ALESSANDRO RUSSO U5 (MATEMATICA)

21/3/12
Metodi Calcolo Scientifico

alessandro.russo@UNIMIB.IT

SITO WWW3.MATAPP.UNIMIB.IT / CORSI – 2011-2012

MER 8:30 – 10:30
GIOVEDÌ 10:30 – 12:30
VEN. 15:30 – 17:30

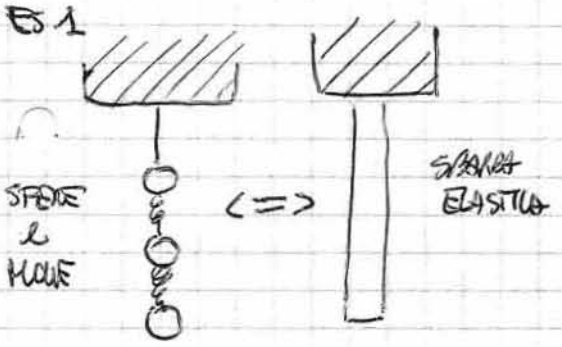
OBB:

1° PROBLEMA MONDO REALE

2° MODELLO MATEMATICO

3° ALGORITMI PER LA RISOLUZIONE

ES 1



ES 2

Come comprimere un'immagine

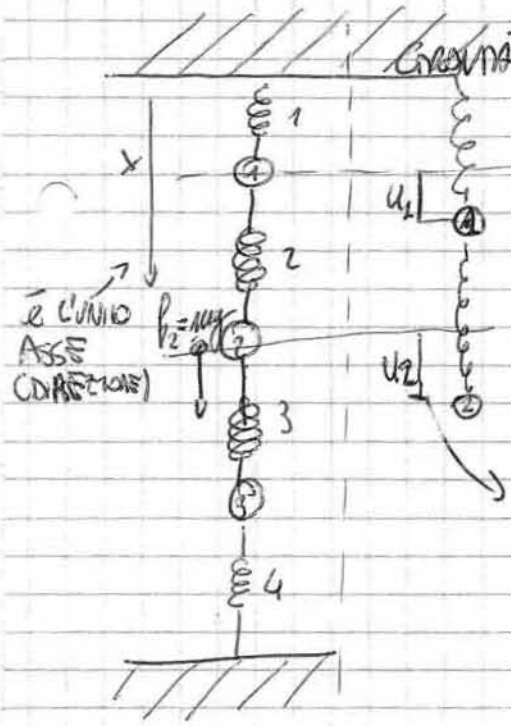
USANDO SERIE DI FOURIER

MODELLO MATEMATICO (JPEG)

FFT (FAST FOURIER TRANSFORM)

PROGETTO A GRUPPI (FORSE CON RELAZIONE)

23-3-12
RUSSO



- immaginiamo di avere un pulsante che disattiva la gravità.
- arriveremo a definire un sistema lineare

SIMMETRICA DEFINITE POSITIVE $B^T = B$ $(Bx, x) \geq 0$

DISTANZA DALLO STATO CON GRAVITÀ OFF ALL'ATTUALE

1° PASSO TROVARE LE LUNGHEZZE:

USARE LE VARIAZIONI RISPETTO AD UN PUNTO DI RIFERIMENTO

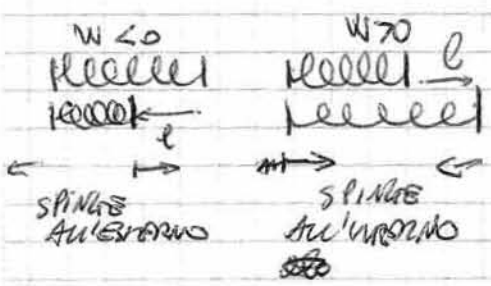
GRAVITÀ ON

$u_1, \dots, u_n$ n = NUMERO DI PESI

u_i È LO SPOSTAMENTO DI QUESTA MASSA RISPETTO LA POSIZIONE INIZIALE

VETTORE SPOSTAMENTI $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_p} \end{bmatrix}$

MOLLE, MOLLE A RIPOSO HANNO UNA LUNGHEZZA



LA FORZA È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE A l

LEGGE DI HOOK

l = elongazione

COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA

$w = c\,l$

$w_j = c_j\, l_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

mettiamo in relazione le l e le u

CASO CON ESTREMI LIBERI (DENTRO MOLLA)

$l_1 = u_1$

$l_2 = u_2 - u_1$ (DEVO TOGLIERE ALL'ALLUNGAMENTO PIÙ GRANDE)

$l_3 = u_3 - u_2$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{e} = A\vec{u}$

mi dice come sono messi insieme molle e masse

È LA MATRICE DEL SISTEMA PUBBLICATO SENZA LA MOLLA 4

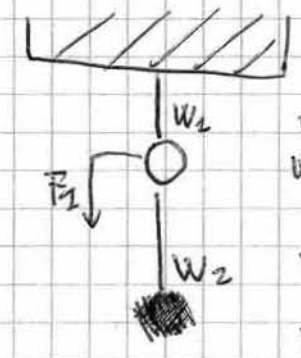
(NON È SIMMETRICA E NON È POSITIVA)

SE CI FOSSE STATA LA MOLLA 4 SAREBBE STATA UNA MATRICE RETTANGOLARE

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{w} = C\vec{e}$ ci sono tutte le c

mi dice come sono tutte le molle



$w_1 > 0$ ↑ (SPINTA VERSO L'ALTO)

$w_1 < 0$ ↓ (SPINTA VERSO IL BASSO)

$w_2 > 0$ ↓

$w_2 < 0$ ↑

1) $f_1 - w_1 + w_2 = 0$

2) $f_2 - w_2 + w_3 = 0$

3) $f_3 - w_3 = 0$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_1 = w_1 - w_2 \\ f_2 = w_2 - w_3 \\ f_4 = w_3 \end{cases}$$

MI DÀ LA MATRICE

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{f} = A^T \vec{w}$

$\vec{e} = A\vec{u}$ elongazioni e spostamenti

$\vec{w} = C\vec{e}$ (SFORZI – DEFORMAZIONI) (LOSA SOCCIDE AL'UTTIMO DANNO) TIRO UN PO'

$\vec{f} = A^T\vec{w}$ equilibrio

$$f = A^T C \vec{e}$$

$$\boxed{\boxed{A^T C A}\,\vec{u} = \vec{f}}$$

→ OTTENUTA DAL SOSTITUZIONE

↓

SIMMETRICA e DEFINITA POSITIVA

AMMETTIAMO CHE CI SIA ANCHE LA MAGLIA 4

$$e_1 = u_1$$
$$e_2 = u_2 - u_1$$
$$e_3 = u_3 - u_2$$
$$e_4 = -u_3$$

AGGIUNTO

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{e} = A\vec{u}$$

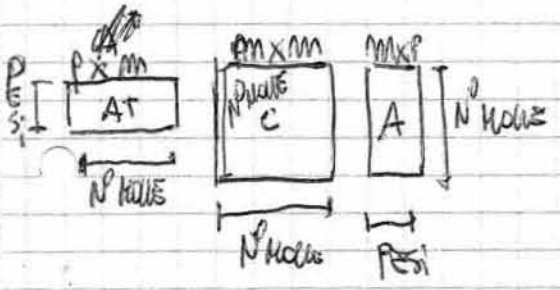
$$\vec{w}_1 = C\vec{e}$$

$$f_1 = w_1 - w_2$$
$$f_2 = w_2 - w_3$$
$$f_3 = w_3 - w_4$$

AGGIUNTO CONTRIBUTO MAGLIA 4

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^T} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \qquad \vec{f} = A^T \vec{w}$$

$$A^T C A$$



NOTA $[n \times m] \cdot [m \times p] = [n \times p]$

$A^T C A$ SIMMETRICA

B È SIMMETRICA QUINDI B^T $B_{ij} = B_{ji}$ con $B_{ij} \in B$, $B_{ji} \in B^T$

$(A^T C A)^T = A^T C A$

~~SE FACCIO IL MASSIMO DEL PRODOTTO~~ ... $\circ B, D$ $(BD)^T = D^T B^T$

$$(BD)_{ij} = \sum_k B_{ik} D_{kj}$$

$$[(BD)^T]_{ij} = (BD)_{ji} = \sum_k B_{jk} D_{ki}$$

$$[D^T B^T]_{ij} = \sum_k (D^T)_{ik} (B^T)_{kj}$$

$$= \sum_k D_{ki} B_{jk} = \sum_k B_{jk} D_{ki}$$

IL PRODOTTO TRA MATRICI NON È COMMUTATIVO

$A^T C^T (A^T)^T = A^T C^T A$ $\qquad C = C^T$ PERCHÉ È DIAGONALE

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ $\quad (\vec{x}, \vec{y}) = \sum x_i y_i$

$(B\vec{x}; \vec{y}) = (\vec{x}; B^T \vec{y})$

$$\sum_i (B\vec{x})_i \vec{y}_i = \sum_i \left[\sum_k B_{ik} x_k\right] y_i = \cancel{\sum_k \left[\sum_i B_{ik} y_i\right] x}$$

$$= \boxed{\sum_{ik} B_{ik} x_k y_i}$$

$$(\vec{x}, B^T \vec{y}) = \sum_i x_i (B^T \vec{y})_i = \sum_i x_i \left[\sum_k (B^T)_{ik} y_k\right] =$$

$$= \boxed{\sum_{ik} x_i B_{ki} y_k}$$

SONO UGUALI

$$(A^T C A \vec{x}, \vec{x}) \geq 0$$

$$(CA\vec{x}, (A^T\vec{x})) = (CA\vec{x}, A\vec{x}) \geq 0$$

C è DIAGONALE e NON CAMBIA x

PRESA C COME MATRICE ~~DIAGONALE~~ IDENTITÀ

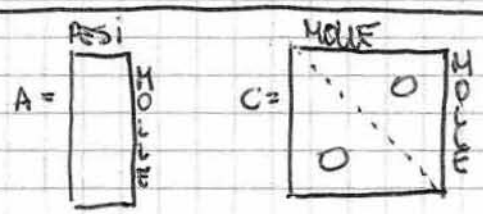
QUINDI $CA\vec{x}$ e $A\vec{x}$ SONO PARALLELI e IL QUADRATO

DI $A\vec{x}$ è SICURAMENTE ≥ 0

$$(A\vec{x})^2 \geq 0$$

28-3-12
RUSSO

$$\vec{e} = A\vec{u}$$
$$\vec{w} = C\vec{e}$$
$$A^T w = \vec{f} \quad \text{equilibrio}$$



$$\underbrace{A^T C A}_{\text{SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA}} \vec{u} = \vec{f}$$

$K = A^T C A$ SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA (NON È MOLTO LONTANA DALLA IDENTITÀ)
(NON SOLO DELLE ROTAZIONI)

$$\underbrace{(K\vec{v}, \vec{v})}_{\vec{v}\cdot\vec{v} = |v||v|\cdot\cos\theta} \geq 0$$

$\theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta \geq \frac{3\pi}{2}$

perché la K è sia def. simmetrica def. positiva

NOTA: NME LEVOLTE CHE HO UN MODELLO DI EQUILIBRIO HO UNA MATRICE SIMMETRICA DEF. POSITIVA

$(A^T C A)^T$

NOTA $(CB)^T = C^T B^T$
e il prodotto di matrici non è commutativo

$(CB)^{-1} = C^{-1} B^{-1}$ SOLO SE B, C MATRICI QUADRATE "UGUALI"

$(A^T C A)^T = A^T C^T (A^T)^T$

NOTA: IDEM PARENTE è LA TRASPOSIZIONE CIOÈ APPLICANDO 2 VOLTE SI ANNULLA

$= A^T C^T A = A^T C A$

SE C È SIMMETRICA ALLORA ~~ALLORA~~ $A^T C A$ È SIMMETRICA

DEFINITA POSITIVA

$(K\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ è $= 0$ SOLO QUANDO $\vec{v} = 0$

$+$ $\Rightarrow$ (RISCRIVO) $(K\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = 0$

$(K\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = 0$

(definita semi positiva)

NOTA: $(B\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, B^T\vec{w})$ o $(BC\vec{v}, \vec{w}) = (C\vec{v}, B^T\vec{w})$

$(K\vec{v}, \vec{v}) = (A^T C A\vec{v}, \vec{v}) = (CA\vec{v}, A\vec{v}) \geq 0$

$\vec{w} = A\vec{v}$

$\Downarrow$

$(C\vec{w}, \vec{w})$

SE C È DIAGONALE $(C\vec{w}, \vec{w}) = \sum (C\vec{w})_i w_i$ per definizione

e $c_i > 0$

$= \sum c \vec{w}_i^2 > 0$

~~DA~~ C è DIAGONALE quindi la sommatoria è POSITIVA se $c_i > 0$

Se ci metto una $A^T \ldots A$ LA C RIMANE SIMMETRICA e DEFINITA POSITIVA

NOTA $A^T C A$ S.D.P. $\iff$ C S.D.P.
EHE EFFEMME SIGMA

NOTA
SEMI DEF. POS. PUÒ NON essere INVERTIBILE, MENTRE LA DEF. POS. È INVERTIBILE

RUSSO

SE C è SIMMETRICA e SEMI DEFINITA POSITIVA

$\Rightarrow A^T C A$ è SIMMETRICA e SEMI DEFINITA POSITIVA

DEFINITA POSITIVA $(K\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = 0$

$K = A^T C A$

$(K\vec{v}, \vec{v}) = (CA\vec{v}, A\vec{v}) \geq 0$ SE C SIMMETRICA + SEMI DEF. POSITIVA

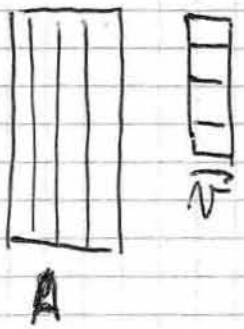
SUPPONIAMO CHE $(CA\vec{v}, A\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{v} = 0$

SE C è DEF. POSITIVA ALLORA $(A\vec{v} = 0)$

$\Downarrow ?$

$\vec{v} = 0$

Se io ho una matrice



= equivale a fare una combinazione lineare delle colonne di A con le celle di $\vec{v}$ $\square \cdot \square + \square \cdot \square + \dots + \square \cdot \square \dots$

quando LA COMB. LIN. DELLE COLONNE IN A SONO LIN. IND.
ALLORA $A\vec{v} = 0$

Se C MATRICE SIMMETRICA DEF. POSITIVA e A COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI

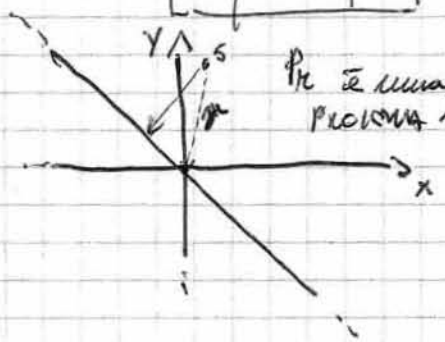
$\Rightarrow A^T C A$ SIMMETRICA + DEF POSITIVA

$(A\vec{v})_i = \sum A_{ij} v_j = \sum v_j A_{ij} =$

$= \sum v_j (\vec{C}_j)_i = (\sum v_j \vec{C}_j)_i$

$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_n \end{bmatrix}$ $A_{ij} = (\vec{C}_j)_i$

$$\boxed{A\vec{v} = \sum v_j \vec{C}_j}$$



P_R è una MATRICE CHE PROIETTA $\vec{v}$ SUL PIANO

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ indipendenti che generano il mio piano

A è generata mettendo i vettori v_1 e v_2 in colonna "incolonni"

$$A = \left[\vec{v}_1 \,\middle|\, \vec{v}_2 \right]$$

$$A^T \underbrace{(A^T A)}_{\text{quadrato. quindi è invertibile}}{}^{-1} A$$ = è la matrice che fa la proiezione di un qualsiasi vettore sul piano per i proiettori ortogonali

C è simmetrica + def. pos. e A colonne lin. ind. $\Rightarrow K = A^T C A$ è sim. def. pos.

In una matrice A generale se le colonne ~~sono~~ devono essere meno delle righe per essere linearmente indipendenti, una matrice con più colonne ~~sono~~ avrà sicuramente 2 vettori colonna linearmente dipendenti

~~Lo stato quantomeccanico~~

~~Autovalori~~

Libreria che si muovono in giro, risolvono o l'automazione o problemi autovalore

Stato della matrice: solo l'insieme di tutti i suoi autovalori

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{gdl} \end{bmatrix} \qquad \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u_{gdl}(t) \end{bmatrix}$$

$$-w_1 + w_2 + f_1 = 0$$

$$-w_1 + w_2 + f_1 = m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2}$$

$K\vec{u} = \vec{f}$ Problema di riduzione sistema lineare

RUSSO
29-3-12

USIAMO METODO RISOLUZIONE DI GAUSS (ELIMINAZIONE DI GAUSS)

$\#OP \sim \frac{n^3}{3}$

IL TEMPO IMPIEGATO $T(n) \sim Cn^3$

$T(2n) \sim C8n^3 = C(2n)^3$ $\Rightarrow \frac{T(2n)}{T(n)} = 8$

AUTOVALORI $K\vec{v} = \lambda\vec{v}$ sono i vettori che la matrice lascia nella stessa direzione

MATRICE AUTOVETTORE

AUTOVALORE

ELIMINAZIONE di GAUSS

CASO 4x4 MATRICE QUALSIASI

SISTEMA LINEARE $A\vec{x} = \vec{b}$ x

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & & & \\ 0 & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

sto cercando di riscrivere b_i come combinazione lineare delle colonne di a

sono quelli che ottengo dalle combinazioni lineari

$$\begin{cases} R_1 & a'_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ R_2 & \cancel{a_{21}}x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 = b_2 \\ & \cancel{a_{31}}x_1 + \cancel{a'_{32}}x_2 + a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 = b_3 \\ & \cancel{a_{41}}x_1 + \cancel{a'_{42}}x_2 + \cancel{a''_{43}}x_3 + a'''_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

$Ax = b \xrightarrow[\text{MANDA L'ALG. DI GAUSS}]{\text{ORMAI}} Ux = \hat{b}$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{33} x_3 + u_{34} x_4 = \hat{b}_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + u_{44} x_4 = \hat{b}_4 \end{cases} \Rightarrow x_4 = \frac{\hat{b}_4}{u_{44}}$$

← LO SOSTITUISCO QUI DENTRO per eliminare una variabile

back sostitution #OP $\sim n^2$

↓

per ottenere a n^3 dell'alg. come si osserva che l'alg. passa + tempo durante il corso del sistema ASSOLUTO

RICORSIVO (è EVIDENTE):

1° PASSO SISTEMO LA PRIMA COLONNA e con operazioni algebriche la rendo a zero, combinazioni lineari

$$\begin{cases} R_2 \to R_2 + \alpha R_1 \\ a_{21} + \alpha a_{11} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_2 \to R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1 \\ \alpha = -\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_3 \to R_3 + \alpha R_1 \\ a_{31} + \alpha a_{11} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_3 \to R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1 \\ \alpha = -\frac{a_{31}}{a_{11}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_4 \to R_4 + \alpha R_1 \\ a_{31} + \alpha a_{11} = 0 \end{cases}$$

2° PASSO SISTEMO LA SECONDA COLONNA e NOTO CHE È UNA OPERAZIONE RICORSIVA INQUANTO AGISCO SU UNA SOTTO MATRICE TOLTE LA PRIMA COLONNA e LA PRIMA RIGA

$$\begin{cases} R_3 \to R_3 + \alpha R_2 \\ a_{32} + \alpha a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_3 = R_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} R_2 \\ \alpha = -\frac{a_{32}}{a_{22}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_4 \to R_4 + \alpha R_2 \\ a_{42} + \alpha a_{22} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = R_4 - \frac{a_{42}}{a_{22}} \\ \alpha = -\frac{a_{42}}{a_{22}} \end{cases}$$

3° PASSO RICORSIVAMENTE RICHIAMO LA FUNZIONE AL SOTTO MATRICE degli a'''

$$\begin{cases} R_4 \to R_4 + \alpha R_3 \\ a''_{43} + \alpha'' a_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_4 \to R_4 - \frac{a''_{43}}{a''_{33}} \\ \alpha = -\frac{a''_{43}}{a''_{33}} \end{cases}$$

COMPROVARE CHE LA MATRICE NON SIA SINGOLARE OVVERO CHE NON PRESENTI UNA COLONNA DI ZERI QUINDI CHE IL DETERMINANTE È $=0$

CONTROLLO CHE IL PRIMO ELEMENTO SIA $\neq 0$ QUINDI CERCO UN'ELEMENTO NELLA COLONNA $\neq 0$ E SCAMBIO LE RIGHE (PRENDIAMO LA RIGA CON L'ELE. $\neq 0$ PRIMO)

ARITMETICA FLOATING POINT

double $c = 0{,}3 - 0{,}2 - 0{,}1$ $\quad N \sim 2 \cdot 10^{-17}$

$\neq 0{,}3 - (0{,}2 + 0{,}1)$

$\neq (0{,}3 - 0{,}2) - 0{,}1$

$\frac{p}{q}$ O FINISCE O È PERIODICO

$\sqrt{2}$: NON FINISCE e NON È PERIODICO

I NUMERI CHE HANNO UNA BASE FINITA IN UNA BASE, IN UN'ALTRA NON È DETTO CHE CE L'HANNO

$x = 0{,}3 \to$ APPROSSIMO AL N° RAPPRESENTABILE DIÙ VICINO a LO MEMORIZZO IN x (IL CALCOLATORE)

$\frac{1}{2^2}$ IN BINARIO SONO SEMPRE REALI FINITI

LE OPERAZIONI FLOATING POINT SONO SEMPRE SBAGLIATE

NUSSO [redacted]

30-3-12 $0.2345 \cdot 10^{-5}$

FLOATING POINT F $\mathcal{F} = \{ \pm 0, \overbrace{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_t}^{\text{MANTISSA}} \ \beta^e \}$

α_1 → È DIVERSA DA ZERO

β → BASE DEL

ERRORE RELATIVO: • CONTROLLATO NEL SISTEMA FLOATING POINT, CHE LO MANTIENE PICCOLO L'ERRORE RELATIVO

ERRORE ASSOLUTO

$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdot 10^e$

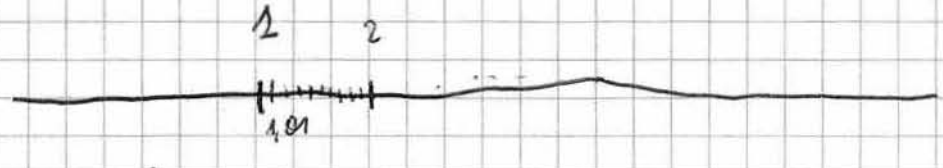
ESPONENTE $-2 < e < 5$

$0,100 \cdot 10^{-2} =$

↑ benché la cifra + significativa è assurda

$$\left.\begin{array}{ll} 0,100 \cdot 10^{-2} & \\ 0,101 \cdot 10^{-2} & = 10^{-3} \\ \vdots & \\ 0,999 \cdot 10^{-2} & \end{array}\right\} - = 0,001 \cdot 10^{-2} = 10^{-5}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0,100 & 10^{-1} \\ 0,101 & 10^{-1} \\ \vdots & \\ 0,999 \cdot 10^{-1} & \end{array}\right\} - = 0,001 \cdot 10^{-1} = 10^{-4}$$



$1 = 0,100 \cdot 10^1 = 1$

$0,101 \cdot 10^1 = 1,01$

$\vdots$

$0,999 \cdot 10^1 = 9,990$

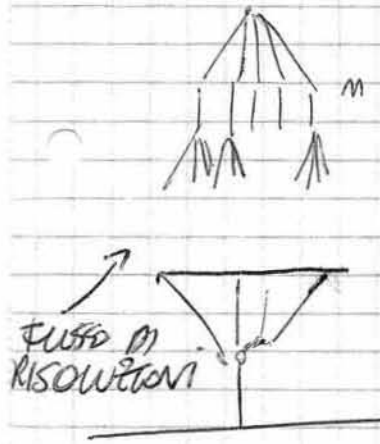
$0,100 \ 10^2 = 10$

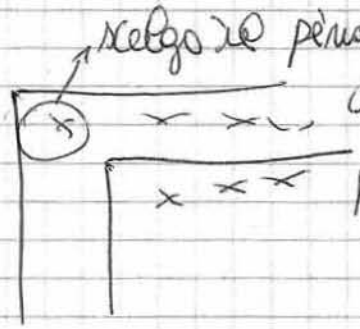
$0,101 \ 10^2 = 10,1$

NOTA IL NUMERO DI NUMERI CHE HO TRA 1 a 10 È LO STESSO NUMERO DI NUMERI CHE HO DA 10 a 100

COSÌ OGNI NOTA ALL'ALTO IL SISTEMA A UNA BASE 10

30/3/12 RUSSO (LAB)

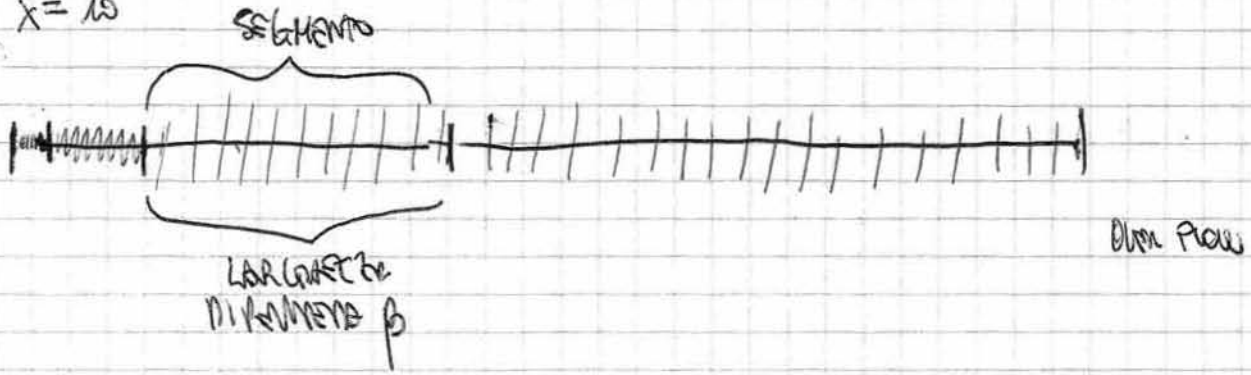




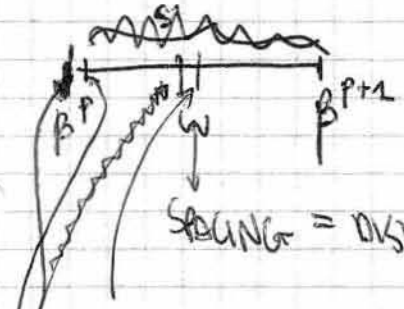
$0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \; 10^3$ da 100 a 999

DOUBLE X

$x = 10^{100}$



UNDER FLOW



SPACING = DISTANZA MASSIMA NUMERI

$$0,\alpha_1\alpha_2\alpha\ldots\alpha_t \; \beta^{p+1} \leq \beta^{p+2}$$

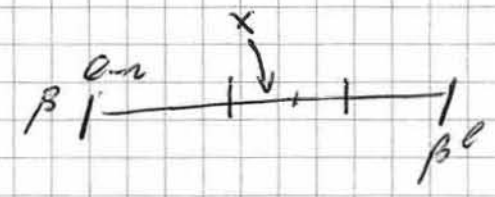
$$\left.\begin{array}{l} 0.1000\ldots0 \; \beta^{p+1} \\ 0.1000\ldots01 \; \beta^{p+1} \end{array}\right\} - = 0,000\ldots01 \; \beta^{p+1} = \beta^{p+1-t}$$

$x \in \mathbb{R} \longmapsto fl(x)$ è il n° di f + vicino a x

ERRORE ASSOLUTO: $|x - fl(x)|$

ERRORE RELATIVO: $\dfrac{|x - fl(x)|}{|x|}$

$x = 0,\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \quad \beta^e$



$0,1000\dots 0\,\beta^e = \beta^{e-1}$

$$\beta^{(e-1)+1-t} = \beta^{e-t}$$

$$|x - fl(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{e-t}$$

$x \geq \beta^{e-1} \quad \frac{1}{x} \leq \beta^{1-e}$

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} < \frac{1}{2}\beta^{e-t}\beta^{1-e} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t} \approx 10^{-16}$$

ROUND OF UNIT

$x = 0.1$

$y = 0.2$

$z = x * y$

$\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{F}$ supponiamo di poter fare il prodotto in $\mathcal{F}$ non ci sta, $\hat{x}\hat{y} \notin \mathcal{F}$

$\hat{x} * \hat{y} = fl(\hat{x}\hat{y})$

$0.12 \cdot 10^2$

$0.23 \quad 10^0$

12.23

NOTA $\mathcal{F}$ NON È UN INSIEME CHIUSO RISPETTO LE OPERAZIONI

IL PROBLEMA RA IL PROGRAMMA ESATTO E QUI FA L'APPROSSIMAZIONE

$\hat{x}\,\hat{y} \in \mathcal{F}$ $\quad fl(\hat{x}\hat{y}) = fl(\hat{y}\hat{x})$

$$fl(fl(\hat{x}+\hat{y})+\hat{z}) \neq fl(\hat{x} + fl(\hat{y}+\hat{z}))$$

$\hat{x}\,\hat{y} \in \mathcal{F}$ $\quad \left\| \dfrac{fl(fl(\hat{x})\,fl(\hat{y})) - xy}{xy} \right\|$?

MI INTERESSA SAPERE CON CHE ~~ESPRESSIONE~~ RELAZIONE L'ERRORE SI TRASMETTE RISPETTO ALLA MOLTIPLICAZIONE ORIGINALE

$\hat{x}$ N° MOLTO GRANDE

$\hat{y}$ N° " " MOLTO A $\hat{x}$

$\hat{y} - \hat{x}$ MI PORTA AD UN GRANDE

FLOATING POINT $\pm\, 0.\underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_T}_{\text{SONO TUTTE CIFRE SIGNIFICATIVE}}\ \beta^e$

4-4 RUSSO LAB.

NOTA: L'ASSE REALE SI PUÒ DIVIDERE IN SEGMENTI DI DENSITÀ UNIFORME AL VARIARE DELLO ESPONENTE, I SEGMENTI RETTIFICANO IL SEGMENTO

$x \in \mathbb{R}$

$f(x)$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{DOUBLE } x \\ x \in \mathbb{Q}3\end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{DOUBLE } x \\ x = 10^{100}\end{array}}$

$= 10^{100} + u\,10^{100}$

ERRORE RELATIVO $\left|\dfrac{f(x)-x}{x}\right| \leq \underbrace{\dfrac{1}{2}\beta^{1-t}}_{u}$

BASE

N° DI MANTISSA

u ~~[illegible]~~ ROUND of unit

$\dfrac{f(x)-x}{x} = \varepsilon_x \qquad |\varepsilon_x| \leq u \qquad u = 10^{-14}$

$f(x) - x = \varepsilon_x \cdot x$

$f(x) = (\varepsilon_x + 1)x \qquad |\varepsilon_x| \leq u$

I TUOI POTERI JEDI NON FUNZIONANO

double x y z

$x = 0.1 \qquad x \mapsto fl(0.1)$

$y = 0.3 \qquad y \mapsto fl(0.3)$

$$z = x \cdot y \quad fl(\underbrace{fl(0.1) \cdot fl(0.3)}_{\text{IN GENERALE NON È UN NUMERO IN } fl}) \leftarrow z$$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} fl(x) \\ fl(y) \end{matrix}\right\} fl(x) \cdot f(y) \to fl(fl(x) \cdot fl(y)) \overset{?}{\approx} xy$$

$$\left| \frac{xy - fl(fl(x) - fl(y))}{xy} \right|$$

$fl(z) = z(1 + \varepsilon_z) \qquad |\varepsilon_z| \leq u$

$x \to x(1 + \varepsilon_x) = fl(x)$

$y \to y(1 + \varepsilon_y) = fl(y)$

per diventare fl a sua volta

$$[x(1+\varepsilon_x) \cdot y(1+\varepsilon_y)](1+\varepsilon_p) \leftarrow fl(fl(x) \cdot fl(y))$$

$$\left\| \frac{\cancel{xy}(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_p) - \cancel{xy}}{\cancel{xy}} \right\| = \left\| (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_p) - 1 \right\|$$

RUSSO
LAB
11-4-12

$$\approx \left| \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_p + 1 \right| \leq 3u$$

IDEM $\frac{x}{y}$ è DIMOSTRABILE $y \neq 0$ è SEMPRE GIUSTO INSAMS RELATIVO

NOTA: IL PROBLEMA È L'OPERAZIONE DI SOMMA

SOMMA:

$x \to x(1+\varepsilon_x)$

$y \to y(1+\varepsilon_y)$

$$\left\| \frac{[x(1+\varepsilon_x)+y(1+\varepsilon_y)](1+\varepsilon_s) - (x+y)}{x+y} \right\| =$$

$$= \left| \frac{x(1+\varepsilon_x+\varepsilon_s) + y(1+\varepsilon_y+\varepsilon_s) - (x+y)}{x+y} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cancel{x} + x\varepsilon_x + x\varepsilon_s + \cancel{y} + y\varepsilon_y + y\varepsilon_s - \cancel{x} - \cancel{y}}{x+y} \right| =$$

$$= \left| \frac{x}{x+y}(\varepsilon_x) + \frac{y}{x+y}(\varepsilon_y) + \varepsilon_s \right|$$

$$\leq \left| \frac{x}{x+y} \right| |\varepsilon_x| + \left| \frac{y}{x+y} \right| |\varepsilon_y| + |\varepsilon_s|$$

SE X e Y HANNO SEGNO CONCORDE ALLORA ε_x VIENE LIMITATO.

SE X e Y " " DISCORDE ALLORA ε_x VIENE AMPLIFICATO

e X e Y NON SPARISCONO IN f OLTRE AVRANNO GIÀ UN SEGNO DI RAPPRESENTAZIONE

NOTA: EVITARE DI SOMMARE NUMERI GRANDI DI SEGNO DISCORDE e NON IN f.

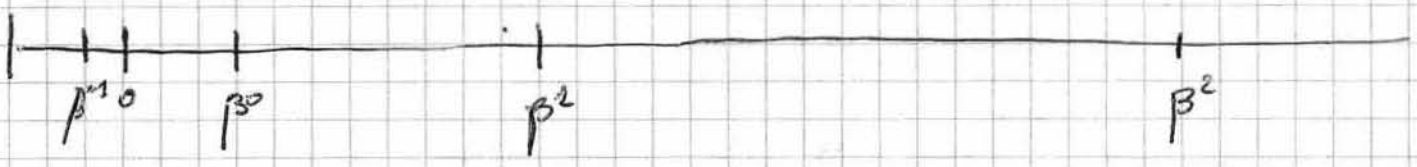
NOTA: nello spazio quando la x ricade tra due numeri float dice che bisogna arrotondare per il pari (quello con mantissa pari)

SCUBERI LAB 4-4-12

giovanni.scuderi@unimib.it

$$\mathcal{F} = \{0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_t \cdot \beta^e\} \qquad \alpha_1 \neq 0, \ \beta = \text{base}, \ e = \text{esponente}$$

$$L \leq e \leq U$$



$$\mathcal{F} = \{\pm 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdot 10^e, \ 1 \leq \alpha_1 \leq 9, \ 0 \leq \alpha_i \leq 9 \ i = 2,3, \ -20 \leq e \leq 20\} \cup \{0\}$$

1) il più piccolo e il più grande numero positivo di $\mathcal{F}$?

$0{,}100 \cdot 10^{-20}$ nota: prima di questo numero abbiamo un problema di underflow

2) il più grande?

$0{,}999 \cdot 10^{20}$ nota: oltre questo numero è un problema di overflow

2) segmento dove sono rappresentati solo i numeri interi consecutivi?

spacing: distanza tra due numeri

spacing = 1

spacing = 5

esponente del segmento geometrico

$$S = 10^{p+1-3} = 10^{p-2} = 10^{p-2} = 10^0 \Rightarrow p = 2$$

$$= \beta^{p+1-t}$$

n° cifre mantissa

$10^0 = 1$ è lo spacing con distanza 1

lo spacing che sto cercando è $[10^2, 10^3]$

~~0,123~~

$$\mathcal{F} = \{\pm 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ 10^e \quad -20 \leq e \leq 20\}$$

4) $(0{,}1234 + 0{,}1241) + 1{,}17$

$0{,}1234 \xrightarrow{fl} 0{,}123 \cdot 10^0$ + elimina l'ultima cifra

$0{,}1241 \xrightarrow{fl} 0{,}124 \cdot 10^0 =$

$0{,}247 \cdot 10^0 \longrightarrow$ risultato esatto

float è uguale

20

$1{,}17 \overset{fl}{\rightsquigarrow} 0{,}117 \cdot 10^1$

ORA FACCIO LA SOMMA

$$\begin{array}{l} 0{,}247 \cdot 10^0 + \\ 0{,}117 \cdot 10^1 = \end{array} \quad \Big\| \rightarrow \quad \begin{array}{l} 0{,}0247 \cdot 10^1 + \\ 0{,}117 \cdot 10^1 = \\ \hline 0{,}1417 \cdot 10^1 \end{array}$$

(SOMMA ESATTA)

NON HANNO LO STESSO ESPONENTE AL 10

$0{,}1417 \cdot 10^1 \overset{fl}{\rightsquigarrow} \boxed{0{,}142 \cdot 10^1}$ ARROTONDA PER ECCESSO

A)

B) $0{,}1234 + (0{,}1241 + 1{,}17)$

$$\begin{array}{l} 0{,}1241 \overset{fl}{\rightsquigarrow} 0{,}124 \cdot 10^0 \\ 1{,}17 \overset{fl}{\rightsquigarrow} 0{,}117 \cdot 10^1 \end{array} \quad \Big\| \rightarrow \quad \begin{array}{l} 0{,}0124 \cdot 10^1 + \\ 0{,}117 \cdot 10^1 = \\ \hline 0{,}1294 \cdot 10^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0{,}1294 \cdot 10^1 \overset{fl}{\rightsquigarrow} 0{,}129 \cdot 10^1 \\ 0{,}1234 \overset{fl}{\rightsquigarrow} 0{,}123 \cdot 10^0 \end{array} \quad \Big\| \rightarrow \quad \begin{array}{l} 0{,}129 \cdot 10^1 + \\ 0{,}0123 \cdot 10^1 = \\ \hline 0{,}1413 \cdot 10^1 \end{array}$$

$0{,}1413 \cdot 10^1 \overset{fl}{\rightsquigarrow} \boxed{0{,}141 \cdot 10^1}$ ARROTONDA PER DIFETTO

RIS (A) $\neq$ RIS(B) $\quad 0{,}142 \cdot 10^1 \neq 0{,}141 \cdot 10^1$

NOTA: I RISULTATI SONO DIVERSI CON ORDINE DIVERSO DI OPERAZIONI

$A(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$ per t grande

$$\sqrt{t+1} - \sqrt{t} \cdot \frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}$$

$A(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$

$B(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}$

sono uguali dal punto di vista algebrico ma non dal punto di vista numerico

$A(t)$ IL CALCOLATORE

12-4-12

PER ESERCITARE
LAB.

PRODOTTO / SOMMA

$x \in \mathbb{R} \to x \mapsto f(x) = x(1+\varepsilon_x) \qquad |\varepsilon_x| \le u$

$y \in \mathbb{R} \to y \mapsto f(y) = y(1+\varepsilon_y) \qquad |\varepsilon_y| \le u$

PRODOTTO

$\hookrightarrow [x(1+\varepsilon_x) \cdot y(1+\varepsilon_y)](1+\varepsilon_p)$

SOMMA

$\hookrightarrow [x(1+\varepsilon_x) + y(1+\varepsilon_y)](1+\varepsilon_s)$

ERRORE RELATIVO PRODOTTO

$$E_{RP} = \frac{|xy - [x(1+\varepsilon_x)\, y(1+\varepsilon_y)](1+\varepsilon_p)|}{|xy|} \le 3u$$

$\to$ MOLTIPLICAZIONE DA x e y e quindi è UNA OPERAZIONE BUONA

$$E_{PS} = \frac{|x+y - [x(1+\varepsilon_x) - y(1+\varepsilon_y)](1+\varepsilon_s)|}{|x+y|} \le \left|\frac{x}{x+y}\right| u + \left|\frac{y}{x+y}\right| u + u$$

SE x e y SONO CONCORDI LA SOMMA È CATT. $\le 3u$

SE x e y SONO DISCORDI (DIFFERENZA)

$x = 1000001$

$y = 1000000$

$x - y = 1$

$$\left|\frac{100001}{1}\right| u + \left|\frac{100000}{1}\right| u + u = 200002\, u$$

12-4-12
ESERCITARE LAB. PUNTO

ORDINAZIONE DI SOMMA e DIFFICILE ⟸ LA STIMA CHE STIAMO FACENDO NON È AFFIDABILE

ES.

CALCOLARE LA QUANTITÀ $A(t) = \sqrt{t-1} - \sqrt{t}$ per t grande ($\lim_{t \to +\infty}$)

$$A(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right)\frac{\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right)}{\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right)} = \frac{\cancel{t} + 1 - \cancel{t}}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}}$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}$$

NOTA: $A(t)$ e $B(t)$ SONO ALGEBRICAMENTE UGUALI MA $A(t)$ PRESENTA UNA SOTTRAZIONE MENTRE $B(t)$ NO. $B(t)$ È + EFFICIENTE DI $A(t)$

MATLAB FILE.M

```
CLC   \\ clear screen
DISP('') \\ STAMPA ""
FOR m=1:40
    t=10^m ;
    A = SQRT(t+1) - SQRT(t);
    d = SQRT(t+1) + SQRT(t);
    B = 1/d;
    ERR_REL = ABS(A-B) / ABS(B);   \\ errore relativo
    DISP(SPRINTF("%2d\t %2.10d\t %2.10d\t %2.10d\t", m, A, B, ERR_REL));
END
```

NOTA A SBAGLIA e RITORNA 0 PER. ALLEGRAMENTE 16

VETTORE RIGA

VR = [1 2 3 4]

VETTORE COLONNA

VC = [1; 2; 3; 4]

MATRICE

A = [1234; 5678; 9760]

i

V = A(:, 2) => 2
6
7

prende tutte le righe di colonna 2

M = A(2, :) => 5678

VETTORE MASCHERA

M = 5
6
7
8

X = ZEROS(2, 5)

UNA MATRICE 2x5 DI ZERI

x = UNES (4, 3)

UNA MATRICE 4x3 DI UNI

; IL PUNTO E VIRGOLA SERVE DI VISUALIZZARE IL RISULTATO DELLA VARIABILE

A = RAND (3, 4)

MATRICE 3x4 CON NUMERI CASUALI

HELP COMANDO

ES. CON ELIMINAZIONE DI GAUSS

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

→ eliminare i termini che sono sotto la diagonale

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

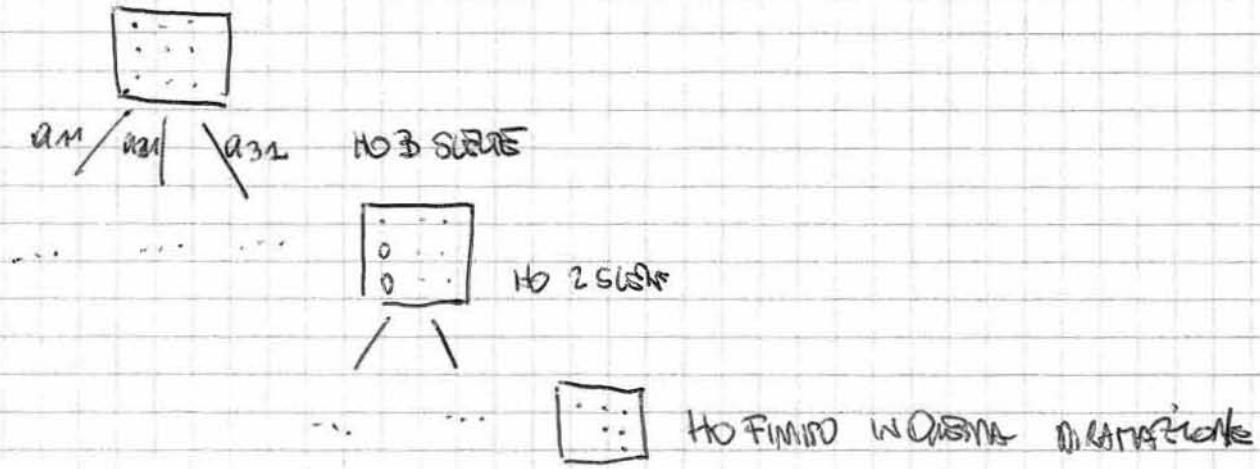
7

ES $7x_3 = \tilde{b}_3$ $\qquad x_3 = \frac{\tilde{b}_3}{7}$ e si può fare una sostituzione all'indietro

$R_2 \to R_2 - \alpha R_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$

PIVOT SONO I TERMINI UNICI nelle MATRICE,

MEGLIO SCEGLIERE UN α PICCOLO



nell'ultimo passo per avere divisioni algebriche tutte lo stesso valore
Mentre come sappiamo il calcolatore non rompiamo ugualmente allo stesso risultato

- <u>NO PIVOT</u> → NO SCAMBIO RIGHE
- <u>PIVOT PARZIALE</u> (PIVOT + GRANDE) → SCAMBIO RIGHE IN MODO TALE DI AVERE AD OGNI PASSO (RELATIVAMENTE) IL PIVOT MAGGIORE ~~È LA SCELTA PRIMA DEL PIVOT~~
- <u>DEL PIVOT</u> → ~~SCAMBIO~~ RIGHE IN MODO PER T.C. DI AVERE OGNI PASSO IL PIVOT MINORE

MATRICE PERMUTAZIONE:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{7 PIVOT PARZIALE} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SCAMBIO 1° CON 3° RIGA PER OTTENERE LO SCAMBIO ANCHE NELLA MATRICE A NEL PRODOTTO

~~7 8 9~~

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ m_1 & \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} \\ m_2 & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{matrix}$$

$M_2 P_2 (M_1 P_1 A)$

$R_2 \to R_2 - \frac{4}{7} R_1$

$R_3 \to R_3 - \frac{1}{7} R_1$

MATRICE RIDUTTRICE

SI ARRIVA AD OTTENERE UNA RAPPRESENTAZIONE SCOMPOSIZIONE $PA = LU$

$Ax = b$

A = rand(50)
x = ones(50)
x = x(:, 1)

b = A * x

⋮

ORDINE PARZIALE DEI PIVOT È MIGLIORE CON L'ALG. DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

ES. A CASA

$A(t) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$ x grande

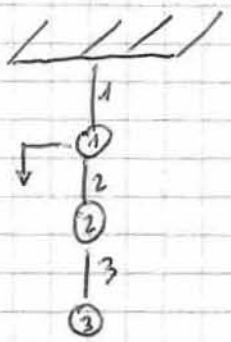
$B(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1} + 2x}$

AUTOVALORI:

13-4-12
RUSSO

↳ è un operazione che si può risolvere solo in modo approssimato

MATRICE $m \times n$ DA n AUTOVALORI



SPOSTAMENTI $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

ELONGAZIONI $\vec{e} = A\vec{u}$

VETTORE DI ULTERIORE FORZA DELLE MOLLE APPLICATE ALLE MASSE $\vec{w} = C\vec{e}$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_m \end{bmatrix}$$

VETTORE DI EQUILIBRIO

$$-A^T\vec{w} + \vec{f} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{e} &= A\vec{u} \\ w &= C\vec{e} \\ -A^T\vec{w} + f &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow A^T C A \vec{u} = \vec{f}$$

$$\boxed{K\vec{u} = \vec{f}}$$

MA SE LE MASSE SI STANNO SPOSTANDO, TUTTO SARÀ IN FUNZIONE DEL TEMPO

$\vec{u} = \vec{u}(t)$ $\quad \vec{e}(t) = A\vec{u}(t)$

$\vec{w}(t) = C\vec{e}(t)$

PER IL PESO DI MASSA m_1 $\left[-A^T\vec{w}(t) + \vec{f}\right] = m_1 \dfrac{d^2u_1}{dt^2}$ $\quad \xrightarrow{m} -A^T\vec{w}(t) + \vec{f} = M \cdot \dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2}$

↳ gm_i ↳ COSTANTE

LA NUOVA VERSIONE DI EQUILIBRIO

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{Np} \end{bmatrix}$$

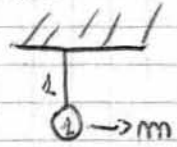
SOSTITUISCO $\vec{w}(t)$ $\rightarrow -A^T C\vec{e} + \vec{f} = M \cdot \dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2}$

ESPRIMO $\vec{e}$ $\rightarrow -A^T C A\vec{u} + \vec{f} = M \cdot \dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2}$

SISTEMA DI EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARE (È UN SISTEMA DEL SECONDO ORDINE)

$$\boxed{M\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + K\vec{u} = \vec{f}}$$

(TRALASCIAMO LA SCRITTURA DELLA DIPENDENZA DEL TEMPO)



$K = [c]$ (MATRICE 1×1)

SUPPONIAMO SIA UN NUMERO

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c = f$$

$$m\ddot{y} + cy = f$$

NOTA: OMOGENEA ASSOCIATA È L'EQUAZIONE $f = 0$

$$u(t) = u_0(t) + u_p(t)$$

SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

$$\boxed{m\frac{d^2u}{dt^2} + cu_0 = 0}$$

$$u_p(t) = \frac{f}{c}$$

CHE CONTIENE LA SOLUZIONE CONTENENTE NEO f

$$u(t) = \vec{u}_0(t) + \vec{u}_p(t)$$

$$M\frac{d^2u}{dt^2} + k\vec{u}_0 = 0 \qquad \vec{u}_p = k^{-1}f$$

$$y'' + y = 0$$

m e c SONO CONCORDI QUINDI LE SOLUZIONI y y'' SONO OSCILLANTI, MENTRE SE DISCORDI HANNO SOLUZIONI ESPONENZIALI
(quindi il nostro caso è con c e m positivi)

$$u_0(t) = \sin(\omega t) \longrightarrow u_0(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)$$

$$u_0(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)$$

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} = -\omega^2\sin(\omega t)$$

$$-m\omega^2\sin(\omega t) + c\sin(\omega t) = 0$$

$$-m\omega^2 + c = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

L'ABBIAMO VISTA A MASSO

$\boxed{\text{LA + GENERALE}}$ $\quad u_0(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)$ $\quad$ c, m POSITIVI, A, B qualsiasi

$$u(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right) + \frac{f}{c}$$

descrive tutto il moto attraverso le frequenze proprie ovvero ~~dei~~ degli autovalori

$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) =$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

$= C \sin(\omega t + D)$ $\qquad$ C, D LEGATE ad A e B $\qquad$ CAMPIETRO D. FASE

$C \sin(\omega t) \cos D + C \cos(\omega t) \sin D$ $\qquad$ FORMULA $\sin(A+B)$ TRIGONOMETRICA

$\begin{cases} A = C \cos D \\ B = C \sin D \end{cases}$ → SE SONO I QUADRATI $\quad C^2 = A^2 + B^2$ $\quad D = \arctan \frac{B}{A}$

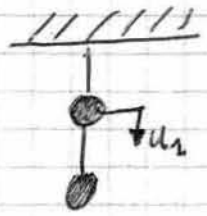
$C = \sqrt{A^2 + B^2}$

C GRANDE MOLTO RIGIDA

---

autovalori
autovettori

$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{MASSE}(t) \end{bmatrix}$ $\quad K = A^T C A \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{MASSE} \end{bmatrix}$ $\quad$ 18-4-12 RUSSO (LAB)



SISTEMA EQ. ORDINARIE DIFF.: $\quad M \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + K\vec{u} = \vec{f}$ (*)

"m a" NEWTON $\quad$ FORZE INTERNE $\quad$ FORZE "F" $\quad$ FORZE ESTERNE

CONDIZIONI INIZIALI:

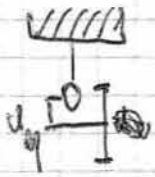
↳ la soluzione di (*) non è unica devo dire cosa fa $\vec{u}(0)$ e $\frac{d\vec{u}}{dt}(0)$ (la velocità)

ALTRE CONDIZIONI

$\vec{u}(t) = \vec{u}_0(t) + \vec{u}_p(t)$ $\qquad$ u_0 RISOLVE $M \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + K\vec{u}_0 = \vec{0}$

u_p SOLUZIONE di (*) es. $\vec{u}_p(t) = K^{-1}\vec{f}$ = $u_{equilibrio}$

CASO + SEMPLICE
OSCILLATORE ARMONICO $\qquad u(t)$ m c/ costanti



$\begin{cases} m \frac{d^2 u}{dt^2} + cu = f \\ u(t) = C \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + D\right) + \frac{f}{c} \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $u_0(t) = C \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + D\right)$

AMPIEZ. $\quad$ FREQ. $\quad$ FASE

C, D, RET. DALLE CONDIZIONI INIZIALI

NOTA: IL MOTO È LEGATO ALLE FREQUENZE PROPRIE

$$M \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + K\vec{u}_0 = \vec{0}$$

$u(t)$ CERCO UN VETTORE $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ FISSO T.C. $\vec{u}(t) = \sin(\omega t)\vec{x}$
(NON DIPENDONO DA t LE COMPONENTI DI $\vec{x}$)

$$\begin{bmatrix} u_0^1(t) \\ \vdots \\ u_0^{n}(t) \end{bmatrix} = \sin(\omega t) \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$u_0^1(t) = \sin(\omega t)\, x_1$$

- QUINDI ORA CERCHIAMO DEGLI ω e x CHE RISOLVONO L'eq.

$$\frac{d^2\vec{u}_0}{dt^2} = \frac{d^2 \operatorname{sen}(\omega t)}{dt^2}\vec{x} = -\omega^2 \sin(\omega t)\vec{x} = \underline{\underline{-\omega^2 \vec{u}_0(t)}}$$

$$K\vec{u}_0 = \operatorname{sen}(\omega t)\, K\vec{x}$$

$$M\frac{d^2\vec{u}_0}{dt^2} = -\omega^2 \sin(\omega t)\, M\vec{x}$$

$$\underline{\underline{-\omega^2 \cancel{\sin(\omega t)}\, M\vec{x} + \cancel{\operatorname{sen}(\omega t)}\, K\vec{x} = 0}}$$

$$K\vec{x} - \omega^2 M\vec{x} = 0$$

$$K\vec{x} = \omega^2 M\vec{x}$$

COME PROBLEMI AGLI AUTOVALORI

$$(M^{-1}K)\vec{x} = \omega^2\vec{x} \rightsquigarrow B\vec{y} = \lambda\vec{y}$$

$\omega^2, \vec{x}$ SIANO AUTOVALORE e AUTOVETTORE DELLA MATRICE $\lambda(M^{-1}K)$

$\lambda(M^{-1}K)$ → DIAGONALE

$\lambda(M^{-1}K)$ → MATRICE DEFINITA POSITIVA

SIANO λ_i GLI AUTOVALORI DI $M^{-1}K$ e x_i GLI AUTOVETTORI

TEO. i λ_i SONO n (DIM. MATRICE K $n \times n$) SE $\lambda_i > 0$

$$\Rightarrow \vec{u}_0^{(i)}(t) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) \vec{x}_i$$

$$\cos\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) \vec{x}_i$$

$\forall i \ \exists$ UNA SOLUZIONE $\vec{u}_0^{i}(t) = C_i \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_i}\, t + D_i\right) \vec{x}_i$

C_i: LA GRANDEZZA NON CAMBIA LA FAMIGLIA DELL'AUTOVETTORE x_i CHE SI ANALIZZA

$\sqrt{\lambda_i}$: FREQ. PROPRIA (È UNA CARATTERISTICA DEL SISTEMA È L'AUTOVALORE (SOLO LE FREQ. CHE NO INTERFERISCONO DALLA FORZA DELLA RENCOSSA "MARTELLATA")

ES.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + cu = 0 \qquad u = e^{\alpha t} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t} \qquad \alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}} + c\cancel{e^{\alpha t}} = 0$$

$$\alpha^2 + c = 0$$

$\alpha^2 + c = 0$ SE $c \neq 0 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{c}$

$$\vec{u}_0(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_i}\, t + D_i\right) \vec{x}_i$$

n FREQUENZE PROPRIE

$K\vec{x} = \lambda M\vec{x}$ <u>GENERALIZZATO EIGEN VALUE PROBLEM</u>

$Kx = \lambda\vec{x}$ CON K DEF. POS. TUTTO FUNZIONA

SE $Kx = \lambda M\vec{x}$ CON M DEF. POS. CONTINUA A FUNZIONARE TUTTO

NON POSSIAMO DIRE NULLA SU $M^{-1}Kx = \lambda\vec{x}$

ANCHE SE M^{-1} È SIMMETRICO IN GENERALE NON VIENE $M^{-1}K$ UNA MATRICE SIMMETRICA, ANCHE SE K È SIMMETRICA

$\boxed{\text{EIG}(K) \text{ trova gli autovalori di } K}$

EIG(K,M)

$K\vec{x} = \lambda M\vec{x} \rightarrow$ LAMI È LOCE È NON VALORIZZATA

DATO UN GENERALIZZATO EIGEN VALUE PROBLEM NON POSSO RIDURLO AL PROBLEMA AD AUTOVALORI $By = \lambda y$ PERCHÉ A MATRICI RICHIESTE DIVERSE e NON ~~VALE~~ POSSO CALCOLARE I SUOI AUTOVALORI CON $By = \lambda y$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 a & m_1 b \\ m_2 c & m_2 d \end{bmatrix}$$

SONO DUE MATRICI SIMMETRICHE
e MOLTIPLICARE ASSIEME NON
FANNO UNA MATRICE
SIMMETRICA
QUINDI INCIDENTALMENTE IL PROD. DI MATRICI
SIMM. NON DÀ UNA SIMM.

$B\vec{y} = \lambda \vec{y}$ $\qquad$ $I\vec{y} = \lambda \vec{y}$

$B = I$ $\qquad$ $\vec{y} = \lambda \vec{y}$ $\qquad$ C'È UN SOLO λ CHE VA BENE
ED È SOLUZIONE DI $\vec{y} = \lambda \vec{y}$

$B\vec{y} = \lambda \vec{y}$

$(B - \lambda I)\vec{y} = 0$

$\det(B - \lambda I) = 0$ $\rightarrow$ metodo + SUICIDA
PER CALCOLARE GLI
AUTOVALORI

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$16/4 - 18/4$
$2/4 - 4/4$
$19/3 - 21/3$

20-4-12
SCUDERI
ES. RUSSO

MATRICE TRANSIZIONE MATRICE IDENTITÀ CON LE RIGHE SCAMBIATE ~~[illegible]~~ IN FASE ALLE MASTERIZZAZIONI

$M_2 P_2 M_1 P_1 A = U$ (UPPER) $\xrightarrow{\text{calcoli}}$

COMPLETE

MATRICE CON ORDINE SCELTO x PIVOTING

NON IMPORTANTI

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{matrix}$$

$PA = LU$

P = PERMUTAZIONE

L = MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE COSÌ: $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

U = MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

$A\vec{x} = \vec{b}$

$PA\vec{x} = P\vec{b}$

$LU\vec{x} = P\vec{b}$

1) $L\vec{y} = P\vec{b} \rightarrow \vec{y}$ (INCOGNITA)

2) $U\vec{x} = \vec{y} \rightarrow \vec{x}$

$A\vec{x} = \vec{b}$

A = rand (50) Crea una matrice di 50 con valori casuali

x_esatta = ones(50,1);

b = A * x_esatta

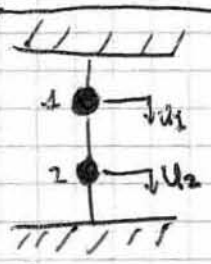
[L,U,P] = lu (A, 'parziale');

NO_PIVOT
ANTI_PIVOT

x_parziale = LUsolve(L,U,P,b);

errore = norm (x_esatta - x_parziale) / norm (x),

26-4-12
SCUDERI
ES.



$e_1 = u_1$

$e_2 = u_2 - u_1$

$e_3 = -u_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}_{e} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{u}$$

legge di Hook

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}}_{N} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}_{e}$$

$\underline{e} = A\underline{u}$ deformazioni ← spostamenti

$\underline{N} = C\underline{e}$ legge costitutiva (sforzi interni — elongazioni)

FORZE DOVUTE A FATTORI ESTERNI

$$\begin{cases} m_1: \; -W_1 + W_2 + f_1 = m_1 \cdot a_1 \rightarrow \dfrac{d^2 u_1}{dt^2} \\ m_2: \; -W_2 + W_3 + f_2 = m_2 \cdot a_2 \rightarrow \dfrac{d^2 u_2}{dt^2} \end{cases}$$

(NEWTON)

$$\rightarrow -K\underline{u}(t) + \vec{f} = M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \quad (*)$$

con $K = A^T C A$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_1 & c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

Supponiamo che $c_1, c_2, c_3 = 1$ per comodità

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per risolvere $(*)$, $M \dfrac{d^2 u(t)}{dt^2} + K\vec{u}(t) = \vec{f}$ devo guardare l'omogenea

$f = 0$ $\quad M \dfrac{d^2 u(t)}{dt^2} + K\vec{u}(t) = 0$

$\downarrow$

devo trovare ω e x t.c. $u(t) = \operatorname{sen}(\omega t)\vec{x}$

- $M^{-1} K \vec{x} = \omega^2 \vec{x}$ PROBLEMA agli autovalori

$$\vec{u}(t) = \sum \left[c_i \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_i}\, t + \delta_i\right) \right] \vec{x}_i$$

DOVE $(\lambda_i, \vec{x}_i)$ autovalori e autovettori di $M^{-1}K$.

Devo trovare autovalori e autovettori di $M^{-1}K$.

Supponiamo che $m_1 = m_2 = 1 \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONI 26-4-11

Per trovare gli autovalori $\det(M^{-1}K - \lambda Id) = 0$

RICORDA: ~~det~~ A SINGOLARE CON $\det(A - \lambda Id) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}\right\} \text{AUTOVALORI}$$

AUTOVETTORI ASSOCIATI $\lambda_1 = 1$ (x_1)

$$M^{-1} K \vec{X_1} = \vec{X_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{cases} 2x_1^{(1)} - x_1^{(2)} = x_1^{(1)} \\ -x_1^{(1)} + 2x_1^{(2)} = x_1^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \\ x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \end{cases}}$$

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è l'autovettore associato a $\lambda_1 = 1$

AUTOVETTORE ASSOCIATO A $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad \dots$$

$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\sqrt{\lambda_i}$ FREQUENZE LOR SONO CALCOLE SONO DI FORMA

$$\vec{u}(t) = \underbrace{C_1 \sin(1\, t + D_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{C_2 \sin(\sqrt{3}\, t + D_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

MODI NORMALI DI OSCILLAZIONE

EIG (A)

RICERCA DELL'AUTOVALORE DI MODULO MAGGIORE: IL METODO DELLE POTENZE

SUPPONIAMO CHE AUTOVALORE MODULO MASSIMO SIA UNICO e SIA A MAT $n \times n$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

GLI AUTOVETTORI $x_1\ x_2 \dots x_n$ ASSOCIATI AI $\lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$
(FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow$ UN VETTORE DI $\mathbb{R}^n$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME UNA COMBINAZIONE LINEARE DI QUESTI VETTORI

CONSIDERATO UN VETTORE (INIZIALE) $\in \mathbb{R}^n$ $v^{(0)} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ con $\alpha_1 \neq 0$

DEFINISCO $v^{(1)} := A v^{(0)}$ (definiamo una successione di vettori

$$:= A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)$$

$$:= \alpha_1 A x_1 + \dots + \alpha_n A x_n$$

$\underline{x_1}$ è AUTOVETTORE ASSOCIATO DI $\underline{x_1}$

$$:= \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n \qquad \Rightarrow A \underline{x_1} = \lambda_1 \underline{x_1}$$

$$v^{(2)} := A v^{(1)} = \alpha_1 \lambda_1^2 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 x_n$$

$\vdots$

$$v^{(m)} := A v^{(m-1)} = \alpha_1 \lambda_1^m \underline{x_1} + \alpha_2 \lambda_2^m x_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^m x_n \qquad \text{(PASSO } m\text{)}$$

RACCOLGO λ_1^m $\left[\alpha_1 \underline{x_1} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m x_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m x_n\right]$

DATA LA DISUGUAGLIANZA INIZIALE

$$\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

ALL'AUMENTARE DI m $m \to +\infty$ $v^{(m)} = \alpha_1 \lambda_1^m x_1$, PERCHÉ TUTTE LE ALTRE COMPONENTI VANNO A ZERO

Quindi $v^{(m)} := \alpha_1 \lambda_1^m \underline{x_1}$

NORMA ES $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ $\langle v, e_3 \rangle = \langle \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}, \begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix} \rangle = 3$

ESTRAGGO ORA LA COMPONENTE K-ESIMA e FACCIO

$$\frac{\langle v^{(m)}, e_k \rangle}{\langle v^{(m-1)}, e_k \rangle} = \frac{\langle \lambda_1^{(m)} \alpha_1 x_1, e_k \rangle}{\langle \lambda_1^{(m-1)} \alpha_1 x_1, e_k \rangle} = \frac{\lambda_1^{(m)} \cancel{\alpha_1}^{\,1}}{\lambda_1^{(m-1)} \cancel{\alpha_1}} \cdot \frac{\cancel{\langle x_1 e_k \rangle}}{\cancel{\langle x_1 e_k \rangle}} =$$

$$\lambda_1^{(m)} \to 0 \quad \lambda_1 = 1$$

$$= \lambda_1$$

FISSATA UNA COMPONENTE k $\lim_{m \to +\infty} \frac{v_k^{(m)}}{v_k^{(m-1)}} = \lambda_1$

V. CONSEGUENZA $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \to 0$

SLIDE 11-4-12

PROBLEMA: SE $|\lambda_1| \geq 1$ $|\lambda_1|^m \to +\infty$ (ERRORE DI OVERFLOW)

$|\lambda_1| < 1$ $|\lambda_1|^m \to 0$ (ERRORE DI UNDERFLOW)

SOLUZIONE:

NORMA: NORMA AD INFINITO $v = \begin{pmatrix}2\\4\\7\\5\end{pmatrix}$ $\|v\|_\infty := \max |v_i| = 7$

~~Inizializzo~~ $v^{(0)}$

$y^{(1)} := A v^{(0)}$ $\quad v^{(1)} := \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_\infty}$

$y^{(2)} := A v^{(1)}$ $\quad v^{(2)} := \frac{y^{(2)}}{\|y^{(2)}\|_\infty}$

$\vdots$

$y^{(m)} := A v^{(m-1)}$ $\quad \vdots$

$v^{(m)} := \frac{y^{(m)}}{\|y^{(m)}\|_\infty}$

SI DIMOSTRA CHE:

$$\frac{(y^{m+1})_k}{(v^{m})_k} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \lambda_1$$

MAX(EIG(M))

CASO 1: NUMERO ITERAZIONI: 11

$|\lambda_1| = 24 \qquad |\lambda_2| = 4 \qquad \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = 0,2$

CASO 2: NUMERO ITERAZIONI: 63

$|\lambda_1| = 11,6 \qquad |\lambda_2| = 9,38 \qquad \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = 0,8$

funziona questo metodo solo se l'autovalore è unico

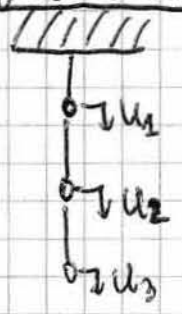
9-5-12
SCUDERI

MODELLO DISCRETO → MODELLO CONTINUO

MODELLO DI RESISTENZE

MODELLO DELLA BARRA ELASTICA

MODELLO DISCRETO:



ELONGAZIONI: $e_1 = u_1$

$e_2 = u_2 - u_1$

$e_3 = u_3 - u_2$

EQUAZIONI: $\underline{e} = A\underline{u}$ (DEFORMAZIONI = A · SPOSTAMENTI)

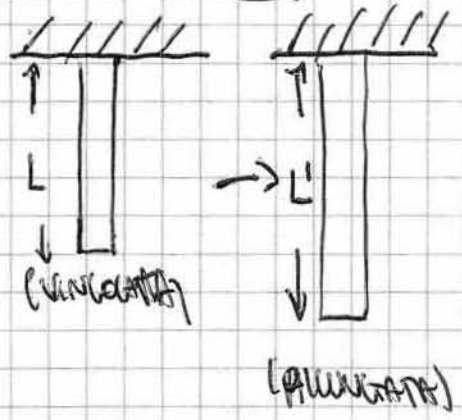
$\underline{w} = C\underline{e}$ (SFORZO INTERNO = C · DEFORMAZIONI)

$f = A^T \underline{w}$ (EQUILIBRIO = $\Rightarrow \Sigma f = 0$)

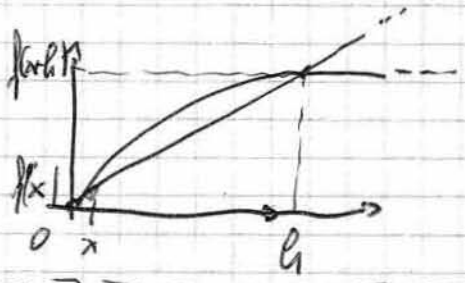
$\Downarrow$

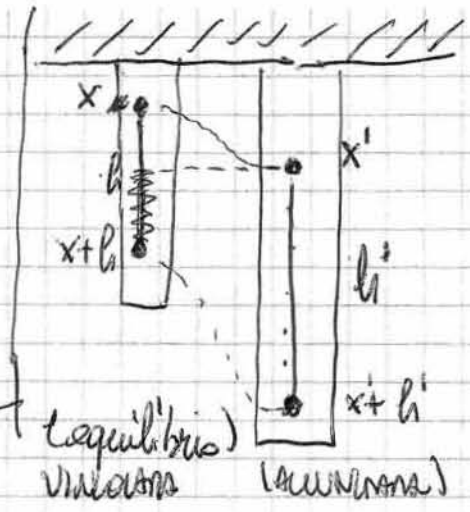
$A^T C A \underline{u} = f$

MODELLO CONTINUO:



COME MOLTO LA RETTA TANG. IN UN PUNTO





3-5-12
SCUOLA

ε DEFORMAZIONE INGEGNERIA DELLA SBARRA $:= \dfrac{L'-L}{L}$

NOTA: È COME SE CONSIDERASSI UNA SBARRETTINA h DELLA PRIMA SBARRA E h'' DELLA SECONDA

$$\varepsilon = \frac{(x'+h'-x')-(x+h-x)}{h} = \frac{(x'+h'-x')-x-h+x)}{h} \underset{\text{RIORDINO}}{=} \frac{(x'+h'-x-h-(x'-x))}{h}$$

$u(x) = x' - x$

$u(x+h) = h' - \cancel{x} = h' - (h-(x'-x)) = h' - h + x' - x$

RISCRIVIAMO ε, $\varepsilon = \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} \rightarrow$ DEFORMAZIONE DELLA SBARRETTINA INFINITESIMA

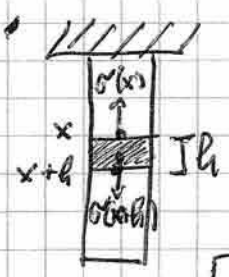
DEFORMAZIONE DELLA SBARRETTINA INFINITESIMA

NOTA: LA DEFORMAZIONE NEL PUNTO È LA DEFORMAZIONE DELLA SBARRETTINA NEL PUNTO, CON IL LIM DI $h \to 0$

DEFORMAZIONE IN UN PUNTO x $\Rightarrow$ $\varepsilon := \lim_{h\to 0} \underbrace{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}}_{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}} = \dfrac{du}{dx}$

NOTA: 1° DIFFERENZA IMPORTANTE DAL MODELLO DISCRETO AL CONTINUO È CHE $\dfrac{du}{dx}$ NON HA UNITÀ DI MISURA MENTRE ε NEL DISCRETO È MISURATA IN METRI

NEL LIBRO STRAIN SI CHIAMA STRAIN LA ε.



HOOK DI OGNI DEFORMAZIONE ε (STRAIN) CORRISPONDE UNA TENSIONE INTERNA' σ (STRESS)

$$\sigma = E\varepsilon$$

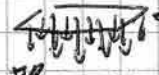
$\left[\frac{N}{m^2}\right]$ — MODULO DI YOUNG $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ — [ ] ADIMENSIONALE

$\frac{F}{A}\left[\frac{N}{m^2}\right]$ QUESTO LA PRESSIONE, PERCHÉ LA PRESSIONE INTERNA σ È UNA PRESSIONE?

ES.

PALLINA, MEGLIO PICCOLA QUESTO UN PUNTO MATERIALE

SE FOSSE UN FOGLIO



HA UNA DENSITÀ DI FORZA

LA FORZA RISULTANTE È LA Σ delle FORZE $=0$

UNA FORZA $=0$ → PER ALTRI EQUILIBRIO

$\left[\frac{N}{m^2}\right]$ $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ $\left[\frac{N}{m^3}\right]$ $[m]$

$$\sigma(x+h) - \sigma(x) + f \cdot h = 0 .$$ LEGGE DI NEWTON

DIVIDO PER h

IL LATO DI FORZE CHE AGISCONO SULLA SUPERFICIE NEL CORPO

$$\frac{\sigma(x+h) - \sigma(x)}{h} = -f$$

$$\lim_{h\to 0} : \lim_{h\to 0} \frac{\sigma(x+h) - \sigma(x)}{h} = \lim_{h\to 0} (-f)$$

QUINDI:

$$\frac{d\sigma}{dx} = -f$$

$$\sigma = E\,\varepsilon = E \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\cancel{-\left(\frac{d\sigma}{dx} - E\frac{du}{dx}\right) = f}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(E\,\frac{du}{dx}\right) = f$$

Matr: (DISCRETO) $A^T C A = f$ $\qquad A \to \frac{d}{dx}$

CONTINUO: $-\frac{d}{dx}\left(E \frac{du}{dx}\right) = f$ $\qquad A' \to -\frac{d}{dx}$

$C \to E$

IL MODULO DI YOUNG NON È POSITIVO IN GENERALE

$E = E(x)$

SUPPONIAMO E COSTANTE, f COSTANTE

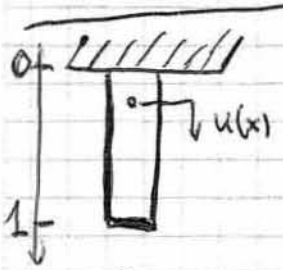
$$-E \frac{d^2u}{dx^2} = f \Rightarrow -\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{f}{E} \quad \text{MA DAVVERO, SOPRAVVIVONO} \Rightarrow -\frac{d^2u}{dx^2} = \text{COSTANTE}$$

EQUAZIONE DI POISSON:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f$$

PROTOTIPO: la cui vogliamo risolvere

10-5-12 SCUSARI



u SPOSTAMENTO $\qquad \frac{d}{dx}\left(E \frac{du}{dx}\right) = f$

SUPPONIAMO E COSTANTE, f COSTANTE $\qquad -\frac{d^2u}{dx^2} = \text{COSTANTE} = \frac{f}{E}$

derivata seconda = 1

$$\begin{cases} -u'' = 1 \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{eq. di POISSON}$$

IN GENERALE PER RISOLVERE UNA EQ. DIFFERENZIALE NON OMOGENEA

$$u(x) = u_0(x) + u_p(x)$$

SOLUZIONE OMOGENEA $\qquad$ SOLUZIONE PARTICOLARE

OMOGENEA: $u'' = 0$ eq. di LA PLACE

$u_0(x) = Ax + B$ (SOL. OMOGENEA)

PARTICOLARE: $u_p(x) = -\frac{1}{2}x^2$

$$u(x) = Ax + B - \frac{1}{2}x^2$$

Per trovare A e B, ~~dato~~ uso BOUNDARY CONDITION

$u(0)=0$: $u(0)=0+B-0=0 \Rightarrow B=0$

SARÀ LIMITATA DA SOPRA

$u(1)=0$: $u(1)=A+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

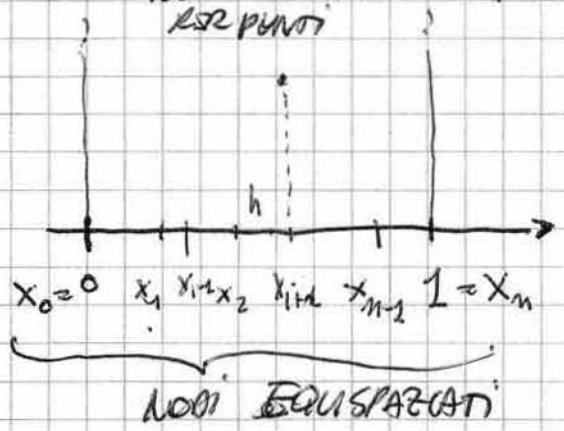
LIMITATA LA SARÀ DA SOTTO

ABBIAMO RISOLVUTO $\begin{cases} -u''=1 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \Rightarrow u(x)=\frac{1}{2}(x-x^2)$

$\begin{cases} u''=1 & x\in(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \longrightarrow$ DEVE VALERE $\forall x\in(0,1) \Rightarrow$ INVESTIGARE PER $x_0, x_1, \dots, x_n$

Metodo delle differenze finite:

IDEA: NON CONSIDERARE LA SOL. ANALITICA MA FORNIRE MANUALMENTE LA SOLUZIONE PER PUNTI



(NOTA: siamo tornati alla discreta)

$$u(x_{i+1})=u(x_i+h) \underset{\text{USO TAYLOR}}{=} u(x_i)+h\,u'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)+\frac{h^3}{6}u'''(x_i)+\frac{h^4}{24}u^{IV}(x_i)+O(h^4)$$

$$u(x_{i-1})=u(x_i-h)=u(x_i)-h\,u'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)-\frac{h^3}{6}u'''(x_i)+\frac{h^4}{24}u^{IV}(x_i)+O(h^4)$$

$$\begin{cases} -u''(x_i)=1 & i=2\dots N-1 \\ u(x_0)=u(x_N)=0 \end{cases}$$

FACCIO LA SOMMA MEMBRO - MEMBRO

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i) + O(h^4)$$

CONTINUANDO ANCHE IL TERMINE DI h^4...

$$u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) = +h^2 u''(x_i) + O(h^4)$$

$$\Rightarrow u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + O(h^4)$$

$$\begin{cases} -u''(x_0) = 1 \\ u(x_0) = u(x_N) = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow u(x_i) \simeq u_i$$

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = 1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i=1: & -\dfrac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} = 1 \\ i=2: & -\dfrac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} = 1 \\ \vdots & \\ i=N-1 & -\dfrac{u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N}{h^2} = 1 \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{h^2}\right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & 1 & \\ & & & & -1 & 2 & \ddots \\ & & & & & \ddots & 2 \\ & 0 & & & & & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

RICORDATO: ANCHE IN $A^T C A = K$

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

MODELLO IMPLICITO

11-5-22

SCUSARMI

POISSON

$$\begin{cases} -u'' = 1 & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) \\ u(x_0) = (x_n) = 0 \\ \forall\, i = 1 \dots N-1 \end{cases}$$

$u_i = u(x_i)$ APPROSSIMAZIONE SOLUZIONE ESATTA

$$-u'' = 1$$

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = 1$$

Termine di diffusione

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + \beta u' = 1 & \text{equazione diffusione trasporto} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

trasporto o convezione

NOTA: SIGNIFICATO E LA DIFFUSIONE DI UN LIQUIDO

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \dots$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \dots$$

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2h u'(x_i) \Rightarrow u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$

DF centrate per la discretizzazione della u'

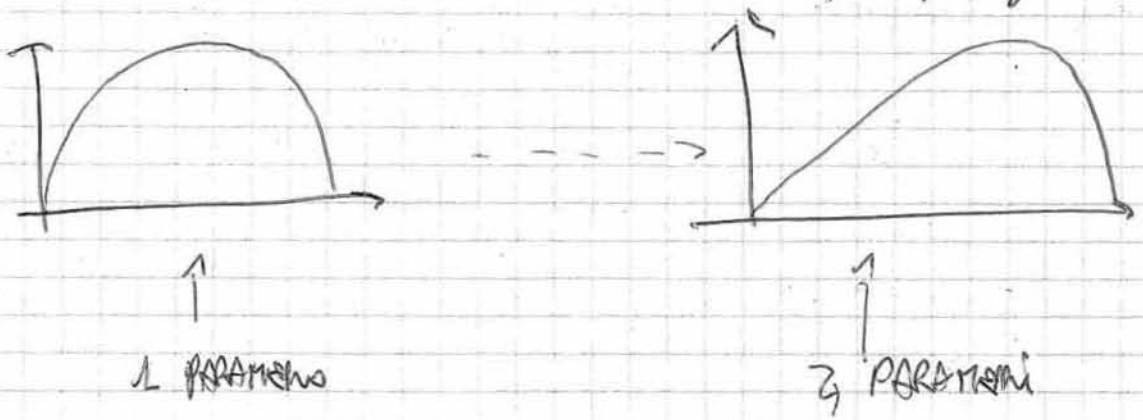
$$-\varepsilon \frac{u_{i-1} - 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + \beta \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 1$$

è u'' di un. precedente $\quad$ u' trovato oggi

$$u_{i-1}\left(-\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{\beta}{2h}\right)+u_i\left(\frac{2\varepsilon}{h^2}\right)+u_{i+1}\left(-\frac{\varepsilon}{h^2}+\frac{\beta}{2h}\right)=1$$

(la formula è + complicata xè ho anche i termini di grado 1)

aggiungendo un parametro ho solo modificato la matrice ma non ho stravolto il programma



SI È SPOSTATA a DESTRA LA CURVA

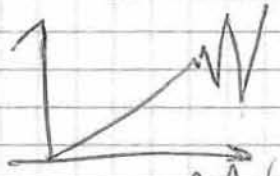
1 CASO
DIFFUSIONE >> del TRASPORTO DIFFUSIONE DOMINANTE
$\varepsilon >> \beta$

2 CASO
$\beta >> \varepsilon$ trasporto DOMINANTE

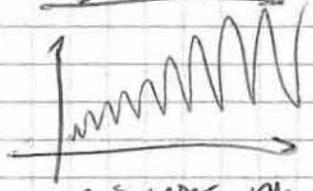
IL CASO CHE ε TENDE A ZERO?

$\varepsilon \to 0$ il problema limite è una retta

$\varepsilon \to 1\cdot 10^{-3}$ Problema



$\varepsilon \to 1\cdot 10^{-4}$ "



LE OSCILLAZIONI SI PROPAGANO e SI VEDE DAL GRAFICO

IL PROBLEMA: CON QUESTO SCHEMA SE $\varepsilon \to 0$ LA SOLUZIONE PRESENTA delle OSCILLAZIONI,

SI PROPAGANO ALLO SCEMARE DI ε

il problema di diffusione con trasporto dominante.

USO UN ALTRO TIPO DI DISCRETIZZAZIONE PER LA DERIVATA PRIMA:

$$u'_{(x_i)} = \frac{u_i - u_{i-1}}{2h}$$

Se $\beta > 0$

È UNA DIFFERENZA NON CENTRATA

$$-\varepsilon \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \beta \frac{u_i - u_{i-1}}{2h} = 1$$

SCHEMA UPWIND

$$u_{i-1}\left(-\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{\beta}{2h}\right) + u_i\left(+\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{\beta}{2h}\right) + u_{i+1}\left(-\frac{\varepsilon}{h^2}\right) = 1$$

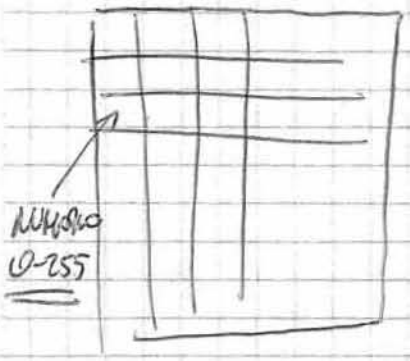
NUMERO DI PECLÉ > 1 se ≤ 1 LEGA ε e β

( ) ( )

JPEG

16-5-12
RUSSO
(2CFU)

Nasce per rendere l'immagine più compressa e quindi meno pesante



l'immagine è un vettore dove lo spazio degli indici è di ordine 2

toni di grigio 0 – 255 (0 NERO 255 BIANCO)

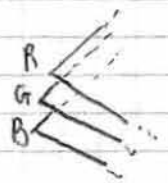
= formato bmp (BITMAP) non usato perché è un formato non compresso

LA TABELLA PRIMA è PIENA DI NUMERI INTERI (TONALITÀ DI GRIGIO) e POI VIENE SALVATA IN JPEG

COLORI:
e quindi occorrono 3 colori ovvero 3 numeri $0 \le R, G, B \le 255$

PIXEL ← PIXEL è MISTURA DI COLORI

UNA IMMAGINE A COLORI è UNA SOVRAPOSIZIONE DI 3 IMMAGINI A COLORI



3 IMMAGINI
1000 × 1000 ... $3 \cdot 10^6$ byte $\approx$ 3MB BITMAP

NOTA: UN FATTORE 10 DI COMPRESSIONE

NOI GUARDEREMO L'IMMAGINE IN TONI DI GRIGIO

BITMAP (NON COMPRESSO)

LOSSLESS
(nessuna perdita di compressione)

LOSSY
(con perdita di informazione)

GIFF TIFF

↳ le occorrenze lo stesso colore vengono ricodificate e

DVD (MPEG)
DIVX
JPEG
MP3

LE FOTOGRAFIE PER LORO NATURA NON HANNO MAI PATTERN RICORRENTI

jPEG JOINT FOTOGRAPH EXPERT GROUP

IL JPEG funziona male quando ha colori BRUSCHI di colore

E. UNA IMMAGINE NERA-BIANCA SALVATA NEL JPEG È PEGGIORE CHE IN GIF

E. IL JPEG CON UNRESTO (FOTO DI UNRESTO) SBAGLIA I CONTORNI NERI LEGGERE e CREA ARTEFATTI

NOTA JPEG CREA MENO ARTEFATTI PER LE IMMAGINI NATURALI MA SUGLI ARTIFICIALI (TESTO, ANIME ...) NON È IL CONSIGLIATO

NOTA: E. IL FILMATO MJVX SBAGLIA A COMPRIMERE e CREA ARTEFATTI NEI TROVI MOLTO

La compressione

LA COMPRESSIONE PUÒ APPLICARSI SIA NEL SEGNALE DIGITALE

L'utente può applicare un parametro per definire la qualità

IL JPEG HA 64 PARAMETRI

TRASFORMATE di FOURIER INIZI 1800 (non studiare la propagazione del calore)

FFT FAST FOURIER TRASFORM

COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE MOLTIPLICATA DA n^2 a n

BMP → JPEG

CDA → MP3 (riduce ad un decimo la grandezza)
WAV
Più o meno

TIP: guardare una matrice come ad una superficie

BM 3 (M, + W')

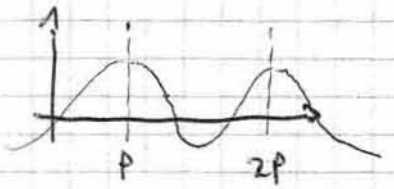
LA SERIE DI FOURIER PERMETTE DI MODIFICARLA IN FREQUENZE

JPEG DIVISA SU DEI QUADRATI 8x8 PIXEL, A CIASCUNO AMMETTE SOLAMENTE UN ALGORITMO DI SENSORI → PER AUMENTARE IL BOLD ...

17-5-12
AUSO

IDEA: RICHIAMARE UNA FUNZIONE IN FUNZ. + SEMPLICI ORDINATE IN FREQUENZA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

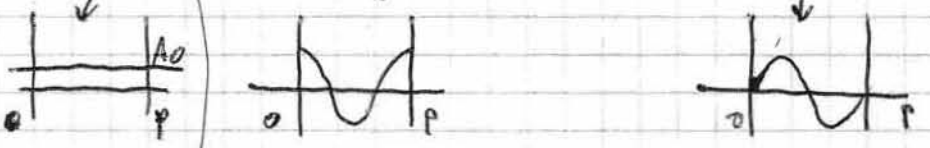


$f(x+p) = f(x)$ ($x+p$ è UGUALE ALLA x, QUINDI SI RIPETE AD OGNI PERIODO p)

$$f(t) = A_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p} t\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p} t\right) + \dots$$

COSTANTE

(SI RAPPRESENTA)



HA OVVIAMENTE LA FREQUENZA PIÙ BASSA

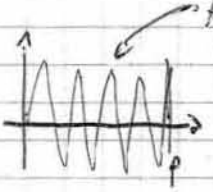
$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p} kt\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p} kt\right)\right)$$

SONO INTERI I k

devono essere univocamente ~~identificati~~ determinati da f $\xrightarrow{\text{ausilio}}$ $f \rightsquigarrow A_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$

ES

$\cos\left(\frac{2\pi}{p} 4t\right)$



APPROSSIMATIVO LA OSCILLAZIONE

↳ SE k PICCOLO ALLORA OSCILLAZIONI (FREQUENZA) BASSA

↳ COMPRESSIONE APPLICATA ALLE IMMAGINI

VARIEG. + ALTA DI TUTTE è DATA DA UNA DISCONTINUITÀ, "freq. DO" HI ESTRUSO TUTTI IK PER ALMENO, EVITARE APPROSSIMATA MOLTO BELLE DA QUESTE FORMULE

ASSUMIAMO CHE ESPRESSIONE INTEGRALE PERMETTE A PERMETTERE

$$\int_0^p f(t)\,dt = \underbrace{\int_0^p A_0\,dt}_{=pA_0} + \sum\left(a_k \underbrace{\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)dt}_{} + b_k \int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)dt\right)$$

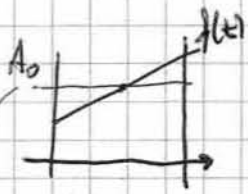
SE RISOLVIAMO L'INTEGRALE

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)dt = \frac{p}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\Big]_0^p =$$

$$= \frac{p}{2\pi k}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{p}kp\right) - \sin\frac{2\pi}{p}k0\right] =$$

$$= \frac{p}{2\pi k}\left[\underbrace{\sin(2\pi k)}_{\substack{=0 \text{ xè} \\ \text{MULTIPLO} \\ \text{DI } 2\pi \\ \text{L'ARGOMENTO}}} - \underbrace{\sin 0}_{=0}\right] =$$

$$= 0$$



$$A_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,dt$$ è LA MEDIA DI $f(t)$ integrale (MEDIA INTEGRALE)

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right) + b_k \operatorname{SEN}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)\right)$$

SCELGO q INTERO $(1, 2, \dots)$ e ESTRAGGO DA f LE ~~AMPIEZZE~~ COEFFICIENTI DELLE FREQUENZA q $\dots a_q, b_q \dots$ $k = q$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{p}qx\right)$$

MOLTIPLICO e INTEGRO

elemento $\cos^2(\dots)$ ← CON $k=q$ È L'UNICO CHE SOPRAVVIVE

$$\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}qt\right)dt = \overbrace{\int_0^p A_0\cos\left(\frac{2\pi}{p}qt\right)dt}^{\text{COSÈ PRIMA } =0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^p a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}qt\right)dt + \underbrace{\int_0^p b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}qt\right)dt}_{0}\right]$$

SI DIMOSTRA CON LE FORMULE DI PROSTAFERESI

SEMPLIFICANDO SEGUENDO LE UGUAGLIANZE

17/5/22
RUSSO

$$\int_0^P f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{P}qt\right)dt = a_q\int_0^P \cos^2\left(\frac{2\pi}{P}qt\right)dt = \underbrace{\frac{q}{2}\cdot a_q}_{\text{RISULTATO}}$$

$$a_k = \frac{2}{k}\int_0^P f(t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{P}kt\right)dt$$

CON QUESTA FORMULA CALCOLIAMO UNICO LE SUE FREQUENZE

$$\int_0^P f(t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{P}qt\right)dt = \int_0^P A_0\sin\left(\frac{2\pi}{P}qt\right)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\ldots$$

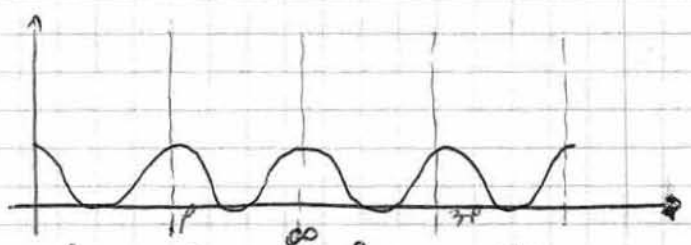
$$= b_q\int_0^P \sin^2\left(\frac{2\pi}{P}qt\right)dt = \frac{q}{2}\cdot b_q$$

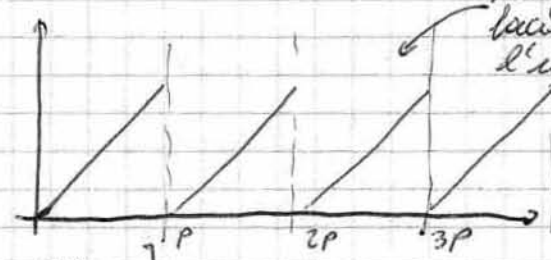
$$\boxed{b_k = \frac{2}{k}\int_0^P f(t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{P}qt\right)dt}$$

BASE: PERCHÉ MOLTI INTEGRALI VANNO A ZERO
ORTOGONALE

a_k e b_k sono "dentro" la f

f non ha unici ma deve essere derivabile quindi esiste per tutte le funzioni la trasformata di Fourier!





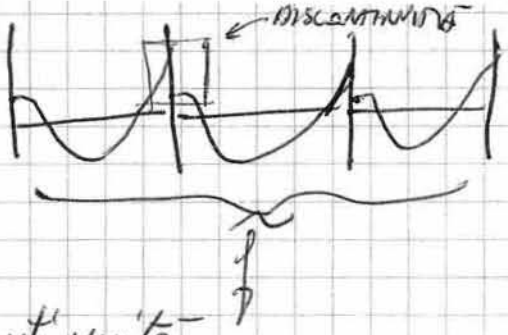
non è facile calcolare l'integrale

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi}{P}kt\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi}{P}kt\right)\right]$$

dobbiamo trovare metodi che agevolano l'analisi di segnali non periodiche...

•

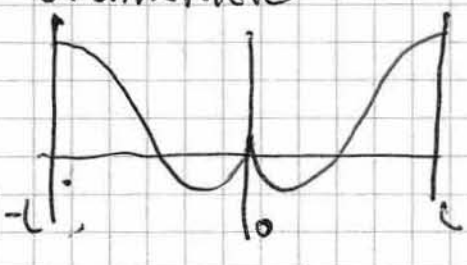
f definita da 0 a L



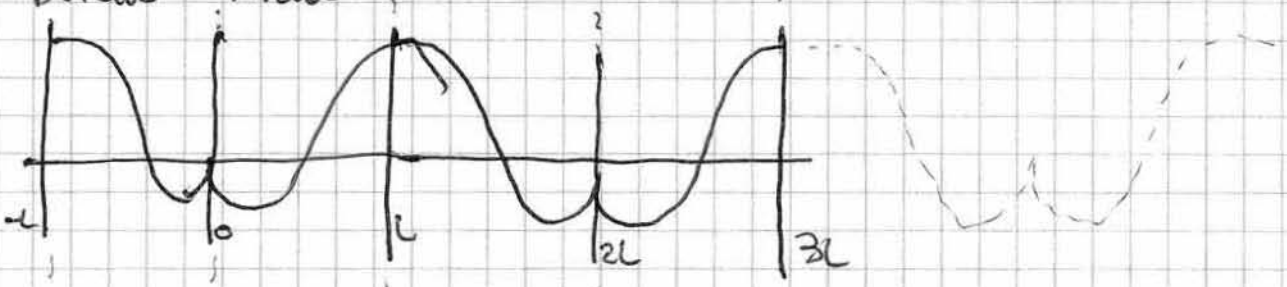
$\tilde{f}$ periodicizzata ha introdotto delle discontinuità

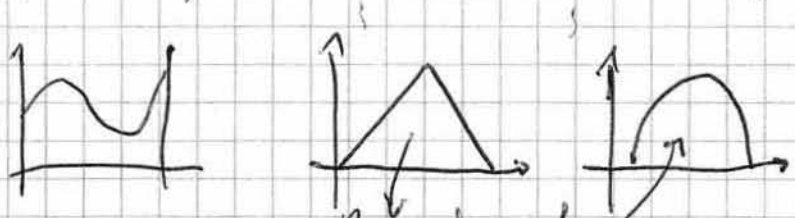
CERCHIAMO DI RICAVARE UNA $\tilde{f}$ ARMONICA NON DISCONTINUA CHE RISPETTO A $[0, L]$ SIA UGUALE A f

LA SIMMETRIZZO



DUPLICO – TRIPLICO





MA RESTA SPIGOLI O SALTI

Peggio di

QUESTO TIPO DI COSTRUZIONE INARMONICA PUÒ ANDARCI BENE MA NON DARMONICA DISCONTINUITÀ

DCT DISCRETE ~~COSINE~~ COSINE TRANSFORM

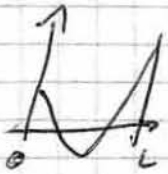
19-5-11
Russo

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p} k t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p} k t\right)\right)$$

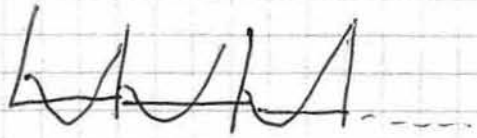
$$A_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,dt \qquad a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p} k t\right)dt$$

$$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{p} k t\right)dt$$

Caso in cui f è def. da 0 a L

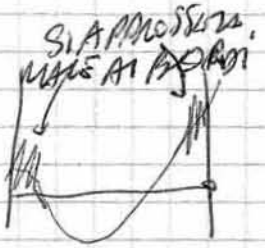


la ~~non~~ periodizzo

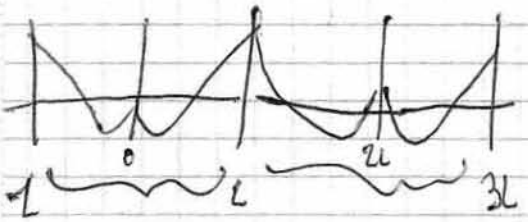


$p = L$

applicando la trasformata di fourier la f



Caso in cui f non è periodica



$p = 2L \rightarrow$

gli integrali posso calcolarli su un qualunque intervallo lungo P

$P = 2L$

$\tilde{f}$ è la funzione estesa, è UNA FUNZIONE PARI PER COSTRUZIONE

APPLICO LE FORMULE A $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{\pi}{L} k t\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi}{L} k t\right)\right)$$

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(t)\,dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} \tilde{f}(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(t)\cos\left(\frac{\pi}{L} k t\right)}_{\tilde{f} \text{ è pari}}\,dt$$

$\cos(\ldots)$ è pari

$\tilde{f}\cdot\cos(\ldots) =$ FUNZ. PARI

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} \tilde{f}(t)\cos\left(\frac{\pi}{L} k t\right)dt$$

$$\cancel{b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(t)\sin\left(\frac{\pi}{L} k t\right)}_{\tilde{f} \text{ è pari}}\,dt}$$

$\sin(\ldots)$ è dispari

PARI PER DISPARI è UNA FUNZ. DISPARI

$\int_{-L}^{L}$ DISPARI $= 0$

nell'intervallo $[-L, L]$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi}{L} k t\right)$$

DCT
DISCRETE
COSINE
TRANSFORM

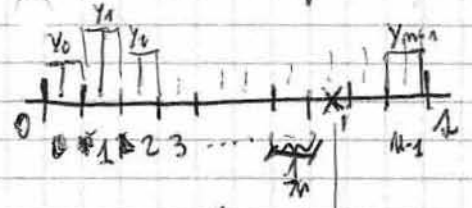
$$A_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\left(\frac{\pi}{L} k t\right)dt$$

GIVEN dim EFF

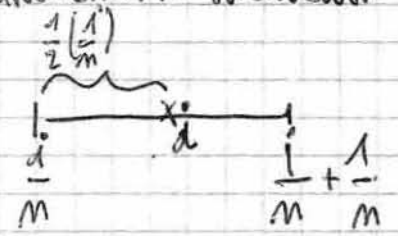
Impostiamo il caso discreto

Vettore N componenti $y = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$



AMPIEZZA $\frac{1}{m}$ $\quad \to x_i = \frac{2i+1}{2N}$

INGRANDIAMO INTERVALLO i-esimo



$$x_i = \frac{1}{N} + \frac{1}{2}\frac{1}{N} = \frac{2i+1}{2N}$$

$e_k = (0; 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ I VETTORI DELLA BASE CANONICA (HANNO 1 IN POSIZIONE K)

$\uparrow$ k

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \underline{e_i}$$

$\underline{v}\ \underline{w} \qquad \underline{v}\cdot\underline{w} = \sum v_i w_i$

$\{e_k\}$ base ortonormale

$$e_k \cdot e_l = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

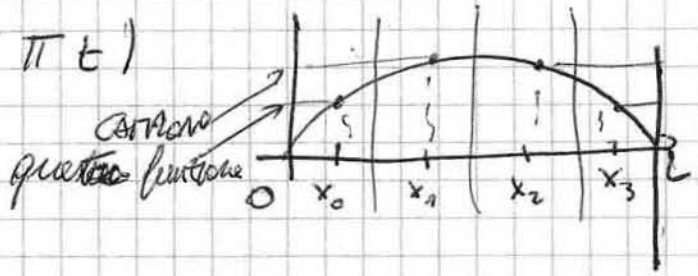
Per $k = 0, 1, \dots, N-1$ DEFINIAMO w_k t.c.

$$(\underline{w_k})_i = \cos(\pi k x_i)$$

$\uparrow$ COMPONENTE i-ESIMA $\qquad \uparrow$ x COSTRUITI PRIMA

$k=0 \quad w_0 = (1, 1, \dots, 1)$ è LA FREQ. + BASSA CHE POSSO AVERE CORRISPONDE ADI A_0

$k=1$ $\cos(\pi t)$



nota: che nel caso continuo $\int_0^L \cos(\frac{\pi}{L}kt)\cos(\frac{\pi}{L}lt)\,dt = 0$ se $k \neq l$

Cioè

$$W_k \cdot W_l = 0$$

$$\varepsilon(W_k)\,(W_l)_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(k\pi \cdot \frac{2i+1}{2N}\right)\cos\left(l\pi\,\frac{2i+1}{2N}\right) = 0$$

con $k \neq l$

$$\underline{y} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i\, e_i = \sum_{k=0}^{N-1} c_k W_k$$

È LA TRASFORMATA DISCRETA DEL COSENO

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i\,(\underline{e_i} \cdot \underline{w_l}) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k W_k \cdot W_l = c_l\,|W_l|^2$$

XÉ LA BASE È ORTOGONALE DOPO DEFINIZIONE

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos\left(\pi l\,\frac{2i+1}{2N}\right) = c_l\,|W_l|^2$$

dati gli y_i trovo c_l

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PERIODICA DI PERIODO P

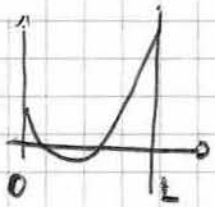
$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{P} k t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{P} k t\right)\right)$$

$$A_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{k} \int_0^P f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{P} k t\right) dt$$

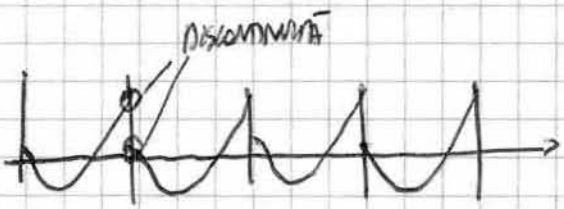
$$b_k = \frac{2}{k} \int_0^P f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{P} k t\right) dt$$

$f: I \to \mathbb{R}$ f è NON PERIODICA



$I = [0, L]$

1 MODO DI ESTENSIONE:



2 MODO DI ESTENSIONE:

$$f(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos\left(\frac{\pi}{L} k t\right)$$

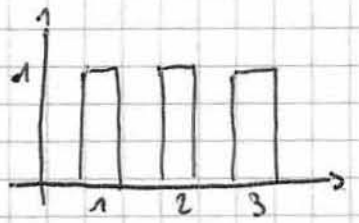
$$D_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(t)\,dt, \qquad D_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} k t\right) dt$$

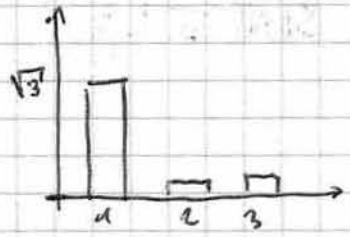
SPLINE: FUNZ. DI CUI VOGLIAMO CALCOLARE LA SERIE DI FOURIER

SERIE COMPLESSA (BASI BOREALI VA BE GENERALE)

SERIE DI SEI COSENI SI COMPORTA MEGLIO ad avere intermodulazione

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \, \underline{e}_i \xrightarrow{DCT} y = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, \underline{\tilde{w}}_k$$





$y_0 = 1$ $\qquad$ $c_0 = DCT(y_0) = \sqrt{3}$

$y_1 = 1$ $\qquad$ $c_1 = DCT(y_1) = 0$

$y_2 = 1$ $\qquad$ $c_2 = DCT(y_2) = 0$

$y = [0 \; 0 \; 3]$

DCT = (È UNA MAPPA BIUNIVOCA) $\{y_i\} \to \{c_k\}$

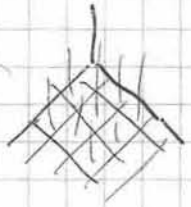
SE y_i RAND $\to$ c_k RAND

$$c_k = \alpha_k \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos \frac{k\pi(2i+1)}{2N}$$

IDCT $\{c_k\} \to \{y_i\}$

$$y_i = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k c_k \cdot \cos \frac{k\pi(2i+1)}{2N}$$

IL MODO + INTUITIVO PER RAPPRESENTARLA È ATTRAVERSO ISTOGRAMMI

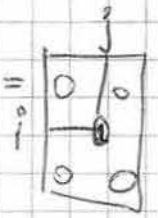


$\underline{y} = (y_i)$ $\underline{z} = (z_{ij})$

$\downarrow$

$f(x,y)$ quindi è una superficie

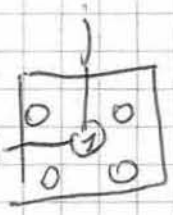
RUSSO DEFINE e_{ij} (VETTORE BASE CANONICA) =



$$\underline{y} = \sum_{ij} y_{ij} e_{ij}$$

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} y_{ij} e_{ij}$$

$e_{ij} =$



$= e_i \otimes e_j$ (TENSORE)

due dimensioni diverse

$$(e_{ij})_{kl} = \overset{N}{(e_i)_k} \cdot \overset{M}{(e_j)_l}$$

$z_1 = (z_{1ij})$ $z_2 = (z_{2ij})$

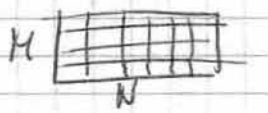
$$\underline{y} \cdot \underline{z} = \sum_i \sum_j y_{ij} z_{ij}$$

COMPARIRE L'ORDINE DELLA SOMMA DEI PRODOTTI È FONDAMENTALE

$$\{e_{ij}\} = e_{ij} \cdot e_{kl} \begin{cases} 1 & \text{SE } i=k,\ j=l \\ 0 & \text{ALTR} \end{cases}$$

$$(W_{kl})_{ij} = (\underline{W}^N_k)_i \cdot (\underline{W}^M_l)_j$$

(NOTA COMUNQUE SARÀ



)

$$W_{kl} \cdot W_{mn} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (\underline{W}_{kl})_{ij} \cdot (\underline{W}_{mn})_{ij} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (\underline{W}^N_k)_i (\underline{W}^M_l)_j (\underline{W}^N_m)_i (\underline{W}^M_n)_j =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{N-1} (\underline{W}^N_k)_i (\underline{W}^N_m)_i \right) \left(\sum_{j=0}^{M-1} (\underline{W}^M_l)_j (\underline{W}^M_n)_j \right) =$$

$$= \underbrace{(W^N_k \cdot W^N_m)(W^M_l \cdot W^M_n)}_{\neq 0 \text{ SSE } k=m \text{ e } l=n}$$

PRODOTTO SCALARE

SONO ORTOGONALI → LI FACCIO DIVENTARE ORTONORMALI ...

$$|W_{kl}| = \sqrt{\underline{W}_{kl} \cdot \underline{W}_{kl}} = \sqrt{((\underline{W}^N_k) \cdot (\underline{W}^N_k))(W^M_l \cdot W^M_l)} = \sqrt{(W^N_k W^N_k)} \sqrt{(W^M_l W^M_l)}$$

$$= |W^N_k| \cdot |W^M_l|$$

$$|W_{00}| = |W^N_0| \, |W^M_0| = \sqrt{N} \sqrt{M} = \sqrt{NM}$$

$k>0$ $\quad |W_{k0}| = |W^N_k| \, |W^M_0| = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{1}{\sqrt{M}} = \sqrt{\frac{NM}{2}}$

$$|W_{0l}| = \text{———} = \sqrt{\frac{NM}{2}}$$

$$|W_{kl}| = |W^N_k| \, |W^M_l| = \sqrt{\frac{N}{2}} \sqrt{\frac{M}{2}} = \frac{\sqrt{NM}}{2}$$

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{\sqrt{NM}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{NM}} & k=0 \ l=0 \\ \sqrt{\frac{2}{NM}} & k=0 \ l>0 \text{ OPPURE } k>0 \ l=0 \\ \frac{2}{\sqrt{NM}} & k>0 \ l>0 \end{cases}$$

$$\tilde{W}_{k\ell} = \alpha_{k\ell} W_{k\ell} \qquad \{\tilde{W}_{k\ell}\} \text{ ORTONORMALE}$$

$$\alpha_{k\ell} = \alpha_k^N \, \alpha_\ell^M$$

$$\underline{z} = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} z_{ij} \, \underline{e}_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1} c_{k\ell} \, \tilde{W}_{k\ell}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} z_{ij} \cdot e_{ij} \cdot \tilde{W}_{mn} = c_{mn} \qquad \text{È LA DCT IN DIMENSIONE 2}$$

$$c_{k\ell} = \alpha_{k\ell} \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} z_{ij} (W_{k\ell})_{ij} = \alpha_{k\ell} \sum_i \sum_j z_{ij} (W_k^N)_i (W_\ell^M)_j$$

$$= \underbrace{\alpha_{k\ell}}_{\alpha_k^N \cdot \alpha_\ell^M} \sum_i \sum_j z_{ij} \cos\left(\pi \frac{2k+i}{2N}\right) \cos\left(\pi \frac{2\ell+j}{2M}\right)$$

$$c_{k\ell} = \alpha_k^N \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{\left(\alpha_\ell^M \sum_{j=0}^{M-1} z_{ij} \cdot \cos\left(\pi \frac{2\ell+j}{2M}\right)\right)}_{} \cos\left(\pi \frac{2k+i}{2N}\right)$$

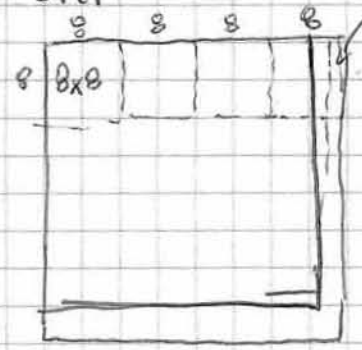
COSTO COMPUTAZIONALE:

$$NM^2 + MN^2 = N\,O(N^3) \qquad \text{SE } N=M$$

$\downarrow$ FAST $\qquad\qquad \downarrow$ FAST

$$M \log M + M \log N$$

BMP



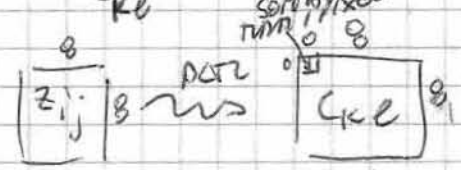
SE NON FOSSE MULTIPLO DI 8 LA PROCEDURA DI QUANTO BASTA

DCT 2 è quella che ho scritto sopra (2 dimensioni)

$0 \le z_{ij} \le 255$

↓

C_{kl}



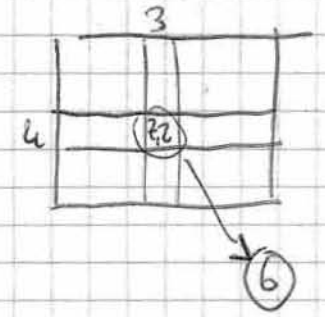
→ DISEGNO MOLTO GRANDE

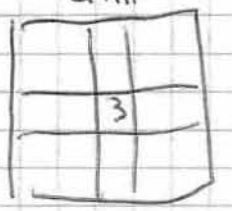
↓

RENDE TUTTI POSITIVI

→ PER RIDIMENSIONARE METTO IL RANGE TRA $-128 \le z_{ij} \le 128$

QUANTIZZAZIONE:





Q_{RIF} → Q DI RIFERIMENTO (QUANTO 50)

↓

SE AUMENTO LA QUANTITÀ MOLTIPLICO LA Q_{RIF}

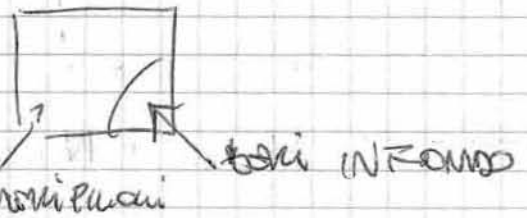
$\alpha \times \alpha$

αQ_{RIF}

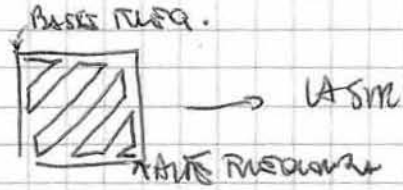
è il blocchetto 8x8 quantizzato per la frequenza

$\tilde{C}_{kl}$ → MEMORIZZO SOLO I FATTORE

SE LA Q_{RIF} CONTIENE 3 e IL NUMERO è 21 SAGGIO 7



SI ISPEZIONA CON UNA SPIRALE COSÌ



→ LA SPIRALE LA COMPRIMO CON UN ALGORITMO ZIP

MP3 → DIVIDO UN SECONDO DI AUDIO IN 37 PARTI (equivalenza 8x8)
OPERO LA DCT.