Lema 1. *Seja (Ω_1, d_1) um espaço métrico compacto e (Ω_2, d_2) um espaço métrico arbitrário e suponha que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é contínua. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, pela hipótese de continuidade de f, para cada $x \in \Omega_1$ existe δ_x tal que $f(B_{d_1}(x, \delta_x)) \subset B_{d_2}\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Como Ω_1 é compacto, a cobertura aberta $\left\{B_{d_1}\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)\right\}_{x\in\Omega_1}$ admite uma subcobertura finita $\left\{B_{d_1}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)\right\}_{i=1}^{n}$. Agora, tomando $\delta \doteq \min\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{\delta_{x_i}}{2}$, afirmamos que:

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

De fato, isso acontece pois:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_i)) + d_2(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

onde usamos que $x_i \in B_{d_1}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \subset B_{d_1}(x_i, \delta_{x_i}) \implies f(x_i) \in B_{d_2}\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e também que:

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i} \implies f(y) \in B_{d_2}\left(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

■

Notação. Pondo $\|f\| = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$ induzimos uma métrica em $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R})$ (o espaço das funções contínuas de Ω para $\mathbb{R}$) dada por $d(f, g) = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x) - g(x)|$.

1 PROBLEMA 1

Usando algumas desigualdades bem conhecidas do Cálculo e a definição de supremo, temos que:

$$|T(f(x))| = \left|\int_0^1 K(x,y)f(y)\ \mathrm{dy}\right| \leq \int_0^1 |K(x,y)\|f(y)|\ \mathrm{dy} \leq \sup_{x,y\in[0,1]^2} |K(x,y)| \cdot \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| = \|K\| \cdot \|f\| \leq \|K\|$$

de forma que $\{T(f) \mid \|f\| \leq 1\}$ é pontualmente limitada. Para aplicar Arzelà-Ascoli e terminarmos o exercício, resta mostrar que é também equicontínua. De fato, pelo lema 1, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, x' \in [0,1]$ com $|x - x'| < \delta \implies |K(x, y) - K(x', y)| < \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|}$ para todo $y \in [0, 1]$, e assim:

$$\begin{aligned}
|T(f(x)) - T(f(x'))| &= \left|\int_0^1 K(x,y)\, f(y)\ \mathrm{dy} - \int_0^1 K(x',y)\, f(y)\ \mathrm{dy}\right| \\
&= \left|\int_0^1 (K(x,y) - K(x',y))\, f(y)\ \mathrm{dy}\right| \\
&\leq \int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)\,\|f(y)|\ \mathrm{dy} \\
&\leq \sup_{y\in[0,1]} |K(x,y) - K(x',y)| \cdot \|f\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|} \cdot \|f\| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

como desejado (note que, em particular, isso implica que $T(f) \in C([0,1], \mathbb{R})$). O resultado segue pelo teorema de Arzelà-Ascoli.

2 PROBLEMA 2

Primeiramente, notemos que $\mathscr{F} = \{f \in \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R}) \mid \|f\| \leq 1 \text{ e } \mathrm{Hol}_\alpha(f) \leq 1\}$ é equicontínua. De fato, dado $f \in \mathscr{F}$ e $\varepsilon > 0$, então é claro que para todos $x, y \in \Omega$ com $d(x,y) < \delta \doteq \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, temos que:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \mathrm{Hol}_\alpha(f) d(x,y)^\alpha \\ &\leq d(x,y)^\alpha \\ &< \delta^\alpha \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

É óbvio também que $\mathscr{F}$ é pontualmente limitada, pois dado $x \in \Omega$ e $f \in \mathscr{F}$, temos $|f(x)| \leq \|f\| \leq 1$. Por Arzelà-Ascoli segue que $\overline{\mathscr{F}}$ é compacto, de forma que só resta mostrarmos que $\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}$.

Com efeito, note que basta mostrarmos que todo limite de uma sequência de $\mathscr{F}$ também pertence a $\mathscr{F}$ (isso é consequência do lema 21.2 do Munkres, visto em sala). De fato, se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ converge a algum $f \in \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R})$, então dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$, e segue que:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} &\leq \frac{|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} && (1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{d(x,y)^\alpha} + \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x,y)^\alpha} && (2) \\ &\leq 1 + \frac{\varepsilon}{d(x,y)^\alpha} && (3) \end{aligned}$$

e como isso é válido para todo $\varepsilon > 0$, temos que:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq 1$$

donde concluímos que $\mathrm{Hol}_\alpha(f) \leq 1$, como desejado. Resta mostrar que $\|f\| \leq 1$. De fato isso é verdade, pois dado $x \in \Omega$ arbitrário, temos que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $[-1, 1]$ que converge para $f(x)$, portanto $|f(x)| \leq 1$ e segue que $\|f\| \leq 1$.

Observação. Para ir de (2) para (3) note que por hipótese temos $\mathrm{Hol}_\alpha(f_n) \leq 1$. Também não foi explicitada a hipótese frequentemente usada de que $x \neq y$ pois a mesma é auto evidente.