# 1 EXERCÍCIOS DAS CAIXAS

1. Seja $f : X \to Y$ contínua e suponha que $X$ é conexo. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f$ é sobrejetiva (caso não fosse, bastaria restringir o contradomínio ao espaço da imagem $Z = f(X)$, que preserva continuidade). Assim, suponha por absurdo que $Z = f(X) = Y = A \cup B$, i.e, é desconexo. Então, se tomarmos $x \in X$, ou $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$, de onde concluímos que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos (pela hipótese de continuidade) disjuntos cuja união $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$, ou seja, $X$ é desconexo, um absurdo.

2. a) Suponha que $S$ seja conexo. Vamos mostrar que a única cisão de $\overline{S}$ é a trivial, isto é, se $\overline{S} = A \cup B$ e $A \neq \emptyset$, então $B = \emptyset$. De fato, temos $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$, e tomando $a \in A$, como $a \notin \overline{B}$, existe $U \ni a$ aberto tal que $U \cap B = \emptyset$, e como $a \in \overline{S}$, existe $x \in U \cap S \neq \emptyset$ com $x \notin B$, assim $x \in S \cap A \neq \emptyset$. Note que $S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$, e pela hipótese de conexidade $B \cap S = \emptyset \implies B = \emptyset$.

   b) Suponha por absurdo que $D = A \cup B$ com $A, B$ abertos disjuntos e não vazios. Pelo lema 23.2 do Munkres, podemos assumir sem perda de generalidade que $S \subset A$, assim $\overline{S} \subset \overline{A}$. Como $\overline{A}$ e $B$ são disjuntos, concluímos que $B = \emptyset$, uma contradição, logo $D$ é conexo.

3. a) Temos $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$, uma união de subespaços da reta conexos e não disjuntos. O resultado segue da proposição 12.6.

   b) Tome $v = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ com $||v|| = 1$ e seja $L_v$ a reta de $\mathbb{R}^n$ passando pela origem e com vetor direcional $v$. É claro que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{||v||=1} L_v$, uma união de subespaços de $\mathbb{R}^n$ não disjuntos e conexos (pois são a imagem de $\mathbb{R}$ sob a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = tv$), e o resultado segue da proposição 12.6.

4. Fixe algum $x \in \Omega$. Então é claro que $\Omega = \bigcup_{x \neq y \in \Omega} S_{xy}$, e o resultado segue da proposição 12.6.

5. É claro que $f : \Omega_2 \to \{x\} \times \Omega_2$ definida por $f(t) = (x, t) \in \{x\} \times \Omega_2$ e $g : \Omega_1 \to \Omega_1 \times \{y\}$ definida por $g(t) = (t, y) \in \Omega_1 \times \{y\}$ são bijeções contínuas com inversas contínuas, como desejado.

# 2 LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Considerando a topologia discreta, qualquer $V \subset \Omega$ com mais de dois elementos é desconexo, pois fixado $x \in V$, $\{x\} \cup V \setminus \{x\} = V$ é uma união de abertos disjuntos cuja união é $V$. A recíproca não vale, um contra-exemplo é o exemplo 4 no parágrafo 23 do Munkres: os racionais com a topologia induzida da reta também são totalmente desconexos.

2. Primeiro provaremos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, pela proposição 12.6, temos que $A_1 \cup A_2$ é conexo, assim $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ também é conexo, também pela proposição 12.6. Repetindo esse processo, temos que a união finita é conexa. Agora, afirmamos que

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

é conexo, onde $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. De fato, usando o lema 23.2 do Munkres e supondo que haja uma cisão $B = U \cup V$, mostraremos que ou $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$, isto é, $B$ é conexo. Com efeito, como $B_1 \in B$ é conexo e $B_1 \subset B_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, então ou $B_1 \subset U$ e $B_n \subset U \; \forall n \in \mathbb{N} \implies U = B$ e $V = \emptyset$ ou $B_1 \subset V$ e $B_n \subset V \; \forall n \in \mathbb{N} \implies V = B$ e $U = \emptyset$.

3. $\mathbb{R}_l$ não é conexo, pois $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$, uma união de abertos disjuntos na topologia do limite inferior que dá o $\mathbb{R}$ todo.

4. Primeiro provaremos a contrapositiva de conexo $\implies$ únicas funcões contínuas são constantes. De fato, se $f : \Omega \to \{0,1\}$ é não constante e contínua, então, como $\{0,1\}$ é clopen independente de sua topologia, por hipótese $f^{-1}(\{0,1\})$ é um clopen não vazio de $\Omega$, i.e, $\Omega$ é desconexo. Reciprocamente, se $\Omega = A \cup B$ com $A$ e $B$ abertos não vazios disjuntos, note que $f : \Omega \to \{0,1\}$ definida pondo $f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) = 1$ se $x \in B$ é não constante e contínua.

5. Fixe algum $x \in \Omega$. Então é claro que $\Omega = \bigcup_{x \neq y \in \Omega} S_{xy}$, e o resultado segue da proposição 12.6.

6. Iremos mostrar a condição mais forte de que $\mathbb{R}^n \setminus F$, onde $F \subset \mathbb{R}^n$ é finito, é conexo por caminhos (e é fácil ver que todo espaço conexo por caminhos é conexo). De fato, dado $x, y \in \mathbb{R}^n$, há uma quantidade infinita (*e não enumerável*) de retas passando por $x$ que não intersectam $F$, escolha aleatoriamente alguma dessas retas e seja $\alpha$ a sua inclinação. É claro que também há uma quantidade infinita (*e não enumerável*) de retas passando por $y$ com inclinação $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ que não intersectam $F$, escolha também uma dessas retas e seja $\beta$ a sua inclinação. Como $L_\alpha$ e $L_\beta$ tem inclinações diferentes, sua interseção é não vazia, e basta tomar algum $p$ nessa interseção e note que o caminho que vai de $x$ a $p$ contido em $L_\alpha$ e depois de $p$ a $y$ contido em $L_\beta$ é contínuo. Note que poderíamos enfraquecer a condição de $F$ ser finito, a prova também funciona se $F$ for só enumerável.

7. Observe que $\mathbb{Q}^2$ é enumerável. A prova é idêntica à do exercício anterior (uma prova mais fácil é notar que dado dois pontos $p, q$ com coordenadas irracionais, eles podem ser conectados pelo caminho que passa pelo ponto intermediário $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ por segmentos de retas horizontais e verticais).

8. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é desconexo, mas para $n \geq 2$ tirar qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$ ainda o deixa conexo. Como conexidade é um invariante topológico (ou seja, se dois espaços são homeomorfos ou ambos são conexos ou ambos são desconexos), o resultado segue.

9. Seja $F$ um subespaço complementar de $E$, isto é, $\mathbb{R}^n = E \oplus F$. Tome $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E$ e denote por $\bar{x}, \bar{y}$ as suas projeções em $F$. Afirmamos que o seguinte caminho liga $x$ a $y$:

$$x \to \bar{x} \to_* \bar{y} \to y$$

onde cada $\to$ denota um segmento de reta, e devemos tomar o cuidado de não passar pela origem indo de $\bar{x}$ a $\bar{y}$ (o que é facilmente realizado por um argumento análogo ao do exercício 6: escolha retas passando por $\bar{x}$ e por $\bar{y}$ que não passam pela origem se intersectam em $p$ e tome o caminho $\bar{x} \to p \to \bar{y}$)

*Observação: a recíproca desse exercício também vale (e é mais fácil de provar), i.e, se E é um subespaço vetorial,* $\mathbb{R}^n \setminus E$ *ser conexo implica que* $\dim(E) \leq n - 2$