

## • P1 Tarcísio

- O gráfico da função módulo pode definir uma variedade diferenciável? Pode definir uma subvariedade diferenciável imersa em  $\mathbb{R}^3$ ? O gráfico de uma função diferenciável é sempre uma variedade completa?
- Defina grupos de Lie e dê exemplos.
- Enuncie o teorema da bola cabeluda e dê exemplos de aplicações.
- O toro admite uma métrica de curvatura zero? É possível imergir isometricamente o toro com essa métrica em  $\mathbb{R}^3$ ? É possível dar uma métrica de curvatura seccional com sinal não nulo e constante ao toro?
- Vale a recíproca do teorema Egregium? Ou seja, se duas variedades Riemannianas de dimensão 2 têm a mesma curvatura Gaussiana, elas devem ser localmente isométricas?
- Quais são as isometrias da esfera? Dê um exemplo de alguma demonstração de geometria Riemanniana onde tal conhecimento possa ser aplicado.
- Como é a conexão de Levi-Civita da métrica usual do espaço Euclidiano?
- Como é a conexão de Levi-Civita de uma superfície imersa isometricamente em  $\mathbb{R}^3$ ? Use a conta para provar que a curvatura seccional em dimensão dois coincide com a curvatura Gaussiana.

## • P2 Tarcísio

- Porque referenciais geodésicos são úteis? Consegue dar um exemplo de uma conta que é facilitada pelo uso de referenciais geodésicos? Consegue dar uma ideia da prova da existência de referenciais geodésicos?
- Como campos de Killing estão relacionado a isometrias? O que se pode dizer sobre uma variedade que tenha o número máximo possível de campos de Killing?
- Quais são as geodésicas do espaço hiperbólico? Tem uma ideia de como provar a caracterização dessas?
- Defina o que é uma variedade de Einstein e dê exemplos. O que se pode dizer sobre variedades de Einstein em dimensão 3? Porque  $S^2 \times \mathbb{R}$  não admite nenhuma métrica de Einstein? Baseado na argumentação da resposta à última pergunta, dê mais exemplos de variedades que não admitem métricas de Einstein.
- O que são tensores? Porque tensores são úteis? Tensores são um conceito que dependem de geometria ou podem ser definidos munidos somente da estrutura diferenciável da variedade?
- Dê uma interpretação geométrica da definição de curvatura seccional. Como essa interpretação se relaciona com a maneira que Riemann definiu curvatura? Porque não faria sentido algum trabalharmos com interseções de  $\mathbb{R}^3$  com os espaços tangentes  $\sigma$  ao invés de  $\mathbb{R}^2$ ?
- Porque não há perda de generalidade ao trabalharmos somente campos de Jacobi normais?
- É possível que uma variedade Riemanniana tenha curvatura seccional positiva mas não tenha pontos conjugados? Como isso se relaciona com o teorema de Hadamard? Como isso se relaciona com o parabolóide da questão C.2?
- De maneira geral, é possível de alguma forma caracterizar completude pelo comportamento do comprimento de certas curvas? Se sim, como?
- Defina a métrica produto de duas variedades Riemannianas. Note que é uma soma das métricas de cada fator. Porque se tivéssemos tentado definir como o produto ao invés da soma, não teríamos uma métrica Riemanniana?

- Como relacionar a métrica do recobrimento com a métrica da variedade original? Formalize essa pergunta.