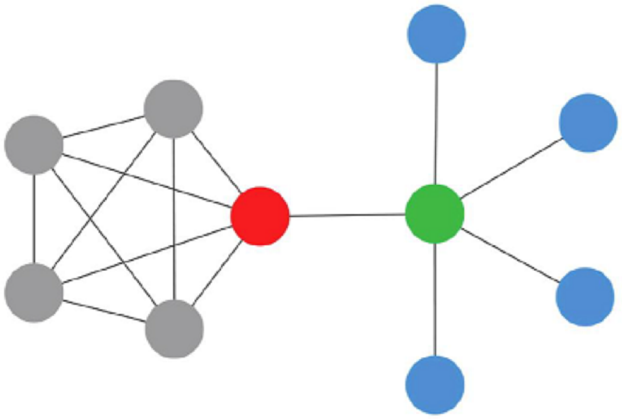
d. Compute (manually) each of the centrality measures for red, green, blue and grey nodes. Rank the nodes by each of the measures and explain the difference between gray and green nodes in terms of different centrality measures.



פתרון:

ראשית נעשה את המדדים לכל צבע:

אדום:

☆ Degree Centrality

לאדום 5 שכנים ולכן $DC = \frac{5}{9}$ ← n-1

☆ Closness Centrality

המרחק לכל אפור הוא 1 ויש 4 כאלה

המרחק לירוק הוא 1

המרחק לכל כחול הוא 2 ש 4 כאלה

לכן בסה״כ $CC = 9 \cdot \frac{1}{4\cdot 1+1\cdot 1+4\cdot 2} = \frac{9}{13}$

☆ Betweeness Centrality

לכל זוג שאינו כולל אדום נרצה לבדוק את היחס בין כמות ה shortest paths שעוברים דרך האדום, לבין כלל אלו:

זוג כחול-כחול: אין SP שעובר דרך האדום. (כנ״ל כחול-ירוק)

זוג אפור-אפור: אין SP שעובר דרך האדום.

זוג אפור-ירוק: יש 4 צירופים כאלה (לא משנה הסדר) ועבור כל זוג נוסיף +1 שכן כל ה SP עוברים דרך האדום.

זוג אפור כחול: יש $4^2 = 16$ כאלה בלי משמעות לסדר. וגם כאן $+1$
עבור כל זוג.

ולכן בסה״כ $BC = \frac{2}{8\cdot 9}\cdot(4+16) = \frac{40}{8\cdot 9} = \frac{5}{9}$

ירוק

✱ Degree Centrality

5 שכנים ולכן $\frac{5}{9}$

✱ Closness Centrality

מרחק לכל אפור הוא 2 ויש 4

מרחק לאדום 1

מרחק לכל כחול הוא 1 ויש 4

$$\Rightarrow \frac{9}{4\cdot 2+1\cdot 1+4\cdot 1} = \frac{9}{13}$$

Betweeness Centrality✱

זוג כחול-כחול: כל SP עובר דרך הירוק ויש $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ זוגות כאלה.

זוג כחול-אדום: כל SP עובר דרך הירוק. יש 4 זוגות

זוג כחול-אפור: 〃 〃 〃 〃 〃 〃 16 〃

זוג אפור-אפור/אפור-אדום: לא עובר דרך הירוק.

לכן בסה״כ $BC = \frac{2}{8\cdot 9}\cdot(6+4+16) = \frac{52}{8\cdot 9} = \frac{13}{18}$

-מכאן נקבל בסירוגל-

אפור

$DC = \frac{4}{9}$

$$CC = 9 \cdot \frac{1}{3\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot2 + 3\cdot4} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$BC = \frac{2}{8\cdot9} \cdot 0 = 0$$

כחול

$$DC = \frac{1}{9}$$

$$CC = 9\left(\frac{1}{4\cdot3 + 1\cdot2 + 1\cdot1 + 3\cdot2}\right) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$BC = \frac{2}{8\cdot9} \cdot 0 = 0$$

השוואה בין האדום לירוק

נשים לב כי מאחר שה- Closer & Degree Centralities זהים,
אנחנו מקבלים דרגת Betweenness שונה.
זה הגיוני כי בניגוד לאדום, הירוק הנו צומת הכרחי בחיבור הכחולים,
מאחר שהצמתים האפורים הם קליקה ובכך "מחברים" את האדום.

■

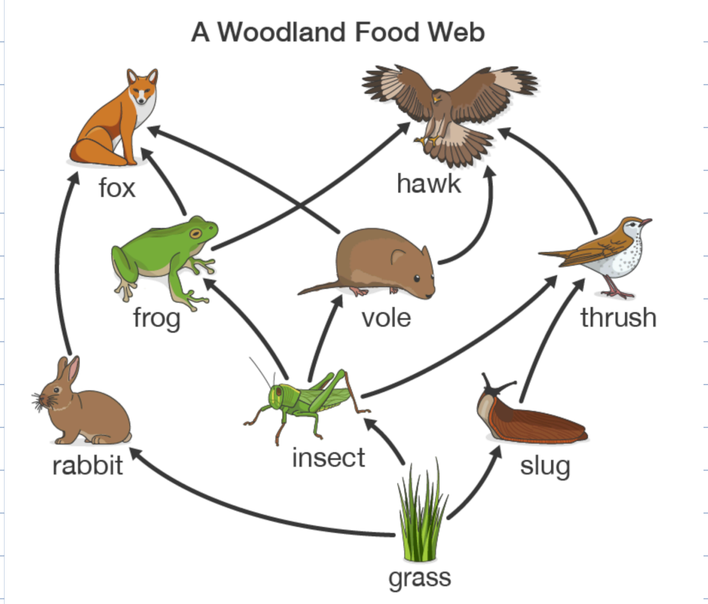
d. Think about a real-world example of a signed social network (up to 10 nodes). Present the network, explain the nodes and the edges. Check (manually) if the network follows the "Theory of Structural Balance" and explain the results.

e. Find a number N>3 (one example is enough) for which a complete graph with N nodes is balanced and has the same number of "+" edges and "-" edges.

פתרון:

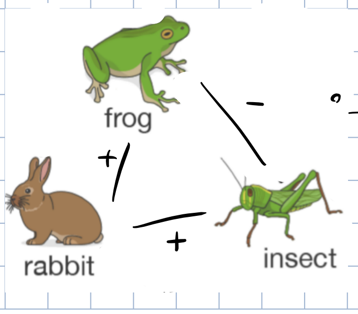
d) ניקח את הגרף הבא שמתאר שרשרת מזון בטבע:

$G =$



כעת נשנה את G לגרף שלם כאשר כל קשת חד-כיוונית תהפוך לקשת עם סימן "-" והיכן שאין קשת נשים קשת עם סימן "+".
למשל בין vole ל- slug יש קשת עם "+",
ובין grass ל- slug יש קשת עם "-".
המוטיבציה לבניית G כך היא, שאם חיה נאכלת ע' חיה אחרת - נרצה להחשיב אותם כאויבים. ואם לא - נחשיב אותם כחברים.

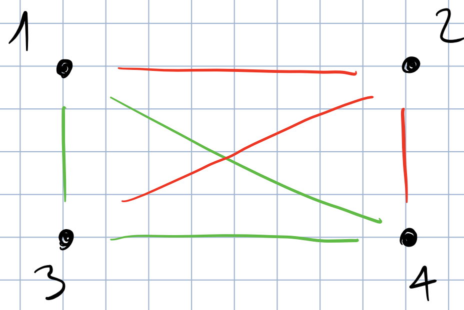
— נשים לב כי G לא מאוזנת לפי Thoery Of Balance:
נבחן במשולש frog-insect-rabbit ונשים לב:



במשולש זה מספר אי-זוגי של "-" ולכן אינו מאוזן.
ומאחר שמצאנו בעיה נסיק כי ל G אינו מאוזן.

∎

ש) ניקח N=4 ואת הגרף:



מספר הקשתות השליליות "-" (אדום) שווה למספר הקשתות החיוביות "+" (ירוק).

אלה כל המשולשים:

בלי 4   בלי 2   בלי 1   בלי 3

(1,2,3), (1,3,4), (2,3,4), (2,1,4)

ולכן בכל משולש יש 0 או 2 קשתות אדומות.

▨

Question #4:

A group of n people are connected to each other, and using 2 ways of communications – phone and mail. Prove that they can decide to use only one of these two ways and still all of them will be reachable to each other (not necessarily directly connected)

פתרון:

יהי G גרף מלא עם n קודקודים כאשר כל קשת עם תיוג "phone" או עם תיוג "mail". נוכיח כי ניתן למחוק את כל הקשתות בעלות אותו תיוג ועדיין לקבל גרף קשיר.

נניח שמחקנו את הקשתות עם התיוג "mail" (נסמן G_{phone})

אם הגרף עדיין קשיר, סיימנו.

אם לא, אזי יש $1<k\le n$ רכיבי קשירות שאין כל קשת עם תיוג "phone". נראה שאם נבחר למחוק את תיוג "phone" מהגרף המקורי (ולא את "mail" כמו שעשינו) אזי נקבל גרף קשיר:

נותר להראות כי G_{mail} קשיר:

יהיו u,v קודקודים בגרף. אם ב- G_{phone} u ו- v היו בשני רכיבי קשירות שונים, אזי בכלל לא הייתה ביניהם קשת עם תיוג mail, לכן יש קשת phone וסיימנו.

אם u,v היו באותו רכיב קשירות, אזי נבחר ב- w קודקוד מרכיב קשירות אחר (בהכרח יש כזה). אזי הקשתות (w,u), (w,v) לא עם תיוג "mail" ולכן בהכרח עם תיוג "phone".

לכן קיים המסלול בין u ל- v העובר דרך w.

ראינו כי G_{phone} ו- G_{mail} קשירים. ▨