Brasília, 17 de Fevereiro de 2023.

2ª Avaliação de Formas Diferenciais e Aplicações - 02/2022

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

Questões	**Nota**
$A\_\_\_$	
$B\_\_\_$	
$C\_\_\_$	
$D\_\_\_$	

ATENÇÃO:

A prova é individual e sem consulta. Haverá avaliação quanto à clareza, apresentação e formalização na resolução das questões da prova. A **nota** do aluno **poderá ser diminuída** em razão da inobservância desses parâmetros.

Este caderno de questões contém quatro grupos, A, B, C e D, onde cada grupo contém três questões. Escolha **uma única questão em cada grupo** e solucione. A prova vale, no máximo, 7 (sete) pontos.

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

GRUPO A

Questão A.1 [2 pts] Considere um campo vetorial diferenciável X sobre uma variedade riemanniana M. Diz-se que $p \in M$ é um ponto singular de X se $X(p) = 0$. Além disso, p é isolado se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p que não contém outro ponto singular.

Admita que para qualquer curva fechada C, fronteira de uma região compacta $V \subset U$ contendo p,

$$\int_C \tau = 2\pi\, I,$$

onde I é conhecido como o *índice* de X em p e $\tau := fdg - gdf$, com $f, g : M \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis satisfazendo $f^2 + g^2 = 1$.

Prove que o índice de X em um ponto isolado $p \in M$ não depende da escolha da curva fechada C, fronteira de um subconjunto compacto de U que contém p. (sugestão: use o teorema de Stokes)

Questão A.2 [2 pts] Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada. Dado $p \in S$, seja V uma vizinhança de p em S tal que exista um referencial $\{e_i\}$ adaptado a S e compatível com as orientações de S e $\mathbb{R}^3$. Se ω_i e ω_{ij} são as restrições a $V \cap S$ das formas do coreferencial associado a $\{e_i\}$ e das formas de conexão, prove que $\omega_1 \wedge \omega_2$ não depende do referencial escolhido (dentro da classe dos referenciais compatíveis com a orientação de S). Além disso, mostre como ω_{12} muda com a mudança do referencial.

Questão A.3 [2 pts] (Questão "livre") Escolha um dos tópicos dentre aqueles que foram estudados em sala e disserte sobre o mesmo, isto é, produza um texto de no máximo 3 (três) páginas sobre o tema escolhido. O texto será avaliado da seguinte forma: **motivação** (0.5 ponto), pelo menos **um resultado contendo uma ideia (ou roteiro) da demonstração** (1 ponto) e pelo menos um **exemplo** (0.5 ponto).

GRUPO B

Questão B.1 [2 pts] Sejam M uma n-variedade riemanniana e $p \in M$ um ponto. Considere $\sigma \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois do espaço tangente T_pM. Defina o conceito de uma variedade riemannina, digamos M, ser isotrópica, e prove que M é isotrópica se e somente se

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

$\Omega_{ij} = K_p \, \omega_i \wedge \omega_j$, onde K_p denota a curvatura seccional de M em p e $1 \leq i, j \leq n$.

Questão B.2 [2 pts] Mostre que o espaço hiperbólico $H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tem curvatura constante igual a -1.

Questão B.3 [2 pts] Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ localmente parametrizada por coordenadas esféricas (θ, φ). Considere também o $(2,0) - $*tensor* sobre $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\omega = x \, dy \otimes dz.$$

Determine o *pull-back* $\iota^* \omega$ em termos de (θ, φ), onde $\iota : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ é a aplicação inclusão.

GRUPO C

Questão C.1 [2 pts] Considere M uma variedade riemannina e seja ν um campo normal unitário em M. Podemos escolher a parte normal do referencial $\{e_\alpha\}$ em um aberto $U \subset M$ de modo que $e_{n+1} = \nu$ em U. Assim, denotamos por $II^\nu = II^{n+1}$ a segunda forma quadrática da irmersão $\chi : M \to \mathbb{R}^{n+q}$ na direção de ν. Prove que II^ν não depende da escolha do referencial (e, portanto, está globalmente definida).

Questão C.2 [2 pts] No contexto do estudo das equações de estrutura em referenciais geodésicos, explique o por quê sempre podemos considerar (ou seja, sempre existe) um tal referencial geodésico e, além disso, o por quê de não perdermos generalizada nos cálculos com tais referenciais.

Questão C.3 [2 pts] Considere M^n uma variedade riemanniana conexa, $n \geq 3$. Se M é isotrópica para todo $p \in M$, prove que M tem curvatura constante.

GRUPO D

Questão D.1 [1 pt] Prove que duas variedades riemannianas M e $\overline{M}$ de mesma curvatura constante K são localmente isométricas.

Questão D.2 [1 pt] Prove que a esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ centrada na origem tem curvatura

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12

constante igual a 1.

Questão D.3 [1 pt] Considere $\chi : M \to \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma n-variedade diferenciável em $\mathbb{R}^{n+q}$. Explique de modo preciso o significado geométrico de (Ω_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$, a matriz das formas de curvatura.

Campus Universitário Darcy Ribeiro
ICC - Centro - Bloco A
CEP: 70910-900 - Brasília - DF - Brasil

Prof. Tarcísio Castro Silva
e-mail: tarcisio@mat.unb.br
Office: A1-433/12