Universidade de Brasília

Título teste a ser usado para teste e preenchimento do template

Fulano da Silva

Orientador: Beltrano de Souza

Departamento de Matemática,
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, DD de MMMMM de 2025

Template para Dissertação de Mestrado da UnB

Introdução

Este documento contém instruções para trabalhar com um template para dissertações de mestrado/teses de doutorado da Universidade de Brasília (UnB), que é um fork do template feito pelo ex-aluno Deivid Vale. Abaixo estão descrições detalhadas dos arquivos `.tex` e como modificá-los para atender a necessidades específicas. Para remover essas instruções do PDF principal, remova (ou comente) a linha 253 de `thesis.tex`, a saber,

```
\includepdf[pages=-, pagecommand={}]{creditos/creditos.pdf}
```

A versão mais atualizada do repositório pode ser encontrada em:
https://github.com/SaganGromov/TemplateDissertacaoUnB

Download direto da última versão do repositório completo:
https://github.com/SaganGromov/TemplateDissertacaoUnB/archive/refs/heads/main.zip

Estrutura do Template

Arquivos Principais

1. `thesis.tex` Este é o arquivo principal que compila toda a dissertação. Ele inclui os capítulos, preâmbulo e configurações gerais.
   - Para alterar o estilo de referências cruzadas (ex.: equações, teoremas), edite as definições de `\crefname` e `\creflabelformat` neste arquivo.
   - Para adicionar ou remover capítulos, modifique os comandos `\include{}`.
2. `thesis-info.tex` Contém informações de autoria, título, orientador, coorientador, data, e outros metadados.
   - Edite este arquivo para personalizar as informações de autoria e título da dissertação.
3. `PhDThesisPSnPDF.cls` Este arquivo define o estilo do documento.
   - Para alterar as barras horizontais pretas acima e abaixo do título, edite a partir da linha 922.
   - Para ajustar margens, fontes ou outros estilos globais, modifique este arquivo.
4. `pref/pref.tex` Contém o prefácio da dissertação.
   - Edite este arquivo para adicionar um prefácio personalizado.
5. `acknowledgement/acknowledgement.tex` Contém os agradecimentos.
   - Personalize este arquivo para incluir agradecimentos específicos.
6. `abstract/abstract.tex` Contém o resumo/abstract da dissertação.
   - Edite este arquivo para adicionar o resumo em português e/ou inglês.
7. `preamble/preamble.tex` Contém configurações gerais, como pacotes e comandos personalizados.
   - Adicione ou remova pacotes conforme necessário.

- Defina comandos personalizados para uso em toda a dissertação.

8. `assets/codigo_segunda_pagina/sec.tex` Este arquivo é usado para compilar a segunda página da dissertação, que geralmente contém informações institucionais e de apresentação.

    - Edite este arquivo para personalizar o conteúdo da segunda página, como título, autor, data e membros da banca.
    - Certifique-se de que ele está incluído corretamente no arquivo `thesis.tex` com o comando:

```
\includepdf[pages=1, pagecommand={{}}]{assets/codigo_segunda_pagina/sec.pdf}
```

Capítulos e Seções

Os capítulos estão organizados em subdiretórios separados:

- `chapter_1/chapter_1.tex` - Primeiro capítulo
- `chapter_2/chapter_2.tex` - Segundo capítulo
- `chapter_n/chapter_n.tex` - Capítulos adicionais

Para incluir ou remover capítulos, modifique os comandos `\include{}` no arquivo `thesis.tex`. Por exemplo:

```
\include{chapter_1/chapter_1}
\include{chapter_2/chapter_2}
```

Cada capítulo pode conter suas próprias figuras, tabelas e referências bibliográficas locais.

Instruções para Incluir Teoremas, Observações e Outros Elementos

Os estilos para teoremas, observações, definições e outros elementos estão definidos nos arquivos `preamble/preamble.tex`, `preamble/config.tex` e `preamble/notation.tex`. Abaixo estão exemplos de como utilizá-los:

Teoremas

```
\begin{teorema}
Seja $\mm^3$ uma variedade diferenciável fechada. Então $\mm^3$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^3$.
\end{teorema}
```

Observações

```
\begin{oobs}
Este resultado é uma consequência direta do Teorema de Poincaré.
\end{oobs}
```

Definições

```
\begin{deff}
Uma métrica Riemanniana é uma função que associa a cada ponto de uma variedade um produto inter
\end{deff}
```

Proposições

```
\begin{proposicao}
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então $a + b = b + a$.
\end{proposicao}
```

Lemas

```
\begin{lema}
Se $f$ é uma função contínua em um intervalo fechado, então $f$ é limitada.
\end{lema}
```

Corolários

```
\begin{col}
Se $\mm^3$ é simplesmente conexa e compacta, então $\mm^3$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^3$.
\end{col}
```

Perguntas

```
\begin{pergunta}
Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície compacta?
\end{pergunta}
```

Exemplos

```
\begin{exem}
O toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é um exemplo de uma superfície compact
\end{exem}
```

Personalização de Notação

Os comandos personalizados para notação matemática estão definidos em `preamble/notation.tex`. Exemplos de comandos disponíveis:

- **Produto de Kulkarni-Nomizu**: `\KN`
- **Divergência**: `\divv`
- **Curvatura Escalar**: `\Scal`
- **Ricci**: `\Ric`
- **Curvatura Riemanniana**: `\Rm`

Exemplo de uso:

```
A curvatura escalar é denotada por $\Scal$, enquanto a curvatura de Ricci é $\Ric$.
```

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Insira aqui o seu título do trabalho

por

Fulano da Silva Gomes*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 23 de setembro de 2022

Comissão Examinadora:

Prof. Beltrano de Souza (Orientador)

Prof. Dr. Ciclano - Instituição (Membro)

Prof. Dr. ... - Instituição (Membro)

*O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração dessa dissertação.

Dedico esse trabalho a Carl Edward Sagan.

What an astonishing thing a book is. It's a flat object made from a tree with flexible parts on which are imprinted lots of funny dark squiggles. But one glance at it and you're inside the mind of another person, maybe somebody dead for thousands of years. Across the millennia, an author is speaking clearly and silently inside your head, directly to you. Writing is perhaps the greatest of human inventions, binding together people who never knew each other, citizens of distant epochs. Books break the shackles of time. A book is proof that humans are capable of working magic.

Carl Sagan

We are a way for the Cosmos to know itself.

Carl Sagan

If you wish to make an apple pie from scratch, you must first invent the universe.

Carl Sagan

Extraordinary claims require extraordinary evidence.

Carl Sagan

Who is more humble? The scientist who looks at the universe with an open mind and accepts whatever the universe has to teach us, or somebody who says everything in this book must be considered the literal truth and never mind the fallibility of all the human beings involved?

Carl Sagan

Imagination will often carry us to worlds that never were. But without it we go nowhere.

Carl Sagan

It pays to keep an open mind, but not so open your brains fall out.

Carl Sagan

For me, it is far better to grasp the Universe as it really is than to persist in delusion, however satisfying and reassuring.

Carl Sagan

Mathematics is not about numbers, equations, computations, or algorithms: it is about understanding.

William Thurston

Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.

David Hilbert

If I have seen further it is only by standing on the shoulders of giants.

Isaac Newton

A human being is part of a whole, called by us the "Universe", a part limited in time and space. He experiences himself, his thoughts and feelings, as something separated from the rest - a kind of optical delusion of his consciousness. This delusion is a kind of prison for us, restricting us to our personal desires and to affection for a few persons nearest us. Our task must be to free ourselves from this prison by widening our circles of compassion to embrace all living creatures and the whole of nature in its beauty.

Albert Einstein

Aut viam inveniam aut faciam.

Hannibal Barca

Only those who will risk going too far can possibly find out how far one can go.

T. S. Elliot

There is no royal road to geometry.

Euclid

We are absurdly accustomed to the miracle of a few written signs being able to contain immortal imagery, involutions of thought, new worlds with live people, speaking, weeping, laughing. We take it for granted so simply that in a sense, by the very act of brutish routine acceptance, we undo the work of the ages, the history of the gradual elaboration of poetical description and construction, from the treeman to Browning, from the caveman to Keats. What if we awake one day, all of us, and find ourselves utterly unable to read? I wish you to gasp not only at what you read but at the miracle of its being readable.

Vladimir Nabokov

Great men are forged in fire. It is the privilege of lesser men to light the flame.

Steven Moffat

Agradecimentos

Primeiramente, ...

Agradeço ...!

Agradeço a ...!

Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo ...

Palavras-chave: fluxo de Ricci, sólitons de Ricci, estimativas de curvatura, tensor de Weyl, variedades quadridimensionais.

Abstract

In this work, we provide a study of complete gradient shrinking Ricci solitons of dimension 4. We present in detail the proofs (by Huai-Dong Cao, Ernani Ribeiro Jr, and Detang Zhou, originally exposed in [1]) of two theorems that guarantee geometrical classifications and controls on the Ricci or Riemannian curvature, provided that pointwise estimates on the self-dual or anti-self-dual parts of the Weyl tensor or a certain control on the scalar curvature in terms of the soliton's potential function are satisfied.

Keywords: Ricci flow, Ricci solitons, curvature estimates, Weyl tensor, four-manifolds.

Sumário

Introdução

Em geral, ...

Capítulo 1

Preliminary Concepts and Notations

The purpose of this chapter is to establish the foundational concepts, notations, and conventions that will be used throughout this work. While we aim to make the exposition as self-contained as possible, some familiarity with basic concepts in Riemannian geometry and differentiable manifolds is assumed. Below, we provide a brief overview of the key ideas.

1.1 Riemannian Manifolds

Observação (O.1). This section introduces the basic definitions and properties of Riemannian manifolds, including the notions of metric tensors, tangent spaces, and smooth maps. We also discuss the importance of coordinate charts and local frames in understanding the geometry of manifolds.

Observação (O.2). We adopt standard notations for Riemannian geometry. For instance, the metric tensor is denoted by g, and the Levi-Civita connection is denoted by ∇. The curvature tensor, Ricci tensor, and scalar curvature are also introduced with their respective notations.

Definição (D.1.1). A Riemannian manifold is a differentiable manifold $\mathcal{M}$ equipped with a smooth, positive-definite metric tensor g. This metric allows us to define notions of angles, lengths, and volumes on $\mathcal{M}$.

Teorema (T.1.1) (Fundamental Theorem of Riemannian Geometry). *On a Riemannian manifold $(\mathcal{M}, g)$, there exists a unique torsion-free connection ∇ that is compatible with the metric g. This connection is called the Levi-Civita connection.*

Demonstração: The proof involves verifying the existence and uniqueness of the Levi-Civita connection using the Koszul formula.

■

1.2 Tensors

This section provides an overview of tensor algebra and calculus, focusing on the types of tensors commonly encountered in Riemannian geometry. Topics include tensor products, contractions, and the metric-induced isomorphisms between tensors of different types.

Definição (D.1.2). A tensor of type (r, s) on a vector space V is a multilinear map $T : V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$, where V^* is the dual space of V.

Observação (O.3). Tensors can be represented in a chosen basis, and their components transform according to specific rules under a change of basis. This property makes tensors coordinate-independent objects.

Proposição (P.1.1). The space of tensors of type (r, s) on a vector space V is a finite-dimensional vector space. Its dimension depends on the dimension of V and the values of r and s.

1.3 Differential Forms

Differential forms are a special class of tensors that are completely antisymmetric. They play a central role in integration on manifolds and in the formulation of Stokes' theorem.

Definição (D.1.3). A differential form of degree k on a manifold $\mathcal{M}$ is a completely antisymmetric tensor field of type $(0, k)$.

Theorem (T.1.3.1) (Stokes' Theorem). *Let $\mathcal{M}$ be an oriented manifold with boundary $\partial\mathcal{M}$, and let ω be a compactly supported $(n-1)$-form on $\mathcal{M}$. Then,*

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega.$$

1.4 Additional Topics

This section briefly introduces advanced topics such as the Hodge star operator, Laplacians, and Bochner's formula, which are essential tools in modern Riemannian geometry.

Definição (D.1.4). The Hodge star operator $\star$ maps k-forms to $(n-k)$-forms on an n-dimensional Riemannian manifold. It is defined such that

$$\alpha \wedge \star\beta = g(\alpha, \beta)\,\mathrm{vol},$$

where vol is the volume form.

Teorema (T.1.2) (Bochner's Formula). *On a Riemannian manifold, the Laplacian of a function f satisfies*

$$\Delta f = div(\nabla f),$$

where Δ is the Laplace-Beltrami operator.

<u>**Demonstração:**</u> The proof involves expressing the Laplacian in local coordinates and using the properties of the Levi-Civita connection.

■

Capítulo 2

O fluxo de Ricci

O conteúdo deste capítulo foi substituído por texto genérico para preservar a confidencialidade do trabalho original. A seguir, apresentamos uma visão geral genérica sobre o fluxo de Ricci.

2.1 Motivação e exemplos

O fluxo de Ricci é uma ferramenta matemática poderosa usada para estudar a geometria e a topologia das variedades. Ele foi introduzido por Richard Hamilton na década de 1980 e desempenhou um papel crucial na prova da Conjectura de Poincaré por Grigori Perelman.

2.1 Definição do fluxo de Ricci

O fluxo de Ricci é descrito pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{ij},$$

onde g_{ij} é a métrica Riemanniana e Ric_{ij} é o tensor de Ricci associado.

2.1 Propriedades gerais

O fluxo de Ricci pode ser interpretado como uma deformação da métrica Riemanniana ao longo do tempo, suavizando irregularidades na curvatura da variedade. Ele é frequentemente comparado à equação do calor, que distribui uniformemente a temperatura em um objeto.

2.2 Sólitons de Ricci

Os sólitons de Ricci são soluções especiais do fluxo de Ricci que evoluem apenas por difeomorfismos e mudanças de escala. Eles desempenham um papel importante no estudo de singularidades do fluxo.

2.2 Definição de sólitons

Um sóliton de Ricci é uma solução da forma:

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g,$$

onde f é uma função suave, λ é uma constante, e g é a métrica Riemanniana.

2.2 Classificação de sólitons

Os sólitons de Ricci podem ser classificados em três tipos:

- **Shrinking**: $\lambda > 0$
- **Steady**: $\lambda = 0$
- **Expanding**: $\lambda < 0$

2.3 Singularidades no fluxo de Ricci

As singularidades são um aspecto fundamental do estudo do fluxo de Ricci. Elas ocorrem quando a curvatura da métrica se torna infinita em tempo finito.

2.3 Tipos de singularidades

As singularidades podem ser classificadas em diferentes tipos, dependendo do comportamento da curvatura:

- **Tipo I**: A curvatura cresce de forma controlada.
- **Tipo II**: A curvatura cresce de forma mais rápida e descontrolada.

2.3 Resolução de singularidades

Para lidar com as singularidades, técnicas como o "blow-up"são usadas para analisar o comportamento local da métrica perto do ponto de singularidade.

2.4 Aplicações do fluxo de Ricci

O fluxo de Ricci tem aplicações em várias áreas da matemática e da física. Ele é usado para estudar a geometria das variedades, resolver problemas em topologia e até mesmo em teorias físicas como a relatividade geral.

2.4 Conjectura de Poincaré

A aplicação mais famosa do fluxo de Ricci foi na prova da Conjectura de Poincaré, um dos problemas do Milênio, resolvido por Grigori Perelman.

2.4 Geometrização de Thurston

O fluxo de Ricci também foi usado para abordar a Conjectura de Geometrização de Thurston, que generaliza a Conjectura de Poincaré para dimensões superiores.

2.5 Conclusão

O fluxo de Ricci é uma ferramenta poderosa que conecta a geometria, a análise e a topologia. Ele continua sendo uma área ativa de pesquisa, com muitas questões abertas e aplicações potenciais.

Bibliografia

[1] **Cao, Huai-Dong; Ribeiro, Ernani, Jr.; Zhou, Detang.** Four-dimensional complete gradient shrinking Ricci solitons. *J. Reine Angew. Math.* 778 (2021), 127–144.

[2] **Couto, I. T.** About curvature like tensors. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouto.1/texts/curvaturelike.pdf. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

[3] **Couto, I. T.** Some index computations with curvature tensors. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouto.1/texts/index_curvature.pdf. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

[4] **Viaclovsky, J. A.** Math 865, Topics in Riemannian Geometry. Notas de aula. Disponível em: https://www.math.uci.edu/~jviaclov/courses/865_Fall_2007.pdf. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

[5] **Couto, I. T.** A mini-course on tensors. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouto.1/texts/tensors.pdf. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

[6] **Biezuner, R. J.** Notas de aula de geometria Riemanniana. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: http://150.164.25.15/~rodney/notas_de_aula/geometria_riemanniana.pdf. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

[7] **Topping, Peter.** Lectures on the Ricci flow. London Mathematical Society Lecture Note Series, 325. *Cambridge University Press, Cambridge,* 2006. x+113 pp. ISBN: 978-0-521-68947-2; 0-521-68947-3.

[8] **Emineti, Manolo; La Nave, Gabriele; Mantegazza, Carlo.** Ricci solitons: the equation point of view. *Manuscrita Math.* **127** (2008), no. 3, 345–367.

[9] **Petersen, Peter.** Riemannian geometry. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, New York, 2006. xvi+401 pp. ISBN: 978-0387-29246-5; 0-387-29246-2.

[10] **Petersen, Peter; Wylie, William.** On the classification of gradient Ricci solitons. Geom. Topol. **14** (2010), no. 4, 2277–2300.

[11] **Petersen, Peter; Wylie, William.** Rigidity of gradient Ricci solitons. Pacific J. Math. **241** (2009), no. 2, 329–345.

[12] **Chen, Bing-Long.** Strong uniqueness of the Ricci flow. *J. Differential Geom.* **82** (2009), no. 2, 363–382.

[13] **Cao, Huai-Dong; Zhou, Detang.** On complete gradient shrinking Ricci solitons. *J. Differential Geom.* **85** (2010), no. 2, 175–185.

[14] **Derdziński, Andrzej.** Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four. *Compositio Math.* **49** (1983), no. 3, 405–433.

[15] **Cao, Xiaodong; Tran, Hung.** The Weyl tensor of gradient Ricci solitons. *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 1, 389–436.

[16] **Wu, Peng.** A Weitzenböck formula for canonical metrics on four-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017), no. 2, 1079–1096.

[17] **Azagra, D.; Ferrera, J.; López-Mesas, F.; Rangel, Y.** Smooth approximation of Lipschitz functions on Riemannian manifolds. *J. Math. Anal. Appl.* **326** (2007), no. 2, 1370–1378.

[18] **Wu, Jia-Yong; Wu, Peng; Wylie, William.** Gradient shrinking Ricci solitons of half harmonic Weyl curvature. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **57** (2018), no. 5, Paper No. 141, 15 pp.

[19] **Munteanu, Ovidiu; Sesum, Natasa.** On gradient Ricci solitons. *J. Geom. Anal.* **23** (2013), no. 2, 539–561.

[20] **Munteanu, Ovidiu; Wang, Jiaping.** Geometry of shrinking Ricci solitons. *Compos. Math.* **151** (2015), no. 12, 2273–2300.

[21] **Chen, Xiuxiong; Wang, Yuanqi.** On four-dimensional anti-self-dual gradient Ricci solitons. *J. Geom. Anal.* **25** (2015), no. 2, 1335–1343.

[22] **Lee, John M.** Introduction to topological manifolds. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 202. Springer, New York, 2011. xviii+433 pp. ISBN: 978-1-4419-7939-1

[23] **Lee, John M.** Introduction to smooth manifolds. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013. xvi+708 pp. ISBN: 978-1-4419-9981-8

[24] **Lee, John M.** Introduction to Riemannian manifolds. Second edition of [MR1468735]. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham, 2018. xiii+437 pp. ISBN: 978-3-319-91754-2; 978-3-319-91755-9

[25] **Foster, James; Nightingale, J. David.** A short course in general relativity. Third edition. Springer, New York, 2006. x+292 pp. ISBN: 978-0387-26078-5; 0-387-26078-1.

[26] **Tu, Loring W.** Differential geometry. Connections, curvature, and characteristic classes. Graduate Texts in Mathematics, 275. *Springer, Cham,* 2017. xvi+346 pp. ISBN: 978-3-319-55082-4; 978-3-319-55084-8.

[27] **Kirby, Robion C.** The topology of 4-manifolds. Lecture Notes in Mathematics, 1374. *Springer-Verlag, Berlin,* 1989. vi+108 pp. ISBN: 3-540-51148-2.

[28] **Hamilton, Richard S.** The Ricci flow on surfaces. *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986)*, 237–262, Contemp. Math., 71, *Amer. Math. Soc., Providence, RI,* 1988.

[29] **Hamilton, Richard S.** Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geometry* **17** (1982), no. 2, 255–306.

[30] **Hamilton, Richard S.** Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geom.* **24** (1986), no. 2, 153–179.

[31] **Perelman, G. Y.** The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. Preprint, arXiv math/0211159, 2002.

[32] **Chow, Bennett; Lu, Peng; Ni, Lei.** Hamilton's Ricci flow. Graduate Studies in Mathematics, 77. *American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press Beijing, New York*, 2006. xxxvi+608 pp. ISBN: 978-0-8218-4231-7; 0-8218-4231-5.

[33] **Horácio, M.A.R.M.** Produtos warped. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em **https://github.com/SaganGromov/ProdutosWarped/blob/main/ProdutosWarped.pdf**. Acessado em 13 de fevereiro de 2023.

[34] **McMillan, D. R., Jr.** Some contractible open 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* 102 (1962), 373–382.

[35] **Seifert H., Weber C.** Die beiden Dodekaedraüme, Mathematische Zeitschrift 1933. V. 37. P. 237–253.

[36] **Luminet, J.P., J.R. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, R., and J.P. Uzan.** Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperaure correlations in the cosmic microwave background. *Nature*, (2003), **425**, 593-95.

[37] **Morgan, John W.** Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2005), no. 1, 57–78.

[38] **MathOverflow**. Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds. Disponível em: https://mathoverflow.net/questions/96670/classification-of-surfaces-and-the-top-diff-and-pl-categories-for-manifolds. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

[39] **Richards, Ian.** On the classifcation of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 106 (1963), 259–269.

[40] **Rudnik, Adam Petzet.** *Analysis of the Ricci Flow on Compact Manifolds.* Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2019.

[41] **Chow, Bennett; Knopf, Dan.** The Ricci flow: an introduction. Mathematical Surveys and Monographs, 110. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2004. xii+325 pp. ISBN: 0-8218-3515-7.

[42] **Gomes, J.N.** *Rigidez de superfícies de contato e caracterização de variedades Riemannianas munidas de um campo conforme ou de alguma métrica especial.* Tese de doutorado, Universidade Federal do Ceará, (2012).

[43] **Sharma, Ramesh.** Almost Ricci solitons and K-contact geometry. Monatsh. Math. **175** (2014), no. 4, 621–628.

[44] **Shin, Jinwoo.** On the classification of 4-dimensional (m, ρ)-quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl curvature. *Ann. Global Anal. Geom.* **51** (2017), no. 4, 379–399.

[45] **Mackenzie, Dana.** The Poincaré Conjecture–Proved. *Science,* 314(5807):1848-1849, 2006. Disponível em: DOI: 10.1126/science.314.5807.1848. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

[46] **Reprints and Permissions, Science, AAAS.** Disponível em: https://www.science.org/content/page/reprints-and-permissions. Acessado em 10 de fevereiro de 2023.

[47] **Ivey, Thomas.** New examples of complete Ricci solitons. *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), no. 1, 241–245.

[48] **Perelman, G. Y.** Ricci flow with surgery on three manifolds. Preprint, ArXiv:math.DG/0303109, 2003.

[49] **Naber, Aaron.** Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature. *J. Reine Angew. Math.* 645 (2010), 125–153.

[50] **Ni, Lei; Wallach, Nolan.** On a classification of gradient shrinking solitons. *Math. Res. Lett.* **15** (2008), no. 5, 941–955.

[51] **Cao, Huai-Dong; Chen, Bing-Long; Zhu, Xi-Ping.** Recent developments on Hamilton's Ricci flow. *Surveys in differential geometry. Vol. XII. Geometric flows,* 47–112, Surv. Differ. Geom., 12, *Int. Press, Somerville, MA,* 2008.

[52] **Arnold, Vladimir I.** On Teaching Mathematics. (Polonês) Traduzido do russo por Danuta Śledziewska-Blocka. *Wiadom. Mat.* 37 (2001), 17–26.

[53] **Penrose, Roger.** The emperor's new mind. Concerning computers, minds, and the laws of physics. Com um prefácio por Martin Gardner. *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York,* 1989. xiv+466 pp. ISBN: 0-19-851973-7.

[54] **Penrose, Roger.** The road to reality. A complete guide to the laws of the universe. *Alfred A. Knopf, Inc., New York,* 2005. xxviii+1099 pp. ISBN: 0-679-45443-8.

[55] **Riemann, Bernhard.** On the Hypothesis Which Lie At the Bases of Geometry. *Nature.* **8,** 36-37 (1873).

[56] **Poincaré, Henry.** "Science and Hypothesis", *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré,* ed. Stephen Jay Gould (New York: The Modern Library 2001), p.56.

[57] **Lobachevsky, Nikolai I.** *The Foundations of Geometry: Works on Non-Euclidean Geometry.* Traduzido do russo por Svetla Petkova. Editado (com uma Introdução) por V. Petkov. Minkowski Institute Press, Montreal.

[58] **Kragh, Helge.** Geometry and Astronomy: Pre-Einstein Speculations of Non-Euclidean Space. Preprint, ArXiv:physics/12054909, 2012.

[59] **Kühnel, Wolfgang.** Conformal transformations between Einstein spaces. *Conformal geometry (Bonn, 1985/1986),* 105–146, Aspects Math., E12, *Friedr. Vieweg, Braunschweig,* 1988.

[60] **Flanders, Harley.** Differential forms with applications to the physical sciences. Second edition. Dover Books on Advanced Mathematics. *Dover Publications, Inc., New York,* 1989. xvi+205 pp. ISBN: 0-486-66169-5.