



عنوان : گزارش تمرین دوم یادگیری ماشین

نگارنده : سحر داستانی اوغانی

شماره دانشجویی : ۹۹۱۱۲۱۰۸



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

در این قسمت با استفاده از تعریف نقاط در تبدیل $f(x)$ ، مقادیر w با ماژول SVC بدست آورده شده است:

```
X = np.array([[ -3,9], [ -1,1], [ 0,0], [ 1,1], [ 2,4], [ 4,16]])
y = np.array([1,1, -1, -1, -1, 1])
```

نقاط عبارتند از:

و w_0, w_1, w_2 نیز عبارتند از:

```
w = [ -1.33333333  0.66666667]
b = [ -1.]
```

در این قسمت از دیتاستی استفاده شده است که دارای مقادیر عددی است و ۲ کلاس دارد. این دیتاست اطلاعات بیماران مختلف را جمع‌آوری کرده و خروجی را بر اساس بیمار بودن فرد یا سالم بودن آن نمایش می‌دهد. بیمار بودن فرد را بر اساس سنجش سرطان سینه، گزارش می‌دهد.

۹ ویژگی را برای هر بیمار سنجیده و آن‌ها را در ۹ ستون دیتاست جاداده است. (سن، BMI، گلوکز، انسولین،...)

داده‌های این ۹ ستون در متغیر X و داده‌های ستون آخر در متغیر y قرار می‌گیرد. (ستون y نتایج را با دو عدد ۱ و ۲ نمایش می‌-

دهد، ۱ نشان دهنده‌ی سالم بودن فرد و ۲ نمایش دهنده‌ی بیمار بودن وی است.)

داده‌ها به ۳ دسته‌ی $train, test, validation$ تقسیم‌بندی شدند و درصد اختصاص داده شده به هر یک از آن‌ها به شرح زیر

Train	70%
Validation	20%
Test	10%

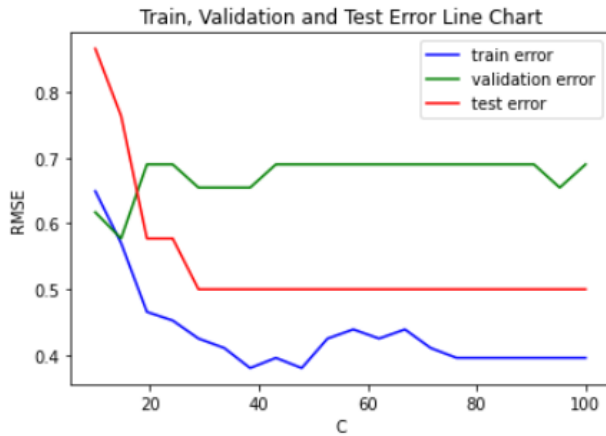
است:

C را با عنوان جریمه‌ی svm به شکل زیر تعریف کردیم:

۲۰ عدد را در بازه‌ی ۰ تا ۱۰۰ به عنوان مجموعه‌ی C در نظر گرفتیم.

```
array([ 10.          , 14.73684211, 19.47368421, 24.21052632,
        28.94736842, 33.68421053, 38.42105263, 43.15789474,
        47.89473684, 52.63157895, 57.36842105, 62.10526316,
        66.84210526, 71.57894737, 76.31578947, 81.05263158,
        85.78947368, 90.52631579, 95.26315789, 100.          ])
```

حال با استفاده از ماژول svm مدلی بر روی داده‌های train ست کردیم و به ازای هر c خطای train, validation, test را بدست آوریم. خطاهای هر روه در نمودار زیر برای C های مختلف نمایش داده شده است:



این نمودار مشخص می‌کند که با افزایش مقدار C، مقادیر خطای train, test کاهش یافته و در مرحله‌ای به بعد این مقادیر می‌توانند ثابت قلمداد شوند. خطای validation نیز در ابتدا مقداری کاهش یافته و سپس شاهد افزایش در آن هستیم.

۲-ب

برای بدست آوردن مقادیر و تعداد support vectorها از توابعی در scikit learn استفاده کردیم، نتایج به شرح زیر است:

- تعداد : `array([31, 31])`

- اندیس‌های support vectorها در بردار اصلی:

```
array([ 3,  5,  6,  7,  9, 10, 11, 15, 29, 30, 31, 32, 34, 39, 40, 43, 45,
        46, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 65, 69, 74, 75, 76, 80, 82,  2,  4,  8,
        12, 13, 17, 19, 20, 21, 24, 26, 35, 36, 38, 41, 42, 44, 50, 57, 58,
        60, 61, 63, 66, 67, 71, 72, 73, 77, 78, 81])
```

```
array([[6.90000000e+01, 3.50927015e+01, 1.01000000e+02, 5.64600000e+00,
        1.40660680e+00, 8.34821000e+01, 6.79698500e+00, 8.21000000e+01,
        2.63499000e+02],
       [6.90000000e+01, 3.25000000e+01, 9.30000000e+01, 5.43000000e+00,
        1.24564200e+00, 1.51450000e+01, 1.17879600e+01, 1.17879600e+01,
        2.70142000e+02],
       [2.50000000e+01, 2.28600000e+01, 8.20000000e+01, 4.09000000e+00,
        8.27270667e-01, 2.04500000e+01, 2.36700000e+01, 5.14000000e+00,
        3.13730000e+02],
       [6.00000000e+01, 2.63492921e+01, 1.03000000e+02, 5.13800000e+00,
        1.30539453e+00, 2.42998000e+01, 2.19428000e+00, 2.02535000e+01,
        3.78996000e+02],
       [2.40000000e+01, 1.86700000e+01, 8.80000000e+01, 6.10700000e+00,
        1.33000000e+00, 8.88000000e+00, 3.60600000e+01, 6.85000000e+00,
        6.32220000e+02],
       [7.60000000e+01, 2.71000000e+01, 1.10000000e+02, 2.62110000e+01,
        7.11191800e+00, 2.17780000e+01, 4.93563500e+00, 8.49395000e+00,
        4.58430000e+01],
       [6.80000000e+01, 2.13675214e+01, 7.70000000e+01, 3.22600000e+00,
        6.12731033e-01, 0.88370000e+00, 7.16056000e+00, 1.27660000e+01]])
```

- Support vectorها:

ادامه‌ی آن‌ها را نیز می‌توانید در

متن کد ببینید.

برای تغییر در اندازه‌ی داده آموزشی، به شکل زیر عمل می‌کنیم:

به یاد داریم در مرحله‌ی قبل، داده‌ها را به دو دسته‌ی `test, train` تقسیم کردیم. حال داده‌های `train` را به دو دسته‌ی `train2`

`val1`، تقسیم می‌کنیم و در نهایت داده‌های `train2` را به دو دسته‌ی `train_reduced, garbage` تقسیم می‌کنیم در این

صورت به جای ۷۰٪، ۵۰٪ داده‌ی آموزشی داریم:

با این شیوه اندازه‌ی داده‌های آموزشی را کاهش دادیم.

اگر عملیات گذشته را روی آن تکرار کنیم نتایج به شرح زیر می‌گردد.

Train	50%
garbage	20%
Validation	20%
Test	10%

تحلیل:



مشاهده می‌کنید که مقدار خطای `train` کاهش یافته است

ولی به صفر نرسیده. از طرفی خطای `test` نیز شاهد افت در

مقدار خود بوده است. این ویژگی‌ها نمی‌تواند `overfitting` را

تضمین کند، بنابراین با کاهش داده‌های آموزشی در این

دیتاست، شاهد `overfitting` نخواهیم بود.

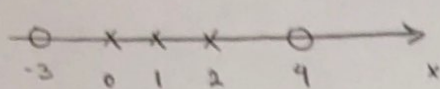
می‌توان نیز مشاهده کرد که مقدار خطای داده‌های

`validation` با کاهش مقدار داده‌های آموزشی، کاهش یافته

است.

پاسخ تمارین تشریحی

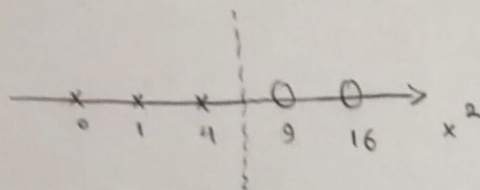
الف) یک تبدیل مناسب $\Phi(x)$ برای قابل محاسب شدن داده‌های مذکور در یک بعد بنویسید.



داده‌های داده شده در سؤال به صورت مقابل دسته بندی کرد. x ها قرار دارند.

مشخص است که این داده‌ها به صورت قطعی قابل جدا سازی نمی باشند.

پس برای آن‌ها از فرم است $\Phi(x)$ آن‌ها را با استفاده از تبدیل $\Phi(x) = x^2$ به فضای دیگری منتقل کرد. در این صورت



$$P_1 = (0, 0)$$

با رابطه با خط جدا می شوند.

$$P_2 = (1, 0)$$

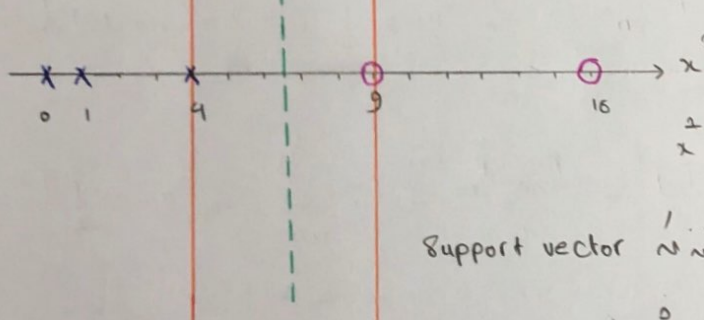
$$P_3 = (4, 0)$$

$$P_4 = (9, 0)$$

$$P_5 = (16, 0)$$

ب) نقاط مذکور را در دستگاه تبدیل یافته ی مربوط به سمت الف رسم کنید. پس می خواهیم SVM و بردارهای پشتیبان

را رسم کنید.



نقاط مذکور در دستگاه تبدیل یافته به شرح مقابل است:

$$x = \frac{4+9}{2} = 6.5$$

حرف جدا کننده یافت می شود. $x = 6.5$ است.

نقطه ی تفریق داده ها به حرف جدا کننده بستار، داده های 4 و 9 می باشد. Support vector

نامیده می شوند. Support Vector ها با خط تفریق مشخص شده اند.

ج) با تبدیل معکوس، می خواهیم SVM و بردارهای پشتیبان را در دستگاه اولیه (مطلوب) رسم کنید (این جدا کننده را

حرف تفریق برد)

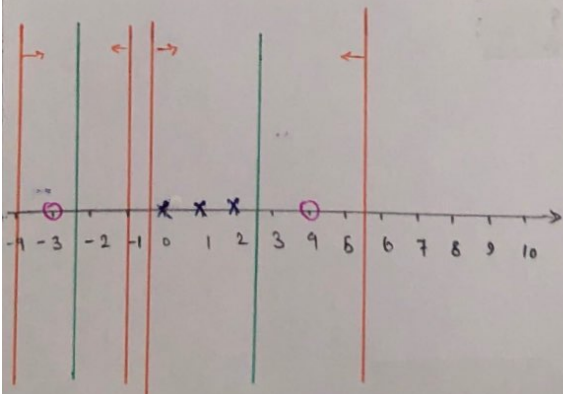
حرف جدا کننده در دستگاه تبدیل یافته برابر با $x^2 = 6.5$ بود. این حرف در دستگاه اولیه مقدار زیر را دارد:

$$x = \pm \sqrt{6.5} \approx \pm 2.5$$

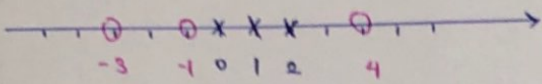
بردارهای پشتیبان بستار، تفریق تفریق نقاط به معطای جدا کننده است. یعنی:

$$\frac{2+4}{2} = 3 \leftarrow x = 2 \leftarrow x = 2.5$$

$$\frac{-3+0}{2} = -1.5 \leftarrow x = 0 \leftarrow x = -2.5$$



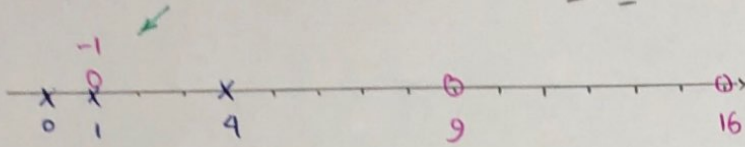
(> داده آموزشی به مجموعه داده‌ها طبق سبک زیر امکان می‌کند:



ه) آیا سبک $\phi(x)$ برای جدا سازی این داده‌ها بطور قطعی مناسب است؟

خیر زیرا تابع سبک $\phi(x) = x^2$ داده‌های -1 و 1 را به 1 تبدیل می‌کند. بنابراین در داده‌ها در کلاس مختلف

نویسند و در واقع می‌شوند، جدا سازی آن‌ها با سبک فوق امکان پذیر نیست.



و) همان داده‌های در فضای دوبعدی $(x_1, \phi(x_1))$ را در نظر بگیرید. این 6 داده با یک خط جدا سازی SVM

در فضای دوبعدی رسم می‌کنیم و بردارهای پشتیبان را مشخص می‌کنیم.

ز) مرز جدا کننده یافت می‌شود، بردارهای پشتیبان با خطوط زرد مشخص می‌شوند.

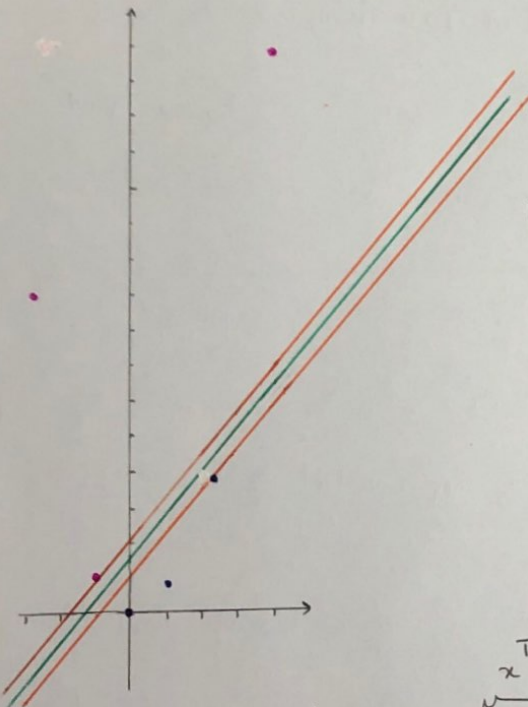
$$h(w, w_0, \alpha) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + \sum_{n=1}^N \alpha_n (1 - y^{(n)} (w^T x^{(n)} + b))$$

برای حل آن، تعادلی زیر را در معادله جایز می‌کنیم:

$$P = \left[\underbrace{(-3, 9)}_{\text{کلاس } +1}, \underbrace{(-1, 1)}_{\text{کلاس } +1}, \underbrace{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (4, 16)}_{\text{کلاس } -1} \right]$$

بنابراین سبک معادله به صورت زیر می‌شود:

← Primal مسئله



$$= \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{n=1}^N \alpha_n y^{(n)} \underbrace{w^T x^{(n)}}_{x^T w} - b \sum_{n=1}^N \alpha_n y^{(n)} + \sum_{n=1}^N \alpha_n$$

$$= \frac{1}{2} [w_1, w_2] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + -\alpha_1 [-3, 9] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + -\alpha_2 [-1, 1] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \alpha_3 [0, 0] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \alpha_4 [1, 1] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \alpha_5 [2, 4] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + -\alpha_6 [4, 16] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} - b (+\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + -\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$+ \alpha_5 + \alpha_6$$

↓ ادامه

$$= \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \alpha_1 (-3\omega_1 + 9\omega_2) + \alpha_2 (-\omega_1 + \omega_2) - \alpha_3 (0) - \alpha_4 (\omega_1 + \omega_2) - \alpha_5 (2\omega_1 + 4\omega_2) + \alpha_6 (4\omega_1 + 16\omega_2) + \alpha_1 (b+1) + \alpha_2 (b+1) + \alpha_3 (1-b) + \alpha_4 (1-b) + \alpha_5 (1-b) + \alpha_6 (b+1)$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \frac{dL}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega^* = \sum_{n=1}^N \alpha_n y^{(n)} x^{(n)}$$

نقاط را در عبارات معادله جایگزین می‌کنیم

$$\textcircled{2} \frac{dL}{db} = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^N \alpha_n y^{(n)} = 0$$

$$\textcircled{1} \omega^* = \sum_{n=1}^6 \alpha_n y^{(n)} x^{(n)} = -\alpha_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix} - \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \alpha_6 \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^6 \alpha_n y^{(n)} = 0 \rightarrow -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 = 0$$

$$\max \sum_{n=1}^N \alpha_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \alpha_n \alpha_m y^{(n)} y^{(m)} x^{(n)T} x^{(m)}$$

← Dual Solution

$$\text{s.t. } \sum \alpha_n y^{(n)} = 0$$

$$\alpha_n \geq 0$$

$$= -\frac{1}{2} \left[90\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 - 6\alpha_1\alpha_4 - 30\alpha_1\alpha_5 + 132\alpha_1\alpha_6 + 12\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_5 + 12\alpha_2\alpha_6 - 6\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_4^2 + 6\alpha_4\alpha_5 - 20\alpha_4\alpha_6 - 30\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_5 + 6\alpha_4\alpha_5 + 20\alpha_5^2 - 72\alpha_5\alpha_6 + 132\alpha_1\alpha_6 + 12\alpha_2\alpha_6 - 20\alpha_4\alpha_6 - 72\alpha_5\alpha_6 + 272\alpha_6^2 \right] + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$$

$$[-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 = 0]$$

توجه: این قسمت (ر) به دلیل محاسبات طولانی به پایین زده شده است. نتایج آن در زیر آمده است:



