# DCT IN DIMENSIONE 1 (riassunto)

Consideriamo N vettori di $\mathbb{R}^N$ definiti da

$$(\underline{w}_k)_i = \cos(k\pi x_i)$$

dove $x_i = \frac{i}{N} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{2i+1}{2N}$, $i = 0, \dots, N-1$.

Si dimostra che $\{\underline{w}_k\}$ è una base ORTOGONALE, cioè che $\underline{w}_k \cdot \underline{w}_\ell = 0$ se $k \neq \ell$.

Invece $\underline{w}_0 \cdot \underline{w}_0 = \sum_{i=0}^{N-1} 1 = N$ da cui $\|\underline{w}_0\| = \sqrt{N}$

Si dimostra poi che $\underline{w}_k \cdot \underline{w}_k = \frac{N}{2}$ da cui

$$\|\underline{w}_k\| = \sqrt{\frac{N}{2}}.$$

Definiamo quindi $\alpha_k = \frac{1}{\|\underline{w}_k\|} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & k=0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & k=1,\dots,N-1 \end{cases}$

in modo che $\tilde{\underline{w}}_k = \alpha_k \underline{w}_k$ sia una base ORTONORMALE.

La DCT (discrete cosine transform) consiste nel calcolare i coefficienti di un vettore $y = (y_0, \dots, y_{N-1})$ nella base $\{\tilde{\underline{w}}_k\}$.

# Caso bidimensionale.

Si opera con i cosiddetti "prodotti tensoriali"

Definiamo: $x_i = \frac{i}{N} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right) \quad i = 0, -, N-1$

$$y_j = \frac{j}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\right) \quad j = 0, -, M-1$$

(ammettiamo $N \neq M$) e usiamo la lettera $z$ per la funzione discreta.

Definiamo i vettori della base:

$$\underline{e}_{ij} = \begin{array}{cc} & \overset{M}{\quad} \; j \\ i & \begin{bmatrix} \cdots & 1 \\ \text{zero altrove} & \end{bmatrix} \end{array} N \qquad \text{matrice } N \times M$$

Quindi $\underline{e}_{ij}$ è una matrice con 1 in posizione $(i,j)$ e zero altrove, in modo che

$$z = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} z_{ij}\, \underline{e}_{ij} \quad \text{e} \quad \underline{e}_{ij} \cdot \underline{e}_{st} = \begin{cases} 1 & (i,j) = (s,t) \\ 0 & i,j \neq (s,t) \end{cases}$$

In altre parole gli $N \cdot M$ $\{\underline{e}_{ij}\}$ sono ORTONORMALI.

Definiamo poi $\underline{w}_{kl}$, $k = 0, -, N-1$, $l = 0, -, M-1$ come

$$(\underline{w}_{kl})_{mn} = (\underline{w}_k)_m \cdot (\underline{w}_l)_n$$

in modo che

$$(\underline{w}_{kl})_{ij} = \cos(k\pi x_i)\cdot\cos(l\pi y_j).$$

È facile vedere che gli $N\cdot M$ $\{\underline{w}_{kl}\}$ sono ortogonali (usando l'analogo risultato in dimensione 1);

$$\underline{w}_{kl}\cdot\underline{w}_{mn} = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\underline{w}_{kl})_{ij}\,(\underline{w}_{mn})_{ij} =$$

$$= \sum_i\sum_j \cos(k\pi x_i)\cos(l\pi y_j)\cdot\cos(m\pi x_i)\cdot\cos(n\pi y_j)$$

$$= \underbrace{\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\cos(k\pi x_i)\cdot\cos(m\pi x_i)\right\}}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{se } k\neq m}}\underbrace{\left\{\sum_{j=0}^{M-1}\cos(l\pi y_j)\cos(n\pi y_j)\right\}}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{se } l\neq n}}$$

quindi $\underline{w}_{kl}\cdot\underline{w}_{mn} = 0$ a meno che $k=m$, $l=n$.

Si vede poi che

$$\|\underline{w}_{kl}\| = \|\underline{w}_k^{(N)}\|\cdot\|\underline{w}_l^{(M)}\|$$

infatti:

$$\|\underline{w}_{kl}\|^2 = \underbrace{\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\left[\cos(k\pi x_i)\right]^2\right\}}_{\|w_k^{(N)}\|^2} \cdot \underbrace{\left\{\sum_{j=0}^{M-1}\left[\cos(l\pi y_j)\right]^2\right\}}_{\|w_l^{(M)}\|^2}$$

dove abbiamo usato l'apice $^{(N)}$ e $^{(M)}$ per distinguere le due direzioni.

Quindi:

$$\|w_k^{(N)}\|^2 = \begin{cases} N & k=0 \\ \frac{N}{2} & k\neq 0 \end{cases} \qquad \|w_l^{(M)}\|^2 = \begin{cases} M & k=0 \\ \frac{M}{2} & k\neq 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\|\underline{w}_{00}\| = \sqrt{N\cdot M}$$

$$\|\underline{w}_{k0}\| = \sqrt{\frac{N}{2}}\cdot\sqrt{M} \qquad \|\underline{w}_{0l}\| = \sqrt{N}\cdot\sqrt{\frac{M}{2}} \qquad k,l\neq 0$$

$$\|\underline{w}_{kl}\| = \sqrt{\frac{N}{2}}\cdot\sqrt{\frac{M}{2}} \qquad k,l\neq 0$$

Se quindi (come prima) definiamo

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{\|\underline{w}_{kl}\|}, \quad \text{abbiamo:}$$

$$\alpha_{kl} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in dim}}}{\alpha_k^{(N)}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uno}}}{\alpha_k^{(M)}}$$

$$\alpha_k^{(N)} = \alpha_k = \left[\sqrt{\frac{1}{N}} \quad \sqrt{\frac{2}{N}} \quad \dots \dots \quad \sqrt{\frac{2}{N}}\right]$$

$$\alpha_{kl} = \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c|cccc} \sqrt{\frac{1}{N}}\sqrt{\frac{1}{M}} & \sqrt{\frac{1}{N}}\cdot\sqrt{\frac{2}{M}} & \dots & \sqrt{\frac{1}{N}}\cdot\sqrt{\frac{2}{M}} \\ \hline \sqrt{\frac{2}{N}}\sqrt{\frac{1}{M}} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cdot\sqrt{\frac{2}{M}} & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\sqrt{\frac{2}{M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{N}}\sqrt{\frac{1}{M}} & \sqrt{\frac{2}{N}}\sqrt{\frac{2}{M}} & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\sqrt{\frac{2}{M}} \end{array}\right] & \text{riga } 0 \\ \text{colonna } 0 & \end{array}$$

Se definiamo quindi $\tilde{\underline{w}}_{kl} = \alpha_{kl} \underline{w}_{kl}$

abbiamo una base ORTONORMALE.

DCT in due dimensioni.

$$z = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} z_{ij} \underline{e}_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} c_{kl} \underline{w}_{kl}$$

moltiplichiamo scalarmente per $\underline{w}_{mn}$:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} z_{ij} (\underline{w}_{mn})_{ij} = c_{mn} \|\underline{w}_{mn}\|^2$$

da cui

$$c_{kl} = \alpha_{kl}^2 \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} z_{ij} \cos(k\pi x_i) \cos(l\pi y_j)$$

che possiamo scrivere come

$$c_{kl} = \alpha_{kl} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \alpha_{kl} \sum_{j=0}^{M-1} z_{ij} \cos(l\pi y_j) \right] \cos(k\pi x_i)$$

la quantità tra parentesi quadre dipende da $i$; $[-] = [-]_i$

Nella parentesi quadra ci sono

$\left\{ \begin{array}{l} \text{DCT monodimensionali fatte su} \\ \text{un campione lungo } M \end{array} \right\}$

e di queste ne devo fare $N$.

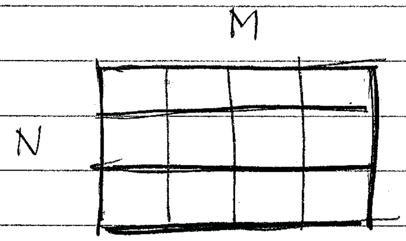
Poi mi resta $M \cdot \left( \begin{array}{l} \text{DCT monodimensionale} \\ \text{su un campione lungo } N \end{array} \right)$

Quindi,

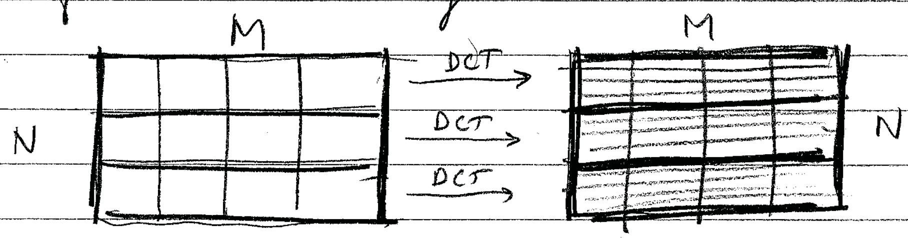
$$N \cdot DCT(M) + M \cdot DCT(N) \sim \boxed{2\,NM \text{ circa}}$$

Possiamo ragionare in questo modo.

Considero $z_{ij}$ come una matrice e la divido per righe.

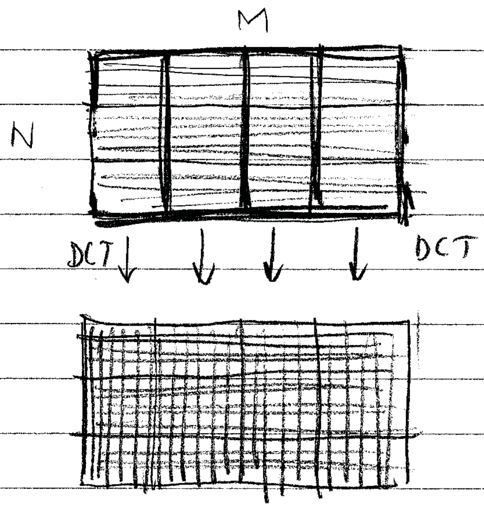



Trasformo le righe con una DCT monod.



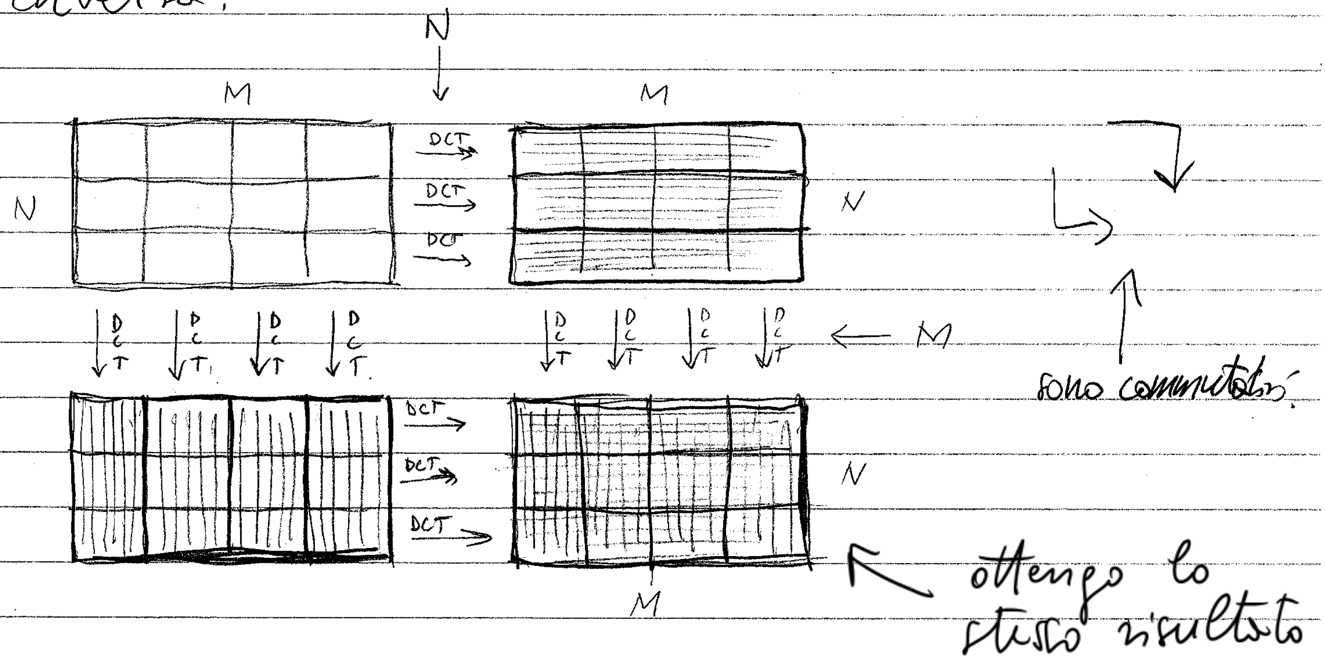

$N \cdot DCT(M)$

Poi prendo il risultato e lo divido in colonne e faccio la DCT sulle colonne:




$M \; DCT(N)$

Posso anche fare l'operazione inversa.




Se $N=M$ devo quindi fare $2N$ DCT monodimensionali

$\boxed{\text{se uso le FFT!}}$

$$\#op \sim 2N \cdot N \log N = 2N^2 \log N.$$

<u>Algoritmo</u> DCT 2 dim

| | |
|---|---|
| - copiare $z_{ij}$ in $c_{ij}$ | $c = z$ |
| - sostituire le RIGHE di $c$ con le loro trasformate | for $i = 0, N-1$<br>riga $i$ di $c \leftrightarrow$ DCT(riga $i$ di $c$)<br>end |
| - sostituire le COLONNE di $c$ con le loro trasformate | for $j = 0, M-1$<br>col. $j$ di $c \leftrightarrow$ DCT(col. $j$ di $c$)<br>end |

FINE