Pergunta 80.

Considere a EDP a seguir, em que  $f \in L^2(\Omega)$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Imponha condições sobre  $\Omega$  e  $f$  a fim de fazer a formulação fraca. Quando é possível obter soluções fracas? Nesse caso, qual é a melhor regularidade que conseguimos para tais soluções em termos da regularidade de  $f$  e de  $\partial\Omega$ ?

**Solução:** Como vimos anteriormente, é possível obter soluções fracas (e unicidade) para  $f \in L^2(\Omega)$  e  $\Omega$  limitado. A melhor regularidade que conseguimos para tais soluções é  $u \in C^{1,1-\varepsilon}(\Omega)$  - veja [esse post no MSE](#). Regularidade até a fronteira é garantida desde que a fronteira satisfaça hipóteses de regularidade. ■

Os exemplos que acabamos de ver mostram que o espaço das funções meramente contínuas em  $\Omega$  não é adequado para a formulação clássica do problema. Como veremos nos teoremas abaixo, os espaços naturais para a formulação clássica são os espaços de Hölder definidos em abertos com fronteira regular e de Hölder.

**Teorema (T.8.7).** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado de classe  $C^{2,\gamma}$  e  $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$ , então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

*possui exatamente uma solução em  $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ .*

Usando o potencial Newtoniano, podemos também provar o seguinte resultado:

**Teorema (T.8.8).** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado de classe  $C^2$ ,  $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$  e  $g \in C(\partial\Omega)$ , então o problema*

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

*possui exatamente uma solução em  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .*

Podemos usar o resultado acima para discutir a existência de solução para o problema

$$(P) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado de classe  $C^{2,\gamma}$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ ,  $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$ ,  $L$  é um operador diferencial de 2ª ordem da forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

Nesse contexto, o principal resultado usado para obter existência de solução é o seguinte:

**Teorema (T.8.9) (Princípio da Continuação).** *Seja  $X$  um espaço de Banach,  $Y$  um espaço vetorial normado e  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1 : X \rightarrow Y$  operadores lineares limitados. Para  $t \in [0, 1]$ , considere o operador*

$$\mathcal{L}_t u := (1-t)\mathcal{L}_0 u + t\mathcal{L}_1 u, \quad u \in X.$$

*Suponha que existe  $c > 0$  tal que*

$$\|u\|_X \leq c\|\mathcal{L}_t u\|_Y, \quad \forall u \in X, t \in [0, 1]. \quad (8.32)$$

*Então  $\mathcal{L}_0$  é sobrejetivo se, e somente se,  $\mathcal{L}_1$  é sobrejetivo.*

Usamos os espaços

$$X \doteq \{u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \mid u \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega\}, \quad Y \doteq C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

e a família de operadores

$$L_t := (1-t)L + t\Delta, \quad t \in [0, 1].$$

Pelo Teorema (T.8.9), a existência de solução para o operador  $L_0 = L$  é equivalente à existência de solução para o problema  $L_1 = -\Delta$ , caso que já tratamos no Teorema (T.8.8).

**Pergunta 81.**

Considere a EDP a seguir, em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P_{2\pi}) \quad \begin{cases} -\Delta u = 2\pi, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Quando  $(P_{2\pi})$  tem solução clássica? O que pode ser dito sobre a regularidade interior de possíveis soluções fracas? E quanto à regularidade até a fronteira? O que pode ser dito sobre o sinal de soluções clássicas?

**Solução:** Como vimos anteriormente, o problema possui uma única solução fraca. Pelas estimativas de regularidade interior enunciadas no início desse capítulo, tal solução é na verdade suave no interior de  $\Omega$ . A suavidade até a fronteira é garantida desde que a fronteira seja suave. Pelo Princípio do Máximo, tal solução é positiva em  $\Omega$ .

■

**Pergunta 82.**

Considere a EDP a seguir, em que  $f \in L^2(\Omega)$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Qual restrição  $g$  deve ter para que  $(P)$  tenha solução clássica? Se  $g > 0$  em  $\partial\Omega$ , o que podemos dizer com respeito ao sinal da solução fraca dessa EDP? O que pode ser dito sobre a regularidade interior de possíveis soluções fracas em termos da regularidade da  $f$ ? E quanto à regularidade até a fronteira?

**Solução:**

**Definição (D.8.1).** Seja  $f \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ . Dizemos que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma **solução fraca** para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.12)$$

se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$u - g \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Se os dados do problema de Dirichlet (8.12) são suficientemente regulares e a solução fraca também é suficientemente regular, então ela é uma solução clássica:

**Teorema (T.8.10).** *Sejam  $f \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ . Então, existe uma única solução fraca  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.33)$$

Além disso,  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  minimiza o funcional  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

onde

$$E = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v - g \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$$

é o espaço de funções admissíveis para (8.33). Isto é,  $u \in E$  satisfaz

$$I(u) = \min_{v \in E} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx \right).$$

Para a regularidade, veja o início deste capítulo, onde enunciamos os teoremas de regularidade interior e até a fronteira. A regularidade será determinada pela regularidade de  $f$ ,  $g$  e da fronteira  $\partial\Omega$ . O sinal da solução depende do sinal de  $f$ . Se  $f > 0$ , a solução será positiva. ■

#### Pergunta 83.

Considere a EDP a seguir, em que  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P_{\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

$(P_{\lambda})$  tem solução fraca para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ ? Caso a resposta seja não, para quais  $\lambda$  o problema admite solução fraca? Tal solução é única? Qual é a melhor regularidade interior de possíveis soluções fracas? E sobre a regularidade até a fronteira? Daria pra usar Agmon-Douglis-Nirenberg? Enuncie todos os teoremas usados para garantir a existência, unicidade e regularidade das soluções.

**Solução:** Não admite solução para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  (veja a próxima questão). Mesmo que  $\Omega$  seja possivelmente ilimitado e com fronteira irregular, quando existirem as autofunções elas serão suaves no interior. A regularidade da autofunção até a fronteira depende da regularidade da fronteira. ■

#### Pergunta 84.

Enuncie tudo o que você sabe sobre as autofunções do Laplaciano. Na verdade, existe um conjunto enumerável  $\Sigma = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$  tal que  $(P_{\lambda})$  admite uma única solução não trivial se, e somente se,  $\lambda \in \Sigma$ .

**Solução:**

- (i) Existe um conjunto enumerável  $\Sigma = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$  tal que  $(P_\lambda)$  admite uma única solução não trivial se, e somente se,  $\lambda \in \Sigma$ . As autofunções associadas satisfazem  $(P_\lambda)$ .
- (ii) As autofunções do Laplaciano formam uma base ortonormal de  $L^2(\Omega)$  (também de  $H_0^1(\Omega)$ ), são sempre suaves no interior, e suaves na fronteira desde que a fronteira seja suave.
- (iii) A primeira autofunção satisfaz  $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ , onde

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx} > 0.$$

- (iv) A primeira autofunção não muda de sinal em  $\Omega$  e o autovalor associado é simples, ou seja, tem multiplicidade 1.
- (v) Para todo  $j \geq 2$  as autofunções associadas  $\varphi_j$  trocam de sinal em  $\Omega$  (consequência direta da ortogonalidade).

■

**Pergunta 85.**

Considere a EDP a seguir, em que  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Se tivermos somente  $f \in C(\Omega)$ , é possível conseguir soluções fracas ou clássicas? E se  $f \in C(\overline{\Omega})$ ? Quando for possível obter soluções fracas, qual é a melhor regularidade que conseguimos para tais soluções em termos da regularidade de  $f$  e de  $\partial\Omega$ ?

Solução: a ser preenchido

■

**Pergunta 86.**

Dê uma ideia do *Bootstrapping* (Regularidade).

Solução: a ser preenchido

■

---

# Capítulo 9

## Perguntas do meu exame

---

- Comecei enunciando o Teorema da Representação de Riesz e, em seguida, apresentei a demonstração do Teorema de Lax-Milgram. Defini um operador  $A : H \rightarrow H$  determinado por  $\langle A(x), y \rangle = \mathcal{B}(x, y)$ .
- Liliane perguntou se eu conhecia alguma versão do Teorema da Representação de Riesz para espaços que não são de Hilbert. Falei dos espaços  $L^p$  e enunciei o resultado para  $1 < p < \infty$ . Mayra perguntou se as desigualdades em  $p$  tinham que ser estritas, em particular se para  $p = 1$  também não valia.
- Liliane pediu para eu mostrar alguma aplicação de Lax-Milgram. Falei do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \partial_{x_m} u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e mencionei que esse era um caso que exhibe mais concretamente a força do Teorema de Lax-Milgram, pois a forma bilinear associada à formulação fraca não é simétrica, tornando impossível aplicar o Teorema da Representação de Riesz. Expliquei que, dado um espaço de Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e uma forma bilinear  $\mathcal{B} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  simétrica, contínua e coerciva, a norma induzida por  $\mathcal{B}$  coincide com a norma original de  $H$  (devido justamente à continuidade e coercividade), tornando possível aplicar o Teorema da Representação de Riesz diretamente.

- Pediram para eu definir a formulação fraca do problema e explicar por que a forma bilinear associada não é simétrica.
- Perguntaram o que usei para obter a formulação fraca do problema. Falei da integração por partes via Teorema da Divergência e da motivação vinda das contas das derivadas clássicas.
- Liliane observou que, na demonstração do Teorema de Lax-Milgram, eu mostrei separadamente que o operador  $A : H \rightarrow H$  determinado por  $\langle A(x), y \rangle = \mathcal{B}(x, y)$  era injetivo e sobrejetivo. Em seguida, perguntou se haveria necessidade de mostrar separadamente a injetividade e sobrejetividade se o espaço tivesse dimensão finita. Respondi que não, pois em tal contexto são equivalentes.

- Logo após, ela perguntou se em dimensão infinita injetividade e sobrejetividade são equivalentes. Falei que não, e ela pediu exemplos de operador injetivo mas não sobrejetivo e vice-versa. Falei dos operadores shift em  $\ell^2$ .
- Em seguida, ela perguntou se eu conhecia algum resultado que garantisse a equivalência de injetividade e sobrejetividade em dimensão infinita. Enunciei um dos itens da alternativa de Fredholm, que se  $K$  é compacto então  $\text{Id} - K$  é injetivo se e somente se é sobrejetivo.
- Liliane perguntou se eu conhecia uma aplicação da alternativa de Fredholm para algum problema. Falei do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e mostrei que o problema tem solução desde que  $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , onde  $\lambda_i$  são os autovalores do (menos) Laplaciano  $-\Delta$ , e falei também que, caso  $\lambda \in \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , é garantida a existência de funções  $f$  tais que o problema não admite solução, e ainda além, quando o problema tiver solução nesse caso, nunca será única.

**Observação (O.4).** Na verdade, como Gabriel observou depois do exame, a existência e unicidade de soluções é garantida desde que  $\lambda \notin \{-\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  (em particular se  $\lambda \geq -\lambda_1$ ), não  $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

- Liliane falou do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e perguntou para quais  $p \geq 1$  era possível estabelecer existência e unicidade de solução. Lembrei da cota inferior ótima  $p \geq \frac{2n}{n+2}$ , pediram para eu demonstrar, me enrolei e passaram para a próxima pergunta.

- Ao fazer os detalhes da aplicação da alternativa de Fredholm, mencionei que, usando as imersões compactas dos espaços de Sobolev e o Teorema da Representação de Riesz, dá para provar que o operador  $L = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  é compacto. Liliane pediu para eu mostrar que  $L^{-1}$ , o próprio Laplaciano, não é um operador compacto.
- Nessa parte, comecei a me enrolar um pouco. Romildo interrompeu e pediu para eu definir derivada fraca. Liliane pediu exemplo de função que não tem derivada fraca. Dei um exemplo, e ela e Mayra pediram ideia de como demonstrar que o exemplo que dei não tem derivada fraca. Falei da ideia de pegar uma sequência de funções suaves com suporte compacto e mostrar que, no limite, as igualdades das definições de derivada fraca quebram.
- Voltamos para o problema de mostrar que o Laplaciano não é compacto. Consegui mostrar usando as autofunções do Laplaciano.

**Observação (O.5).** Gabriel comentou comigo depois que, na verdade, o inverso de um operador (quando tal inverso existe) compacto nunca é compacto. De fato, isso só pode acontecer em dimensão finita. Com efeito, suponhamos que  $T : X \rightarrow X$  seja um operador linear compacto em



um espaço vetorial normado  $X$ . Então  $T^{-1}(B_X) \subseteq KB_X$  para algum  $K > 0$ . Aplicando  $T$  em ambos os lados, obtemos

$$B_X = T(T^{-1}(B_X)) \subseteq T(KB_X) = KT(B_X).$$

Como  $\overline{T(B_X)}$  é compacto, segue que  $B_X$  é um subconjunto fechado de um conjunto compacto e, portanto, é compacto, donde se conclui que  $X$  tem dimensão finita. Na realidade, o inverso só é limitado se o espaço tiver dimensão finita. De fato, sempre que o inverso é compacto, a aplicação identidade (como composição de um operador compacto e outro limitado) é compacta, o que garante a compacidade da bola e, consequentemente, a dimensão finita de  $X$ . Toda essa argumentação pressupõe a existência do inverso; entretanto, pela teoria espectral de operadores compactos em espaços de dimensão infinita, o zero está no espectro de qualquer operador compacto, o que garante que o inverso sempre estará, no máximo, parcialmente definido.

- Pediram exemplos de operadores compactos. Falei do caso de dimensão finita e pediram exemplos em dimensão infinita. Falei do operador de Volterra, que era compacto mas não auto-adjunto. Perguntaram se eu sabia como mostrar que era compacto. Falei que não conseguiria na hora, perguntaram se eu saberia pelo menos alguma ideia e eu falei de usar Arzelà-Ascoli.
- Voltamos ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

mas agora no caso clássico. Perguntaram quais condições sobre  $f$  e sobre o domínio garantem existência de soluções clássicas, e qual a melhor regularidade de tais soluções dependendo da regularidade da  $f$  e do domínio. Liliane perguntou como eu mostraria unicidade de soluções. Mostrei a unicidade usando princípio do máximo para funções harmônicas/que satisfazem a propriedade da média.

- Mayra perguntou se a unicidade também poderia ser provada usando as partes anteriores da apresentação, i.e., usando o Teorema da Representação de Riesz. Falei que sim, pois o T.R.R. garante unicidade de soluções fracas, e como toda solução clássica é também fraca, a unicidade fraca garante a unicidade clássica.
- Mayra então perguntou como construir explicitamente a solução quando a mesma existir, qual método poderia ser usado. Falei das funções de Green e do Potencial Newtoniano.
- Perguntaram como garantir que a solução do problema é suave se  $f$  for suave e o domínio for regular. Falei dos resultados de regularidade, sobre aplicar recursivamente (bootstrap) Agmon-Douglis-Nirenberg e Schauder.
- Mayra pediu para eu enunciar todas as imersões de Sobolev que eu conhecia, quando são contínuas, quando são compactas, quando se perde a compacidade.

- Mayra perguntou se a regularidade da imersão em  $L^q(\Omega)$  para todo  $q \geq 1$  podia ser melhorada para  $L^\infty(\Omega)$ . Falei que não podia, pois  $f \in L^q(\Omega)$  para todo  $q \geq 1$  não garante que  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Pediram contra-exemplo explícito disso.
- Perguntaram o que acontece com os casos  $n = 1$  e  $n = 2$ , o que se pode dizer do expoente crítico de Sobolev e como nesses casos a regularidade e compacidade das imersões é melhorada.
- Voltamos para Análise Funcional. Mayra pediu para eu explicar qual a importância/utilidade de espaços reflexivos, e também para definir reflexividade. Falei da compacidade (Liliane me perguntou em outro momento o que se pode dizer sobre a compacidade da bola em dimensão infinita) nas topologias fraca e fraca-estrela, i.e., os teoremas de Banach-Alaoglu-Bourbaki e Kakutani, Eberlein-Smulain. Mayra pediu para eu dar uma ideia da demonstração de cada um dos teoremas.
- Liliane pediu exemplo de sequência que não converge forte mas converge na topologia fraca.
- Romildo pediu para eu definir espaços uniformemente convexos.
- Mayra perguntou a relação entre espaços reflexivos e uniformemente convexos. Falei que todo espaço uniformemente convexo é reflexivo, ela pediu uma ideia da demonstração.
- Mayra perguntou se todo espaço reflexivo é uniformemente convexo. Respondi que não, pois a convexidade uniforme é uma propriedade da norma do espaço, e não do espaço em si, sendo possível inclusive ter normas equivalentes no mesmo espaço reflexivo tal que uma norma é uniformemente convexa e a outra não.
- Liliane perguntou sob quais condições a convergência fraca garante convergência forte. Falei que em espaços uniformemente convexos isso acontece desde que a norma da sequência convirja forte. Daí ela perguntou se eu sabia demonstrar esse resultado. Falei que para o caso geral não, mas fiz no caso de espaços de Hilbert.
- Liliane pediu para eu falar do Teorema de Hahn-Banach, de corolários úteis e também de aplicações nos estudos da topologia fraca e fraca-estrela. Falei do teorema, de como obter o corolário que se  $x \neq y$  existe  $f \in E'$  tal que  $f(x) \neq f(y)$ , e mencionei como isso garante que a topologia fraca é Hausdorff, em particular vale a unicidade dos limites.
- Liliane pediu exemplo onde a extensão de Hahn-Banach não é única.
- Romildo perguntou sobre os Teoremas de Banach-Steinhaus e do Gráfico Fechado, enunciar e dar aplicações, para que servem.
- O último problema do exame foi sobre o problema do autovalor do Laplaciano na bola. Liliane me perguntou como eu garantiria a existência de autofunções e autovalores para o problema na bola unitária. Falei da teoria espectral de operadores compactos e da caracterização variacional do primeiro autovalor. Em seguida, ela perguntou como eu conseguiria relacionar o primeiro autovalor  $\lambda_1$  da bola unitária com o primeiro autovalor da bola de raio  $R$ , digamos  $\lambda_{1,R}$ . Falei que minha intuição diria que eram inversamente proporcionais, Liliane e Mayra perguntaram como fazer a

conta explicitamente. Falei do teorema da mudança de variáveis, pediram para eu fazer a conta e chegamos em

$$\lambda_{1,R} = \frac{\lambda_1}{R^2}.$$

Liliane perguntou qual conclusão então pode ser obtida sobre o problema do autovalor do Laplaciano em  $\mathbb{R}^n$ . Falei que não existe a primeira autofunção nesse caso, pois não pode existir autofunção associada a autovalor nulo.

# Apêndice

**Proposição (P.10.1).** Seja  $0 \neq f \in E'$ . Então  $\ker(f)$  tem codimensão 1.

**Demonstração:** Como  $0 \neq f$  por hipótese, existe  $v_0 \in E$  tal que  $f(v_0) \neq 0$ . Podemos então escrever

$$x = \left( x - \frac{f(x)}{f(v_0)} v_0 \right) + \frac{f(x)}{f(v_0)} v_0$$

Evidentemente,

$$\left( x - \frac{f(x)}{f(v_0)} v_0 \right) \in \ker(f).$$

■

**Teorema (T.10.1).** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado,  $f \in L^2(\Omega)$  e  $\lambda \geq 0$ . Então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução fraca em  $H_0^1(\Omega)$ .

**Solução:** Primeiramente, note que a formulação fraca do problema é

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \lambda \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (10.1)$$

Isso nos motiva a definir a seguinte forma bilinear:

$$B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

de forma que a formulação fraca do problema é equivalente a encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$B(u, \cdot) = \left( H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \int_{\Omega} f v \right) \doteq T_f$$

Uma vez que tivermos mostrado que

- 

$$T_f \in (H_0^1(\Omega))^*;$$

- 

$$B \text{ é contínua};$$

- 

$$B \text{ é coerciva},$$

o resultado desejado seguirá do Teorema de Lax-Milgram.

De fato,  $T_f$  é evidentemente linear, e dada  $v \in H_0^1(\Omega)$  temos

$$|T_f(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \tilde{C} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Além disso,

- dadas  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &= \left| \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + \lambda C^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{10.2}$$

onde usamos as desigualdades de Holder e Poincaré. Isso mostra a continuidade de  $B$ .

- $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ , vale:

$$\begin{aligned} B(v, v) &= \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{10.3}$$

onde usamos a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré. Isso mostra a coercividade de  $B$ .

■

#### Pergunta 87.

É possível melhorar a hipótese  $\lambda \geq 0$  para  $\lambda > \alpha$  para algum  $\alpha < 0$ ?

**Resposta:** Sim! Seja

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} |u|^2}$$

de forma que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^2 \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e suponhamos  $0 > \lambda > -\lambda_1$ . Então (10.2) se torna

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

A hipótese  $0 > \lambda$  garante em particular que  $\lambda < \lambda_1$ , e portanto também que  $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$ , o que mostra que  $B$  é contínua.

A prova da coercividade dada em (10.3) precisa ser adaptada. Basta notarmos que para  $v \in H_0^1(\Omega)$ , temos que

$$\begin{aligned} B(v, v) &= \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{\lambda_1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \left(\frac{\lambda_1 + \lambda}{\lambda_1}\right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

■

#### Pergunta 88.

É possível trocar a constante  $\lambda$  por alguma função  $c(x)$ ? Se sim, quais hipóteses devem ser postas sobre  $c(x)$ ?

**Solução:** Sim! Sim, desde que suponhamos que  $c \in L^\infty(\Omega)$  e  $\|c\|_{L^\infty(\Omega)} < \lambda_1$ .

Nesse caso, a forma bilinear associada é:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} c(x)uv$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + \frac{\|c\|_{L^\infty}}{\lambda_1}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}; \end{aligned}$$

Além de

$$\begin{aligned}
B(u, u) &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} c(x)u^2 \\
&\geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&= \left(1 - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Poincaré e o fato de que

$$|c(x)| \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ em particular } -\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(x) \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Segue da hipótese

$$\|c\|_{L^\infty(\Omega)} < \lambda_1$$

que  $M \doteq 1 - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1} > 0$ , e portanto

$$|B(u, u)| > M \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

#### Pergunta 89.

Para o problema original, o que pode ser dito no caso em que  $\lambda \leq -\lambda_1$ ?

**Resposta:** Pelos resultados que acabamos de demonstrar, o operador solução

$$L = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

está bem definido, de forma que o nosso problema original é equivalente a encontrarmos

$$(\text{Id} - K)(u) = f,$$

onde  $K = i \circ -\lambda L$  para alguma imersão compacta  $i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ . Se  $\lambda = -\lambda_j$ , é evidente que  $\text{Id} - K$  não será injetivo e, em particular (pela alternativa de Fredholm), não será sobrejetivo. Nesse cenário, a existência de soluções fracas não é garantida (na verdade, é *garantido* que existem funções  $f$  para as quais o problema não admite nenhuma solução fraca). A unicidade também se perde, pois, quando o problema admite alguma solução, digamos  $u$ , então  $u + c\varphi_j$  (onde  $\varphi_j$  é uma autofunção de  $-\Delta$ ) também será uma solução seja qual for  $c \in \mathbb{R}$ .

Por fim, se  $\lambda < -\lambda_1$  e  $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\text{Id} - K$  é injetivo e, portanto, sobrejetivo. Nesse caso, o problema admite exatamente uma solução fraca.

■

## Bibliografia

- [1] **BOTELHO** livro do Botelho de Analise Funcional
- [2] **RODNEY** notas de aula de Funcional e de EDP do Rodney da UFMG
- [3] **BREZIS** livro do Brezis