Brasília, 21 de Dezembro de 2022.

1^a Avaliação de Formas Diferenciais e Aplicações - 02/2022

Nome: ______________________________ Matrícula: ____________

Questões	**Nota**
A___	
B___	
C___	
D___	

ATENÇÃO:

A prova é individual e sem consulta. Haverá avaliação quanto à clareza, apresentação e formalização na resolução das questões da prova. A **nota** do aluno **poderá ser diminuída** em razão da inobservância desses parâmetros.

Este caderno de questões contém quatro grupos, A, B, C e D, onde cada grupo contém quatro questões. Escolha **uma única questão em cada grupo** e solucione. A prova vale, no máximo, 10 (dez) pontos.

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

GRUPO A

Questão A.1 Dados a 1-forma $\omega = \dfrac{xy}{2}\,dx - \sqrt{yz}\,dy + (x+z)^{\frac{2}{3}}\,dz$, em $U \subset \mathbb{R}^3$, e $p = (2,1,3)$, calcule $\omega_p(v_p)$ para os seguintes vetores:

(a) **(0.5 pt)** $v_p = 4\,e_1 + 7\,e_2 - 3\,e_3$;

(b) **(0.5 pt)** $v_p = -x^y\,e_1 + \sqrt{xz}\,e_2 - 3y\,e_3$,

onde $\{dx, dy, dz\}$ é a base dual da base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Questão A.2 **(1.0 pt)** Prove que o conjunto

$$\{(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p,\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k,\ i_j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

forma uma base para $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Questão A.3 Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Mostre que:

(a) **(0.5 pt)** $f^*(\omega \wedge \mu) = (f^*\omega) \wedge (f^*\mu)$, onde ω e μ são duas formas quaisquer em $\mathbb{R}^m$.

(b) **(0.5 pt)** $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$, onde $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável.

Questão A.4 Considere $\mathbb{R}^4$ com a (não positiva-definida) *métrica de Lorentz*, $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, dada por

$$\langle e_1, e_1 \rangle_L = -1, \quad \langle e_i, e_i \rangle_L = +1,\ i = 2,3,4, \quad \langle e_i, e_j \rangle_L = 0,\ i \neq j,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$. Escolha um referencial orientado $\sigma = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. Mostre que:

(a) **(0.5 pt)** $*(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = e_4$,

(b) **(0.5 pt)** $*(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) = -e_3$,

onde $*$ é o *operador estrela de Hodge*.

GRUPO B

Aplicações do Teorema de Stokes!

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

Questão B.1 **(3 pts)** Verifique o Teorema de Stokes para a superfície de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(u+v, u-v^2, u\,v)\,|\,0 \leq u \leq 1,\, 0 \leq v \leq 2\}$$

e a 1-forma $\omega = z^2\,dx$.

Questão B.2 **(3 pts)** Considere M^m uma variedade com bordo, compacta, orientada, de dimensão m e classe C^2. Prove que não existe $f : \partial M \to M$ de classe C^2 tal que $f(x) = x$ para todo $x \in \partial M$.

Questão B.3 **(3 pts)** Em $\mathbb{R}^3$, considere a 2-forma $\omega = (x^2+y^2)\,dx\wedge dy + (x+ye^z)\,dy\wedge dz + e^x\,dx\wedge dz$. Calcule $\displaystyle\int_S \omega$, onde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\}$.

Questão B.4 **(3 pts)** Use o Teorema de Stokes para fornecer uma interpretação geométrica da derivada exterior.

GRUPO C

Aplicações do Teorema de Pincaré!

Questão C.1 **(3 pts)** Considere M uma variedade differenciável compacta, orientável e sem bordo. Prove que M não é contrátil a um ponto.

Questão C.2 **(3 pts)** Verifique se a 1-forma $\omega = (3y^2 - 4z^4)\,dx + 6xy\,dy - 16xz^3\,dz$ é fechada. Em caso afirmativo, use o Lema de Poincaré para concluir que ω é exata. Finalmente, encontre uma uma 0-forma f tal que $\omega = df$.

Questão C.3 Considere U a região de $\mathbb{R}^2$ definida por $x > 0$ e seja

$$\omega = \frac{-x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-y}{x^2+y^2}\,dy, \quad \text{em } U.$$

(a) **(1.0 pt)** Mostre que U é convexa;

(b) **(1.0 pt)** Mostre que ω é uma 1-forma fechada em U;

(c) **(1.0 pt)** Mostre que ω é exata em U e determine f de modo que $\omega = df$.

Questão C.4 Considere ϑ um campo vetorial diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Prove que:

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

(a) **(1.5 pt)** Se $div(\vartheta) = 0$, então existe um campo vetorial diferenciável u em $\mathbb{R}^3$, tal que $rot(u) = \vartheta$;

(b) **(1.5 pt)** Se $rot(\vartheta) = 0$, então existe uma função diferenciável f em $\mathbb{R}^3$, tal que $grad(f) = \vartheta$.

GRUPO D

Questão D.1 Prove os itens seguintes:

(a) **(1.5 pt)** Mostre que, se em $\mathbb{H}^n$ tomarmos a orientação $[dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n]$, então a orientação induzida em $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}$ é dada por $[(-1)^n\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}]$.

(b) **(1.5 pt)** Seja $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2$ o semiplano superior, isto é, $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, y > 0\}$. Considere, em $\mathbb{H}^2$, o seguinte produto interno: se $p = (x, y) \in \mathbb{H}^2$ e $u,\, v \in T_p\mathbb{H}^2$, então

$$\langle u, v\rangle_p = \frac{u \cdot v}{y^2},$$

onde $u \cdot v$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$. Prove que $\mathbb{H}^2$ tem curvatura gaussiana igual a -1.

Questão D.2 **(3 pts)** Seja M^2 uma variedade diferenciável bidimensional imersa em $\mathbb{R}^3$. Prove que a curvatura gaussiana K, de M^2, depende somente da métrica induzida em M^2.

Questão D.3 **(3 pts)** Considere o triedro móvel e_1, e_2, e_3 associado a uma superfície regular X, tal que e_1, e_2 são direções principais. Verifique que, neste caso,

$$\omega_{13} = k_1\, \omega_1, \quad \omega_{23} = k_2\, \omega_2,$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais da superfície.

Questão D.4 **(3 pts)** (O Toro de Clifford) Considere a imersão $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $X(u, v) = (cos(u), sen(u), cos(v), sen(v))$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Escolha um referencial ortonormal adaptado e_i, $i = 1, \ldots, 4$ e calcule o coreferencial, as formas de conexão, a curvatura gaussiana e a curvatura normal da métrica induzida. Calcule também as segundas formas quadráticas nas direções e_3 e e_4. Conclua que o toro de Clifford é uma superfície mínima da esfera $\mathbb{S}^3$.

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12