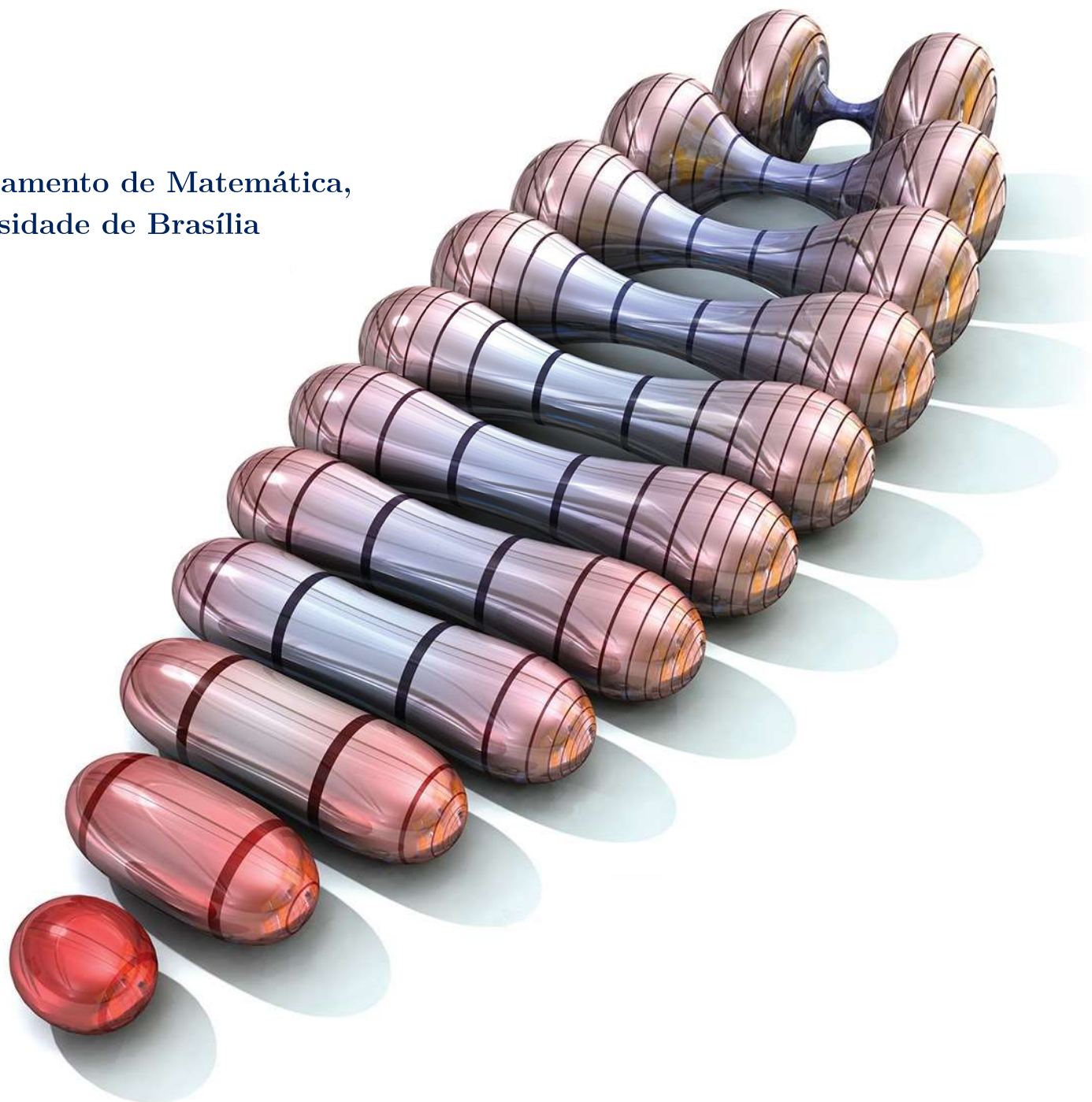


# *Almost Ricci solitons with harmonic Weyl curvature*

Departamento de Matemática,  
Universidade de Brasília



Notas dos seminários apresentados na disciplina *Tópicos em Matemática*

Brasília, Julho de 2024

# 1 O fluxo de Ricci

O fluxo de Ricci surgiu na década de 1980 como a ferramenta mais promissora para a resolução da conjectura de Poincaré. O plano de ataque é o seguinte: tomemos  $\mathcal{M}^3$  uma 3-variedade topológica fechada simplesmente conexa. Lembrando que em dimensão  $n \leq 3$ , acontece o seguinte fenômeno muito notável:

**Lema (L.1).** *Seja  $\mathcal{M}^n$  uma variedade topológica de dimensão  $n \leq 3$ . Então  $\mathcal{M}^n$  admite uma única estrutura diferenciável compatível com a sua topologia. Consequentemente,*

$$\mathcal{M}^n \text{ é homeomorfa a } \mathcal{N}^n \iff \mathcal{M}^n \text{ é difeomorfa a } \mathcal{N}^n$$

**Demonstração:** Consulte [1].

Podemos então munir  $\mathcal{M}^3$  de uma estrutura diferenciável e consequentemente de uma métrica Riemanniana, digamos  $g_0$  (que, a priori, não sabemos absolutamente nada sobre). Supondo que, milagrosamente, acontecesse que  $g_0$  fosse uma métrica de Einstein, o problema estaria acabado: em dimensão  $\leq 3$ , métricas de Einstein têm curvatura seccional constante. Como uma consequência trivial do teorema de Cartan-Hadamard, tal curvatura necessariamente seria positiva, e portanto, teríamos a certeza (pelo teorema de Killing-Hopf) que  $\mathcal{M}^3$  é isométrica (em particular, homeomorfa) a  $\mathbb{S}^3$ .

O plano de ataque desenvolvido por R. Hamilton tenta encontrar tal métrica milagrosa ao deformar  $g_0$ . De modo grosseiro, pensaremos na variedade como se fosse feita de metal, cuja temperatura varia entre regiões distintas, e iremos deformar a métrica de tal forma que façamos a curvatura fluir de áreas mais curvadas para área menos curvadas, assim como o calor flui de regiões mais quentes a mais frias. Isso equivale a mudar as métricas do espaço de forma que as distâncias diminuam mais rapidamente nas direções ao longo das quais a curvatura é maior. O melhor cenário possível (que, infelizmente não acontece em geral) é que tal processo eventualmente nos forneça uma métrica final (conceito este que precisa ser formalizado)  $g_\infty$  que seja de Einstein.

Apesar da *prima facie* plausibilidade e simplicidade de tal plano, há vários detalhes que precisam ser estudados com cuidado. Primeiramente, em dimensão  $\geq 3$  temperatura é um objeto muito mais simples que curvatura: enquanto que a temperatura na variedade pode ser pensada como uma função real (que, obviamente, associa a cada ponto sua temperatura), a curvatura, em contraste, é uma função  $K : \text{Gr}_2(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa um valor a cada direção planar passando por um ponto. Em cada ponto de  $\mathcal{M}$  são necessários seis números diferentes para descrever  $K$ . Ao buscarmos um análogo da equação do calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u$$

para a curvatura, precisaremos então combinar todos os números que descrevem a curvatura em alguma quantidade geométrica que faça sentido independentemente de qualquer escolha de coordenadas e impor alguma fórmula que descreva a sua mudança.

Há essencialmente só uma maneira de prosseguir. O laplaciano é, a grosso modo, um operador que faz médias ao longo de pequenas esferas centradas em torno de um ponto, e, analogamente, o tensor de Ricci é obtido do tensor de curvatura Riemanniano ao fazer a média de curvaturas em diferentes direções. Seja então  $\{g(t)\}_{t \in I}$  uma família suave de métricas Riemannianas em  $\mathcal{M}$ . Assim motivados, fixemos arbitrariamente  $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$  e  $p \in \mathcal{M}$ . Para cada  $t_0 \in I$  arbitrariamente fixado, o objeto geométrico  $\text{Ric}_{g(t_0)}$  está bem definido, a correspondência  $(Z, W) \mapsto \text{Ric}_{g(t_0)}(Z, W)$  é um 2-tensor simétrico e  $\text{Ric}_{g(t_0)}(p)(X(p), Y(p)) \in \mathbb{R}$ . Analogamente, temos  $g(t_0)(p)(X(p), Y(p)) \in \mathbb{R}$ . Podemos portanto tomar derivadas: vemos que  $\frac{\partial}{\partial t} (g(t)(X(p), Y(p))) \in \mathbb{R}$ , e a correspondência  $(Z, W) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} (g(t)(X, Y))$  é um tensor simétrico. Em particular, fixando uma constante  $c \in \mathbb{R}$ , a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = c \cdot \text{Ric}_{g(t)}$$

faz sentido. Em vista do seguinte

**Lema (L.2).** *Em coordenadas harmônicas com respeito a  $g(t)$ , o tensor de Ricci satisfaz*

$$c \cdot \text{Ric}_{jk} = -\frac{c}{2} \cdot \Delta(g_{jk}) - \frac{c}{2} \cdot Q_{jk}(\partial g, g^{-1}) \quad (1)$$

onde  $Q_{jk}$  denota uma soma de termos que contém componentes de  $g^{-1}$ , e derivadas espaciais de ordem  $\leq 1$  dos componentes da métrica  $g$ .

**Demonstração:** Consulte [2], onde (1) foi (equivalentemente) demonstrada no caso  $c = -2$ . ■

**Observação (O.1).** No caso  $c = 1$ , é comum encontrar na literatura a equação acima escrita como

$$\text{Ric}_{ij} = -\frac{1}{2} \Delta g_{ij} + \text{termos de ordem } \leq 1$$

É natural então escolher  $c = -2$ , de forma que, informalmente, a equação do fluxo se escreva como

$$\partial_t g = \Delta g + \dots$$

cumprindo o nosso objetivo de encontrar um análogo da equação do calor para a curvatura e justificando a seguinte

**Definição (D.1).** *Seja  $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$  uma variedade Riemanniana e  $T > 0$ . Diremos que uma família de métricas  $\{g_t\}_{t \in [0, T]}$  é uma solução do fluxo de Ricci em  $\mathcal{M}$  com condição inicial  $g_{\mathcal{M}}$  quando*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = -2 \cdot \text{Ric}_{g_t}, \quad \forall t \in (0, T) \\ g_0 = g_{\mathcal{M}} \end{cases} \quad (2)$$

**Observação (O.2).** Apesar do plano de ataque acima ter sido inicialmente elaborado para atacar a conjectura de Poincaré, Perelman o estendeu de forma a atacar o problema ainda mais geral da conjectura da geometrização de Thurston. Um dos vários obstáculos nesse sentido é a existência de possíveis singularidades ao longo da evolução do fluxo. Inicialmente, para contornar esse impasse, Hamilton propôs fazer “cortes” (formalmente, decompor a variedade em somas conexas) na variedade e então reiniciar o fluxo em cada pedaço. Tal processo é comumente chamado de *cirurgia*.

Idealmente, se espera que somente um número finito de cirurgias tenha de ser realizado e que o fluxo forneça em cada componente uma métrica modelada por uma das oito geometrias-modelo de Thurston, de forma que ao “voltarmos no tempo”, fazendo a cirurgia no sentido contrário, estejam provadas tanto a conjectura da geometrização de Thurston quanto a conjectura de Poincaré (no caso em que a variedade inicial é simplesmente conexa, se espera que cada componente da cirurgia seja uma esfera - como somas conexas de esferas são esferas, provaríamos a conjectura de Poincaré).

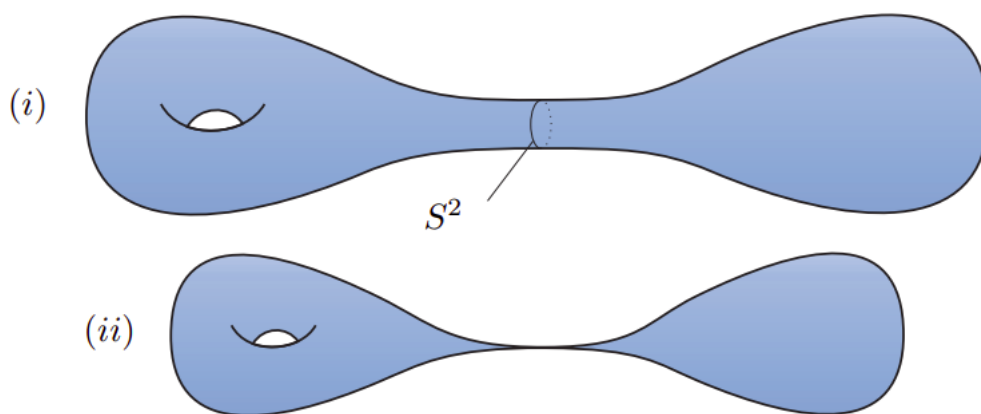


Figura 1: uma singularidade do tipo “pescoço pinçado”. Figura extraída de [4].

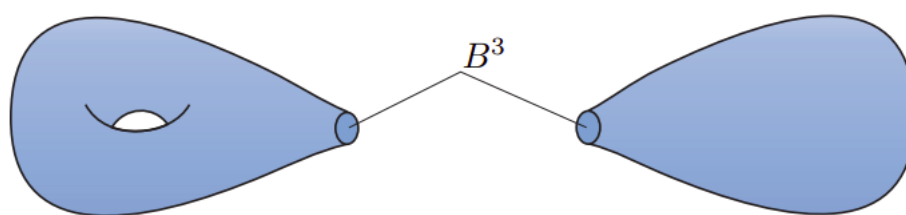


Figura 2: cirurgia. Figura extraída de [4].

Hamilton não conseguiu mostrar que tal processo não ficava preso numa situação do tipo do paradoxo de Zeno. *A priori*, poderia acontecer que após 1 segundo de evolução do fluxo tivéssemos que realizar tal processo pela primeira vez (gerando 2 componentes), após mais  $\frac{1}{2}$  segundo tivéssemos que realizá-lo pela segunda vez (gerando 4 componentes), após mais  $\frac{1}{4}$  de segundo, pela terceira vez (gerando 8 componentes), e assim sucessivamente... Perelman mostrou que tal obstáculo podia de fato ser superado, ou seja, que só um número finito de cirurgias precisa ser realizado.

**Observação (O.3).** A ideia de Hamilton para classificar as singularidades foi aplicar mudanças de escala a fim de diminuir a curvatura.

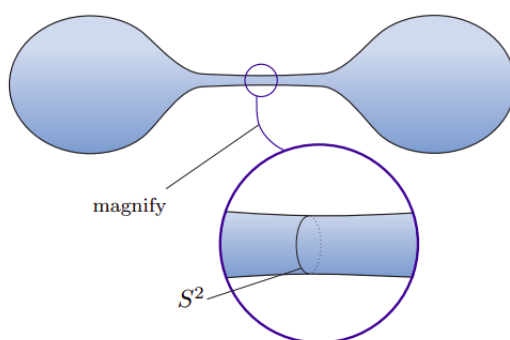


Figura 3: estratégia para classificar singularidades: usar uma “lupa” perto da singularidade (aplicar mudanças de escala) com “zoom” cada vez maior, e então aplicar limites. Figura extraída de [4].

Os sólitons de Ricci aparecem como limites do processo que delineamos informalmente na figura acima (cuja formalização pode ser encontrada em [3] ou [4]). Além disso, uma vez que sólitons (que definiremos em breve) são, de certa forma, soluções estacionárias do fluxo, os mesmos “nascem” como uma grande obstrução inicial ao plano que esboçamos na observação (O.2), se tornando assim importantes objetos de estudo.

## 2 Sólitos de Ricci

Uma das obstruções ao programa inicial de Hamilton de evoluir uma métrica Riemanniana inicial arbitrária a uma métrica de curvatura uniforme (em dimensão 3, Einstein) são os *sólitos de Ricci*. Geometricamente, essas soluções evoluem sob o fluxo apenas por difeomorfismos e mudanças de escala, e são, de certa forma, pontos fixos do fluxo (num sentido a ser formalizado em breve).

**Definição (D.2).** Seja  $\{g(t)\}_{t \in I}$  uma solução do fluxo de Ricci numa variedade Riemanniana  $(\mathcal{M}, g_0)$ . Se existir uma família temporal de difeomorfismos  $\{\varphi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}\}_{t \in I}$  (com  $\varphi_0 = \text{Id}_{\mathcal{M}}$ ) e um fator de escala temporal  $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(I)$  (com  $\sigma(0) = 1$ ) tal que

$$g(t) = \sigma(t) \cdot \varphi_t^*(g_0) \quad (3)$$

diremos que a solução  $\{g(t)\}_{t \in I}$  é um sólito de Ricci em  $\mathcal{M}$ . A tripla  $(\{g(t)\}_{t \in I}, \{\varphi_t\}_{t \in I}, \sigma)$  é chamada de *uma estrutura de sólito de Ricci em  $\mathcal{M}$* .

**Observação (O.4).** Denotando por  $\text{Met}(\mathcal{M}) \doteq \text{Sym}_2^+(T^*\mathcal{M})$  o espaço de métricas Riemannianas em  $\mathcal{M}$ , por  $\text{Diff}(\mathcal{M})$  o grupo de difeomorfismos de  $\mathcal{M}$  e usando o fato de que o tensor de Ricci é invariante por difeomorfismos, podemos ver o fluxo de Ricci como um sistema dinâmico no espaço

$$\text{Met}(\mathcal{M})/\text{Diff}(\mathcal{M})$$

de forma que os sólitos de Ricci correspondem a pontos fixos.

**Proposição (P.1).** Uma variedade Riemanniana  $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}} = g_0)$  admite uma estrutura de sólito de Ricci se, e somente se, existe um campo  $V \in \Gamma(T\mathcal{M})$  e uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\text{Ric}_{g_{\mathcal{M}}} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}_V(g_{\mathcal{M}}) = \lambda \cdot g_{\mathcal{M}} \quad (4)$$

**Demonstração:** Consule [6].

■

**Observação (O.5).** Na literatura, os casos  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  e  $\lambda < 0$  correspondem a sólitos *shrinking*, *steady* (“encolhedores” e “estáveis/firmes”) e *expanding* (“expansores”).

**Observação (O.6).** Usando a notação da proposição (P.1), diremos que um sólito de Ricci é um sólito de Ricci gradiente se existir  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  tal que  $V = \nabla f$ . Nesse caso, a equação (4) se escreve como

$$\text{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g \quad (5)$$

Motivados por tal equação, temos também a seguinte

## 3 Almost Ricci solitons with harmonic Weyl curvature

Nessa seção faremos uma classificação local de quase-sólitos de Ricci gradiente com curvatura de Weyl harmônica. Esse é um trabalho em conjunto com Valter Borges Sampaio Junior e João Paulo dos Santos.

**Definição (D.3).** A Riemannian manifold  $(\mathcal{M}, g)$  is called a gradient almost Ricci soliton if there exist smooth  $f, \lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  such that

$$\text{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g \quad (6)$$



**Observação (O.7).** Assim como sólitons de Ricci evoluem somente por mudanças de escalas e difeomorfismos, quase-sólitons de Ricci evoluem somente por difeomorfismos conformes. Para detalhes, veja [7] e [8].

Our main results are the following:

**Theorem (T.1).** *Any gradient almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature is a multiply warped product metric.*

We shall see that the fibers of this warped product are, in fact, the integrable submanifolds of the distributions corresponding to the eigenspaces of the Ricci tensor.

**Theorem (T.2).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$  be a gradient almost Ricci soliton, not necessarily complete, with harmonic Weyl curvature, nonconstant  $f$  and  $n \geq 4$ . Then its Ricci tensor has at most three distinct eigenvalues at each point.*

Theorem 2 generalizes Kim's result from [10], which was proven only for  $n = 4$ .

**Theorem (T.3) (Local warped product structure).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$  be an almost Ricci soliton with  $n \geq 4$  and  $f$  non constant. Assume the soliton has harmonic Weyl curvature and that its Ricci tensor has exactly two distinct eigenvalues. Then for any point  $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_A$  there are a neighborhood  $U \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_A$  of  $p$  and a warped product  $I \times_h \mathcal{N}$  of an interval and an Einstein manifold  $\mathcal{N}^{n-1}$  so that  $U$  is isometric to a domain of  $I \times_h \mathcal{N}$ . Furthermore,  $f$  and  $\lambda$  are constant on  $\mathcal{N}$ , through the identification between  $I \times \mathcal{N}$  and  $U$ .*

Theorem 3 allows us to construct examples of gradient almost Ricci solitons for any given warping function  $h$ .

**Theorem (T.4) (Local multiply warped product structure).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$  be an almost Ricci soliton with  $n \geq 4$  and  $f$  non constant. Assume the soliton has harmonic weyl curvature and that its Ricci tensor has exactly three distinct eigenvalues. Then for any point  $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_A$  there are a neighborhood  $U \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_A$  of  $p$  and a multiply warped product  $I \times_{h_1} \mathcal{N}_1 \times_{h_2} \mathcal{N}_2$  of an interval  $I$  and two Einstein manifolds  $\mathcal{N}_1$  and  $\mathcal{N}_2$ , so that  $(U, g)$  is isometric to a domain of  $I \times_{h_1} \mathcal{N}_1 \times_{h_2} \mathcal{N}_2$ . Furthermore,  $f$  and  $\lambda$  are constant on  $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ , through the identification between  $I \times \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$  and  $U$ .*

### 3.1 Preliminaries

Along this work we will adopt the following convention for the curvature

$$\text{Rm}(X, Y, Z, W) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle, \quad (7)$$

for vector fields  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . When  $\mathcal{M}$  is an Einstein manifold, we will denote its Einstein constant (i.e. the constant value  $\text{Ric}_{\mathcal{M}}$  takes on the unit tangent bundle of  $\mathcal{M}$ ) by  $\lambda_{\mathcal{M}}$ . Similarly, its constant scalar curvature (equal to  $\dim(\mathcal{M})\lambda_{\mathcal{M}}$ ) will be denoted by  $\tau_{\mathcal{M}}$ .

**Lema (L.3) (Barros-Ribeiro).** *A gradient almost Ricci soliton  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$  has harmonic Weyl curvature if, and only if,*

$$\begin{aligned} \text{Rm}(\nabla f, X, Y, Z) &= Y \left( \frac{R}{2(n-1)} - \lambda \right) g(X, Z) - Z \left( \frac{R}{2(n-1)} - \lambda \right) g(X, Y) \\ &= \frac{1}{n-1} (\text{Ric}(\nabla f, Y)g(X, Z) - \text{Ric}(\nabla f, Y)g(X, Y)) \end{aligned}$$

**Lema (L.4) (Cao-Chen).** *Let  $(\mathcal{M}, g, f, \lambda)$  be a gradient almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature and non-constant  $f$ . Let  $c$  be a regular value of  $f$  and  $\Sigma_c = f^{-1}(c)$  be the level surface of  $f$ . Then,*

1. *Where  $\nabla f \neq 0$ ,  $E_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$  is an eigenvector of Ric.*
2.  *$|\nabla f|$  is constant on a connected component of  $\Sigma_c$ .*
3. *There is a function  $s$  locally defined with  $s(x) = \int \frac{df}{|\nabla f|}$ , so that  $ds = \frac{df}{|\nabla f|}$  and  $E_1 = \nabla s$ .*
4.  *$E_1 E_1 f = -\text{Ric}(E_1, E_1) + \lambda$ . In particular,  $-\text{Ric}(E_1, E_1) + \lambda$  is constant on a connected component of  $\Sigma_c$ .*
5. *Near a point in  $\Sigma_c$ , the metric  $g$  can be written as*

$$g = ds^2 + \sum_{i,j \geq 2} g_{ij}(s, x_2, \dots, x_n) dx_i \otimes dx_j.$$

6.  $\nabla_{E_1} E_1 = 0$ .

It is a well known fact that a Riemannian manifold  $(M^n, g)$ ,  $n \geq 4$ , has harmonic Weyl tensor if and only if its Schouten tensor  $\mathcal{A} = \text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g$  is Codazzi. In coordinates this is equivalent to

$$\nabla_i \mathcal{A}_{jk} = \nabla_j \mathcal{A}_{ik}. \quad (8)$$

Let  $\mathcal{A}$  be a codazzi tensor and denote by  $E_{\mathcal{A}}(x)$  the number of distinct eigenvalues of  $\mathcal{A}$  at  $x$ . In [?], Derdzinski considered the following open dense set

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathcal{M} \mid E_{\mathcal{A}}(x) \text{ is constant in a neighborhood of } x\}. \quad (9)$$

It turns out that in  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  the eigenvalues of  $\mathcal{A}$  are well defined and define smooth functions  $\lambda_1, \dots, \lambda_n : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ . Furthermore, he proved that in such a set the following is true

**Lema (L.5) (Derdziński).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g)$ ,  $n \geq 4$ , be a Riemannian metric with harmonic Weyl curvature. Let  $\{E_i\}_{i=1}^n$  be a local orthonormal frame such that  $\text{Ric}(E_i, \cdot) = \lambda_i g(E_i, \cdot)$ . Then,*

1. *For any  $i, j, k \geq 1$ ,*

$$\begin{aligned} (\lambda_j - \lambda_k) \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle + \nabla_{E_i} (\mathcal{A}(E_j, E_k)) = \\ (\lambda_i - \lambda_k) \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle + \nabla_{E_j} (\mathcal{A}(E_k, E_i)). \end{aligned}$$

2. *If  $k \neq i$  and  $k \neq j$ , then  $(\lambda_j - \lambda_k) \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = (\lambda_i - \lambda_k) \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle$ .*
3. *Given distinct eigenfunctions  $\lambda$  and  $\mu$  of  $\mathcal{A}$  and local vector fields  $U$  and  $V$  such that  $AV = \lambda V$  and  $AU = \mu U$  with  $|U| = 1$ , it holds that  $V(\mu) = (\mu - \lambda) \langle \nabla_U U, V \rangle$ .*
4. *Each distribution  $D_{\lambda_i}$ , defined by  $D_{\lambda_i}(p) = \{v \in T_p \mathcal{M} \mid \text{Ric}(v, \cdot) = \lambda_i g(v, \cdot)\}$ , is integrable and its leaves are totally umbilic submanifolds of  $M$ .*

### 3.2 Local structure

Suppose that the potential function of the almost soliton  $\mathcal{M}$  is nonconstant and consider the set  $\mathcal{R}$  of all regular points of  $f$

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{M} \mid \nabla f(x) \neq 0\}.$$

We start with the following result.

**Lema (L.6).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$  be a gradient almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature. If  $f$  is not constant and  $W$  is a connected component of  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ , then either  $W \cap \mathcal{R}$  is dense in  $W$ , or it is empty.*

For each point  $p$  of the open set  $\mathcal{R} \cap M_{\mathcal{A}}$ , we will consider the orthonormal frame  $\{E_i\}_{i=1}^n$  given in lema 5 and recall that  $E_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ . For this frame, we have  $R_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ . Furthermore,

**Lema (L.7).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$ ,  $n \geq 4$ , be a gradient almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature and nonconstant  $f$ . Then,*

$$\nabla_{E_a} E_1 = \xi_a E_a \quad \text{and} \quad \xi_a = -\langle \nabla_{E_a} E_a, E_1 \rangle, \quad (10)$$

where

$$\xi_a = \frac{\lambda - \lambda_a}{|\nabla f|}. \quad (11)$$

**Demonstração:** To prove the first identity of (10), notice that for any  $a \geq 2$  we have

$$\nabla_{E_a} E_1 = \frac{\nabla_{E_a} \nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\lambda E_a - \text{Ric}(E_a, \cdot)}{|\nabla f|} = \frac{(\lambda - \lambda_a) E_a}{|\nabla f|} = \xi_a E_a. \quad (12)$$

Now we combine it with the equality  $\langle \nabla_{E_a} E_1, E_a \rangle = -\langle \nabla_{E_a} E_a, E_1 \rangle$  to get the second identity of (10). ■

The next lemma is a generalization to nonconstant  $\lambda$  of Lemma 3.3 from [11], which is already an extension of lemma 2.7 from [9] to higher dimensions of its counterpart for four dimensional Ricci solitons.

**Lema (L.8).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$ ,  $n \geq 4$ , be a gradient almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature and nonconstant  $f$ . The functions  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  are constant on each connected component of  $\Sigma_c$ . As a consequence, the functions  $\xi_2, \dots, \xi_n$  are also constant on each connected component of  $\Sigma_c$ .*

Following [11], for each  $a \geq 2$  we consider the following notation

$$[a] = \{i \in \{2, \dots, n\} \mid \lambda_i = \lambda_a\}. \quad (13)$$

From now on we use the convention that  $2 \leq a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n$  satisfy  $b, c \in [a]$ ,  $\beta, \gamma \in [\alpha]$  and  $[a] \neq [\alpha]$ .

**Lema (L.9).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$ ,  $n \geq 4$ , be a gradient almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature and nonconstant  $f$ . Let  $(x_b)_{b \in [a]}$  and  $(x_\beta)_{\beta \in [\alpha]}$  be local coordinate systems of the integral manifolds of the distributions  $D_a$  and  $D_\alpha$ , respectively. Setting  $\partial_1 = E_1$ , we have*



$$1. \nabla_{\partial_a} \partial_1 = \xi_a \partial_a \text{ and } \nabla_{\partial_a} \partial_b = -\xi_a g_{ab} \partial_1 + \sum_{c \in [a], c \neq a} \Gamma_{ab}^c \partial_c.$$

$$2. \nabla_{\partial_\alpha} \partial_a = 0.$$

$$3. R_{1a1b} = -(\xi'_a + \xi_a^2) g_{ab}.$$

$$4. R_{a\alpha b\beta} = -\xi_a \xi_\alpha g_{ab} g_{\alpha\beta}$$

In particular,

$$\partial_1 g_{ab} = 2\xi_a g_{ab} \quad \text{and} \quad \partial_\alpha g_{ab} = 0. \quad (14)$$

**Demonstração:** Proceeding as in (12), for any vector field  $X$  and any  $a \geq 2$  we have

$$\langle \nabla_{\partial_a} \partial_1, X \rangle = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla \nabla f(\partial_a, X) = \frac{\lambda - \lambda_a}{|\nabla f|} \langle \partial_a, X \rangle = \langle \xi_a \partial_a, X \rangle,$$

which proves the first equality of (1). The second one follows from  $g_{1a} = 0$  and from

$$\langle \nabla_{\partial_a} \partial_b, \partial_1 \rangle = -\langle \nabla_{\partial_a} \partial_1, \partial_b \rangle = -\xi_a g_{ab}.$$

Now we proceed to prove (2). If  $a, \alpha, z \in \{2, \dots, n\}$  are so that  $[a] \neq [\alpha]$ , then

$$\begin{aligned} R_{a\alpha 1z} &= \langle \nabla_{\partial_\alpha} \nabla_{\partial_a} \partial_1 - \nabla_{\partial_a} \nabla_{\partial_\alpha} \partial_1, \partial_z \rangle \\ &= \xi_a \langle \nabla_{\partial_\alpha} \partial_a, \partial_z \rangle - \xi_\alpha \langle \nabla_{\partial_a} \partial_\alpha, \partial_z \rangle \\ &= (\xi_a - \xi_\alpha) \langle \nabla_{\partial_\alpha} \partial_a, \partial_z \rangle. \end{aligned}$$

On the other hand, by using (3) we obtain

$$\begin{aligned} (\xi_a - \xi_\alpha) \langle \nabla_{\partial_\alpha} \partial_a, \partial_z \rangle &= R_{1za\alpha} \\ &= \partial_a \left( \frac{R}{2(n-1)} - \lambda \right) g_{z\alpha} - \partial_\alpha \left( \frac{R}{2(n-1)} - \lambda \right) g_{za} \\ &= 0, \end{aligned}$$

where in the last line we have used that  $\partial_i \lambda = \partial_i R = 0$  for all  $i \geq 2$ . As  $[a] \neq [\alpha]$  and  $z \in \{1, \dots, n\}$ , we conclude that  $\nabla_{\partial_\alpha} \partial_a = 0$ .

Using (1) and (2) we get

$$\begin{aligned} R_{1a1b} &= \langle \nabla_{\partial_a} \nabla_{\partial_1} \partial_1 - \nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_a} \partial_1, \partial_b \rangle \\ &= -\langle \xi'_a \partial_a + \xi_a \nabla_{\partial_1} \partial_a, \partial_b \rangle \\ &= -(\xi'_a + \xi_a^2) g_{ab}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} R_{a\alpha b\beta} &= \langle \nabla_{\partial_\alpha} \nabla_{\partial_a} \partial_b - \nabla_{\partial_a} \nabla_{\partial_\alpha} \partial_b, \partial_\beta \rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\partial_\alpha} \left( -\xi_a g_{ab} \partial_1 + \sum_{c \in [a], c \neq a} \Gamma_{ab}^c \partial_c \right), \partial_\beta \right\rangle \\ &= -\xi_a g_{ab} \langle \nabla_{\partial_\alpha} \partial_1, \partial_\beta \rangle + \sum_{c \in [a], c \neq a} \langle \nabla_{\partial_\alpha} (\Gamma_{ab}^c \partial_c), \partial_\beta \rangle \\ &= -\xi_a \xi_\alpha g_{ab} g_{\alpha\beta} + \sum_{c \in [a], c \neq a} (\Gamma_{ab}^c \langle \nabla_{\partial_\alpha} \partial_c, \partial_\beta \rangle + \partial_\alpha \Gamma_{ab}^c \langle \partial_c, \partial_\beta \rangle) \end{aligned}$$

$$= -\xi_a \xi_\alpha g_{ab} g_{\alpha\beta},$$

proving (3) and (4), respectively.

In order to finish the proof of the lemma, recall that  $\xi_a = \xi_b$  and consider the following derivatives of  $g_{ab}$

$$\begin{aligned}\partial_1 g_{ab} &= g(\nabla_{\partial_1} \partial_a, \partial_b) + g(\partial_a, \nabla_{\partial_1} \partial_b) = 2\xi_a g_{ab} \\ \partial_\alpha g_{ab} &= g(\nabla_{\partial_\alpha} \partial_a, \partial_b) + g(\partial_a, \nabla_{\partial_\alpha} \partial_b) = 0.\end{aligned}$$

■

**Theorem (T.5).** *Any gradient almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature is a multiply warped product metric of eigenspaces with the Ricci tensor.*

**Demonstração:** Let  $U \subset \mathcal{M}_A \cap \{\nabla f \neq 0\}$  be an open subset. We'll take local coordinates  $(x_1 = s, x_2, x_3, \dots, x_n)$  in  $U$  as in lemma 4. Let us fix  $s_0 \in I$  and  $a, b \in [i]$ . Mutatis mutandis, equation (14) from lemma (9) implies that

$$\partial_1(g_{ab}) = 2\xi_a g_{ab}$$

Therefore, if we define the function  $\tilde{h}_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$s \in I \mapsto \tilde{h}_i(s) := \exp\left(\int_{s_0}^s \xi_a(y) \, dy\right)$$

Then  $\tilde{h}_i$  satisfies

$$\partial_1(\tilde{h}_i^{-2} g_{ab}) = 0$$

so that  $\tilde{h}_i^{-2} g_{ab}$  is constant in  $s$ , i.e.,

$$(\tilde{h}_i(s))^{-2} g_{ab}(s, x_2, \dots, x_n) = (\tilde{h}_i(s_0))^{-2} g_{ab}(s_0, x_2, \dots, x_n)$$

or, equivalently,

$$g_{ab}(s, x_2, \dots, x_n) = h(s)^2 g_{ab}(s_0, x_2, \dots, x_n) \quad (15)$$

where  $h(s) := \frac{h_i(s)}{h_i(s_0)}$ . Without any loss of generality, we can assume  $h_i(s_0) = 1$ . Clearly, (15) defines a Riemannian metric  $g_i$  on  $N_i$ . In an entirely analogous manner, we obtain Riemannian metrics  $g_\alpha$  on  $N_\alpha$  for any  $\alpha \notin [i]$ . This proves that in  $U$ ,  $g$  can be written as the following warped product (of possibly  $n - 1$  fibers):

$$g = ds^2 + h_i^2 g_i + \sum_{\alpha \notin [i]} h_\alpha^2 g_\alpha$$

■

**Observação (O.8).** As a straightforward consequence of the proof of theorem 5, we get

$$\frac{\lambda - \lambda_i}{f'} = \xi_i = \frac{h'_i}{h_i} \quad (16)$$

This equation will be useful later on.

**Observação (O.9).** We'll recognize the amount of fibers in a multiply warped product in the same way as [12]. Namely, warping functions cannot be constant, two different warping functions cannot be multiples of one another and any two fibers with the same warping function are joined in a single fiber.

Now we obtain a local description of  $M$ , which is a consequence of Lemma 9 and Theorem 2. First, recall the following formulas for the Ricci and scalar curvatures of a multiply warped product (whose proofs can be found, for instance, in [?]):

**Lema (L.10).** *Let  $\mathcal{M} = B \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$  be a Riemannian multiply warped product with metric  $g = g_B \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$ . Then the scalar curvature of  $\mathcal{M}$  is given by*

$$\begin{aligned} R = R_B - 2 \sum_{1 \leq i \leq k} d_i \frac{\Delta_B h_i}{h_i} + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{R_{\mathcal{N}_i}}{h_i^2} - \sum_{1 \leq i \leq k} d_i(d_i - 1) \frac{\|\text{grad}_B h_i\|_B^2}{h_i^2} \\ - \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k \\ \ell \neq i}} d_i d_\ell \frac{g_B(\text{grad}_B h_i, \text{grad}_B h_\ell)}{h_i h_\ell} \end{aligned} \quad (17)$$

Also, for any lifted vector fields  $X, Y, Z \in \mathcal{L}(B)$ ,  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_i)$  and  $W \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_j)$ , we have

(1)

$$\nabla_X V = \nabla_V X = \frac{X(h_i)}{h_i} V$$

(2)

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}_B(X, Y) - \sum_{1 \leq \ell \leq k} \frac{d_\ell}{h_\ell} \text{Hess}_B(h_\ell)(X, Y)$$

(3)

$$\text{Ric}(X, V) = 0$$

(4)

$$\text{Ric}(V, W) = 0 \text{ if } i \neq j$$

(5)

$$\begin{aligned} \text{Ric}(V, W) = \text{Ric}_{\mathcal{N}_i}(V, W) - \left( \frac{\Delta_B h_i}{h_i} + (d_i - 1) \frac{\|\text{grad}_B h_i\|^2}{h_i^2} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k \\ \ell \neq i}} d_\ell \cdot \frac{g_B(\text{grad}_B h_i, \text{grad}_B h_\ell)}{h_i h_\ell} \right) g(V, W), \text{ if } i = j \end{aligned}$$

Another interesting fact about warped products is the following

**Theorem (T.6).** *Suppose that the multiply warped product  $\mathcal{M} = B \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$  with metric  $g = g_B \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$  has harmonic Weyl curvature. Then each fiber  $(\mathcal{N}_i, g_{\mathcal{N}_i})$  is an Einstein manifold.*

**Demonstração:** Since  $\mathcal{M}$  has harmonic Weyl curvature, we have

$$(\nabla_X \text{Ric})(Y, Z) - (\nabla_Y \text{Ric})(X, Z) = \frac{1}{2n-2} \{(\nabla_X(Rg))(Y, Z) - (\nabla_Y(Rg))(X, Z)\} \quad (18)$$

for all vector fields  $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ . In particular, if we take an unitary vector field  $\tilde{V} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_i)$  and a convenient (in a sense we'll clarify soon)  $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ , we get

$$(\nabla_X \text{Ric})(V, V) - (\nabla_V \text{Ric})(X, V) = \varphi_1 X(h_i) \text{Ric}^{\mathcal{N}_i}(\tilde{V}, \tilde{V})$$

$$= \varphi_2$$

where  $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2$  are functions depending only on  $\mathcal{B}$  determined by lemma (L.10). Clearly, this implies that

$$\text{Ric}^{\mathcal{N}_i}(\tilde{V}, \tilde{V}) = \frac{\varphi_3}{X(h_i)}$$

where  $\varphi_3$  is a function which depends on  $\mathcal{B}$  only. Since  $h$  is not constant we can always choose  $X$  in a way that makes the right-hand side of the above equation well defined. This completes the proof. ■

Combining theorems 5, Theorem 2 and 6, we get

**Theorem (T.7).** *Suppose a multiply warped product  $\mathcal{M} = B \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{d_1} \times \cdots \times_{h_k} \mathcal{N}_k^{d_k}$  with metric  $g = g_B \oplus h_1^2 g_{\mathcal{N}_1} \oplus \cdots \oplus h_k^2 g_{\mathcal{N}_k}$  has harmonic Weyl curvature and also admits a structure of almost Ricci soliton with non constant  $f$ . Then  $k \leq 2$ .*

**Demonstração:** This is a straightforward consequence of the equation

$$\lambda_\alpha - \lambda_\beta = f' \left( \frac{h'_\alpha}{h_\alpha} - \frac{h'_\beta}{h_\beta} \right)$$
■

When there is only a single fiber to be considered, the reciprocal of Theorem 6 is the following:

**Theorem (T.8).** *Let  $\mathcal{M} = \mathcal{I} \times_h \mathcal{N}^{n-1}$  be a warped product over an Einstein manifold  $\mathcal{N}$ . Then  $\mathcal{M}$  has harmonic Weyl curvature.*

**Demonstração:** Let  $\{\tilde{E}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  be a  $g_{\mathcal{N}}$ -orthonormal frame and consider the  $g$ -orthonormal frame

$$\left\{ E_i \doteq \frac{\tilde{E}_i}{h} \right\}_{1 \leq i \leq n}$$

Letting  $C$  denote the Cotton tensor, defined by

$$C(X, Y, Z) = (\nabla_X \text{Ric})(Y, Z) - (\nabla_Y \text{Ric})(X, Z) - \left\{ \frac{1}{2n-2} \{(\nabla_X(Rg))(Y, Z) - (\nabla_Y(Rg))(X, Z)\} \right\}$$

we must check that  $C$  vanishes everywhere. Due to the antisymmetry  $C(X, Y, Z) = -C(Y, X, Z)$ , it is enough to verify that

$$(i) \quad C(\partial_1, E_a, \partial_1) = 0$$

$$(ii) \quad C(\partial_1, E_a, E_b) = 0$$

item (i) holds trivially, so we'll only check item (ii). Since item (ii) is obviously true if  $a \neq b$ , we'll assume  $a = b$  in the following computations. We have

$$(\nabla_{\partial_1} \text{Ric})(E_a, E_a) = \partial_1(\text{Ric}(E_a, E_a)) - 2\text{Ric}(\nabla_{\partial_1} E_a, E_a) \tag{19}$$

Now, since

$$\text{Ric}(E_a, E_a) = \frac{R}{n-1} + \frac{h''}{h}$$

and

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_1} E_a &= \nabla_{\partial_1} (h^{-1} \tilde{E}_a) = -h^{-2} h' \tilde{E}_a + h^{-1} \nabla_{\partial_1} \tilde{E}_a \\ &= -h^{-2} h' \tilde{E}_a + h^{-1} h' h^{-1} \tilde{E}_a \\ &= 0\end{aligned}$$

then (19) becomes

$$(\nabla_{\partial_1} \text{Ric})(E_a, E_a) = \partial_1 (\text{Ric}(E_a, E_a)) = \frac{R'}{n-1} + h''' h^{-1} - h' h'' h^{-2} \quad (20)$$

Similarly,

$$\begin{aligned}-(\nabla_{E_a} \text{Ric})(\partial_1, E_a) &= \text{Ric}(\nabla_{E_a} \partial_1, E_a) + \text{Ric}(\partial_1, \nabla_{E_a} E_a) \\ &= \text{Ric}(h^{-1} \nabla_{\tilde{E}_a} \partial_1, h^{-1} \tilde{E}_a) + \text{Ric}(\partial_1, h^{-2} \nabla_{\tilde{E}_a} \tilde{E}_a) \\ &= \text{Ric}(h^{-1} h' h^{-1} \tilde{E}_a, h^{-1} \tilde{E}_a) + h^{-2} \text{Ric}(\partial_1, -h h' \partial_1) \\ &= h^{-1} h' \left( \frac{R}{n-1} + \frac{h''}{h} \right) + (n-1) h' h^{-2} h'' \\ &= h^{-1} h' \frac{R}{n-1} + h^{-2} h' h'' + (n-1) h' h^{-2} h'' \\ &= h^{-1} h' \frac{R}{n-1} + n h^{-2} h' h''\end{aligned} \quad (21)$$

Together, (20) and (21) give us

$$(\nabla_{\partial_1} \text{Ric})(E_a, E_a) - (\nabla_{E_a} \text{Ric})(\partial_1, E_a) = \frac{R'}{n-1} + h''' h^{-1} + (n-1) h^{-2} h' h'' + h^{-1} h' \frac{R}{n-1} \quad (22)$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2(n-1)} \{(\nabla_{\partial_1} (Rg))(E_a, E_a) - (\nabla_{E_a} (Rg))(\partial_1, E_a)\} = \\ &\frac{R'}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)} \{Rg(\nabla_{E_a} \partial_1, E_a) + Rg(\partial_1, \nabla_{E_a} E_a)\} \\ &= \frac{R'}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)} \{Rg(h' h^{-2} \tilde{E}_a, h^{-1} \tilde{E}_a) + Rg(\partial_1, -h^{-1} h' \partial_1)\} \\ &= \frac{R'}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)} \{R h' h^{-1} - R h' h^{-1}\} \\ &= \frac{R'}{2(n-1)}\end{aligned} \quad (23)$$

Notice that (18) holds if, and only if

$$\frac{R'}{2(n-1)} + h''' h^{-1} + (n-1) h^{-2} h' h'' + h^{-1} h' \frac{R}{n-1} = 0 \quad (24)$$

Now, recall that (17) gives us

$$\begin{aligned}
\frac{R'}{2(n-1)} &= \frac{1}{2(n-1)} \left( -2(n-1)h''h^{-1} + R^{\mathcal{N}}h^{-2} - (n-1)(n-2)(h')^2h^{-2} \right)' \\
&= \left( -h''h^{-1} + \frac{R^{\mathcal{N}}}{2(n-1)}h^{-2} - \frac{n-2}{2}(h')^2h^{-2} \right)' \\
&= -h'''h^{-1} + h^{-2}h'h'' - \frac{R^{\mathcal{N}}}{n-1}h^{-3}h' - (n-2)(h'h''h^{-2} - (h')^3h^{-3}) \\
&= -h'''h^{-1} - (n-3)h^{-2}h'h'' - \frac{R^{\mathcal{N}}}{n-1}h^{-3}h' + (n-2)(h')^3h^{-3}
\end{aligned}$$

A simple calculation now shows that (24) is indeed satisfied, since

$$\begin{aligned}
0 &= -h'''h^{-1} - (n-3)h^{-2}h'h'' - \frac{R^{\mathcal{N}}}{n-1}h^{-3}h' + (n-2)(h')^3h^{-3} + h'''h^{-1} + (n-1)h^{-2}h'h'' \\
&\quad + h^{-1}h' \left( -2h''h^{-1} + \frac{R^{\mathcal{N}}}{n-1}h^{-2} - (n-2)(h')^2h^{-2} \right)
\end{aligned}$$

■

We have proven that for any smooth function  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , the warped product  $\mathcal{M}^n = I \times_h \mathcal{N}$  has harmonic Weyl curvature. This allows us to endow any such warped product with an almost Ricci soliton structure.

**Theorem (T.9).** *Let  $(I \times_h \mathcal{N}^{n-1}, g)$  be a warped product, where  $\mathcal{N}$  is an Einstein manifold with Einstein constant  $\lambda_{\mathcal{N}}$ . Let  $f, \lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  be functions satisfying the system of ODE's*

$$\begin{cases} \lambda = f'' - \frac{(n-1)}{h}h'', \\ \lambda = f'\frac{h'}{h} + \frac{\lambda_{\mathcal{N}}}{h^2} - \frac{h''}{h} - \frac{(n-2)}{h^2}(h')^2. \end{cases} \quad (25)$$

*Then  $(I \times_h \mathcal{N}, g, f, \lambda)$  is an almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature and its Ricci tensor has exactly two eigenvalues.*

**Demonstração:** This is an immediate consequence of lemma (L.10) combined with theorem 8.

■

On the other hand, we shall now prove that, in a sense, the almost soliton condition determines the warping function  $h$ .

**Theorem (T.10) (Local warped product structure).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$  be an almost Ricci soliton with  $n \geq 4$  and  $f$  non constant. Assume the soliton has harmonic Weyl curvature and that its Ricci tensor has exactly two distinct eigenvalues. Then for any point  $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  there are a neighborhood  $U \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  of  $p$  and a warped product  $I \times_h \mathcal{N}$  of an interval and an Einstein manifold  $\mathcal{N}^{n-1}$  so that  $U$  is isometric to a*



domain of  $I \times_h \mathcal{N}$ . Furthermore,  $f$  and  $\lambda$  are constant on  $\mathcal{N}$ , through the identification between  $I \times \mathcal{N}$  and  $U$ . Finally, it is necessary that  $h, f$  and  $\lambda$  satisfy the following ODE system

$$\begin{cases} \lambda = f'' - \frac{(n-1)}{h} h'' \\ \lambda = f' \frac{h'}{h} + \frac{\lambda_{\mathcal{N}}}{h^2} - \frac{h''}{h} - \frac{(n-2)}{h^2} (h')^2 \end{cases} \quad (26)$$

**Demonstração:** The warped product decomposition follows from 5, whence it follows  $\mathcal{N}$  is Einstein. The first equation is then an immediate consequence of theorem 8 and lemma (L.3). Taking a local coordinate frame  $(\partial_i)_{i \geq 2} \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ , the formulae item (2), item (1) and item (5) from Lemma (L.10), respectively, yield

$$\begin{cases} \text{Ric}_{11} = -\frac{(n-1)}{h} h'' = \lambda g_{11} - (\nabla \nabla f)_{11} = \lambda - f'' \\ \text{Ric}_{22} = \lambda_{\mathcal{N}} g_{22}^{\mathcal{N}} - \left( \frac{h''}{h} + (n-2) \frac{(h')^2}{h^2} \right) g_{22} = \left( \frac{\lambda_{\mathcal{N}}}{h^2} - \frac{h''}{h} - (n-2) \frac{(h')^2}{h^2} \right) g_{22} \end{cases}$$

as desired. ■

The following example, which we shall appropriately name as Bryant's almost Ricci soliton (as it is but a very small generalization of R. Bryant's MO post in [13]), shows that in fact any Einstein manifold gives rise to a warped product with a gradient almost Ricci soliton structure.

**Exemplo (E.1).** (Bryant's almost Ricci soliton)

Let  $(\mathcal{N}^n, h)$  be a Riemannian manifold with Einstein constant  $(n-1)k$ . Consider  $I \subset (0, \infty)$  an interval where

$$\varphi(u) \doteq k - au^2 + bu^{1-n} > 0, \quad \forall u \in I,$$

where  $a, b \in \mathbb{R}$  are constants and  $u > 0$  is the coordinate on  $\mathbb{R}^+$ . Then

$$g = \frac{du^2}{(\varphi(u))^2} + u^2 h$$

is a Riemannian metric on  $\mathcal{M}^{n+1} \doteq I \times \mathcal{N}$ . Since  $\mathcal{N}$  is Einstein, it follows from 8 that  $\mathcal{M}$  has harmonic Weyl curvature. After a few straightforward computations, one also sees that

$$\text{Ric}(g) = \left( na - \frac{1}{2} b(n-1) u^{-n-1} \right) g + \frac{(n^2-1)b du^2}{2(bu^2 + k u^{n+1} - a u^{n+3})},$$

whence it follows that  $\mathcal{M}$  has constant scalar curvature  $n(n+1)a$  as well as that  $g$  is Einstein if, and only if,  $b = 0$ . We can also make  $f$  explicit. Indeed, the Ricci-almost soliton equation in our case becomes

$$f'' = \lambda - na - \frac{1}{2} b n(n-1) u^{-n-1}$$

Therefore, if  $q \in \mathcal{C}^\infty(I)$  satisfies  $q'' = \lambda$ , we have

$$f = q - \frac{1}{2} n a u^2 - \frac{1}{2} b u^{1-n}$$

When there are three distinct Ricci-eigenvalues (and hence two fibers in the local warped product decomposition of  $\mathcal{M}$ ), theorem 8 no longer holds, as shown [14]. Thus arises the need to add the harmonic Weyl curvature hypothesis.

**Theorem (T.11).** *Let  $I \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{r_1} \times_{h_2} \mathcal{N}_2^{r_2}$  be a multiply warped product, where  $\mathcal{N}_1$  and  $\mathcal{N}_2$  are Einstein manifolds, with Einstein constants  $\lambda_{\mathcal{N}_1}$  and  $\lambda_{\mathcal{N}_2}$ , respectively. Let  $f, \lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  be functions satisfying the system of ODE's*

$$\begin{cases} \lambda = f'' - r_1 \frac{(h_1)''}{h_1} - r_2 \frac{(h_2)''}{h_2} \\ \lambda = \frac{\lambda_{\mathcal{N}_1}}{(h_1)^2} + \frac{h_1'}{h_1} f' - \frac{(h_1)''}{h_1} - (r_1 - 1) \frac{(h_1')^2}{(h_1)^2} - r_2 \frac{h_1' h_2'}{h_1 h_2} \\ \lambda = \frac{\lambda_{\mathcal{N}_2}}{(h_2)^2} + \frac{h_2'}{h_2} f' - \frac{(h_2)''}{h_2} - (r_2 - 1) \frac{(h_2')^2}{(h_2)^2} - r_1 \frac{h_1' h_2'}{h_1 h_2} \\ \lambda' = \frac{f'}{n-1} \left( r_1 \frac{h_1''}{h_1} + r_2 \frac{h_2''}{h_2} \right) \end{cases} \quad (27)$$

Then  $(I \times_{h_1} \mathcal{N}_1^{r_1} \times_{h_2} \mathcal{N}_2^{r_2}, g, f, \lambda)$  is an almost Ricci soliton with harmonic Weyl curvature and its Ricci tensor has exactly three eigenvalues.

**Demonstração:** This an immediate consequence of lemmas (L.3) and (L.10). ■

**Theorem (T.12) (Local multiply warped product structure).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f, \lambda)$  be an almost Ricci soliton with  $n \geq 4$  and  $f$  non constant. Assume the soliton has harmonic weyl curvature and that its Ricci tensor has exactly three distinct eigenvalues. Then for any point  $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  there are a neighborhood  $U \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  of  $p$  and a multiply warped product  $I \times_{h_1} \mathcal{N}_1 \times_{h_2} \mathcal{N}_2$  of an interval  $I$  and two Einstein manifolds  $\mathcal{N}_1$  and  $\mathcal{N}_2$ , so that  $(U, g)$  is isometric to a domain of  $I \times_{h_1} \mathcal{N}_1 \times_{h_2} \mathcal{N}_2$ . Furthermore,  $f$  and  $\lambda$  are constant on  $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ , through the identification between  $I \times \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$  and  $U$ . Finally, it is necessary that  $h_1, h_2, f$  and  $\lambda$  satisfy the ODE system (27).*

**Demonstração:** Entirely analogous to the proof of Theorem 9. ■

## 4 $\rho$ -Einstein gradient Ricci solitons

As a straightforward application of the previous theorems, we can also determine (via ODE's) the warping functions of  $\rho$ -Einstein gradient Ricci solitons. Recall that  $(\mathcal{M}, g, f)$  is said to be a  $\rho$ -Einstein gradient Ricci soliton when there exist constants  $\rho, \mu \in \mathbb{R}$  such that

$$\text{Ric} + \nabla^2 f = (\rho R + \mu) g$$

**Theorem (T.13) (Local warped product structure).** *Let  $(\mathcal{M}^n, g, f)$  be a  $\rho$ -Einstein gradient Ricci soliton. Assume the soliton has harmonic Weyl curvature and that its Ricci tensor has exactly two distinct eigenvalues. Then for any point  $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  there are a neighborhood  $U \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  of  $p$  and a warped product  $I \times_h \mathcal{N}$  of an interval and an Einstein manifold  $\mathcal{N}^{n-1}$  so that  $U$  is isometric to a domain of  $I \times_h \mathcal{N}$ . Furthermore, if  $\rho \neq \frac{1}{n-1}$ , then  $h$  is an affine function and  $f$  is constant on  $\mathcal{N}$ , through the identification between  $I \times \mathcal{N}$  and  $U$ .*

**Demonstração:** Since  $\mathcal{M}$  is, in particular, a gradient almost Ricci soliton with

$$\begin{aligned}\lambda &= \rho R + \mu \\ &= -2(n-1)\rho \frac{h''}{h} + \rho(n-1) \frac{\lambda_{\mathcal{N}}}{h^2} - \rho(n-1)(n-2) \frac{(h')^2}{h^2} + \mu\end{aligned}$$

the first equation of (26) can be written as

$$-f' \frac{h'}{h} + (1 - 2(n-1)\rho) \frac{h''}{h} + (\rho(n-1) - 1) \frac{\lambda_{\mathcal{N}}}{h^2} + (-\rho(n-1) + 1)(n-2) \frac{(h')^2}{h^2} + \mu = 0,$$

or, equivalently,

$$(1 - 2\rho(n-1)) hh'' + (\rho(n-1) - 1) \lambda_{\mathcal{N}} - (n-2)(\rho(n-1) - 1)(h')^2 - f'hh' + \mu h^2 = 0. \quad (28)$$

Now, from (16), we have

$$\begin{aligned}-f'hh' &= \left( \underbrace{\lambda_2}_{=\frac{R}{n-1} + \frac{h''}{h}} - \lambda \right) h^2 \\ &= \left( \frac{R}{n-1} + \frac{h''}{h} - \rho R - \mu \right) h^2 \\ &= \left( \frac{1}{n-1} - \rho \right) (-2hh'' + (n-1)\lambda_{\mathcal{N}} - (n-1)(n-2)(h')^2) - \mu h^2 + hh'' \\ &= \left( 2\rho + \frac{n-3}{n-1} \right) hh'' + (1 - \rho(n-1)) \lambda_{\mathcal{N}} - (n-2)(h')^2 + \rho(n-1)(n-2)(h')^2 - \mu h^2\end{aligned}$$

This together with equation (28) implies

$$(n-2)(1 - \rho(n-1)) hh'' = 0$$

■

## 5 Apêndice

**Observação (O.10).** Aqui  $\mathbb{V}$  denotará um espaço vetorial de dimensão finita.

**Definição (D.4).** Definimos a aplicação bemol  $\flat : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$  por

$$\flat(v) = g(v, \bullet).$$

**Definição (D.5).** Dado  $f \in \mathbb{V}^*$ , existe um único  $f^\#$  tal que

$$f(v) = g(f^\#, v),$$

seja qual for  $v \in \mathbb{V}$ . A aplicação sustenido  $\sharp : \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{V}$  é definida então por:

$$\begin{aligned}\sharp : \mathbb{V}^* &\rightarrow \mathbb{V} \\ f &\mapsto f^\#.\end{aligned}$$

**Definição (D.6).** O *tensor de Einstein* de uma variedade Riemanniana  $(\mathcal{M}^n, g)$  é definido por

$$E = \text{Ric} - \frac{R}{n}g.$$

**Definição (D.7).** Sejam  $T, S$  2-tensores. O produto de *Kulkarni-Nomizu* de  $T$  e  $S$  é o 4-tensor  $T \oslash S$  definido por

$$2 \cdot (T \oslash S)(x, y, z, w) = T(y, z)S(x, w) - T(x, z)S(y, w) + S(y, z)T(x, w) - S(x, z)T(y, w), \quad \forall x, y, z, w.$$

**Definição (D.8).** O tensor de Weyl é o tensor  $W$  determinado pela decomposição do tensor curvatura da seguinte maneira

$$\text{Rm} = \frac{R}{n(n-1)}(g \oslash g) + \frac{2}{n-2}(g \oslash E) + W.$$

**Definição (D.9).** Seja

$$\mathcal{T}_k^1(\mathcal{M}) \ni T : \underbrace{\Gamma(T\mathcal{M}) \times \dots \times \Gamma(T\mathcal{M})}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \Gamma(T\mathcal{M})$$

um tensor de tipo  $(1, k)$ . O divergente de  $T$ , que denotaremos por  $\text{div } T$ , é o tensor de tipo  $(0, k)$  determinado por

$$\begin{aligned} (\text{div } T)(Y_1, \dots, Y_k) &= \text{tr}([\nabla T](\bullet, Y_1, \dots, Y_k)) \\ &= \text{tr}(X \mapsto (\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_k)). \end{aligned}$$

**Observação (O.11).** Também é comum denotar  $\text{div } T$  por  $\delta T$ .

**Observação (O.12).** Em geral, a identificação que usamos para ver tensores de tipo  $(0, k)$  como tensores de tipo  $(1, k-1)$  (ou, equivalentemente, de tipo  $(1, k)$  como de tipo  $(0, k+1)$ ) é feita ao subirmos o último índice de  $T$ , *id est*, se  $T$  é um  $(0, k)$  tensor, também o vemos como o tensor  $T \in \mathcal{T}_{k-1}^1(\mathbb{V})$  determinado por

$$\mathbb{V} \ni T(y_1, \dots, y_{k-1}) = \sharp[T(y_1, \dots, y_{k-1}, \bullet)],$$

sejam quais forem  $y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{V}$ .

**Observação (O.13).** A definição (D.9) também se estende de maneira óbvia aos tensores puramente covariantes uma vez que fizemos a identificação vista na observação (O.12). Nesse caso, se  $T \in \mathcal{T}_k^0(T\mathcal{M})$ ,  $\text{div}(T) \in \mathcal{T}_{k-1}^0(T\mathcal{M})$  é o tensor determinado por

$$\text{div}(T)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \text{tr}_g((X, Y) \mapsto (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_{k-1}, Y)).$$

Em coordenadas locais arbitrárias, temos

$$(\text{div } T)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} (\nabla_{\partial_i} T)(Y_1, \dots, Y_{k-1}, \partial_j).$$

**Observação (O.14).** Em componentes locais, temos então (usando a convenção de Einstein):

$$\begin{aligned} (\delta T)_{i_1 \dots i_{k-1}} &= g^{ij} T_{i_1 \dots i_{k-1} i; j}, \text{ se } T \text{ é de tipo } (0, k). \\ (\delta T)_{i_1 \dots i_k} &= T_{i_1 \dots i_k}{}^j{}_{; j}, \text{ se } T \text{ é de tipo } (1, k). \end{aligned}$$

**Definição (D.10).** Diremos que  $T$  é um tensor harmônico quando  $\delta(T) = 0$ .

Um dos conceitos mais importantes e frutíferos de geometria Riemanniana é o *produto warped* de variedades Riemannianas, que generaliza o produto Riemanniano comum. Tal conceito também tem grande relevância na física, aparecendo na teoria da relatividade como modelo do próprio Cosmos ou de buracos negros (veja, por exemplo, o modelo cosmológico de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker).

**Definição (D.11).** Sejam  $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$  e  $(\mathcal{M}_i, g_{\mathcal{M}_i})$  variedades Riemannianas e  $b_i : \mathcal{B} \rightarrow (0, \infty)$  funções suaves para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . O produto warped múltiplo de tais variedades é a variedade produto  $\mathcal{N} = \mathcal{B} \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_k$  munida da métrica  $g = g_{\mathcal{B}} \oplus b_1^2 g_{\mathcal{M}_1} \oplus b_2^2 g_{\mathcal{M}_2} \oplus \dots \oplus b_k^2 g_{\mathcal{M}_k}$  definida por

$$g = \sigma_0^*(g_{\mathcal{B}}) \oplus (b_1 \circ \pi)^2 \sigma_1^*(g_{\mathcal{M}_1}) \oplus \dots \oplus (b_k \circ \pi)^2 \sigma_k^*(g_{\mathcal{M}_k})$$

onde  $\sigma_0 : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$  é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \sigma_0 : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{B} \\ (p, q_1, \dots, q_k) &\mapsto p \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

e para  $i \geq 1$ ,  $\sigma_i : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}_i$  é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \sigma_i : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{M}_i \\ (p, q_1, \dots, q_i, \dots, q_k) &\mapsto q_i \in \mathcal{M}_i \end{aligned}$$

**Observação (O.15).** • É comum denotar a variedade Riemanniana  $(\mathcal{N} = \mathcal{B} \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_k, g = g_{\mathcal{B}} \oplus b_1^2 g_{\mathcal{M}_1} \oplus b_2^2 g_{\mathcal{M}_2} \oplus \dots \oplus b_k^2 g_{\mathcal{M}_k})$  simplesmente por  $\mathcal{N} = \mathcal{B} \times_{h_1} \mathcal{M}_1^{d_1} \times \dots \times_{h_k} \mathcal{M}_k^{d_k}$

- Quando  $k = 1$ , temos o produto warped simples usual.
- Se todos  $b_i \equiv 1$ , temos um produto Riemanniano trivial.

**Observação (O.16).** Para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ , o conjunto dos campos em  $\mathcal{M}$  que surgem como levantamentos de campos em fatores do produto será denotado por

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}_i) = \{X \in \Gamma(T\mathcal{M}) \mid d\sigma_j(X) = 0, \text{ seja qual for } j \neq i\}$$

Dado  $X_i \in \Gamma(T\mathcal{N}_i)$ , é fácil ver que existe um único campo  $\text{Lev}(X_i) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_i)$  que satisfaz  $(d\sigma_i \circ \text{Lev})(X_i) = X_i$ . O campo  $\text{Lev}(X_i)$  é chamado do levantamento do campo  $X_i$ . O abuso de notação de identificar um campo ou uma 1-forma com seu levantamento é portanto inofensivo.

## Referências

- [1] **MathOverflow**. Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds. Disponível em: <https://mathoverflow.net/questions/96670/classification-of-surfaces-and-the-top-diff-and-pl-categories-for-manifolds>.
- [2] **Rudnik, Adam Petzet**. *Analysis of the Ricci Flow on Compact Manifolds*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2019.
- [3] **Chow, Bennett; Lu, Peng; Ni, Lei**. Hamilton's Ricci flow. Graduate Studies in Mathematics, 77. American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press Beijing, New York, 2006. xxxvi+608 pp. ISBN: 978-0-8218-4231-7; 0-8218-4231-5.
- [4] **Topping, Peter**. Lectures on the Ricci flow. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/~maseq/Rfnotes.html>.
- [5] **Horácio, M.A.R.M.**. *Estimativas de curvatura para sólitons de Ricci gradiente quadri-dimensionais*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2023. Disponível em: <https://sagangromov.github.io/assets/pdf/MinhaDissertacao.pdf>.

- [6] **Horácio, M.A.R.M.** *Produtos warped*. Disponível em: <https://sagangromov.github.io/assets/pdf/ProdutosWarped1.pdf>.
- [7] **Gomes, J.N.** *Rigidez de superfícies de contato e caracterização de variedades Riemannianas munidas de um campo conforme ou de alguma métrica especial* Tese de doutorado, Universidade Federal do Ceará, (2012).
- [8] **Sharma, R.** *Almost Ricci solitons and K-contact geometry*. Monatshefte für Mathematik, v. 175, n. 4, p. 621-628 (2014).
- [9] **Kim, J.** *On a classification of 4-d gradient Ricci solitons with harmonic Weyl curvature*. The Journal of Geometric Analysis, 27(2), 986-1012, 2017.
- [10] **Kim, J.** *Four-dimensional gradient almost Ricci solitons with harmonic Weyl curvature*. Mathematische Nachrichten, 294(4), 774-793, 2021.
- [11] **Li, F.** *Rigidity of complete gradient steady Ricci solitons with harmonic Weyl curvature*. arXiv preprint arXiv:2101.12681, 2021.
- [12] **Brozos-Vázquez, M.; García-Río, E.; Vázquez-Lorenzo, R.** Warped product metrics and locally conformally flat structures. *Mat. Contemp.* 28 (2005), 91–110. **MR2195191**.
- [13] **MathOverflow; What are some explicit examples of nontrivial gradient almost Ricci solitons with harmonic curvature?**
- [14] **Killing tensors and warped products**. Disponível em: <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/apm/apm75/apm7513.pdf>.