AULA 10

Metrizabilidade e Axiomas de Separação

DEFINIÇÃO 10.1. Seja (Ω, τ) um espaço topológico não vazio. Temos as seguintes definições:

a) Seja $x \in \Omega$, diremos que $U \subset \Omega$ é uma *vizinhança* de x quando $x \in U^\circ$;
b) Dado $x \in \Omega$ *base de vizinhanças* $\mathscr{B}_x$ de x a família de vizinhanças de x com a seguinte propriedade: se U é qualquer vizinhança de x, então existe $V \subset \mathscr{B}_x$ tal que $V \subset U$;
c) Uma *cobertura aberta* de Ω é um subconjunto $\mathscr{F} \subset \tau$ tal que $\bigcup_{U \in \mathscr{F}} U = \Omega$; Uma *subcobertura* é um subconjunto de $\mathscr{F}$ que ainda é uma cobertura.

DEFINIÇÃO 10.2. Seja (Ω, τ) um espaço topológico não vazio. Temos as seguintes definições:

a) Diremos que Ω satisfaz o *o primeiro axioma de enumerabilidade* quando todo $x \in \Omega$ tem uma base de vizinhanças enumerável;
b) Diremos que Ω satisfaz o *o segundo axioma de enumerabilidade* quando a topologia τ tem um base enumerável;
c) O espaço Ω será dito *Lindelöf* quando toda cobertura de Ω possuir uma subcobertura enumerável;
d) Finalmente, diremos que Ω é *separável* sempre que Ω admitir uma conjunto enumerável denso.

PROPOSIÇÃO 10.3. *Em espaços métricos: Separável $\Rightarrow$ base enumerável $\Rightarrow$ Lindelöf $\Rightarrow$ separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Prova de: Separável $\Rightarrow$ base enumerável: Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto denso em Ω então é fácil ver que se $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma enumeração dos racionais então $\{B_d(x_n, q_m)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ é uma base enumerável para τ.]

Prova de: base enumerável $\Rightarrow$ Lindelöf: Seja $\mathscr{F}$ uma cobertura de Ω e $\mathscr{B}$ uma base enumerável para Ω. Defina

$$\mathscr{B}_{\mathscr{F}} = \{B \in \mathscr{B} : B \subset A \text{ para algum } A \in \mathscr{F}\}.$$

Sendo $\mathscr{B}$ uma base temos que todo elemento de $\mathscr{F}$ pode ser escrito como uma união contável de elementos de $\mathscr{B}$, portanto $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ é uma cobertura enumerável de Ω. Agora, para cada $B_j \in \mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ escolha $A_j \in \mathscr{F}$ tal que $B_j \subset A_j$. Então temos que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Donde segue o resultado.

□

AULA 12

Espaços Conexos

DEFINIÇÃO 12.1. Um espaço topológico Ω é dito *desconexo* se existem conjuntos abertos, disjuntos e não vazios A, B tais que $\Omega = A \cup B$. Caso contrário diremos que Ω é *conexo*. Um subconjunto $S \subset \Omega$ é dito desconexo se com a topologia induzida S é desconexo. Caso contrário diremos que S é conexo.

EXEMPLO 12.2. Cada intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ é conexo. De fato, suponha que o intervalo $[a, b]$, $a < b$ seja desconexo. Então podemos escrever $[a, b] = A \cup B$ onde A e B são dois abertos não vazios de $[a, b]$. Suponha sem perda de generalidade que $b \in B$. Como B é aberto tem-se que $(b - \epsilon, b] \subset B$ para algum $\epsilon > 0$. Seja $c = \sup A$, pela observação precedente devemos ter que $c < b$ e que $(c, b] \subset B$. Caso $c \in A$, como A é aberto, deve existir $\epsilon > 0$ tal que $[c, c + \epsilon) \subset A$, contrariando o fato de $c = \sup A$. Assim $c \in B$. Se $a < c$, sendo B aberto deve existir $\epsilon > 0$ tal que $(c - \epsilon, c] \subset B$, contrariando o fato de $c = \sup A$. Concluímos que $c = a$, assim $[a, b] = [c, b] \subset B$, outro absurdo. Portanto $[a, b]$ é conexo.

PROPOSIÇÃO 12.3. *Um espaço topológico (Ω, τ) é conexo se e semente se Ω e $\varnothing$ são os únicos subconjuntos de Ω simultaneamente abertos e fechados.*

PROPOSIÇÃO 12.4. *A imagem de um espaço conexo por aplicação contínua é um espaço conexo.*

COROLARIO 12.5. *Teorema do valor intermediário.*

EXERCÍCIO 12.1. Prove que a imagem contínua de um espaço conexo é um espaço conexo.

EXERCÍCIO 12.2. a) Mostre que se S é conexo então $\overline{S}$ também o é. b) Se S é conexo e $S \subset D \subset \overline{S}$ então D é conexo.

PROPOSIÇÃO 12.6. *Seja (Ω, τ) um espaço topológico. Suponha que $\Omega = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$, onde cada S_α é conexo e $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha \neq \varnothing$. Então Ω é conexo.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha $\Omega = A \cup B$ onde A e B são abertos e disjuntos de Ω. Note que para cada $\alpha \in I$, temos que $S_\alpha \subset A$ ou $S_\alpha \subset B$, caso contrário S_α não seria conexo. Agora seja $x \in \bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$, se $x \in A$, então devemos ter pela observação acima que $S_\alpha \in A$ para todo $\alpha \in I$ donde $B = \varnothing$. Um raciocínio análogo caso $x \in B$ mostra que $A = \varnothing$. Logo Ω é conexo. $\square$

EXERCÍCIO 12.3. a)Mostre que $\mathbb{R}$ é conexo. b) Mostre que $\mathbb{R}^n$ é conexo.

EXERCÍCIO 12.4. Seja (Ω, τ) um espaço topológico. Suponha que cada par de pontos $x, y \in \Omega$ pertença a um conjunto conexo $S_{xy} \subset \Omega$. Então Ω é conexo.

Proposição 12.7. *Sejam* (Ω_1, τ_1) *e* (Ω_2, τ_2) *espaços topológicos não vazios. Então o produto Então o produto cartesiano* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *é conexo se e somente se* Ω_1 *e* Ω_2 *são conexos conexo.*

Demonstração. Sendo o produto $\Omega_1 \times \Omega_2$ conexo e as projeções π_1, π_2 contínuas então pelo exercício ?? temos que $\pi_1(\Omega_1 \times \Omega_2) = \Omega_1$ e $\pi_2(\Omega_1 \times \Omega_2) = \Omega_2$ são conexos.

Reciprocamente suponha que Ω_1 e Ω_2 sejam conexos. Fixe $y \in \Omega_2$ e para cada $x \in \Omega_1$ defina $U_x = (\{x\} \times \Omega_2) \cup (\Omega_1 \times \{y\})$. Note que para cada $x \in \Omega_1$ o cojunto U_x é a união dos dois conjuntos conexos $\{x\} \times \Omega_2$ e $\Omega_1 \times \{y\}$ e que $(\{x\} \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times \{y\}) = \{(x, y)\}$, assim sendo seegue da proposição ?? que U_x é conexo.

Agora note que $\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup_{x \in \Omega_1} U_x$ e que $\bigcap_{x \in \Omega_1} = \Omega_1 \times \{y\} \neq \varnothing$. Portanto pela proposição?? segue o resultado. □

Exercício 12.5. Complete a demonstração acima mostrando que $\{x\} \times \Omega_2$ é homemorfo a Ω_2 e que $\Omega_1 \times \{y\}$ é homeomorfo a Ω_1.

Exercício 12.6. Mostre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com a topologia das caixas não é conexo. Sugestão: Decomponha $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no conjunto das sequências limitadas e das sequências não limitadas.

Proposição 12.8. *Seja* $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto* $\prod_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ *é conexo se e somente se cada* Ω_α *é conexo.*

Demonstração. □

1. Lista de exercícios

1. Um espaço topológico Ω é dito ser *totalmente desconexo* quando os únicos subconjuntos conexos de Ω são os conjuntos unitários. Mostre que se Ω está equipado com a topologia discreta então Ω é totalmente desconexo. A recíproca vale?
2. Mostre que se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de subespaços conexos de um espaço topológico Ω, tais que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para todo n. Mostre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é conexo.
3. O espaço $\mathbb{R}_\ell$ é conexo?
4. Mostre que um espaço topológico Ω é contínua se e somente se as únicas funções $f : \Omega \to \{0, 1\}$ contínuas são as constantes.
5. Seja Ω um espaço topológico e suponha que para cada par de pontos x, y existe um subconjunto conexo S_{xy} de Ω contendo x e y, então Ω é conexo.
6. Mostre que para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ é conexo.
7. Mostre que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, onde $\mathbb{Q}^2$ representa o conjunto de todos os pontos de coordenadas racionais, também é conexo.
8. Prove que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$ não são homeomorfos para todo $n \geq 2$
9. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço de codimensão ≥ 2. Mostre que $\mathbb{R}^n \setminus E$ é conexo.

AULA 13

Compacidade

DEFINIÇÃO 13.1. Um espaço topológico Ω é dito *compacto* quando toda cobertura aberta de Ω admite uma subcobertura finita. Um subconjunto $K \subset \Omega$ é dito um *subconjunto compacto* quando K com a topologia induzida for compacto.

EXERCÍCIO 13.1. Seja $K \subset \Omega$, então K é compacto se e somente se toda cobertura de K por abertos de Ω admite uma subcobertura finita.

EXEMPLO 13.2. A reta $\mathbb{R}$ não é compacta. De fato considere a cobertura $\mathscr{F} = \{(n, n+2), n \in \mathbb{Z}\}$, é fácil ver que $\mathscr{F}$ não tem subcobertura finita.

EXEMPLO 13.3. O seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto: $\Omega = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$.

DEFINIÇÃO 13.4. Diremos que um espaço topológico tem a *propriedade da intersecção finta* (p.i.f) se e somente se para qualquer família de conjuntos fechados $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ como a propriedade de que: $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_k} \neq \varnothing$ para todos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$, tem-se que $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \varnothing$.

PROPOSIÇÃO 13.5. *Um espaço topológico Ω é compacto se e somente se tem a propriedade da intersecção finita.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de abertos. Associamos a essa família a seguinte família de fechados: $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$, onde $F_\alpha = \Omega \setminus U_\alpha$. Então temos que $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_i} \neq \varnothing$ se e somente se $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^k$ não é uma cobertura de Ω, enquanto pela p.i.f $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \varnothing \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \neq \Omega$. Portanto, a propriedade da intersecção finita diz que se nenhuma subfamília finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma cobertura então $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ também não é uma cobertura, o que é a contrapositiva da definição de compacidade. $\square$

PROPOSIÇÃO 13.6. *Seja Ω um espaço topológico compacto. Então temos o seguinte:*

a) *Todo subconjunto $F \subset \Omega$ fechado também é compacto;*
b) *Se Ω for Hausdorff e $K \subset \Omega$ for um subconjunto compacto então K é fechado em Ω;*
c) *Todo espaço compacto Hausdorff é normal;*

DEMONSTRAÇÃO. <u>Prova de a)</u>: Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de F. Então existem abertos U_α de Ω tais que $V_\alpha = F \cap U_\alpha$. Note que $\{\Omega \setminus F\} \cup \{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de Ω, portanto existem indíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $\{\Omega \setminus F\} \cup \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ é uma subcobertura finita de Ω. Portanto $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ é uma subcobertura finita de F.

Prova de b): Para provar o desejado vamos precisar usar o seguinte fato: em um espaço Hausdorff dado um compacto K e um ponto $x \notin K$, existem abertos disjuntos U_x e V_x tais que $x \in U_x$ e $K \subset V_x$. De fato, fixado $x \notin K$ e $y \in K$, obtemos, pois Ω é Hausdorff, abertos disjuntos $U_{xy} \ni x$ e $V_{xy} \ni y$. Assim temos que $\{V_{xy}\}_{y \in K}$ é uma cobertura aberta de K. Usando a compacidade de K obtemos $y_1, \ldots, y_n$ tais que

$$K \subset V_{xy_1} \cup \cdots \cup V_{xy_n} \equiv V.$$

Defina $U_x \equiv U_{xy_1} \cap \cdots U_{xy_n}$ note que U_x é aberto pois é a intersecção finita de abertos e que $U_x \cap V_x = \varnothing$. Provando a afirmação.

Com isso em mãos podemos proceder à prova de b). Para cada $x \notin K$ tome $U_x \ni x$ e $V_x \supset K$ abertos disjuntos. Então $\Omega \setminus K = \bigcup_{x \in \Omega \setminus K} U_x$ é aberto, donde K é fechado.

Prova de c): Sejam K e L fechados em Ω, pelo item a) são ambos compactos. Usando o fato que provamos na prova de b) para cada $x \in L$, temos abertos disjuntos $U_x \ni X$ $V_x \supset K$. Então, $\{U_x\}_{x \in L}$ é uma cobertura de L, por compacidade existem $x_1, \ldots x_n$ tais que $B \subset U \equiv U_{x_1} \cup \cdots U_{x_n}$. Tomando $V \equiv \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ temos que U e V são abertos disjuntos $K \subset V$ e $L \subset U$

$\square$

Definição 13.7. Um espaço topológico Ω é dito *fracamente sequencialmente compacto* (f.s.c) se toda sequência em Ω tem um ponto de acumulação. Se toda sequência tem uma subsequência convergente diremos que Ω é *sequêncialmente compacto.* Note que em espaços métricos essas duas noções coincidem.

Exercício 13.2. Mostre que um espaço métrico é *fracamente sequencialmente compacto* se e somente se é sequêncialmente compacto. Se Ω for apenas um espaço topológico, qual dessas noções implica a outra? Dê um exemplo de um espaço não metrizável em que essas noções não coincidem.

Proposição 13.8. *Todo espaço topológico compacto é fracamente sequencialmente compacto.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço compacto Ω. Suponha que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não tenha ponto de acumulação (em particular $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é não eventualmente constante). Então para cada $x \in \Omega$ existe uma vizinhaça aberta U_x de x contendo apenas um número finito de termos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Veja que $\{U_x\}_{x \in \Omega}$ é uma cobertura aberta de Ω por compacidade deve existir $x_1, \ldots, x_n$ em Ω tais que $\Omega = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Mas isso implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem apenas um número finito de termos, o que é absurdo. $\square$

Exercício 13.3. Seja $\Omega = \{0, 1\}$ e considere em Ω a topologia $\tau = \{\varnothing, \Omega\}$. Equipe $\mathbb{N}$ com a topologia discreta e considere o produto $\mathbb{N} \times \Omega$. Use esse exemplo para mostrar que a reciproca da proposição acima não é verdadeira.

Definição 13.9. Um espaço merico (Ω, d) é dito *totalmente limitado* se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Omega$ tal que $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^n B_d(x_i, \epsilon)$.

Proposição 13.10. *Seja* (Ω, d) *um espaço métrico. Então temos o seguinte:*

a) *Todo espaço métrico totalmente limitado é separável;*
b) *Todo espaço métrico totalmente limitado é sequencialmente compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Prova de a): Para cada n considere o conjunto $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n}$ tal que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_n} B_d(x_j^{(n)}, 1/n)$. Afirmamos que $\{x_j^{(n)}\}_{j=1,\dots,N_n;n\in\mathbb{N}}$ é denso em Ω. Com efeito, seja $x \in \Omega$ e $U \ni x$ um aberto, então existe n tal que $B_d(x, 1/n) \subset U$. Agora veja que pela construção de $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n}$ existe j tal que $x \in B_d(x_j^{(n)}, 1/n)$, assim $x_j^{(n)} \in B_d(x, 1/n)$. Portanto $\overline{\{x_j^{(n)}\}} = \Omega$.

Prova de b): Seja $\{y_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Ω. Considere $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n}$ a sequência definida no item anterior. O princípio da casa dos pombos garante que pelo menos uma das bolas $B_d(x_j^{(1)}, 1)$, $j = 1, \dots, N_n$, contém infinitos termos de $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, escolha uma dessas bolas e denote-a por B_1. Portanto existe uma subsequência $\{y_n^{(1)}\} \subset B_1$. Usando indução obtemos uma bola B_ℓ de raio $1/\ell$ e uma subsequência $\{y_m^{(\ell)}\}$ em B_ℓ. Então a subsequência $z_\ell \equiv y_\ell^{(\ell)}$, tem a propriedade de que $\{z_j\}_{j=\ell}^{\infty} \subset B_\ell$. Portanto temos que $d(z_m, z_j) < 1/\ell$ sempre que $m, j \geq \ell$, ou seja, $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, assim existe z tal que $z_j \to z$. Portanto z é limite de uma subsequência de $\{y_m\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

TEOREMA 13.11. *Em um espaço métrico* (Ω, d) *as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) Ω é compacto;
b) Ω é sequencialmente compacto;
c) Ω é completo e totalmente limitado.

DEMONSTRAÇÃO. a)$\Rightarrow$ b): Isso é o conteúdo da Proposição 13.8.

b)$\Rightarrow$ c): Dado $\epsilon > 0$ suponha que para quaisquer $\{x_1, \dots, x_N\}$ tenhamos que $\bigcup_{i=1}^{N} B_d(x_i, \epsilon) \neq \Omega$. Vamos construir uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que não possui nenhuma subsequência convergente. Para, isso escolha, x_1 arbitrariamente e indutivamente escolha x_{n+1} de modo que $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_n, \epsilon)$. Assim $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ para todos $n \neq m$. Concluímos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente, o que uma contradição com a hipótese.

c)$\Rightarrow$ a): A proposição 13.10 garante que sendo Ω completo e totalmente limitado então Ω é separável. Logo, pela proposição 10.3 Ω é Lindelöf, ou seja, toda cobertura aberta de Ω admite uma subcobertura enumerável. Assim, seja $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura enumerável de Ω, tal que nehuma subcoleção finita $\{U_1, \dots, U_n\}$ seja uma subcobertura de Ω.

Seja $A_n = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_n \neq \varnothing$ é fechado e $A_n \supset A_{n+1}$. Para cada n escolha $x_n \in A_n$. isso fornece uma sequência $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que pelo item b) da proposição anterior tem um ponto de acumulação x. Visto que $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset A_n$ para todo n, e cada A_n é fechado, concluímos que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, absurdo. Logo $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subcobertura finita. □

Exercício 13.4. Considere o cubo de Hilbert $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ equipado com a métrica produto, i.e, $d(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n - y_n|/n\}$.

a) Mostre que nessa topologia bolas $B_d(x, r)$ são conjuntos da forma $\prod_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, nr)$ (aqui B sem o índice indica a bolas de $[0, 1]$ relativas ao valor absoluto);
b) Mostre que C é completo;
c) Verifique que C é totalmente limitado e conclua que C é compacto.

Definição 13.12. Seja Ω um espaço topológico, diremos que $A \subset \Omega$ é pré-compacto quando $\overline{A}$ for compacto.

Proposição 13.13. *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto (na topologia usual) se e somente se é fechado e limitado.*

Demonstração. Sendo A compacto, então pela proposição 13.6 A é fechado, e pela proposição 13.11 A é totalmente limitado. Portanto existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_N\}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, 1)$. Assim sendo $A \subset B(0, r)$ onde $r = 1 + \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}$. Portando A é limitado e fechado.

Reciprocamente, sendo A fechado e limitado, temos em particular que A é completo (todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo é ainda completo com a topologia induzida.)

O resultado estará provado se mostrarmos que A é totalmente limitado. Pois bem, como A é limitado existe $r > 0$ tal que $A \subset B(0, r)$, em particular A está contido no cubo C de centro 0 e lado $2r$. Então $\epsilon > 0$ escolha $\delta > 0$ tal que $\delta\sqrt{n} < \epsilon$. Considere o conjunto $\mathcal{L}_\delta = \{\delta\boldsymbol{m} : \boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^m\}$, note que $\mathcal{L}_\delta$ tem máximo $\lfloor\frac{2r+1}{\delta}\rfloor^n$ pontos, e que centrando em cada um desses pontos um cubo de lado δ obtemos uma cobertura de C. Para encerrar note que cada um desses cubos está contido numa bola de raio ϵ, assim A é seguramente coberto por $\lfloor\frac{2r+1}{\delta}\rfloor^n$ bolas de raio ϵ. Portanto A é totalmente limitado, assim, segue do teorema 13.11 que A é compacto.

□

Definição 13.14. Sejam (Ω_1, d_1) e (Ω_2, d_2) espaços métricos. Diremos que uma função $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é *uniformemente contínua* quando dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \Omega_1, d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y) < \epsilon.$$

Proposição 13.15. *Sejam Ω_1 e Ω_2 espaços métricos com Ω_1 compacto. Então qualquer função contínua $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é uniformemente contínua.*

Teorema 13.16. *Sejam Ω_1 e Ω_2 espaços topológicos com Ω_1 compacto. Então temos o seguinte:*

a) *Se $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é contínua então $f(\Omega_1)$ é compacto em Ω_2;*
b) *Se Ω_2 é Hausdorff e $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é contínua e bijetiva, então f é um homemorfismo.*

Demonstração. Prova de a): Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma cobertura aberta de $f(\Omega_1)$. Como cada $V_\alpha = U_\alpha \cap f(\Omega_1)$, onde U_α é aberto em Ω_2, tem-se pela continuidade de f que $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ é uma cobertura aberta do compacto Ω_1. Extraindo uma subcobertura finita $\{f^{-1}(U_{\alpha_1}), \ldots, f^{-1}(U_{\alpha_n})\}$ de Ω_1 concluímos que $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$ é uma cobertura de $f(\Omega_1)$. Portanto $f(\Omega_1)$ é compacto.

Prova de b): É suficiente mostrarmos que f envia fechados em fechados. Seja F fechado em Ω_1, temos pela proposição 13.6 item a) que F é compacto, então pelo item anterior temos que $f(F)$ é compacto em Ω_2. Como Ω_2 é Hausdorff segue da proposição 13.6 item b) que $f(F)$ é fechado. $\square$

TEOREMA 13.17. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua onde Ω é um espaço topológico compacto. Então f tem máximo e mínimo.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela teorema anterior, $f(\Omega)$ é compacto em $\mathbb{R}$ e portanto é fechado e limitado. Logo $f(\Omega)$ contém seu supremo e seu ínfimo. $\square$

EXERCÍCIO 13.5. Seja Ω um espaço compacto Hausdorff. Seja $f : \Omega \cup \{\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente. Então f é limitada inferiormente, i.e, $\inf_{x\in\Omega} f(x) > -\infty$, e existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = \inf_{x\in\Omega} f(x)$.

1. Lista de Exercícios

1. Considere $[0,1]^{\mathbb{N}}$ com a topologia uniforme. Encontre nesse espaço um subconjunto infinito sem pontos de acumulação.
2. Mostre que $[0,1]$ como subespaço de $\mathbb{R}_\ell$ não é f.s.c.
3. Mostre que o círculo $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$ é compacto.
4. Mostre que $[0,1]$ não é compacto como subespaço de $\mathbb{R}_K$.
5. Seja $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, uma sequência convergente com limite x, mostre que $\{x, x_n, n \in \mathbb{N}\}$ é compacto.
5. Qualquer espaço métrico compacto Ω é homemorfo a algum subconjunto do cubo de Hilbert. (Sugestão: Ω é separável (justifique), então seja, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ um subconjunto denso em Ω. Defina $F : \Omega \to C$ pondo $F(x) = (d(x,x_1), d(x,x_2), \ldots)$, mostre que F é o homeomorfismo desejado).