Questão 1. *Seja* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Prove que*

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & cos(t) \end{pmatrix}.$$

Sugestão: calcule $(tA)^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ *para ver um padrão.*

Solução: Teste

∎

Questão 2. *Prove que se* $A = PDP^{-1}$ *então* $e^A = Pe^D P^{-1}$.
Sugestão: repare no efeito telescópico

$$(tA)^k = \left(P(tD)P^{-1}\right) \left(P(tD)P^{-1}\right) \ldots \left(P(tD)P^{-1}\right) = P\,(tD)^k\,P^{-1}.$$

Solução: Teste

∎

Questão 3. *Use o exercício acima para resolver o sistema (para* $t \geq 0$*)*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3x - 5y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2y, \\ (x, y)|_{t=0} = (1, 1). \end{cases}$$

Sugestão: note que a matriz dos coeficientes A *é diagonalizável.*

Solução: Teste

∎

Nos exercícios abaixo, X é um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ é linear e fechado.

Questão 4. *Verifique que* A *comuta com seu resolvente* $(\lambda I - A)^{-1}$.

Solução: Teste

∎

Questão 5. *Prove que* $\rho(A)$ *é aberto em* $\mathbb{C}$.

Solução: Teste

$\blacksquare$

Questão 6. *Sejam* $A, B \in \mathcal{L}(X)$. *Verifique que*

$$e^{tA}x - e^{tB}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{tsA}e^{t(1-s)B}x\right)\,\mathrm{d}s, \quad \textit{seja qual for } x \in X.$$

Solução: Teste

$\blacksquare$