1 INFINITUDE DOS PRIMOS

a) Tome $m, k, s, t \in \mathbb{Z}$ e note que se $A_{m,k} \cap A_{s,t} = (m\mathbb{Z} + k) \cap (s\mathbb{Z} + t) \neq \emptyset$, então contém algum $c \in \mathbb{Z}$, e então afirmamos que:
$$(m\mathbb{Z} + k) \cap (s\mathbb{Z} + t) = \text{mmc}(m, s)\mathbb{Z} + c$$
De fato, se c pertence à interseção, então c somado de qualquer múltiplo comum de m e s também pertencem (para garantir que não deixemos de incluir nenhum, começamos do mínimo múltiplo comum). A inclusão contrária é um pouco menos trivial: dado $x \in (m\mathbb{Z} + k) \cap (s\mathbb{Z} + t)$, note que $x - c \equiv 0 \pmod m$ e $x - c \equiv 0 \pmod s$ (é fácil ver que a subtração de quaisquer dois elementos de $m\mathbb{Z}$ ou $s\mathbb{Z}$ é divísivel por m ou s, respectivamente - em particular, para x e c isso também vale), donde segue que $x - c \equiv 0 \pmod{\text{mmc}(m,s)}$, como desejado.

Dado qualquer $x \in \mathbb{Z}$, temos $x \in A_{1,0}$, de forma que a primeira condição para ser base é facilmente satisfeita. Como já provamos a segunda, concluímos que $\mathscr{B} = \{A_{m,k} \mid m, k \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ é de fato uma base para uma topologia em $\mathbb{Z}$.

b) Por definição, elementos da base são abertos, de forma que só precisamos provar agora que $A_{m,k}$ é fechado. Note que:
$$\mathbb{Z} \setminus A_{m,k} = \bigcup_{i=1}^{m-1} A_{m,k+i}$$
pois $A_{m,k}$ é a união de todas as progressões aritméticas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de razão k tal que a_1 é congruente a k módulo m. Seu complementar é, portanto, a união de todas as progressões aritméticas de razão k tal que a_1 é congruente a $k+1, k+2, \cdots, k+m-1$ módulo m. Como o lado direito da igualdade é uma união de abertos, segue que $A_{m,k}$ é fechado.

c) Por definição, abertos não vazios de qualquer topologia em qualquer conjunto sempre contém elementos da base. Nesse caso, notamos que, por construção, elementos de $\mathscr{B}$ sempre contém uma progressão aritmética infinita, de forma que qualquer aberto não vazio não pode ser finito.

d) Sabemos pelo teorema fundamental da aritmética que os únicos inteiros que não são múltiplos inteiros de algum número primo são -1 e 1, de onde segue imediatamente que:
$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = B = \bigcup_{p \in P} A_{p,0} = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z} \cdots$$

e) A cardinalidade de P não importa para que B seja aberto, pois B é, por definição, uma união de abertos. A observação pertinente à prova da infinitude dos primos que será usada no próximo item é a seguinte: se P for finito, o lado direito da igualdade acima é uma união finita de fechados (já provamos que todos elementos de $\mathscr{B}$ são clopen), isto é, B é fechado.

f) Provamos em c) que nenhum conjunto finito pode ser aberto, ou, equivalentemente, que o complemento de um conjunto finito não pode ser fechado. Em e) também notamos que se P for finito, então B é fechado, o que é uma contradição, pois B é o complementar de $\{-1, 1\}$, um conjunto finito! Concluímos que P é infinito.

2 AXIOMAS DE KURATOWSKI

a) Primeiro observemos que um conjunto F é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$. De fato, se F é fechado, F é necessariamente o menor conjunto fechado contendo F, e, por definição, segue que $F = \overline{F}$. Reciprocamente, se $F = \overline{F}$, temos que F é fechado, pois $\overline{F}$ é, por definição, uma interseção de conjunto fechados e portanto também fechado. Tendo isso em mente, note que:

   i) $\Omega \setminus \emptyset = \Omega$, que é aberto por definição de topologia. Assim, $\emptyset$ é fechado e segue que $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

   ii) O fecho de A é definido como a interseção de todos os fechados que contém A, ou, equivalentemente, como o menor conjunto fechado que contém A. Portanto segue diretamente da definição que $A \subset \overline{A}$.

   iii) O fecho de A é fechado, e pela nossa observação inicial, segue que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

   iv) Observe que $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$, pois $\overline{B}$ é fechado e contém B, que contém A. Como $\overline{B}$ é um fechado que contém A, segue por definição que $\overline{A} \subset \overline{B}$. Dito isso, notemos que $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, de onde segue que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, logo $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Para provar a inclusão reversa, note também que $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado e contém $A \cup B$, e como definimos o fecho como o *menor* fechado que contém o conjunto, segue que $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$. Concluímos que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

b) Usaremos o seguinte resultado (cuja prova é muito fácil e não convém aqui, só envolve as leis de deMorgan):

   Seja $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tal que:

   i) $\emptyset$ e Ω estão em $\mathscr{C}$

   ii) uniões finitas de elementos de $\mathscr{C}$ ainda estão em $\mathscr{C}$

   iii) interseções arbitrárias de elementos de $\mathscr{C}$ ainda estão em $\mathscr{C}$

   Então $\{\Omega \setminus C \mid C \in \mathscr{C}\}$ é uma topologia em Ω. Defina $\mathscr{F} = \{A \subset X \mid A = F(A) = \overline{A}\}$. Afirmamos que $\mathscr{F}$ satisfaz i), ii) e iii). De fato:

   i) Temos $F(\emptyset) = \emptyset$. Note que $F(\Omega) = \Omega$, pois $\Omega \subset F(\Omega)$ por definição e $F(\Omega) \subset \Omega$ pois F é uma função de $\mathscr{P}(\Omega)$ em $\mathscr{P}(\Omega)$.

   ii) Se $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$, então $A_1 \cup A_2 = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2} \in \mathscr{F}$ e segue por indução que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} \in \mathscr{F}$.

   iii) Pelo segundo axioma, sendo $\mathcal{I}$ um conjunto arbitrário de indíces, então $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i \subset \mathrm{F}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i\right)$.
   Observe também que uma consequência imediata do terceiro axioma é que F preserva inclusões, de forma que:

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i \subset C_i \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathrm{F}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i\right) \subset \mathrm{F}\left(C_i\right) = C_i \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathrm{F}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i\right) \subset \bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i$$

   e, como desejado, a interseção arbitrária é fechada e portanto pertence a $\mathscr{F}$. A topologia induzida por F é, então, $\tau = \{\Omega \setminus A \mid A = F(A)\}$. A mesma também é única, pois dado qualquer $A \subset \Omega$, o conjunto $F(A)$ é o fecho de A no espaço topológico (Ω, τ): de fato, dado $A \subset \Omega$, como $F(F(A)) = F(A)$, sabemos que $F(A) \in \mathscr{F}$, e do primeiro axioma sabemos que $A \subset F(A)$. Se K é qualquer outro elemento de $\mathscr{F}$ contendo A, então $F(A) \subset F(K) = K$, e concluímos que

$F(A)$ é o menor elemento de $\mathscr{F}$ contendo A, como desejado. Segue que todo operador fecho de Kuratowski determina e é determinado por uma única topologia.

c) Observemos que nesse caso $F(A) = \overline{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA$. Assim:

   i) é satisfeita trivialmente, pois $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\varnothing = \varnothing$

   ii) segue diretamente do fato de que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA = A \cup 2A \cup \cdots$

   iii) por definição, temos que $F(A) = A \iff A$ contém todos os múltiplos de elementos de A. $F(A)$ satisfaz essa condição pela sua própria definição, de forma que $F(F(A)) = F(A)$, como desejado.

   iv) $\overline{A} \cup \overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA \cup nB = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n(A \cup B) = \overline{A \cup B}$

Pela observação em iii), os fechados dessa topologia são os conjuntos $k\mathbb{N}$ com $k \in \mathbb{N}$ ou uniões ou interseções finitas dos mesmos. Os abertos são os complementares desses fechados. Defina B_n da seguinte maneira: $a \in \mathbb{N} \in B_n \iff a|n$, isto é, B_n é o conjunto contendo n e todos os seus divisores. Afirmamos que:

$$\mathscr{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

é uma base para τ. De fato, dado qualquer aberto U de $\mathbb{N}$ e $x \in U$ temos $x \in B_x \subset U$, pois se $B_x \not\subset U$, então $a \in B_x \implies a \in U^c$, que é fechado, daí, como a divide x e U^c é fechado e contém todos os múltiplos de seus elementos, segue que $x \in U^c$, um absurdo! Para verificar a segunda condição de base, note que se $x \in B_{k_1} \cap B_{k_2}$, então $x|k_1$ e $x|k_2$, donde segue que $x|mdc(k_1, k_2) = k_3$ e portanto $x \in B_{k_3} \subset B_{k_1} \cap B_{k_2}$.

d) Suponha que f é contínua e $m|n$, isto é, $n = km$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então:

$$f(n) \in f(m\mathbb{N}) = f(\overline{\{m\}}) \subset \overline{f(\{m\})} = \overline{\{f(m)\}} = f(m)\mathbb{N}$$

e concluímos que $f(m)|f(n)$. Reciprocamente, se $m|n \implies f(m)|f(n)$, mostraremos que dado qualquer $A \subset \mathbb{N}$, temos $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, i.e, f é contínua. De fato, se $y \in f(\overline{A}) = f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA\right)$, então $y \in f(n_0 A)$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Daí $y = f(n_0 a)$ para algum $a \in A$. Como $a|n_0 a$, temos, por hipótese, que $f(a)|f(n_0 a)$, logo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y = f(n_0 a) = kf(a) \in kf(A) \subset \overline{f(A)}$, como desejado.

3 NÚMEROS DE LIOUVILLE

a) Pela definição dos números de Liouville, note que podemos escrever

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ é um número de Liouville}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

onde:

$$U_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}\right\} = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}$$

Observe que $\overline{U_n} \supset \mathbb{Q}$ pois os $\overline{U_n}$ contém cada $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. De fato, se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então temos

$$\frac{p}{q} \in \overline{\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}} \subset \overline{U_n} \implies \overline{\overline{U_n}} = \overline{U_n} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \implies \overline{U_n} = \mathbb{R}$$

Assim, escrevemos $\mathbb{L}$ (é fácil ver, pela nossa própria construção dos U_n e pela definição de números de Liouville, que se x é número de Liouville, então $x \in U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e, vice versa, se x está na interseção, então por definição é número de Liouville) como uma interseção enumerável de abertos (pois cada U_n é a união de abertos) densos de $\mathbb{R}$. Segue que $\mathbb{L}$ é um G_δ.

b) Provaremos o seguinte corolário do Teorema de Baire, donde o resultado segue imediatamente:

Seja X um espaço métrico completo (não vazio) sem pontos isolados e $D \subset X$ um subconjunto G_δ de X. Então D é não enumerável.

Suponha que $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, onde cada U_n é um aberto denso. Podemos escrever $X \setminus D = \bigcap_{x \in D} X \setminus \{x\}$. Note que cada $X \setminus \{x\}$ é um aberto denso, pois $x \in D$ não é ponto isolado. Então, supondo por absurdo que D é enumerável, temos que

$$\emptyset = D \cap (X \setminus D) = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) \bigcap \left(\bigcap_{x \in D} X \setminus \{x\}\right)$$

ou seja, exibimos uma interseção enumerável de abertos densos que é vazia, contradizendo o Teorema de Baire. Segue que D é não enumerável.

De fato podemos concluir que $\mathbb{L}$ é não enumerável, pois, como provamos anteriormente, $\mathbb{L}$ é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$, um espaço métrico completo sem pontos isolados.