Universidade de Brasília

Topologia Geral $0^{\underline{o}}$ /2019 — Lista de Exercícios 2

Turma A — 07/02/2019

Problema 1: Seja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ defina

$$T(f) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

Mostre que $T(f) \in C([0,1], \mathbb{R})$ e que $\{T(f), \|f\| \leq 1\}$ é precompacto em $C([0,1], \mathbb{R})$.

Problema 2: Seja (Ω, d) um espaço métrico. Uma função $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ é dita α-*Hölder contínua* ($\alpha > 0$) quando a quantidade abaixo é finita

$$\mathrm{Hol}_\alpha(f) = \sup_{x \neq y} \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)^\alpha}.$$

Mostre que se o espaço métrico Ω é compacto, então o conjunto $\{f \in C(\Omega, \mathbb{R}) : \|f\| \leq 1,\ \mathrm{Hol}_\alpha(f) \leq 1\}$ é compacto em $C(\Omega, \mathbb{R})$ na métrica uniforme.