Observação 1. *Usaremos implicitamente várias vezes aqui que a união é distributiva sobre a interseção e que a interseção é distributiva sobre a união.*

Definição 1. *Uma cisão não trivial de Ω é um par U, V de abertos não vazios e disjuntos de Ω cuja união é igual a Ω. Uma cisão trivial de Ω é um par de abertos disjuntos onde um deles é vazio e o outro é o Ω. Ω é dito conexo se não existe nenhuma cisão não trivial de Ω e desconexo caso contrário.*

Definição 2. *Diremos que Ω é conexo por caminhos se para todo $x, y \in \Omega$ existe uma função contínua $f : [a, b] \to \Omega$ (que chamaremos de caminho) indo dum fechado da reta em Ω tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$.*f

Definição 3. *Diremos que $p \in \Omega$ é um ponto de acumulação da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ se para toda vizinhança aberta U de p e para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_1 > n_0$ tal que $x_{n_1} \in U$.*

Observação 2. *Apesar da notação confusa, assumiremos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de Ω é uma função $f : \mathbb{N} \to \Omega$ tal que $f(1) = x_1$ e assim por diante.*

Observação 3. *Com essa definição um ponto de acumulação de uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não precisa ser um ponto de acumulação de $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ (considere a sequência que alterna entre 0 e 1 no compacto $[0, 1]$), e a recíproca também não vale (ver a próxima observação).*

Definição do Munkres. *Diremos que um espaço topológico Ω é acumuladamente compacto (limit point compact) se todo subconjunto infinito de Ω tem ponto de acumulação.*

Definição das notas de aula. *Diremos que um espaço topológico Ω é fracamente sequencialmente compacto se toda sequência $f : \mathbb{N} \to \Omega$ tem ponto de acumulação.*

Observação 4. *A definição do Munkres é mais fraca do que a das notas de aula que exige que toda sequência em Ω tenha ponto de acumulação: considere a sequência em $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ (onde o primeiro tem a topologia discreta e o segundo a indiscreta) dada por $x_1 = (1, 0), x_2 = (1, 1), x_3 = (2, 0), x_4 = (2, 1), \cdots$, que não tem ponto de acumulação, mas todo $S \subset \Omega$ não vazio (em particular se S é infinito) tem ponto de acumulação (a prova disso é o mesmo argumento usado no exercício 3 das caixas de compacidade). Porém note que as duas definições são equivalentes se Ω satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade (ou até mesmo se satisfaz pelo menos que subconjuntos finitos sejam fechados).*

Observação 5. *Ser fracamente sequencialmente compacto é equivalente a ser enumeravalmente compacto (i.e, toda cobertura aberta enumerável tem uma subcobertura aberta finita) e também implica em ser acumuladamente compacto (mas a recíproca só vale se o espaço satisfizer pelo menos que subconjuntos finitos sejam fechados).*

Sub-lema 1. *Se $C \cup D = \Omega$ é uma cisão não trivial de Ω e Y é um subespaço conexo de Ω, então ou $Y \subset C$ ou $Y \subset D$.*

Demonstração: Note que $C \cap Y$ e $D \cap Y$ são abertos disjuntos de Y cuja união é todo Y, então pela hipótese de conexidade de Y um deles é vazio e outro é todo o Y.

■

Lema 1. *Qualquer conjunto conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração: Suponha por absurdo que Ω é conexo por caminhos mas não é conexo. De fato, se $\Omega = A \cup B$ é uma cisão de Ω, então se $f : [a, b] \to \Omega$ é um caminho arbitrário, como $f([a, b])$ é a imagem contínua de um conexo, também é conexo, e usando o sub-lema 1, temos que $f([a, b])$ ou está contido em A ou em B, de forma que não existe nenhum caminho de um ponto de A até um ponto de B, uma contradição.

$\blacksquare$

Lema 2. *Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura aberta do espaço métrico (Ω, d). Se Ω é sequencialmente compacto, existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto de Ω com diâmetro menor que δ está contido em algum elemento de $\mathscr{A}$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que Ω seja sequencialmente compacto mas não existe δ nas condições do lema. Então, em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto C_n de diâmetro menor que $\frac{1}{n}$ que não está contido em nenhum elemento de $\mathscr{A}$. Para cada n, escolha um ponto $x_n \in C_n$. Por hipótese, alguma subsequência $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ da sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para algum ponto a. Como $\mathscr{A}$ é cobertura, existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $a \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(a, \epsilon) \subset A$. Tomando i grande o suficiente de forma que $\text{diam}(C_{n_i}) = \frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x_{n_i}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, temos (pela desigualdade triangular) que $C_{n_i} \subset B_d(x_{n_i}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B_d(a, \varepsilon) \subset A$, uma contradição.

$\blacksquare$

Lema 3. *Seja (Ω, d) um espaço métrico sequencialmente compacto. Então, $\forall \varepsilon > 0$, existe uma cobertura finita que consiste de bolas abertas de raio ε.*

Demonstração: Iremos provar a contrapositiva da afirmação, isto é, se existe $\varepsilon > 0$ tal que Ω não admite nenhuma cobertura finita de bolas abertas de raio ε, então Ω não é sequencialmente compacto. De fato, se existe tal ε, podemos construir uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que não possui nenhuma subsequência convergente da seguinte maneira: tome $x_1 \in \Omega$ arbitrário e escolha x_2 de forma que $x_2 \notin B_d(x_1, \varepsilon)$ (por hipótese podemos fazer isso, senão $B_d(x_1, \varepsilon)$ seria uma cobertura finita de Ω). Em geral, dados $x_1, \cdots, x_n$, tome $x_{n+1} \in \Omega$ de forma que:

$$x_{n+1} \notin B_d(x_1, \varepsilon) \cup B_d(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_d(x_n, \varepsilon)$$

(e novamente, a hipótese garante que possamos fazer isso). É óbvio que, por construção, $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, e de fato nenhuma subsequência dessa sequência pode convergir: dado qualquer x_n, $B_d(x_n, \frac{\varepsilon}{2})$ contém no máximo um termo da sequência, o próprio x_n.

$\blacksquare$

Lema 4. *Seja (Ω, d) um espaço métrico e $S \subset \Omega$. Então $x \in \Omega$ é ponto de acumulação de S se, e só se, para todo $\varepsilon > 0$, $S \setminus \{x\} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \neq x \in S$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.*

Demonstração: A ida segue diretamente da definição de ponto de acumulação (pois $B(x, \epsilon)$ é um aberto de Ω contendo x) e a volta diretamente do fato de que dado $x \in \Omega$ qualquer aberto $U \ni x$ da topologia gerada por d contém alguma bola de raio ϵ, e portanto $U \cap S \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Observação 6. *É fácil ver que esse lema também é equivalente a: x é ponto de acumulação de S $\iff$ toda vizinhança aberta de x intersecta S em infinitos pontos distintos.*

■

Lema 5. *Qualquer espaço métrico compacto* (Ω, d) *é separável.*

Demonstração: Sabemos que todo espaço métrico compacto (Ω, d) é totalmente limitado, de forma que para todo $n \in \mathbb{N}$ a cobertura $C_n = \left\{B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in \Omega\right\}$ admite uma subcobertura finita

$$F_n = \left\{B_d\left(x_1, \frac{1}{n}\right), B_d\left(x_2, \frac{1}{n}\right), B_d\left(x_3, \frac{1}{n}\right), \cdots, B_d\left(x_k, \frac{1}{n}\right)\right\}$$

para alguns $x_1, \cdots, x_k \in \Omega$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ o conjunto consistindo dos centros das bolas de F_n. Afirmamos que:

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

é um subconjunto enumerável de Ω. De fato, Ω é enumerável, pois é uma união enumerável de conjuntos finitos, e também é denso, pois dado qualquer aberto U não vazio de Ω e qualquer $x \in U$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \subset U$, e tomando $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$, então $B_d\left(x, \frac{1}{m}\right) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Como F_m é uma subcobertura finita de Ω, existe $y \in A_m$ tal que $x \in B_d\left(y, \frac{1}{m}\right)$, logo $y \in B_d\left(x, \frac{1}{m}\right)$. Assim:

$$y \in B_d\left(x, \frac{1}{m}\right) \bigcap B_d(x, \varepsilon) \subset D \cap U \neq \emptyset$$

i.e, qualquer aberto não vazio de Ω intersecta D, como desejado.

■

Lema 6. *Se* (Ω, d) *é um espaço métrico, então* $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ *é contínua.*

Demonstração: Mostraremos que a imagem inversa de todo aberto U da reta é aberta em $\Omega \times \Omega$. De fato, se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, queremos mostrar que $d^{-1}(U) = \mathscr{O}$ é aberto, isto é, para todo $\mathfrak{o} \in \mathscr{O}$, existe um aberto básico B de $\Omega \times \Omega$ tal que $\mathfrak{o} \in B \subset \mathscr{O}$. Com efeito, note que se $(x, y) \in d^{-1}(U)$, então $d(x, y) = c \in U$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset U$. Afirmamos que $B = B_d\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times B_d\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ satisfaz o desejado. É óbvio que $(x, y) \in B$, resta mostar que $B \subset \mathscr{O}$. De fato, se $(x', y') \in B$, então note que:

$$\begin{aligned}
|d(x', y') - d(x, y)| &= |d(x', y') - d(x', y) + d(x', y) - d(x, y)| && (1)\\
&\leq |d(x', y') - d(x', y)| + |d(x', y) - d(x, y)| && (2)\\
&\leq d(y, y') + d(x, x') && (3)\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && (4)\\
&= \varepsilon && (5)
\end{aligned}$$

logo $d(x', y') \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U$ e segue que $(x', y') \in \mathscr{O}$. Como (x, y) e (x', y') foram tomados arbitrariamente, o resultado segue.

■

Observação 7. *Para ir de* (2) *para* (3) *note que novamente pela desigualdade triangular:*

$$d(x',y) - d(y,y') \leq d(x',y') \leq d(x',y) + d(y,y')$$
$$d(x,y) - d(x,x') \leq d(x',y) \leq d(x,x') + d(x,y)$$

Lema 7. *Se* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *é uma coleção de subespaços conexos de* Ω *e* A *é um subespaço conexo de* Ω *tal que* $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ *para todo* $\alpha \in I$ *, então* $A \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$ *é conexo.*

Demonstração: Note que $A \cup A_\alpha$ é conexo pela proposição 12.6. Então, novamente pela proposição 12.6, $\bigcup_{\alpha \in I} \left(A \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \right) = A \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$ é conexo. Note que também poderíamos ter usado o sub-lema 1 para mostrar que a única cisão é a trivial.

$\blacksquare$

Lema 8. *Se* A *e* B *são subconjuntos próprios de* X *e* Y*, respectivamente, então* $C = X \times Y \setminus A \times B$ *é conexo.*

Demonstração: Fixe um $(a_1, a_2) \in C$ de forma que $a_1 \notin A$ e $a_2 \notin B$. Para cada $x \notin A$ defina $V_x = \{x\} \times Y$ e para cada $y \notin B$ defina $H_y = X \times \{y\}$. É claro que ambos são conexos pois são homeomorfos a X e Y, respectivamente. Defina $I = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \notin A \text{ e } y \notin B\}$, $D = V_{a_1} \cup H_{a_2}$ e para cada $\alpha \in I$ defina também $A_\alpha = V_{\pi_1(\alpha)} \cup H_{\pi_2(\alpha)}$. Note que:

i) $D \cap A_\alpha = \{(\pi_1(\alpha), a_2), (a_1, \pi_2(\alpha))\} \neq \emptyset \ \forall \alpha \in I$

ii) D é obviamente a união de subespaços conexos e não disjuntos, donde segue da proposição 12.6 que D é conexo. Analogamente, A_α é também conexo para cada $\alpha \in I$.

e o resultado segue do lema anterior.

$\blacksquare$

1 EXERCÍCIOS DAS CAIXAS DE CONEXIDADE

1. Seja $f : X \to Y$ contínua e suponha que X é conexo. Sem perda de generalidade, podemos supor que f é sobrejetiva (caso não fosse, bastaria restringir o contradomínio ao espaço da imagem $Z = f(X)$, que preserva continuidade). Assim, suponha por absurdo que $Z = f(X) = Y = A \cup B$, i.e, é desconexo. Então, se tomarmos $x \in X$, ou $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$, de onde concluímos que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos (pela hipótese de continuidade) disjuntos cuja união $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$, ou seja, X é desconexo, um absurdo.

2. a) Suponha que S seja conexo. Vamos mostrar que a única cisão de $\overline{S}$ é a trivial, isto é, se $\overline{S} = A \cup B$ e $A \neq \emptyset$, então $B = \emptyset$. De fato, temos $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$, e tomando $a \in A$, como $a \notin \overline{B}$, existe $U \ni a$ aberto tal que $U \cap B = \emptyset$, e como $a \in \overline{S}$, existe $x \in U \cap S \neq \emptyset$ com $x \notin B$, assim $x \in S \cap A \neq \emptyset$. Note que $S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$, e pela hipótese de conexidade $B \cap S = \emptyset \implies B = \emptyset$.

b) Suponha por absurdo que $D = A \cup B$ com A, B abertos disjuntos e não vazios. Pelo sub-lema 1, podemos assumir sem perda de generalidade que $S \subset A$, assim $\overline{S} \subset \overline{A}$. Como $\overline{A}$ e B são disjuntos, concluímos que $B = \emptyset$, uma contradição, logo D é conexo.

3. a) Temos $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$, uma união de subespaços da reta conexos e não disjuntos. O resultado segue da proposição 12.6.

   b) Tome $v = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ com $||v|| = 1$ e seja L_v a reta de $\mathbb{R}^n$ passando pela origem e com vetor direcional v. É claro que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{||v||=1} L_v$, uma união de subespaços de $\mathbb{R}^n$ não disjuntos e conexos (pois são a imagem de $\mathbb{R}$ sob a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = tv$), e o resultado segue da proposição 12.6.

4. Fixe algum $x \in \Omega$. Então é claro que $\Omega = \bigcup_{x \neq y \in \Omega} S_{xy}$, e o resultado segue da proposição 12.6.

5. É claro que $f : \Omega_2 \to \{x\} \times \Omega_2$ definida por $f(t) = (x, t) \in \{x\} \times \Omega_2$ e $g : \Omega_1 \to \Omega_1 \times \{y\}$ definida por $g(t) = (t, y) \in \Omega_1 \times \{y\}$ são bijeções contínuas com inversas contínuas, como desejado.

6. Sejam $A = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists K \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$ ou $x_n \geq K \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_M} > M$ ou $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_M} < M\}$. É claro que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ não vazios cuja união é o próprio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De fato também são abertos, pois dado $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou $x \in A$ ou $x \in B$, e sendo U um aberto básico de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ na topologia das caixas dado por:

$$U = (x_1 - 1, x_1 + 1) \times (x_2 - 1, x_2 + 1) \times \cdots$$

   temos ou $x \in U \subset A$ ou $x \in U \subset B$.

2 EXERCÍCIOS DA LISTA DE CONEXIDADE

1. Considerando a topologia discreta, qualquer $V \subset \Omega$ com mais de dois elementos é desconexo, pois fixado $x \in V$, $\{x\} \cup V \setminus \{x\} = V$ é uma união de abertos disjuntos cuja união é V. A recíproca não vale, um contra-exemplo é o exemplo 4 no parágrafo 23 do Munkres: os racionais com a topologia induzida da reta também são totalmente desconexos.

2. Primeiro provaremos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, pela proposição 12.6, temos que $A_1 \cup A_2$ é conexo, assim $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ também é conexo, também pela proposição 12.6. Repetindo esse processo, temos que a união finita é conexa. Agora, afirmamos que

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

   é conexo, onde $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. De fato, usando o sub-lema 1 e supondo que haja uma cisão $B = U \cup V$, mostraremos que ou $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$, isto é, B é conexo. Com efeito, como $B_1 \in B$ é conexo e $B_1 \subset B_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, então ou $B_1 \subset U$ e $B_n \subset U \ \forall n \in \mathbb{N} \implies U = B$ e $V = \emptyset$ ou $B_1 \subset V$ e $B_n \subset V \ \forall n \in \mathbb{N} \implies V = B$ e $U = \emptyset$.

3. $\mathbb{R}_l$ não é conexo, pois $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$, uma união de abertos disjuntos na topologia do limite inferior que dá o $\mathbb{R}$ todo.

4. Primeiro provaremos a contrapositiva de conexo $\implies$ únicas funcões contínuas são constantes. De fato, se $f : \Omega \to \{0,1\}$ é não constante e contínua, então, $f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ é uma cisão de Ω, i.e, Ω é desconexo. Reciprocamente, se $\Omega = A \cup B$ com A e B abertos não vazios disjuntos, note que $f : \Omega \to \{0,1\}$ definida pondo $f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) = 1$ se $x \in B$ é não constante e contínua.

   Observação 8. *Aqui assumimos que $\{0,1\}$ está munido da topologia discreta. De fato, se isso não fosse o caso, é fácil ver que o exercício seria falso.*

5. Fixe algum $x \in \Omega$. Então é claro que $\Omega = \bigcup_{x \neq y \in \Omega} S_{xy}$, e o resultado segue da proposição 12.6.

6. a) **Sem usar conexidade por caminhos:** Tome:

$$A = \{(\pi_1(x_1), \cdots, \pi_{n-1}(x_1)), (\pi_1(x_2), \cdots, \pi_{n-1}(x_2)), \cdots (\pi_1(x_k), \cdots, \pi_{n-1}(x_k))\}$$
$$B = \{\pi_n(x_1), \cdots, \pi_n(x_k)\}$$

   e note que

$$(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \cdots, x_k\} \subset \underbrace{\overline{(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)}}_{= \mathbb{R}^n, \text{ pois } A \times B \text{ é finito}}$$

   portanto o resultado segue do lema 8 e da b) do segundo exercício das caixas de conexidade.

   Observação 9. *Tudo que fizemos aqui foi mostrar que um espaço homeomorfo ao $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}$ é conexo, o que já é suficiente... somente no nível mais formal de teoria dos conjuntos alguém se importa com a picuinha de que o produto cartesiano não é verdadeiramente associativo.*

   b) **Conexidade por caminhos:** *iremos mostrar a condição mais forte de que $\mathbb{R}^n \setminus F$, onde $F \subset \mathbb{R}^n$ é finito, é conexo por caminhos (e é fácil ver que todo espaço conexo por caminhos é conexo). De fato, dado $x, y \in \mathbb{R}^n$, há uma quantidade infinita (e não enumerável) de retas passando por x que não intersectam F, escolha aleatoriamente alguma dessas retas e seja α a sua inclinação. É claro que também há uma quantidade infinita (e não enumerável) de retas passando por y com inclinação $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ que não intersectam F, escolha também uma dessas retas e seja β a sua inclinação. Como L_α e L_β tem inclinações diferentes, sua interseção é não vazia, e basta tomar algum p nessa interseção e note que o caminho que vai de x a p contido em L_α e depois de p a y contido em L_β é contínuo. Note que poderíamos enfraquecer a condição de F ser finito, a prova também funciona se F for só enumerável.*

7. Lema 8.

   Usando conexidade por caminhos: observe que $\mathbb{Q}^2$ é enumerável. A prova é idêntica à do exercício anterior (uma prova mais fácil é notar que dado dois pontos p, q com coordenadas irracionais, eles podem ser conectados pelo caminho que passa pelo ponto intermediário $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ por segmentos de retas horizontais e verticais).

8. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é desconexo, mas para $n \geq 2$ tirar qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$ ainda o deixa conexo. Como conexidade é um invariante topológico (ou seja, se dois espaços são homeomorfos ou ambos são conexos ou ambos são desconexos), o resultado segue.

   Observação 10. *Mastigando um pouco mais a prova: suponha por absurdo que exista tal homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Sabemos que a restrição $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ também é um homeomorfismo, o que é uma contradição, pois $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é desconexo enquanto $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ não é!*

9. Suponha que $\operatorname{codim}(E) \geq 2$, ou, equivalentemente que $\dim(E) = j \leq n-2$. Faça uma mudança de base* de forma que:

$$v \in E \iff v = \left(\sum_{i=1}^{j} \phi_i e_i\right) + 0e_{j+1} + \cdots + 0e_n$$

para alguns $\phi_i, \cdots, \phi_j \in \mathbb{R}$, onde $\{e_1, \cdots, e_j\}$ é uma base de E e $\{e_{j+1}, \cdots, e_n\}$ é uma base do seu complemento ortogonal. Defina a família $\{A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j}\}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j \in \mathbb{R}}$ da seguinte maneira:

$$\textit{Fixados } \alpha_1, \cdots, \alpha_j \in \mathbb{R}, \textit{ então } v \in A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j} \iff v = \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i e_i\right) + \beta_1 e_{j+1} + \cdots + \beta_{n-j} e_n$$

onde exigiremos que $\beta_i \neq 0$ para pelo menos algum $i \in \{1, \cdots, n-j\}$. É claro que $A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j} \cong \mathbb{R}^{n-j} \setminus \{\mathbf{0}\}$, que é conexo (*note que justamente aqui que usamos a hipótese da codimensão ser pelo menos 2!*). Agora, fixe $\mathbf{0} \neq a = (a_{j+1}, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-j}$ e defina outro subespaço A homeomorfo ao $\mathbb{R}^j$ da seguinte maneira:

$$v \in A \iff v = \left(\sum_{i=1}^{j} \gamma_i e_i\right) + a_{j+1}e_{j+1} + \cdots a_n e_n$$

(note que aqui não exigimos nada dos γ). É claro que $A \cong \mathbb{R}^j$ e que* $A \cap A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j} \neq \emptyset$ para todos $\alpha_1, \cdots, \alpha_j \in \mathbb{R}$. Note também que*:

$$A \cup \left(\bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j \in \mathbb{R}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j}\right) = \mathbb{R}^n \setminus E$$

e o resultado segue do lema 7.

Observação 11. *Isso sempre é possível pois $E \cong \mathbb{R}^j$.*

Observação 12. *Note que se $(\alpha_1, \cdots, \alpha_j) \neq \mathbf{0}$ então $(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$ é testemunha desse fato.*

Observação 13. *A primeira inclusão é provada da seguinte maneira: se $v \in A$ ou $v \in \bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j \in \mathbb{R}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j}$, então suas j-ésimas primeiras coordenadas são combinações lineares de vetores da base de E mas há pelo menos uma coordenada das $n-j$ restantes que não é nula, de forma que $v \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Reciprocamente, se $v \in \mathbb{R}^n \setminus E$, então ou todas as coordenadas a partir da $j+1$-ésima são iguais às de a ou isso não acontece. No primeiro caso temos $v \in A$ e no segundo temos $v \in \bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j \in \mathbb{R}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j}$.*

Observação 14. *A recíproca desse exercício também vale (e é mais fácil de provar), i.e, se E é um subespaço vetorial, $\mathbb{R}^n \setminus E$ ser conexo implica que $\dim(E) \leq n-2$.*

Observação 15. *Usando conexidade por caminhos: Seja F um subespaço complementar de E, isto é, $\mathbb{R}^n = E \oplus F$. Tome $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E$ e denote por $\bar{x}, \bar{y}$ as suas projeções em F. Afirmamos que o seguinte caminho liga x a y:*

$$x \to \bar{x} \to_* \bar{y} \to y$$

onde cada $\to$ denota um segmento de reta, e devemos tomar o cuidado de não passar pela origem indo de $\bar{x}$ a $\bar{y}$ (o que é facilmente realizado por um argumento análogo ao do exercício 6: escolha retas passando por $\bar{x}$ e por $\bar{y}$ que não passam pela origem se intersectam em p e tome o caminho $\bar{x} \to p \to \bar{y}$)

3 EXERCÍCIOS DAS CAIXAS DE COMPACIDADE

1. Suponha que K é compacto e $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma cobertura de Y por abertos de Ω. Então é claro que:
$$\{A_\alpha \cap K \mid \alpha \in J\}$$
é uma cobertura de K por abertos de K, e por hipótese uma subcobertura finita da forma:
$$\{A_{\alpha_1} \cap K, \cdots, A_{\alpha_n} \cap K\}$$
cobre K. Segue que $\{A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_n}\}$ é uma subcobertura de $\mathscr{A}$ que cobre K.

   Reciprocamente, se toda cobertura de K por abertos de Ω tem uma subcobertura finita que cobre K, mostraremos que K é compacto. De fato, se $\mathscr{A}' = \{A'_\alpha\}$ é uma cobertura de K por abertos de K, então, por definição de topologia induzida, temos que para cada A'_α, existe A_α aberto de Ω tal que:
$$A'_\alpha = A_\alpha \cap K$$
Temos que $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}$ é uma cobertura de K por abertos de Ω, então por hipótese existe alguma subcobertura finita $\{A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_n}\}$ que cobre K, segue que $\{A'_{\alpha_1}, \cdots, A'_{\alpha_n}\}$ é uma subcobertura finita de $\mathscr{A}'$ que cobre K.

2. Se toda sequência em um espaço métrico tem ponto de acumulação, então é claro que toda sequência tem uma subsequência convergente, basta usar a definição para bolas abertas de raios cada vez menores com centros todos no ponto de acumulação, identicamente ao que é feito abaixo. Para a recíproca basta usar o teorema 13.11 e a proposição 13.8. Um contra-exemplo que satisfaz o pedido no final do exercício é o seguinte:

   Tome $I = [0, 1]$ e considere I^I com a topologia produto. Temos que o mesmo é compacto pelo teorema de Tychonoff e portanto fracamente sequencialmente compacto, mas a sequência de funções $\alpha_n \in I^I$ definida por:
$$\alpha_n(x) \doteq \text{ o enésimo dígito na expansão binária de } x$$
não tem subsequência convergente. De fato, suponha por absurdo que $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência que converge a algum $\alpha \in I^I$, então para cada $x \in I$, $\alpha_{n_k}(x)$ converge a $\alpha(x) \in I$. Defina $p \in I$ com a propriedade de que $\alpha_{n_k}(p) = 0$ ou 1 dependendo da paridade de k. Então a sequência $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é dada por $0, 1, 0, 1, \cdots$, que obviamente não pode convergir.

   Prova de que em espaços métricos ser acumuladamente compacto é equivalente a ser sequencialmente compacto, mas que em espaços topológicos em geral a recíproca não vale: *Suponha que (Ω, d) seja fracamente sequencialmente compacto, i.e, todo subconjunto infinito tem um ponto de acumulação. Dado uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se a mesma só tiver uma quantidade finita de termos distintos, então trivialmente contém uma subsequência constante e portanto convergente. Caso a sequência contenha infinitos termos distintos, por hipótese tem um ponto de acumulação x, então defina a seguinte subsequência $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, escolhendo $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots$ de forma que:*
$$x_{n_1} \in B_d(x, 1)$$
e defina n_i indutivamente, em termos de n_{i-1}, tal que $n_i > n_{i-1}$ e:
$$x_{n_i} \in B_d\left(x, \frac{1}{i}\right)$$

o que sempre podemos fazer, já que $B_d\left(x, \frac{1}{i}\right)$ intersecta A em infinitos pontos distintos. Então é claro que $x_{n_i} \to x$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ foi escolhida arbitrariamente, segue que Ω é sequencialmente compacto.*

Reciprocamente, vamos provar que se Ω é sequencialmente compacto, então é compacto (e sabemos que isso implicará que Ω é fracamente sequencialmente compacto, como desejado). Por hipótese valem o lema 2 e 3, portanto existe uma cobertura finita de bolas abertas de raio $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ (onde δ é como no lema 1) e diâmetro $\frac{2\delta}{3}$, de forma que cada uma está contida em algum $A \in \mathscr{A}$. O conjunto consistindo de todos os A dessa forma é obviamente uma subcobertura finita de Ω, como desejado.

Um exemplo de um espaço acumuladamente compacto mas não sequencialmente compacto (e portanto não metrizável) é $\mathbb{R}$ com a topologia gerada por $\{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ não vazio tem pontos de acumulação, pois dado $a \in A$, $a-\epsilon$ é ponto de acumulação de A, já que $(a-\epsilon,\infty)\cap A\setminus\{a-\epsilon\} = a$. Note que a sequência definida por $x_n = -n$ não tem subsequência convergente nessa topologia.

3. Afirmamos que nas condições do exercício, qualquer conjunto não vazio de $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ tem pontos de acumulação. De fato, se $S \subset \mathbb{N}\times\{0,1\}$ é não vazio, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que ou $(n,0) \in S$ e claramente $(n,1)$ é ponto de acumulação (qualquer aberto básico da topologia produto contendo $(n,1)$ intersecta S em $(n,0) \neq (n,1)$) ou, analogamente, $(n,1) \in S$ e $(n,0)$ é ponto de acumulação. Finalmente, note que $\mathscr{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{n\}\times(0,1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta infinita que não admite subcobertura aberta finita.

4. a) Note que, dado $r > 0$ e tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < r$, temos:

$$y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, nr) \iff \frac{|x_n - y_n|}{n} < r \;\forall n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

$$\iff \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{|x_n-y_n|}{n}\right\} = \max\left\{|x_1-y_1|, \frac{|x_2-y_2|}{2}, \cdots, \frac{|x_{N-1}-y_{N-1}|}{N-1}, \sup_{n\geq N}\left\{\frac{|x_n-y_n|}{n}\right\}\right\} < r \tag{7}$$

$$\iff y \in B_d(x,r) \tag{8}$$

onde usamos em (5) que cada um dos termos dentro dos colchetes é menor que r*, e portanto o seu máximo também é menor que r.

Observação 16. *Para $n < N$ isso é trivial, note que se $n \geq N$, temos $\frac{|x_n-y_n|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \implies \sup_{n\geq N}\left\{\frac{|x_n-y_n|}{n}\right\} \leq \frac{1}{N} < r$*

b) Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy, com $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Queremos mostrar que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, isto é, achar uma sequência $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots) = (y^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_k, y) \to 0$. Faremos isso da seguinte forma:

i) Mostraremos que se $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então $\{x_k^{(j)}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\pi_j(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ converge para cada $j \in \mathbb{N}$.

ii) Usando um exercício de uma lista passada (questão 6 do parágrafo 19 do Munkres), concluíremos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge. A completude de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ segue imediatamente.

De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ arbitrários, então, por hipótese, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k_1, k_2 \geq K$

implica que:

$$d(x_{k_1}, x_{k_2}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\left|x_{k_1}^{(n)} - x_{k_2}^{(n)}\right|}{n} \right\} < \frac{\varepsilon}{j_0}$$

Mas também é óbvio que:

$$\frac{\left|x_{k_1}^{(j_0)} - x_{k_2}^{(j_0)}\right|}{j_0} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\left|x_{k_1}^{(n)} - x_{k_2}^{(n)}\right|}{n} \right\} < \frac{\varepsilon}{j_0} \implies \left|x_{k_1}^{(j_0)} - x_{k_2}^{(j_0)}\right| < \varepsilon$$

de onde segue que $\{x_k^{(j)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e portanto converge a algum $y^{(j)}$ (logo o passo i) foi realizado). Como desejado, concluímos que $\pi_j(x_k) \to \pi_j(y)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, onde $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots) = (y^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$.

c) Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $i > N$, tome $p_i = 1$. Fixe $i \in \{1, \cdots, N\}$. Como $[0,1]$ é totalmente limitado, existe um número finito de pontos $\{x_1, x_2, \cdots, x_M\} = A_0$ tal que:

$$x \in [0,1] \implies |x - x_j| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para algum } j \in \{1, \cdots, M\}$$

Agora, defina $A = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}} \mid x_1, x_2, \cdots, x_N \in A_0 \text{ e } x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = 1\}$. Existem M^N pontos em A, portanto A é finito. Além do mais, se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, então para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$, existem $x_j^{(i)} \in A_0$ (o que significa que todos os x_j dependem dos i) tal que $|x_i - x_j^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, se definirmos $y_i = x_j^{(i)}$ para $i \in \{1, \cdots, N\}$ e $y_i = 1$ caso contrário, então por construção $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, e para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$, temos que $\frac{|x_i - y_i|}{n} \leq |x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{2}$, também para cada $i > N$, vale que $\frac{|x_i - y_i|}{i} \leq \frac{1}{i} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, logo $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ e segue que $[0,1]^{\mathbb{N}} = \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon)$.

5.

Observação 17. Há um erro de digitação no enunciado. Apesar de não fazer diferença, a questão é: *Seja Ω um espaço compacto Hausdorff. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semicontínua inferiormente. Então f é limitada inferiormente, i.e, o infímo da imagem de Ω_1 existe e f atinge seu ínfimo em Ω_1.*

Seja* $m = \inf f(\Omega)$. Para cada n, defina $C_n = f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n}\right]\right)$. Note que $C = \{C_n\}$ satisfaz a propriedade da interseção finita, pois:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_1}\right]\right) \bigcap f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_2}\right]\right) \bigcap \cdots \bigcap f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_k}\right]\right) \\
&= f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_1}\right] \bigcap \left(-\infty, m + \frac{1}{n_2}\right] \cdots \bigcap \left(-\infty, m + \frac{1}{n_k}\right]\right) \\
&= f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_j}\right]\right), \text{ onde } n_j = \max\{n_1, \cdots, n_k\} \\
&\neq \emptyset \text{ pela definição de infímo}
\end{aligned}$$

Logo (pois Ω é compacto), $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. Mas se $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, então $f(x) \leq m$, e como m é infímo, $f(x) = m$ e segue que f atinge seu ínfimo, como desejado.

Observação 18. *O ínfimo de $f(\Omega)$ existe, pois $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$, com $U_\alpha = f^{-1}((\alpha,\infty))$ é uma cobertura aberta que admite subcobertura finita e portanto $f(\Omega)$ é limitado por baixo.*

Observação 19. *Note que provamos algo mais forte, pois em momento algum usamos a hipótese de que Ω é Hausdorff (só de ser compacto já basta). Note também que o ∞ foi colocado no exercício sem necessidade. Caso o erro de digitação não fosse erro de digitação, teríamos que o ∞ foi introduzido sem propósito algum, jogado fora depois. Se não tivesse sido jogado fora o exercício também estaria falso (pois sequer especifica a topologia de $\Omega \cup \{\infty\}$), considere $\Omega = [0,1]$ e coloque em $\Omega \cup \{\infty\}$ a topologia $\tau_{[0,1]} \cup \{\{\infty\}, \Omega \cup \{\infty\}\}$, então pondo $f(x) = 2$ se $x \in [0,1]$ e $f(\infty) = 1$, $\inf f(\Omega \cup \{\infty\})$ não é atingido em Ω.*

4 LISTA DE EXERCÍCIOS DE COMPACIDADE

1.

Observação 20. *A métrica da topologia uniforme é dada por:*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup\left\{\overline{d}\,(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\right\}$$

onde $\overline{d}$ é a métrica limitada padrão de $\mathbb{R}$.

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $e_j \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ pondo $\pi_i(e_j) = 1$ se $i = j$ e $\pi_i(e_j) = 0$ caso contrário. Afirmamos que $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{e_j\} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ não tem pontos de acumulação. De fato, se $p \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ é ponto de acumulação, então $B = B_d\left(p, \frac{1}{3}\right)$ (onde d é a métrica da topologia uniforme), então por hipótese existem infinitos pontos distintos de E em B. Isso é um absurdo, pois B não pode conter nem mesmo dois pontos distintos de E: se $i \neq k$, então $d(e_i, e_k) = 1 > \sup_{x,y\in B} d(x,y) = \operatorname{diam}(B) = \dfrac{2}{3}$.

Prova burra: de fato, lembrando do lema 3, se pormos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, por exemplo, então dado $e_k \in E$, para todo $e_j \neq e_k$, temos $d(e_k, e_j) = 1 > \frac{1}{2}$, por exemplo, então dado $e_k \in E$, para todo $e_j \neq e_k$, temos $d(e_k, e_j) = 1 > \frac{1}{2}$, e portanto nenhum ponto de E é ponto de acumulação. Mostraremos agora que também vale que nenhum ponto fora de E é ponto de acumulação, e portanto E' é vazio:
Dado $x \in E^c$, podemos supor que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a = d(x, e_{j_0}) \in (0,1)$ (caso contrário teríamos $d(x, e_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a prova acabaria). Pela desigualdade triangular, para todo $i \neq j$, temos;

$$d(x,e_i) + d(x,e_j) = d(e_i,x) + d(x,e_j) \geq d(e_i,e_j) = 1 \implies d(x,e_i) \geq 1 - d(x,e_j)$$

para todo $j \neq i$. Em particular, $d(x,e_i) \geq 1 - a > \frac{1-a}{2}$ para todo $i \neq j_0$. Assim, temos que $d(x,e_i) > \max\{\frac{1-a}{2}, \frac{a}{2}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e segue que x não é ponto de acumulação.

2.

Observação 21. *Aqui mostraremos que $[0,1]$ como subespaço de $\mathbb{R}_l$ não é acumuladamente compacto. O resultado seguirá imediatamente, pois se fosse fracamente sequencialmente compacto, seria acumuladamente compacto, como já observado anterioremente.*

Mostraremos que $A = \left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ não tem pontos de acumulação. De fato, se $x = 1 - \dfrac{1}{n} \in A$, então temos

$$1 - 1/n \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

mas $\left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$, logo x não é ponto de acumulação. Caso $x \in (0,1)$ com $x \notin A$, então $x \in \left[1 - \frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j+1}\right) = U_x$ para algum $j \in \mathbb{N}$ mas $\left[x, 1 - \frac{1}{j+1}\right) \cap A = \emptyset$ e então x não é ponto de acumulação. Trivialmente se $x > 1$ ou $x < 0$ então x não é ponto de acumulação, então resta mostrar que 1 não é ponto de acumulação. Isto é claro, pois $[1,2) \cap [0,1] = \{1\}$.

Observação 22. *Uma solução mais direta e elegante é notar que todo ponto de acumulação numa topologia mais fina é necessariamente ponto de acumulação na topologia mais grossa, portanto se A tivesse pontos de acumulação em $\mathbb{R}_l$ eles teriam de ser pontos de acumulação de A em $\mathbb{R}$ também, mas o único ponto de acumulação de A em $\mathbb{R}$ é 1, que não é ponto de acumulação de A em $\mathbb{R}_l$ pois $\{1\} = [0,1] \cap [1,2)$ é um aberto de $[0,1]$ que não intersecta A.*

3. Mostraremos que $\mathbb{S}^1$ é fechado e limitado, seguirá que é compacto. De fato $\mathbb{S}^1$ é fechado, pois $\mathbb{S}^1 = f^{-1}(\{1\})$, imagem inversa de fechado e portanto fechado, onde $f(x,y) = x^2 + y^2$. É limitado pois está contido na bola aberta (com a topologia padrão de $\mathbb{R}^2$) de centro $(0,0)$ e raio 2.

4. É fácil ver que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde:

$$U_n = \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcup (-1,1) - K$$

é uma cobertura aberta que não admite subcoobertura aberta finita.

5. Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura aberta de $\Omega = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .Como $\mathscr{A}$ é cobertura, existe $A_0 \in \mathscr{A}$ contendo x. Como A_0 é uma vizinhança aberta de x e por hipótese $x_n \to x$, A_0 contém todos termos da sequência a partir de certo $N \in \mathbb{N}$, isto é, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_N, x_{N+1}, \cdots\} \in A_0$. Para cada x_i com $1 \leq i \leq N-1$, usaremos que $\mathscr{A}$ é cobertura e escolheremos $A_1, \cdots, A_{N-1} \in \mathscr{A}$ tal que $x_i \in A_i$ para todo $1 \leq i \leq N-1$. Então é claro que:

$$\{A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}\}$$

é uma subcobertura aberta finita de Ω.

6. Já provamos que (Ω, d) é separável no lema 5 e sabemos que qualquer função contínua e bijetora de um espaço compacto num espaço Hausdorff é um homeomorfismo. Note que, sem perda de generalidade, podemos assumir que $d(x,y) \leq 1$ para todo $x, y \in \Omega$ (se isso não acontecesse poderíamos simplesmente usar a métrica limitada padrão, que é equivalente). Sendo $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ um subconjunto denso de Ω, então afirmamos que o homemomorfismo desejado é:

$$\begin{aligned} F : (\Omega, d) &\to F(\Omega) \subset C = [0,1]^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (d(x,x_1), d(x,x_2), \cdots) \end{aligned}$$

onde a topologia em $F(\Omega)$ é a induzida de C. De fato, como F é por construção sobrejetiva e $F(\Omega)$ é Hausdorff (pois $[0,1]^{\mathbb{N}}$ é Hausdorff e obviamente qualquer subespaço de um espaço Hausdorff é

Hausdorff também), tudo que nos resta é provar que F é injetora (já que - pelo lema 6 - as funções coordenadas de F são contínuas e portanto F é contínua). Ora, se $f(x) = f(y)$ para $x, y \in \Omega$, então:

$$\begin{aligned}
&d(x, x_1) = d(y, x_1) \\
&d(x, x_2) = d(y, x_2) \\
&\vdots \\
&d(x, x_n) = d(y, x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

e note que, como A é denso, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_k \in A$ tal que $d(x, x_k) = d(y, x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Segue que para todo $\varepsilon > 0$, temos:

$$d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(y, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e concluímos que $x = y$. ■