Brasília, 12 de Julho de 2023.

2^a Avaliação de Geometria Riemanniana - 01/2023

Nome: ______________________ Matrícula: ______________

Questões	Nota
A___	
B___	
C___	
D___	

ATENÇÃO:

A prova é individual e sem consulta. Haverá avaliação quanto à clareza, apresentação e formalização na resolução das questões da prova. A **nota** do aluno **poderá ser diminuída** em razão da inobservância desses parâmetros.

Este caderno de questões contém quatro grupos, A, B, C e D, onde cada grupo contém três questões. Escolha **uma única questão em cada grupo** e solucione. A prova vale, no máximo, 10 (dez) pontos.

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

GRUPO A

Questão A.1 [2.5 pts] Considere M uma variedade riemanniana de dimensão n. Dado $p \in M$, mostre que existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que, em p, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.

Questão A.2 [2.5 pts] Defina o conceito de *campo de Killing* (ou uma *isometria infinitesimal*) e, em seguida, prove que: um campo linear em $\mathbb{R}^n$, definido por uma matriz A, é um campo de Killing se, e somente se, A é anti-simétrica.

Questão A.3 Considere o conjunto $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,; y > 0\}$ com a métrica riemanniana dada por $g_{ij} = \delta_{ij}/y^2$. Mostre que:

(a) **[1.0 pt]** O segmento $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}^2$, $a > 0$, dado por $\gamma(t) = (0, t)$ é a imagem de uma geodésica.

(b) **[1.5 pt]** Obtenha um referencial geodésico em uma vizinhança de um ponto de $\mathbb{H}^2$. Justifique!

GRUPO B

Questão B.1 Diz-se que uma variedade riemanniana M, de dimensão n, é uma variedade de *Einstein* se, para todo X, $Y \in \mathcal{X}(M)$, tem-se que

$$Ric(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle,$$

onde $\lambda : M \to \mathbb{R}$ é uma função real. Prove que:

(a) **[1.0 pt]** Se M é conexa e de Einstein, e $n \geq 3$, então λ é constante em M;

(b) **[1.5 pt]** Se M, $n = 3$, é uma variedade de Einstein conexa, então M tem curvatura seccional constante.

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

Questão B.2 [2.5 pts] Defina o conceito de *tensor de ordem* r e dê um exemplo de um tensor de ordem 2; em seguida, calcule a diferencial covariante do exemplo apresentado. Por fim, mostre que a conexão riemanniana, ∇, não é um tensor. Justifique suas afirmações!

Questão B.3 [2.5 pts] Dê uma interpretação (motivação) geométrica para a curvatura seccional. Calcule a curvatura seccional de $\mathbb{H}^2$ com a métrica $g_{ij} = \delta_{ij}/y^2$.

GRUPO C

Questão C.1 [2.5 pts] Considere (M, g) uma variedade riemanniana, $\gamma : I \to M$ uma geodésica com $|\gamma'| = 1$ e J um campo de jacobi ao longo de γ. Sejam $J^\top$ a parte tangencial de J dada por $J^\top = g(J, \gamma')\gamma'$ e $J^\perp$ a parte normal. Prove que $J^\top$ e $J^\perp$ são campos de Jacobi ao longo de γ e, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $J^\top = (a\, s + b)\, \gamma'$, $\forall s \in I$.

Questão C.2 [2.5 pts] Mostre que o ponto $p = (0, 0, 0)$ do parabolóide

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$$

é um pólo de S e, entretanto, a curvatura de S é positiva.

Questão C.3 [2.5 pts] Considere o semi-plano superior

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

com a métrica riemannina dada por $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ e $g_{22} = 1/y$. Mostre que o comprimento do seguimento vertical

$$x = 0, \quad \epsilon \le y \le 1, \quad \epsilon > 0,$$

tende para 2 quando $\epsilon \to 0$. Conclua que uma tal métrica não é completa.

GRUPO D

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

Questão D.1 **[2.5 pts]** Prove que a curvatura seccional da variedade riemanniana $S^2 \times S^2$ com a métrica produto, onde S^2 é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$, é não-negativa.

Questão D.2 **[2.5 pts]** Dada uma variedade riemanniana conexa, M, prove que os conjuntos fechados e limitados de M são compactos se e somente se M é geodesicamente completa.

Questão D.3 **[2.5 pts]** Defina o conceito de aplicação de recobrimento entre variedades riemannianas. Exiba a métrica de recobrimento. Mostre que a aplicação $\pi : (-1, 1) \to \mathbb{S}^1$, definida por $\pi(t) = e^{2\pi i t}$, não é um recobrimento.

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12