SERIE DI FOURIER

Sia f una funzione periodica di periodo p (cioè $f(x+p)=f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$).

Idea: scriverla come serie:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)\right)$$

Integriamola su $(0,p)$ (periodo)

[Facciamo vedere che l'integrale di una funzione periodica non dipende dal periodo:

$$\int_a^{a+p} f = \int_a^0 f + \int_0^p f + \int_p^{a+p} f. \quad \textcircled{*}$$

Ma: $\int_p^{a+p} f(t)\,dt$ (poniamo $s=t-p$) $=$

$$= \int_0^a f(s+p)\,ds = \int_0^a f = -\int_a^0 f$$

$$* = \int_0^p f$$

$$\int_0^p f = \int_0^p A_0 + \sum a_k \int_0^p \cos\left(\frac{2\pi k}{p} t\right) dt + \sum b_k \int_0^p \sin\left(\frac{2\pi k}{p} t\right)$$

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi k}{p} t\right) dt = \left[\left(\frac{p}{2\pi k}\right) \sin \frac{2\pi k}{p} t\right]_0^p = \frac{p}{2\pi k}\left\{\sin 2k\pi - \sin 0\right\} = 0$$

Idem per $\int_0^p \sin\left(\frac{2\pi k}{p} t\right) dt = 0. \quad \forall k \geq 1$

$$\int_0^p f(t) dt = p A_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(t) dt}$$

A_0 = valor medio.

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi k}{p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi q}{p} x\right) dx = 0$$

$\boxed{\text{DIM}}$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B - (\sin A \cos B - \cos A \sin B) =$$

$$= 2 \cos A \sin B$$

$$\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\right\}$$

$$\cos\left[\frac{2\pi k}{p} x\right] \cdot \sin\left[\frac{2\pi q}{p} x\right] = \frac{1}{2}\left\{\sin \frac{2\pi (k+q)}{p} x - \sin \frac{2\pi (k-q)}{p} x\right\}$$

e quindi $\int_0^p (\,) = 0 \quad \forall k, q.$

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi q}{p}x\right)\,dx$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B) = \cos A\cos B - \cancel{\sin A\sin B} + (\cos A\cos B + \cancel{\sin A\sin B})$$

$$= 2\cos A\cos B$$

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi q}{p}x\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^p \left\{ \underbrace{\cos\left[\frac{2\pi(k+q)}{p}x\right]}_{\underset{k+q\geq 2}{\overset{\parallel}{0}}} + \cos\left[\frac{2\pi(k-q)}{p}x\right] \right\} dx$$

$$= \qquad\qquad = 0 \quad \text{se} \quad k\neq q.$$

$k=q$

$$\int_0^p \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)\right]^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^p 1\cdot dx = \frac{p}{2}$$

$$\int_0^p \cos(\ ) = 0 \quad , \quad \int_0^p \sin(\ ) = 0$$

$$\int_0^p \cos(\ )\cdot\sin(\ ) = 0 \quad \text{sempre}$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^p \cos(\ )\cdot\cos(\ ) \\ \int_0^p \sin(\ )\cdot\sin(\ )\end{array}\right\} = \begin{cases} 0 & k\neq q \\ \frac{p}{2} & k=q \end{cases}$$

Ricordiamo:

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{p}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)\right)$$

abbiamo già trovato $A_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,dx$

Moltiplichiamo per $\cos\left(\frac{2\pi q}{p}x\right)$ e integriamo

(ovvero moltiplichiamo scalarmente per

$\cos\frac{2\pi q}{p}x$), $q \geq 1$.

$$\int_0^p f(x)\cdot\cos\left(\frac{2\pi q}{p}x\right)dx =$$

$$= \overbrace{\cancel{\int_0^p A_0 \cos_q(\;)\,dx}}^{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \overbrace{\int_0^p \cos_k(\;)\cos_q(\;)}^{\begin{cases}0 & k\neq q\\ p/2 & k=q\end{cases}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \overbrace{\cancel{\int_0^p \sin_k(\;)\cdot\cos_q(\;)}}^{=0}$$

$$\int_0^p f(x)\cdot\cos\left(\frac{2\pi q}{p}x\right)dx = a_q\cdot\frac{p}{2}$$

$$a_q = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cdot\cos\left(\frac{2\pi q}{p}x\right)dx$$

Analogamente:

$$b_q = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cdot \sin\left(\frac{2\pi q}{p}x\right)\,dx.$$

Quindi, a differenza di una serie di potenze, i coefficienti "esistono" a patto che f sia integrabile!

Ora rovesciamo la questione.

Sia f una funzione periodica con periodo p.

La serie trigonometrica di Fourier per f è la serie:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\cos(2\pi\omega_k t) + b_k\sin(2\pi\omega_k t)\right]$$

dove: $\omega_k = k/p$

$A_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,dx$ (media di f)

$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos(2\pi\omega_k x)\,dx$

$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin(2\pi\omega_k x)\,dx.$

(A_0, a_k, b_k) sono i coefficienti di Fourier per f. Sono definiti fintantoche

$\boxed{f \text{ è integrabile}}$

→ Assumiamo d'ora in poi f continua a tratti.

$FS[f]_t$ = Serie di Fourier di f calcolata in t.

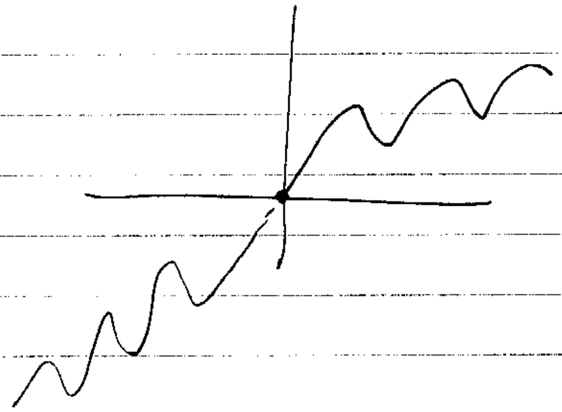
Teorema:
La serie di F. NON DIPENDE dal periodo, nel senso che una funzione periodica di periodo p è anche una funzione periodica di periodo $2p$, $-p$

Se scriviamo la serie di F. considerando $2p$ come periodo, OTTENIAMO LA STESSA SERIE.

Esempi.

Simmetria

① f dispari: $f(x) = -f(-x)$



Possiamo calcolare gli integrali su un qualunque periodo: (come visto a pag. 1)

$$A_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{+p/2} f(x)\,dx = 0 \quad \text{se } f \text{ è dispari}$$

Ora: $f(x)\cdot\cos(2\pi\omega_k x)$ è una funzione DISPARI:

$$f(-x)\cdot\cos(2\pi\omega_k(-x)) = -f(x)\cos(2\pi\omega_k x)$$

e quindi

$$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos(2\pi\omega_k x)\,dx = 0.$$

Inoltre $f(x)\cdot\sin(2\pi\omega_k x)$ è PARI e quindi

$$\int_{-p/2}^{p/2}(\;) = 2\int_0^{p/2}(\;).$$

- Quindi Teorema:

$\boxed{f \text{ dispari:}}$

* La serie di F. è di soli seni.

$A_0 = 0, \quad a_k = 0$

* $b_k = \frac{4}{p} \int_0^{p/2} f(x) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{p} x\right) dx$

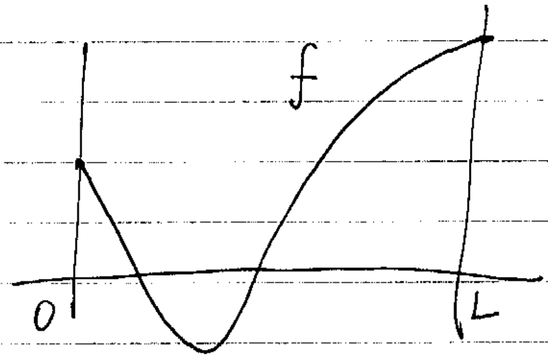
- $\boxed{f \text{ pari}}$

* La serie di F. è di soli coseni.

$b_k = 0$

* $A_0 = \frac{2}{p} \int_0^{p/2} f(x) dx, \quad a_k = \frac{4}{p} \int_0^{p/2} f(x) \cdot \left(\frac{2\pi k}{p} x\right) dx$

Serie di Fourier su un intervallo FINITO (f NON PERIODICA)



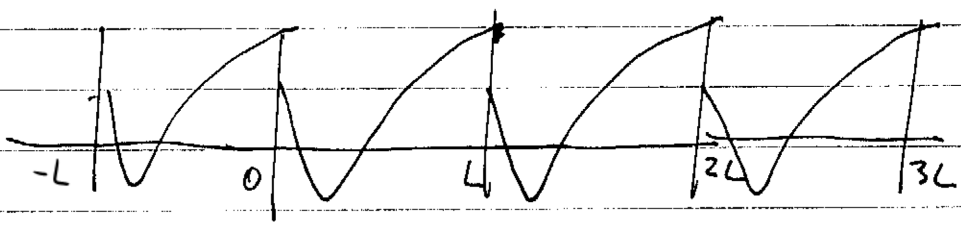
Idea: estendo f in modo periodico a $\hat{f}$ (cioè: $\hat{f}$ è periodica

$$\hat{f}\big|_{[0,L]} = f$$).

$\Rightarrow$ uso $FS[\hat{f}]$ che va bene anche su $[0,L]$

Ci sono tante estensioni possibili.

1) Estensione periodica base.

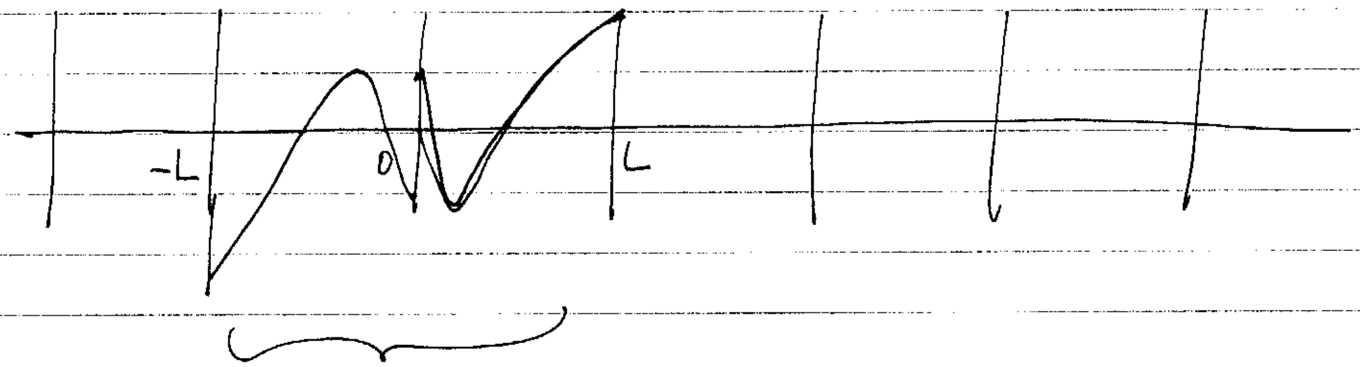


→ In generale $\hat{f}$ è DISCONTINUA.

$\hat{f}$ ha periodo L.

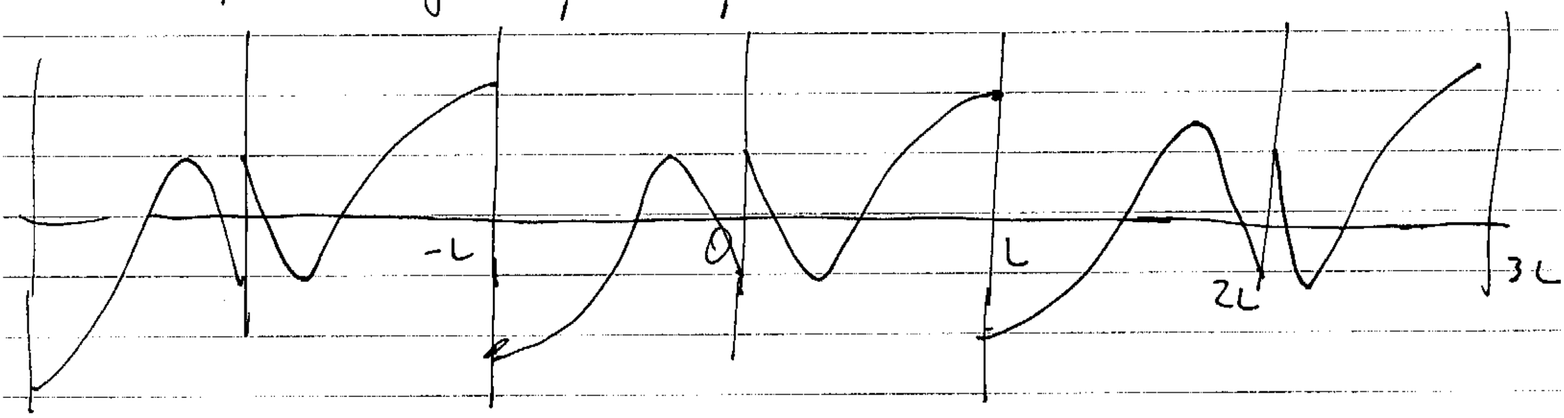
Ritroviamo le formule precedenti.

2) SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE + DUPLICAZIONE



prima genero una estensione DISPARI

Poi prolungo per periodicità



chiamiamola f_{odd}.

f_{odd} è dispari e $p = 2L$

$$A_0 = a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{p}\int_0^{p/2} f_{odd}(x)\cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)dx$$

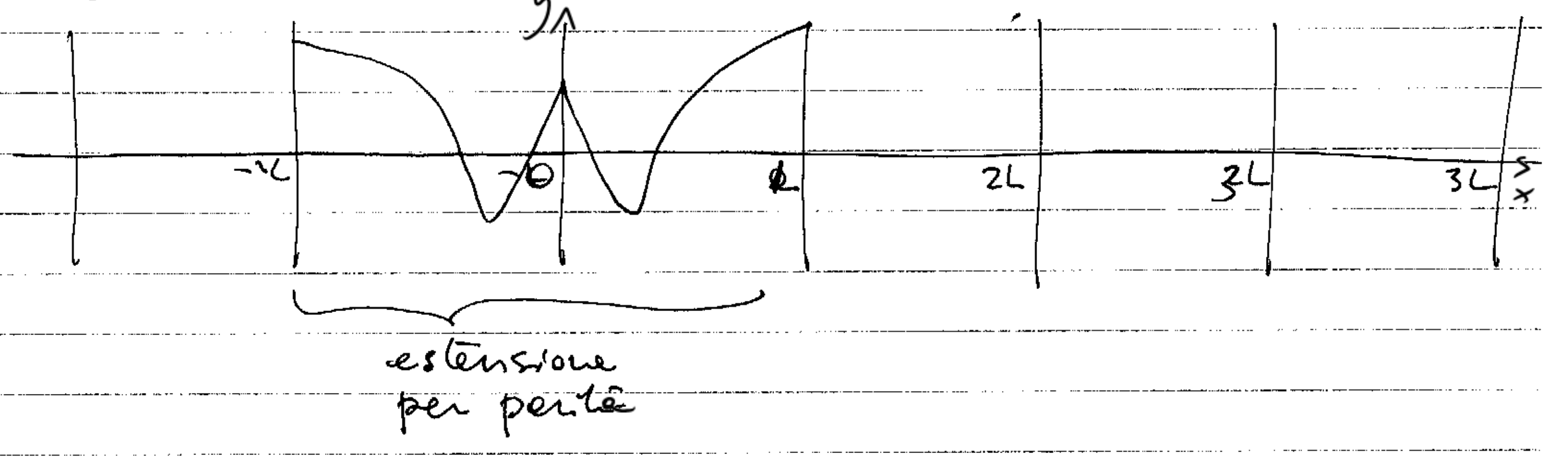
$p = 2L$

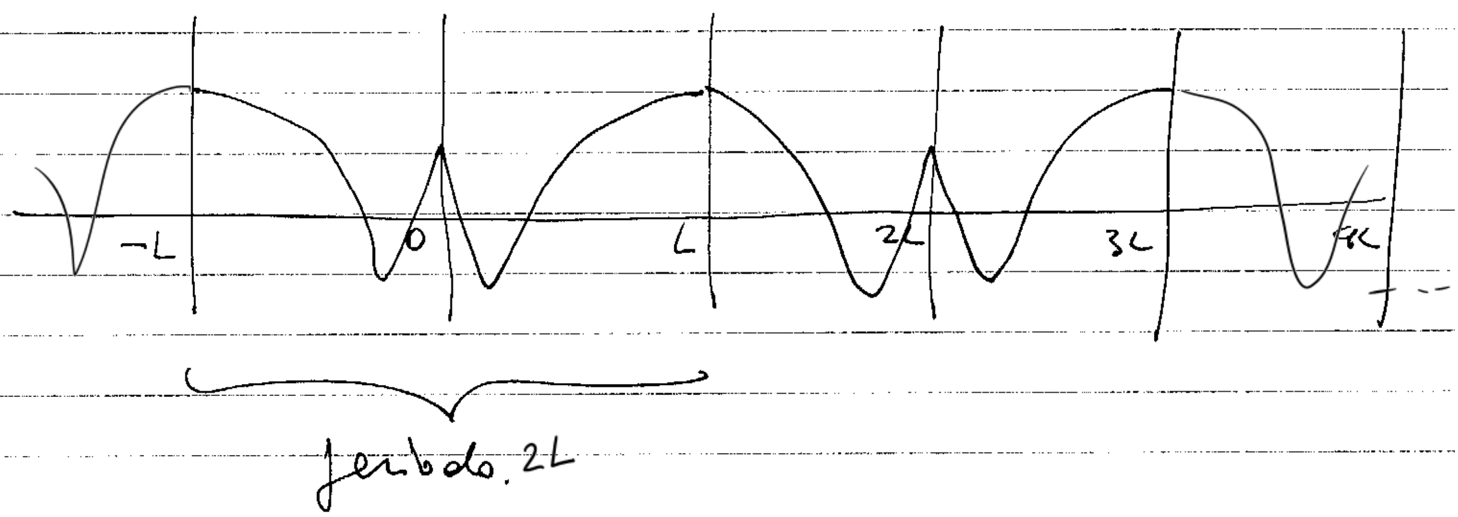
$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^{L} \underbrace{f_{odd}(x)}_{\substack{\| \\ f(x)}} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)dx$$

(siamo su $(0,L)$)

$$\boxed{FS_{sin}[f] = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx}$$

3) SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE y + DUPLICAZIONE





$$FS_{\cos}[f] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}\right) t$$

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)dt$$

Quale uso? $\int_\Omega \delta_{x_i}(x) f(x) = f(x_i)$

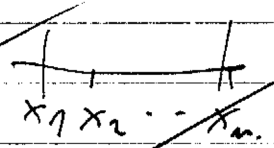
→ dipende.

In generale quella che

coseni NON HA DISCONTINUITA'.

(se f non le ha) → GIBBS!!

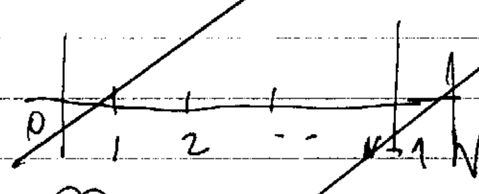
$f(x) = \cancel{\sum \alpha_i \delta_{x_i}}\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{x_i}$



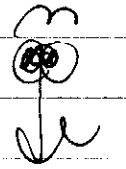
α

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{x_i}(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx = \sum \alpha_i \cos\left(\frac{k\pi}{L}x_i\right) \qquad x_i = \frac{i}{N}$$

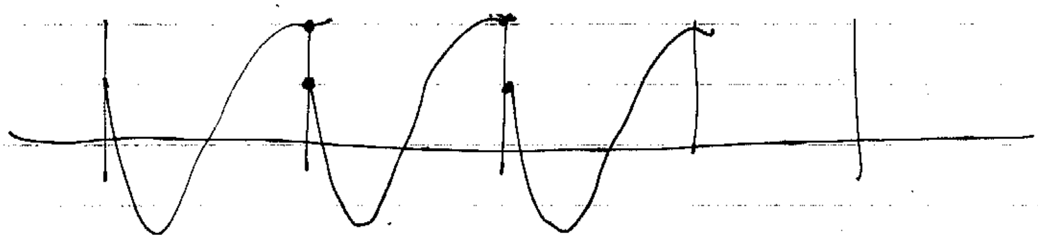
$$\sum \alpha_i \cos\left(\frac{k\pi}{N}x_i\right)$$



ΑΠΟ



- Rappr. Fourier funzione periodica.



$$f(x+p) = f(x)$$

$$A_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,dx$$

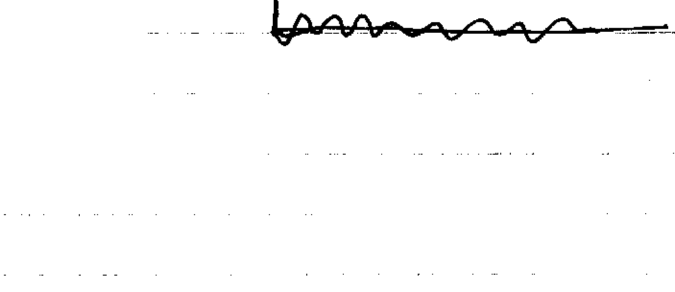
$$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)dx$$

$$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)dx$$

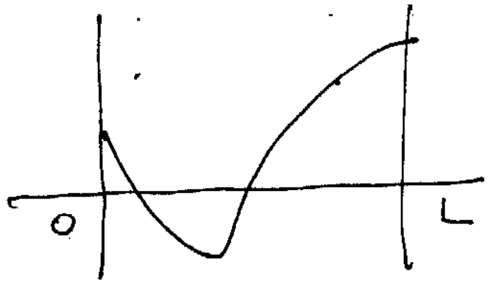
$$FS[f] = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{p}x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)$$

Proprietà -

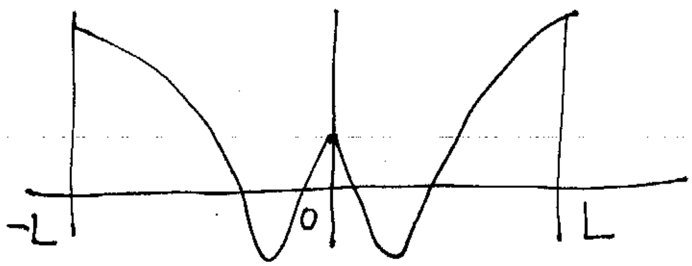
- convergenza ok dove f è C^1
- Gibbs sulle discontinuità.
- oscillazioni più pronunciate vicino alle discontinuità.



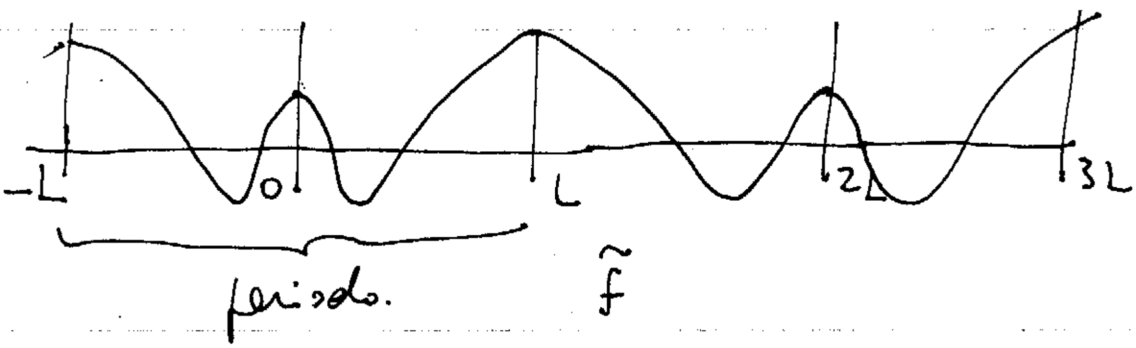
Serie di soli coseni



↓ parità.



↓ periodicità.



Periodo = $2L$

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \tilde{f}(x)\, dx = \frac{1}{L} \int_0^{L} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{2L} x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \cos\left(\frac{\pi k}{L} x\right) dx$$

$b_k = 0$ (sin è dispari).

→ Serie di soli coseni =

= quella che non ha

discontinuità alle estremità.

⇒ La convergenza è migliore.

⇒ Se la funzione che devo approssimare è $[0,L] \to \mathbb{R}$ senza proprietà ulteriori ⇒ meglio usare i coseni.

Trasformata di Fourier Discreta

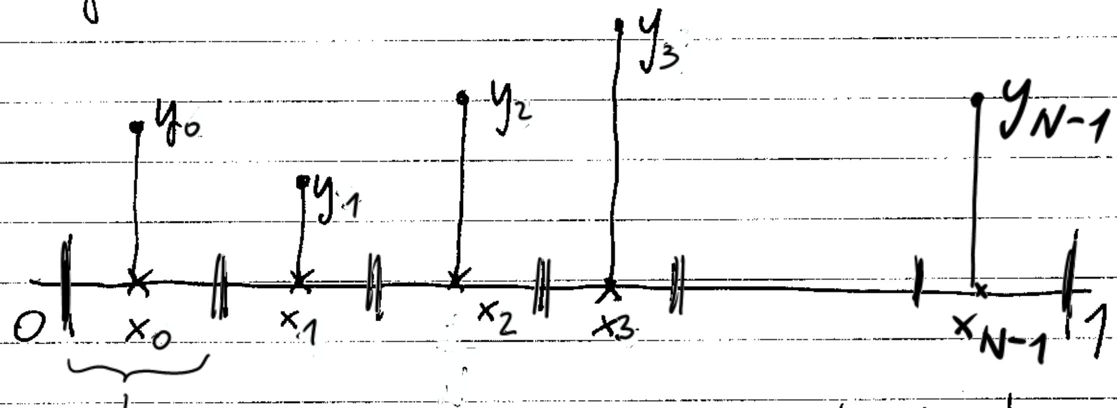
Faremo la trasf. COSENO per i motivi espressi sopra.

Supponiamo di avere un vettore lungo N che indicizziamo da 0 a $N-1$:

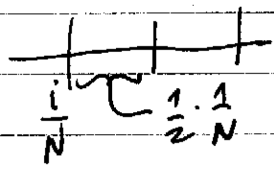
rappresentazione SPAZIALE

$$\underline{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}).$$

Immaginiamolo nell'intervallo $[0,1]$:



dividiamo in N parti.



immaginiamo i nostri punti presi in $x_i = \frac{i}{N} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{2i+1}{2N}$

Chiamiamo $\{\underline{e}_k\}$ la base canonica:

$$\underline{e}_k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-esimo}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Allora $\underline{y} = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \underline{e}_k$

$\{\underline{e}_k\}_{k=0}^{N-1}$ = base ortonormale:

$$(\underline{e}_k, \underline{e}_l) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l. \end{cases}$$

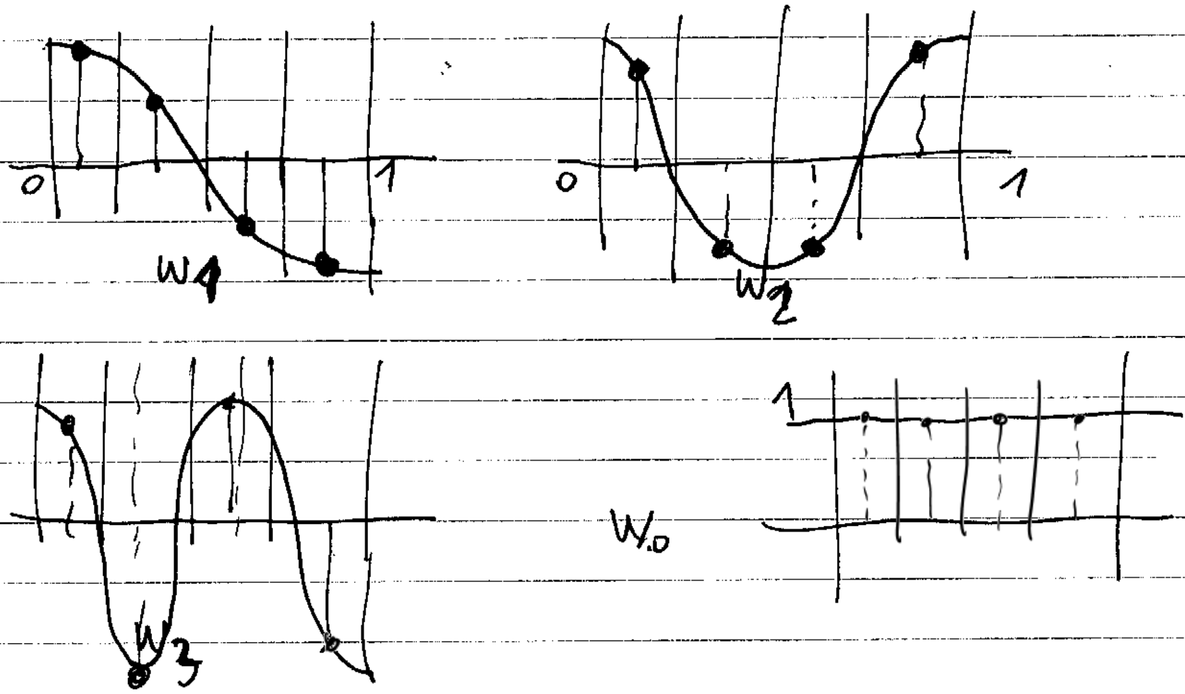
Vogliamo scrivere questo vettore in un'altra base, in modo che vengano messe in ordine le frequenze.

Idea: al variare di $k = 0, \dots, N-1$ consideriamo la funzione $\cos k\pi x$

($\rightarrow$ cfr. serie dei coseni: $L = 1$)

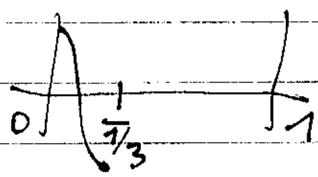
e consideriamo il vettore $\underline{w}_k$ la cui i-esima componente è $\cos(k\pi x_i)$:

$$(\underline{w}_k)_i = \cos(k\pi x_i) = \cos\left\{\frac{2i+1}{2N} k\pi\right\}$$



Teorema: i w_k sono ortogonali!!!

$\cos 3\pi$



Prodotto scalare di $\mathbb{R}^N$!!!

Teorema fondamentale: i $\underline{w}_k \in \mathbb{R}^N$ sono ORTOGONALI! cioè

$$\boxed{(\underline{w}_k, \underline{w}_\ell) = 0 \quad k \neq \ell}$$

$\Longleftrightarrow$ Analogo con le serie di F.

$$(w_k, w_\ell) = \sum [w_k]_i [w_\ell]_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \cos \frac{k\pi(2i+1)}{2N} \cdot \cos \frac{\ell\pi(2i+1)}{2N} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{(\ell-k)\pi(2i+1)}{2N} + \cos \frac{(\ell+k)\pi(2i+1)}{2N} \right\}$$

MOSTRIAMO CHE:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos \frac{q\pi(2i+1)}{2N} = 0 \qquad q \text{ intero} \quad \left(q = \begin{cases} \ell-k \\ \ell+k \end{cases} \right)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^N = \cos N\theta + i\sin N\theta \qquad \underline{\text{De Moivre}}$$

$$\cos N\theta = \mathrm{Re}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^N$$

$$\cancel{\cos\left[(2i+1)\frac{q\pi}{2N}\right] = \mathrm{Re}\left[\cos\frac{q\pi}{2N} + i\sin\frac{q\pi}{2N}\right]^{2i+1}}$$

$$\cancel{= \mathrm{Re}\, e^{i\frac{q\pi}{2N}(2i+1)}}$$

LEMMA:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N-1} \cos \frac{q\pi(2i+1)}{2N} = 0}$$

, q intero
$q \neq 0$

$$\cos \frac{q\pi(2i+1)}{2N} = \cos\left(\frac{q\pi \cdot 2i}{2N} + \frac{q\pi}{2N}\right) =$$

$$= \cos\left[i \cdot \frac{q\pi}{N} + \frac{q\pi}{2N}\right]$$

$$\cos\left(i\frac{q\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{q\pi}{2N}\right) - \sin\left(i\frac{q\pi}{N}\right)\sin\left(\frac{q\pi}{2N}\right)$$

$$\cos i\frac{q\pi}{N} = \mathrm{Re}\left(\cos\frac{q\pi}{N} + i\sin\frac{q\pi}{N}\right)^i$$

$$\sin i\frac{q\pi}{N} = \mathrm{Im}\left(\cos\frac{q\pi}{N} + i\sin\frac{q\pi}{N}\right)^i$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos\frac{q\pi(2i+1)}{2N} = \cos\frac{q\pi}{2N}\cdot \mathrm{Re}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\left(\cos\frac{q\pi}{N} + i\sin\frac{q\pi}{N}\right)^i\right]$$

$$- \sin\frac{q\pi}{2N}\,\mathrm{Im}\left[\qquad '' \qquad\right] = \circledast$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}[\cdot]^i = \frac{1-\left(\cos\frac{q\pi}{N} + i\sin\frac{q\pi}{N}\right)^N}{1-\left(\cos\frac{q\pi}{N} + i\sin\frac{q\pi}{N}\right)} = \begin{cases} \dfrac{2}{(\quad)} & q \text{ DISP} \\ 0 & q \text{ pari} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\left(1-\cos\frac{q\pi}{N}\right) - i\sin\frac{q\pi}{N}} & q \text{ DISPARI} \\ 0 & q \text{ PARI} \end{cases}$$

q dispari.

$$\sum_{i=0}^{N-1} [\cdot]^i = \frac{2}{\left(1-\cos\frac{q\pi}{N}\right) - i\sin\left(\frac{q\pi}{N}\right)} = \frac{2\left[\left(1-\cos\frac{q\pi}{N}\right) + i\sin\frac{q\pi}{N}\right]}{\left(1-\cos\frac{q\pi}{N}\right)^2 + \left(\sin\frac{q\pi}{N}\right)^2}$$

$$= \frac{2\left[\left(1-\cos\frac{q\pi}{N}\right) + i\sin\frac{q\pi}{N}\right]}{2-2\cos\frac{q\pi}{N}} = 1 + i\,\frac{\sin\frac{q\pi}{N}}{1-\cos\frac{q\pi}{N}}$$

$Re() = 1$ $\quad Im$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\circledast = \cos\frac{q\pi}{2N} - \sin\frac{q\pi}{2N}\cdot\frac{\sin\frac{q\pi}{N}}{1-\cos\frac{q\pi}{N}}$$

$$\left\{\cos\frac{q\pi}{2N} \underbrace{-\cos\frac{q\pi}{N}\cos\frac{q\pi}{2N} - \sin\frac{q\pi}{2N}\sin\frac{q\pi}{N}}_{-\cos\left(\frac{q\pi}{N}-\frac{q\pi}{2N}\right) = -\cos\frac{q\pi}{2N}}\right\} \Big/ \left(1-\cos\frac{q\pi}{N}\right)$$

e quindi $= 0$!!

Quindi $(\underline{w}_k, \underline{w}_\ell) = 0$ se $k \neq \ell$ e

$$\|\underline{w}_0\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left\{ 1 + 1 \right\} = N \quad \Rightarrow \quad \|\underline{w}_0\| = \sqrt{N}$$

$$\|\underline{w}_k\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cancel{\cos \frac{2k \cdot \pi (2i+1)}{2N}} \right\} = \frac{N}{2}.$$

$k \geq 0$

$\rightarrow$ la somma fa zero

Quindi:

$$\|w_0\| = \sqrt{N}$$

$$\|w_k\| = \sqrt{\frac{N}{2}} \qquad k \geq 1.$$

Definiamo: $\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} & k = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} & k \geq 1 \end{cases}$

FATTORE DI NORMALIZZAZIONE

in modo che $\|\alpha_k w_k\| = 1$

La nuova base ortonormale è $\{\tilde{w}_k\} = \{\alpha_k w_k\}$.

$\boxed{\text{DCT}}$

$$\underline{y} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \underline{e}_i = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \tilde{w}_k = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k c_k \underline{w}_k .$$

Moltiplichiamo scalarmente per $\tilde{\underline{w}}_\ell$.

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i (\underline{e}_i \cdot \tilde{\underline{w}}_\ell) = c_\ell$$

$$(\underline{e}_i \cdot \tilde{\underline{w}}_\ell) = (\tilde{\underline{w}}_\ell)_i = \alpha_\ell (\underline{w}_\ell)_i = \alpha_\ell \cos\left[\frac{\ell\pi(2i+1)}{2N}\right]$$

$$y_i \xrightarrow{DCT} c_k = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \alpha_k \cos\frac{k\pi(2i+1)}{2N}$$

$$= \alpha_k \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos\frac{k\pi(2i+1)}{2N}$$

trasformata discreta
del coseno.

IDCT

Partiamo ancora da

$$\underline{y} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \underline{e}_i = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \tilde{w}_k$$

e moltiplichiamo scalarmente per $\underline{e}_j$.

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \alpha_k (w_k)_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \alpha_k \cos \frac{k\pi(2j+1)}{2N}$$

$$\alpha_k \xrightarrow{IDCT} y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \alpha_k \cos \frac{k\pi(2j+1)}{2N}$$

Trasformata coseno <u>inversa</u>.

Estensione a 2 dimensioni.

$$\alpha_{k\ell} = \alpha_k \alpha_\ell = \begin{cases} \frac{1}{N} & k=\ell=0 \\ \frac{\sqrt{2}}{N} & k=0,\ \ell\neq 0 \text{ oppure } k\neq 0,\ \ell=0 \\ \frac{2}{N} & k\neq 0 \text{ e } \ell\neq 0 \end{cases}$$

$$\{\alpha_{k\ell}\} = \begin{bmatrix} 1/N & \frac{\sqrt{2}}{N} & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{N} \\ \frac{\sqrt{2}}{N} & \frac{2}{N} & \text{—} & \frac{2}{N} \\ \vdots & | & & \\ \frac{\sqrt{2}}{N} & \frac{2}{N} & \text{—} & \frac{2}{N} \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\tilde{w}}_{k\ell})_{ij} = \alpha_{k\ell} (\underline{w}_k)_i (w_\ell)_j$$

Teorema: $\{\underline{\tilde{w}}_{k\ell}\}$ sono ortonormali.

DIM:

$$\underline{\tilde{w}}_{k\ell} \cdot \underline{\tilde{w}}_{mn} = \sum_{i,j} (\tilde{w}_{k\ell})_{ij} (\tilde{w}_{mn})_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_k \alpha_\ell (w_k)_i (w_\ell)_j \alpha_{mn} (w_m)_i (w_n)_j =$$

$$= \sum_i \alpha_k (w_k)_i \alpha_m (w_m)_i \cdot \sum_j \alpha_\ell (w_\ell)_j \cdot \alpha_n (w_n)_j = \delta_{km} \delta_{\ell n}$$

$= 0$ se almeno 2 di k, ℓ, m, n sono diversi.

Quindi:

DCT 2:

$$\underline{y} = \sum_{i,j=0}^{N-1} y_{ij} \underline{e}_{ij} = \sum_{k,\ell=0}^{N-1} c_{k\ell} \underline{\tilde{w}}_{k\ell} \quad \cdot \quad \underline{\tilde{w}}_{m,n}$$

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} y_{ij} (\tilde{w}_{mn})_{ij} = c_{mn}$$

$$c_{mn} = \sum_{i,j=0}^{N-1} y_{ij} \, \alpha_m \alpha_n \cos \frac{m\pi(2i+1)}{2N} \cos \frac{n\pi(2j+1)}{2N}$$

$$y_{ij} \xrightarrow{DCT2} c_{k\ell} = \alpha_k \alpha_\ell \sum_{i,j=0}^{N-1} y_{ij} \cos \frac{k\pi(2i+1)}{2N} \cdot \cos \frac{\ell\pi(2j+1)}{2N}$$

Analogamente:

$$c_{k\ell} \xrightarrow{IDCT2} y_{ij} = \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \alpha_k \alpha_\ell \, c_{k\ell} \cos \frac{k\pi(2i+1)}{2N} \cos \frac{\ell\pi(2j+1)}{2N}$$