Insira o título da apresentação aqui

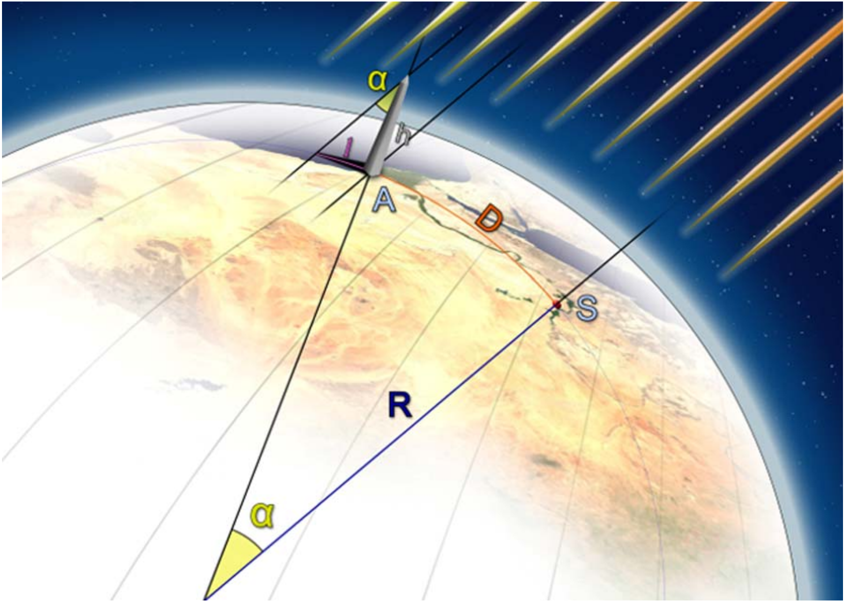
Universidade de Brasília

Aluno: Insira o seu nome aqui

Orientador: preencha aqui (ou comente essa linha)

33 de fevereiro de 2222

Eratóstenes: o homem que mediu o mundo



Conceitos e notações preliminares

- Uma variedade fechada é uma variedade compacta e sem bordo.

Conceitos e notações preliminares

- Uma variedade fechada é uma variedade compacta e sem bordo.
- Todas as variedades com as quais trabalharemos são, por hipótese, conexas e sem bordo.

Conceitos e notações preliminares

- Uma variedade fechada é uma variedade compacta e sem bordo.
- Todas as variedades com as quais trabalharemos são, por hipótese, conexas e sem bordo.
- Uma vez fixada uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$, denotaremos por $\mathscr{T}_\ell^k(T\mathcal{M})$ o fibrado de tensores de tipo (k, ℓ) sobre $\mathcal{M}$.

Conceitos e notações preliminares

- Uma variedade fechada é uma variedade compacta e sem bordo.
- Todas as variedades com as quais trabalharemos são, por hipótese, conexas e sem bordo.
- Uma vez fixada uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$, denotaremos por $\mathscr{T}_\ell^k(T\mathcal{M})$ o fibrado de tensores de tipo (k, ℓ) sobre $\mathcal{M}$.
- $\Lambda^k(\mathcal{M}) \subset \mathscr{T}_k^0(T\mathcal{M})$ denota o fibrado de k-formas diferenciáveis sobre $\mathcal{M}$.

Conceitos e notações preliminares

- Uma variedade fechada é uma variedade compacta e sem bordo.
- Todas as variedades com as quais trabalharemos são, por hipótese, conexas e sem bordo.
- Uma vez fixada uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$, denotaremos por $\mathscr{T}_\ell^k(T\mathcal{M})$ o fibrado de tensores de tipo (k, ℓ) sobre $\mathcal{M}$.
- $\Lambda^k(\mathcal{M}) \subset \mathscr{T}_k^0(T\mathcal{M})$ denota o fibrado de k-formas diferenciáveis sobre $\mathcal{M}$.
- O operador estrela de Hodge será denotado por

$$\star : \Lambda^k(\mathcal{M}) \to \Lambda^{n-k}(\mathcal{M}) .$$

Conceitos e notações preliminares

- Uma variedade fechada é uma variedade compacta e sem bordo.
- Todas as variedades com as quais trabalharemos são, por hipótese, conexas e sem bordo.
- Uma vez fixada uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$, denotaremos por $\mathscr{T}_\ell^k (T\mathcal{M})$ o fibrado de tensores de tipo (k, ℓ) sobre $\mathcal{M}$.
- $\Lambda^k (\mathcal{M}) \subset \mathscr{T}_k^0 (T\mathcal{M})$ denota o fibrado de k-formas diferenciáveis sobre $\mathcal{M}$.
- O operador estrela de Hodge será denotado por
$$\star : \Lambda^k (\mathcal{M}) \to \Lambda^{n-k} (\mathcal{M}) .$$
- Os isomorfismos musicais bemol e sustenido serão denotados, respectivamente, por $\flat$ e $\sharp$. Não explicitaremos as identificações fornecidas por tais aplicações.

Conceitos e notações preliminares

- A manifestação de um tensor $P \in \mathscr{T}_4^0\left(T\mathcal{M}\right)$ de tipo curvatura como um endomorfismo auto-adjunto de $\Lambda^2\left(\mathcal{M}\right)$ é caracterizada por
$$P\left(X \wedge Y\right) = \sharp\left(P\left(X \wedge Y, \bullet\right)\right),$$
sejam quais forem $X, Y \in \Gamma\left(T\mathcal{M}\right)$.

Conceitos e notações preliminares

- A manifestação de um tensor $P \in \mathscr{T}_4^0\left(T\mathcal{M}\right)$ de tipo curvatura como um endomorfismo auto-adjunto de $\Lambda^2\left(\mathcal{M}\right)$ é caracterizada por
$$P\left(X \wedge Y\right) = \sharp\left(P\left(X \wedge Y, \bullet\right)\right),$$
sejam quais forem $X, Y \in \Gamma\left(T\mathcal{M}\right)$.
- $\owedge : \mathscr{T}_2^0(T\mathcal{M}) \times \mathscr{T}_2^0(T\mathcal{M}) \to \mathscr{T}_4^0(T\mathcal{M})$ denotará o produto de Kulkarni-Nomizu, determinado por
$$\begin{aligned} 2 \cdot (T \owedge S)(X, Y, Z, W) = {} & T(Y, Z)S(X, W) - T(X, Z)S(Y, W) \\ & + S(Y, Z)T(X, W) - S(X, Z)T(Y, W), \end{aligned}$$
sejam quais forem $X, Y, Z, W \in \Gamma\left(T\mathcal{M}\right)$.

Conceitos e notações preliminares

- O tensor de Einstein de $\mathcal{M}$, a saber,

$$E \doteq \mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n} g$$

será denotado por E.

Sumário

Os primórdios

Entender as relações entre topologia e curvatura tem sido, desde sempre, uma das áreas de pesquisa mais ativas em geometria. Nesse sentido, dois problemas antigos e muito populares, são:

Pergunta

Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície fechada?

Os primórdios

Entender as relações entre topologia e curvatura tem sido, desde sempre, uma das áreas de pesquisa mais ativas em geometria. Nesse sentido, dois problemas antigos e muito populares, são:

Pergunta

Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície fechada?

Pergunta

Qual é a "melhor" métrica que uma superfície fechada qualquer admite?

Os primórdios

Entender as relações entre topologia e curvatura tem sido, desde sempre, uma das áreas de pesquisa mais ativas em geometria. Nesse sentido, dois problemas antigos e muito populares, são:

Pergunta

Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície fechada?

Pergunta

Qual é a "melhor" métrica que uma superfície fechada qualquer admite?

Os primórdios

Entender as relações entre topologia e curvatura tem sido, desde sempre, uma das áreas de pesquisa mais ativas em geometria. Nesse sentido, dois problemas antigos e muito populares, são:

Pergunta

Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície fechada?

Pergunta

Qual é a "melhor" métrica que uma superfície fechada qualquer admite?

Veremos que essas duas questões estão intimamente relacionadas.

Dimensão 2: superfícies

Em dimensão 2, a topologia é bem entendida e caracterizada pela seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ *conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:*

Dimensão 2: superfícies

Em dimensão 2, a topologia é bem entendida e caracterizada pela seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ *conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:*

- *a esfera* $\mathbb{S}^2$*;*

Dimensão 2: superfícies

Em dimensão 2, a topologia é bem entendida e caracterizada pela seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ *conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:*

- *a esfera* $\mathbb{S}^2$*;*
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do toro* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$*;*

Dimensão 2: superfícies

Em dimensão 2, a topologia é bem entendida e caracterizada pela seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:

- *a esfera $\mathbb{S}^2$;*
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;*
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do plano projetivo $\mathbb{RP}^2$.*

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.

Dimensão 2: superfícies

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.
- A característica de Euler é um invariante topológico que justifica o "exatamente" citado na classificação anterior. Ela e a orientabilidade são invariantes topológicos que determinam completamente a topologia de uma superfície fechada.

Dimensão 2: superfícies

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.
- A característica de Euler é um invariante topológico que justifica o "exatamente" citado na classificação anterior. Ela e a orientabilidade são invariantes topológicos que determinam completamente a topologia de uma superfície fechada.
- Na busca de invariantes topológicos em dimensões mais altas, Poincaré descobriu o grupo fundamental.

E quanto à geometria?

Um dos teoremas fundamentais no estudo de superfícies é o seguinte:

Teorema da uniformização

Toda superfície fechada $\mathcal{M}^2$ admite uma métrica Riemanniana de curvatura seccional constante.

Consequentemente, toda superfície compacta é difeomorfa a exatamente um quociente de uma das três seguintes geometrias modelo: $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}^2$. A topologia e geometria se relacionam pelo teorema de Gauss-Bonnet:

$$\int_{\mathcal{M}^2} K \, \mathrm{d}A = 2\pi \cdot \chi(\mathcal{M}^2).$$

A conjectura da geometrização de Thurston

- Em dimensão 3, ainda temos as três geometrias-modelo de curvatura constante - a saber, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^3$. Mas não há esperança de uma classificação tão boa quanto em dimensão 2: de fato, existem infinitas variedades tri-dimensionais que não admitem nenhuma métrica de curvatura seccional constante.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$;

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em [1].

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$;
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em [1].

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$;
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;
- o recobrimento universal $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$);

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em **[1]**.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$;
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;
- o recobrimento universal $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$);
- o grupo de Heisenberg (um fibrado torcido sobre $\mathbb{R}^2$); e

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em [1].

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$;
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;
- o recobrimento universal $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$);
- o grupo de Heisenberg (um fibrado torcido sobre $\mathbb{R}^2$); e
- a variedade Sol (um $\mathbb{T}^2$-fibrado torcido sobre $\mathbb{S}^1$).

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em [1].

A conjectura da geometrização de Thurston

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.

A conjectura da geometrização de Thurston

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.
- Tal trabalho foi importantíssimo. Nas palavras de John Morgan [4],

A conjectura da geometrização de Thurston

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.
- Tal trabalho foi importantíssimo. Nas palavras de John Morgan [4],

A importância do trabalho de Thurston

"*Na minha perspectiva, antes do trabalho de Thurston em* 3*-variedades hiperbólicas e sua formalização da Conjectura da Geometrização, não havia consenso entre os especialistas quanto à validade da conjectura de Poincaré. Depois do trabalho de Thurston (não obstante o fato de que o mesmo não tinha nenhuma consequência direta à Conjectura de Poincaré), se desenvolveu um consenso de que ambas a Conjectura de Poincaré e a Conjectura da Geometrização eram verdadeiras.*"

O plano de ataque de Richard Hamilton

- Comece com uma 3-variedade fechada arbitrária $\mathcal{M}^3$. Equipemos $\mathcal{M}^3$ com uma métrica Riemanniana. Onde a curvatura for grande, deforme a métrica para que a mesma diminua, e onde for pequena, deforme para que aumente. A princípio, o melhor que se pode esperar é que a deformação deixe a variedade inicial com uma geometria "uniforme", de curvatura constante. Mas qual curvatura considerar?

$$\frac{\partial}{\partial t} g = ?$$

O plano de ataque de Richard Hamilton

- Em dimensão 3, Ric determina Rm. É natural então considerar

$$\frac{\partial}{\partial t} g = c \cdot \mathrm{Ric},$$

para alguma constante $c \neq 0$.

O plano de ataque de Richard Hamilton

- Em dimensão 3, Ric determina Rm. É natural então considerar

$$\frac{\partial}{\partial t} g = c \cdot \mathrm{Ric},$$

para alguma constante $c \neq 0$.

- Em coordenadas harmônicas com respeito a $g(t)$, o tensor de Ricci satisfaz

$$c \cdot \mathrm{Ric}_{jk} = -\frac{c}{2} \cdot \Delta(g_{jk}) - \frac{c}{2} \cdot Q_{jk}(\partial g, g^{-1}),$$

onde Q_{jk} denota uma soma de termos que contém componentes de g^{-1}, e derivadas espaciais de ordem ≤ 1 dos componentes da métrica g.

O plano de ataque de Richard Hamilton

- É natural então escolher $c = -2$, de forma que, informalmente, a equação do fluxo se escreva como

$$\partial_t g = \Delta g + \ldots$$

O plano de ataque de Richard Hamilton

- É natural então escolher $c = -2$, de forma que, informalmente, a equação do fluxo se escreva como

$$\partial_t g = \Delta g + \dots$$

- Consideraremos então a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2 \cdot \mathrm{Ric}_{g(t)}.$$

Exemplos: os sólitons de Ricci

- Um sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g_0)$ que admite um campo vetorial $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ tal que

$$\mathrm{Ric}_{g_0} + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_0 = \lambda\, g_0,$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplos: os sólitons de Ricci

- Um sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g_0)$ que admite um campo vetorial $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ tal que

$$\mathrm{Ric}_{g_0} + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_0 = \lambda\, g_0,$$

  para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Quando existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$ tal que $X = \nabla f$, tal equação se escreve como

$$\mathrm{Ric}_{g_0} + \mathrm{Hess}_{g_0}(f) = \lambda\, g_0.$$

Exemplos: os sólitons de Ricci

- Sólitons são soluções autossimilares: sob o fluxo de Ricci, eles encolhem, expandem homoteticamente ou permanecem "firmes" (steady). De fato, definindo a função de escala

$$\sigma(t) = 1 - 2\lambda\, t,$$

pode-se mostrar que existe uma família de fluxos temporais $\psi : \mathcal{M} \times J \to \mathcal{M}$ tais que, definindo

$$g(t) = \sigma(t)\, \psi_t^* g_0,$$

então

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g_t}.$$

Exemplos: os sólitons de Ricci

- Sólitons são soluções autossimilares: sob o fluxo de Ricci, eles encolhem, expandem homoteticamente ou permanecem "firmes" (steady). De fato, definindo a função de escala

$$\sigma(t) = 1 - 2\lambda\, t,$$

pode-se mostrar que existe uma família de fluxos temporais $\psi : \mathcal{M} \times J \to \mathcal{M}$ tais que, definindo

$$g(t) = \sigma(t)\, \psi_t^* g_0,$$

então

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\, \mathrm{Ric}_{g_t}.$$

- Na literatura, os casos $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$ correspondem a sólitons *shrinking*, *steady* ("encolhedores" e "estáveis/firmes", respectivamente) e *expanding* ("expansores").

Os primeiros resultados de Hamilton

- **Existência a curto prazo e unicidade.** Se $(\mathcal{M}, g_0)$ é uma variedade Riemanniana compacta, existe $\varepsilon > 0$ dependendo somente de g_0 e uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci definida para $t \in [0, \varepsilon)$ com $g(0) = g_0$.

Os primeiros resultados de Hamilton

- **Existência a curto prazo e unicidade.** Se $(\mathcal{M}, g_0)$ é uma variedade Riemanniana compacta, existe $\varepsilon > 0$ dependendo somente de g_0 e uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci definida para $t \in [0, \varepsilon)$ com $g(0) = g_0$.
- **Caracterização da formação de singularidades pela curvatura.** Se a solução do fluxo existe num intervalo temportal $[0, T)$ mas não se estende a nenhum intervalo maior $[0, T + \delta)$ com $\delta > 0$, então existe um ponto $x \in \mathcal{M}$ tal que o tensor curvatura $\operatorname{Rm}(x, t)$ da métrica $g(t)$ "explode", i.e

$$\lim_{t \to T^-} \left(\sup_{x \in \mathcal{M}} \| \operatorname{Rm}(x, t) \| \right) = \infty$$

Propriedades preservadas pelo fluxo

Em quaisquer dimensões, o fluxo de Ricci preserva:

- isometrias e estruturas de produtos Riemannianos;

Em dimensão 3, algumas importantes particularidades do fluxo são:

Propriedades preservadas pelo fluxo

Em quaisquer dimensões, o fluxo de Ricci preserva:

- isometrias e estruturas de produtos Riemannianos;
- a positividade da curvatura escalar, $\mathrm{Scal} > 0$;

Em dimensão 3, algumas importantes particularidades do fluxo são:

Propriedades preservadas pelo fluxo

Em quaisquer dimensões, o fluxo de Ricci preserva:

- isometrias e estruturas de produtos Riemannianos;
- a positividade da curvatura escalar, $\mathrm{Scal} > 0$;
- a positividade do operador curvatura $\mathrm{Rm} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$, $\mathrm{Rm} > 0$.

Em dimensão 3, algumas importantes particularidades do fluxo são:

Propriedades preservadas pelo fluxo

Em quaisquer dimensões, o fluxo de Ricci preserva:

- isometrias e estruturas de produtos Riemannianos;
- a positividade da curvatura escalar, $\mathrm{Scal} > 0$;
- a positividade do operador curvatura $\mathrm{Rm} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$, $\mathrm{Rm} > 0$.

Em dimensão 3, algumas importantes particularidades do fluxo são:

- a preservação da positividade da curvatura de Ricci, $\mathrm{Ric} > 0$;

Propriedades preservadas pelo fluxo

Em quaisquer dimensões, o fluxo de Ricci preserva:

- isometrias e estruturas de produtos Riemannianos;
- a positividade da curvatura escalar, $\mathrm{Scal} > 0$;
- a positividade do operador curvatura $\mathrm{Rm} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$, $\mathrm{Rm} > 0$.

Em dimensão 3, algumas importantes particularidades do fluxo são:

- a preservação da positividade da curvatura de Ricci, $\mathrm{Ric} > 0$;
- a preservação da positividade da curvatura seccional, $K > 0$.

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

Um caso muito particular da conjectura de Poincaré

Seja $\mathcal{M}^3$ uma 3-variedade diferenciável fechada que admite uma métrica Riemanniana de curvatura de Ricci estritamente positiva. Então o recobrimento universal de $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$. Em particular, se $\mathcal{M}$ é simplesmente conexa, então $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$.

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

Um caso muito particular da conjectura de Poincaré

Seja $\mathcal{M}^3$ uma 3-variedade diferenciável fechada que admite uma métrica Riemanniana de curvatura de Ricci estritamente positiva. Então o recobrimento universal de $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$. Em particular, se $\mathcal{M}$ é simplesmente conexa, então $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$.

- Para demonstrar tal resultado, Hamilton precisou provar várias *estimativas de curvatura*, algumas das quais enunciaremos a seguir.

Referências

[1] **Weeks, Jeffrey R.**
The shape of space. Second edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 249. *Marcel Dekker, Inc., New York,* 2002. xiv+382 pp. ISBN: 0-8247-0709-5.

Referências

[1] **Weeks, Jeffrey R.**

The shape of space. Second edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 249. *Marcel Dekker, Inc., New York,* 2002. xiv+382 pp. ISBN: 0-8247-0709-5.

[3] B. Chow et al

Hamilton's Ricci Flow

Referências

[1] **Weeks, Jeffrey R.**

The shape of space. Second edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 249. *Marcel Dekker, Inc., New York,* 2002. xiv+382 pp. ISBN: 0-8247-0709-5.

[3] B. Chow et al

Hamilton's Ricci Flow

[4] **Morgan, John W.**

Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2005), no. 1, 57–78.

Referências

[1] **Weeks, Jeffrey R.**
The shape of space. Second edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 249. *Marcel Dekker, Inc., New York,* 2002. xiv+382 pp. ISBN: 0-8247-0709-5.

[3] B. Chow et al
Hamilton's Ricci Flow

[4] **Morgan, John W.**
Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2005), no. 1, 57–78.

[5] **Chen, Xiuxiong; Lu, Peng; Tian, Gang.** A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow. *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), no. 11, 3391–3393. MR2231924

Referências

[1] **Weeks, Jeffrey R.**
The shape of space. Second edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 249. *Marcel Dekker, Inc., New York,* 2002. xiv+382 pp. ISBN: 0-8247-0709-5.

[3] B. Chow et al
Hamilton's Ricci Flow

[4] **Morgan, John W.**
Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2005), no. 1, 57–78.

[5] **Chen, Xiuxiong; Lu, Peng; Tian, Gang.** A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow. *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), no. 11, 3391–3393. MR2231924

[6] **Böhm, Christoph; Wilking, Burkhard.** Manifolds with positive curvature operators are space forms. Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, 1079–1097. MR2415394