

**Отчёт по лабораторной работе**  
**Метод градиентного спуска**

## 1 Постановка задачи

В работе реализуется метод градиентного спуска для минимизации следующих функций:

$$\begin{aligned} J_1(x, y) &= x^2 + y^2, \\ J_2(x, y) &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \\ J_3(x, y) &= 70(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1, \\ J_4(x, y) &= (x - 8)^2 + (y - 1)^2 + 70(y + (x - 8)^2 - 1)^2 + 1, \end{aligned}$$

где параметры  $a, b$  задают большую и малую полуоси эллипса во второй функции.

Метод градиентного спуска настраивается по:

- начальной точке  $x_0 = (x_0, y_0)$ ;
- режиму выбора шага  $h_k$ ;
- значению шага  $h$  (или параметрам  $c, \alpha$  для убывающих шагов);
- критерию остановки: по числу итераций, по норме разности векторов  $\|x_{k+1} - x_k\|$ , по изменению функционала  $|J(x_{k+1}) - J(x_k)|$ .

## 2 Описание метода

На  $k$ -й итерации метода градиентного спуска вычисляется шаг

$$x_{k+1} = x_k - h_k \nabla J(x_k),$$

где  $h_k$  выбирается в одном из следующих режимов:

- постоянный шаг:  $h_k = h$ ;
- убывающий шаг вида

$$h_k = c(1 + k)^{-\alpha}, \quad c > 0, \quad 0.5 < \alpha \leq 1;$$

- шаг вида

$$h_k = \frac{c}{k + 1}, \quad c > 0,$$

удовлетворяющий условиям

$$h_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_k^2 < \infty.$$

Критерии остановки:

- ограничение сверху на число итераций  $k_{\max}$ ;
- достижение малой нормы приращения аргумента:

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon_x;$$

- достижение малой разности значений функционала:

$$|J(x_{k+1}) - J(x_k)| < \varepsilon_f.$$

В реализованном коде используются значения

$$\varepsilon_x = 10^{-6}, \quad \varepsilon_f = 10^{-6},$$

а максимальное число итераций выбирается равным  $k_{\max} = 20000$ .

### 3 Численные эксперименты

Для каждой функции рассматриваются два режима шага:

- постоянный шаг ( $h_k = h$ );
- убывающий шаг вида  $h_k = c(1 + k)^{-\alpha}$ .

Отдельно демонстрируется режим  $h_k = c/(k + 1)$  на функции  $J_1$ .

Начальные точки и значения шагов:

- $J_1$ :  $x_0 = (5, 5)$ , постоянный шаг  $h = 0.2$ , убывающий шаг  $h_k = 0.5(1 + k)^{-0.6}$ ;
- $J_2$ :  $x_0 = (5, 3)$ , постоянный шаг  $h = 0.2$ , убывающий шаг  $h_k = 0.5(1 + k)^{-0.6}$ ;
- $J_3$ :  $x_0 = (-5, 5)$ , постоянный шаг  $h = 0.01$ , убывающий шаг  $h_k = 0.5(1 + k)^{-0.9}$ ;
- $J_4$ :  $x_0 = (8, 3)$ , постоянный шаг  $h = 0.001$ , убывающий шаг  $h_k = 0.05(1 + k)^{-0.9}$ ;
- демонстрация шага  $h_k = \frac{0.5}{k + 1}$  для  $J_1$ .

### 3.1 Функция $J_1(x, y) = x^2 + y^2$

#### Траектории на плоскости

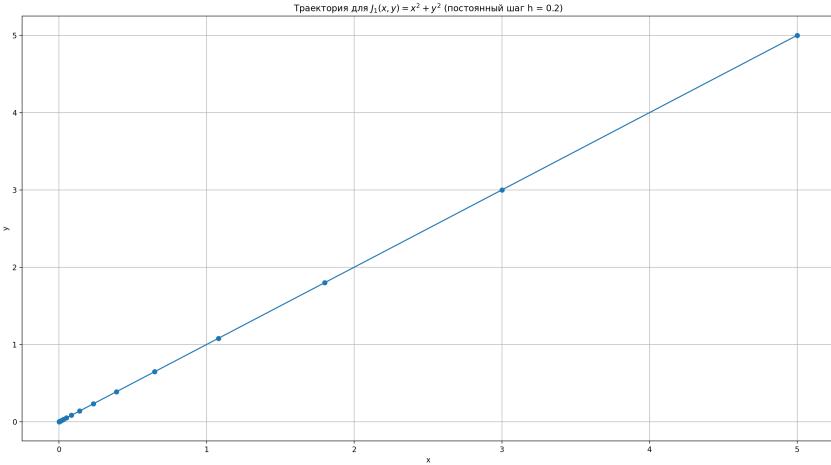


Рис. 1: Траектория градиентного спуска для  $J_1$  при постоянном шаге (файл f1\_traj\_constant.png).

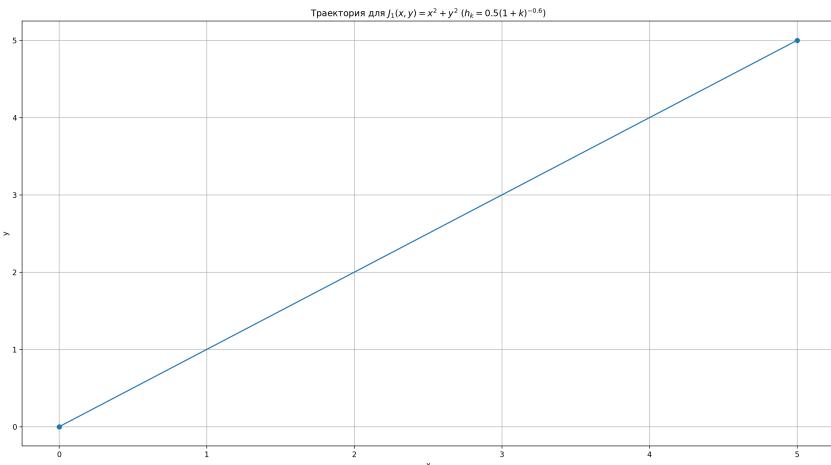


Рис. 2: Траектория градиентного спуска для  $J_1$  при убывающем шаге  $h_k = 0.5(1 + k)^{-0.6}$  (файл f1\_traj\_power.png).

Если используется демонстрация режима  $h_k = 0.5/(k + 1)$ , то соответствующий график траектории:

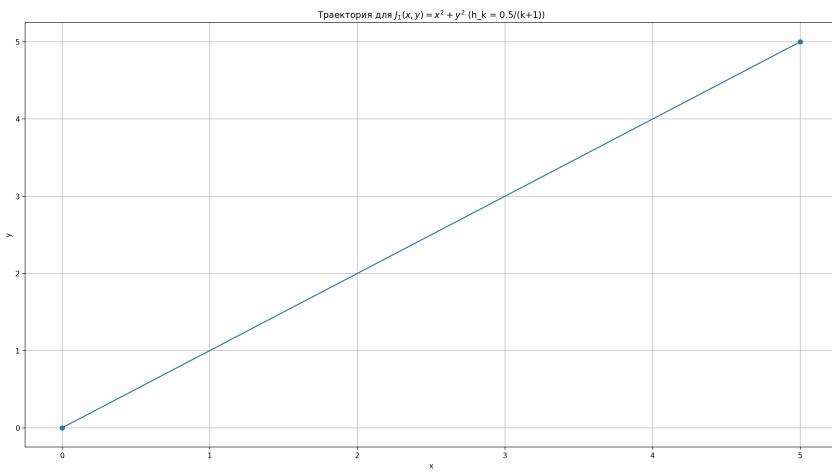


Рис. 3: Траектория градиентного спуска для  $J_1$  при шаге  $h_k = 0.5/(k+1)$  (файл f1\_traj\_1\_over\_k.png).

### Убывание значения функционала $J_1(x_k)$

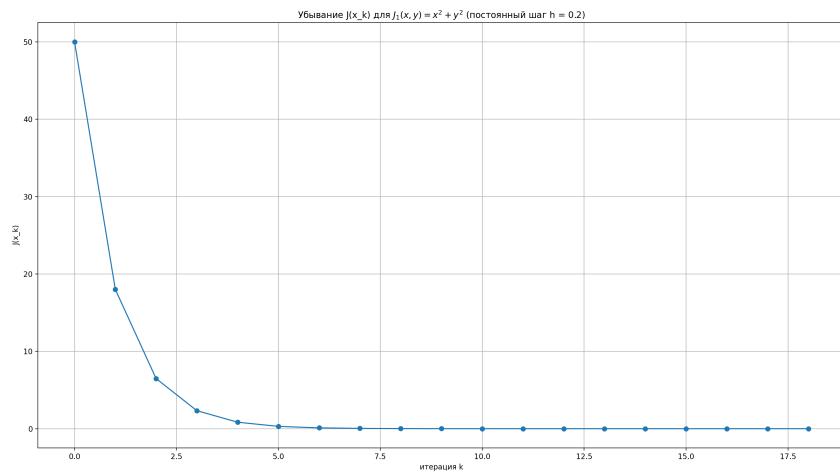


Рис. 4: График убывания  $J_1(x_k)$  при постоянном шаге (файл f1\_J\_constant.png).

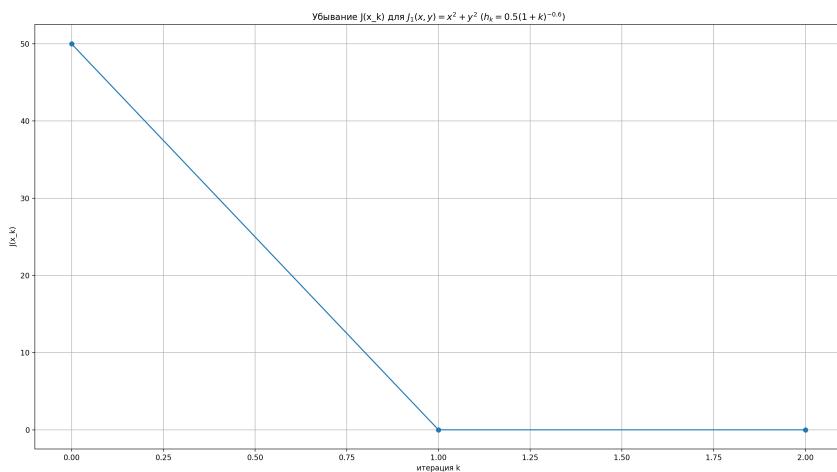


Рис. 5: График убывания  $J_1(x_k)$  при убывающем шаге  $h_k = 0.5(1 + k)^{-0.6}$  (файл f1\_J\_power.png).

При необходимости:

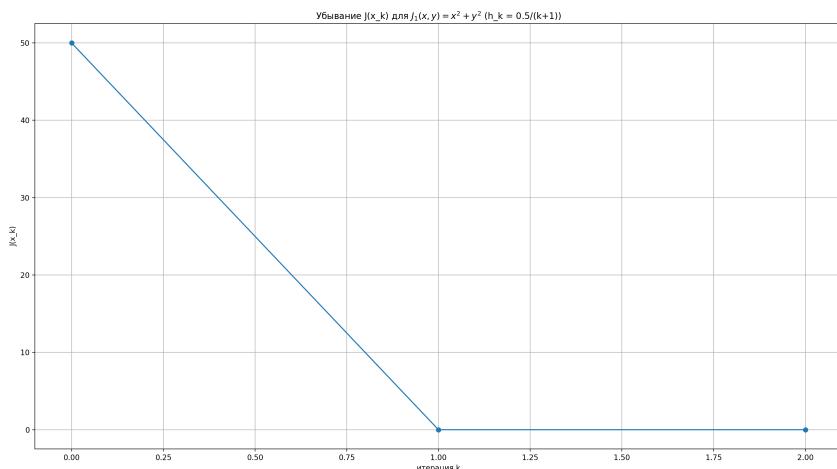


Рис. 6: График убывания  $J_1(x_k)$  при шаге  $h_k = 0.5/(k+1)$  (файл f1\_J\_1\_over\_k.png).

### 3.2 Функция $J_2(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

#### Траектории на плоскости

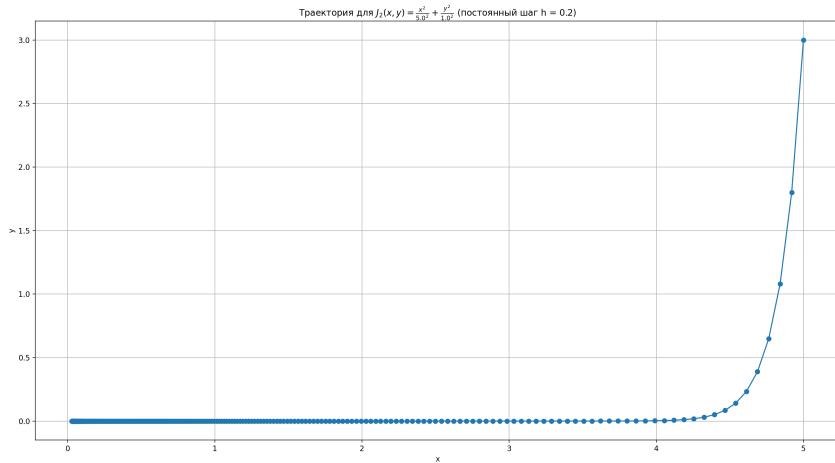


Рис. 7: Траектория градиентного спуска для  $J_2$  при постоянном шаге (файл f2\_traj\_constant.png).

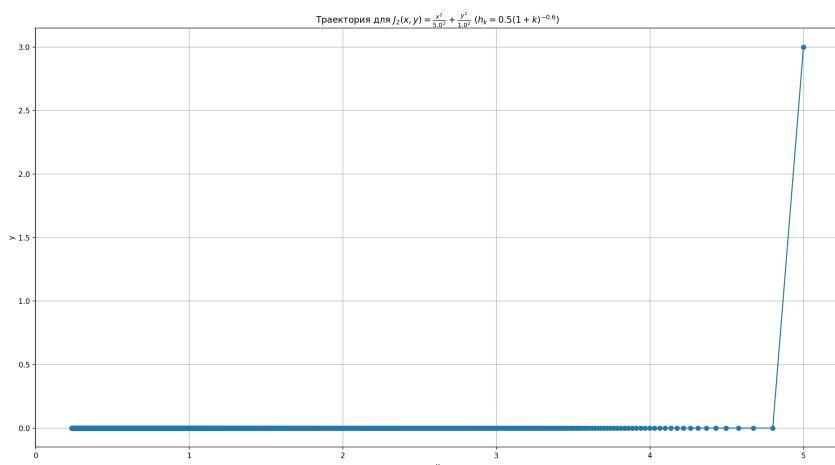


Рис. 8: Траектория градиентного спуска для  $J_2$  при убывающем шаге  $h_k = 0.5(1+k)^{-0.6}$  (файл f2\_traj\_power.png).

## Убывание $J_2(x_k)$

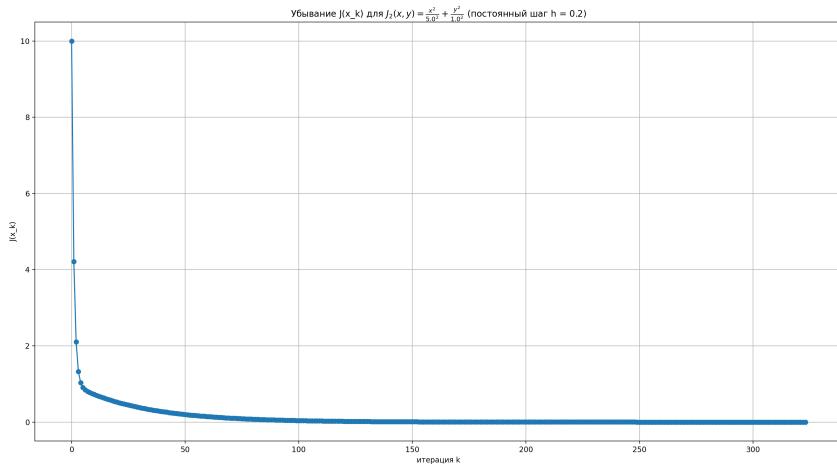


Рис. 9: График убывания  $J_2(x_k)$  при постоянном шаге (файл f2\_J\_constant.png).

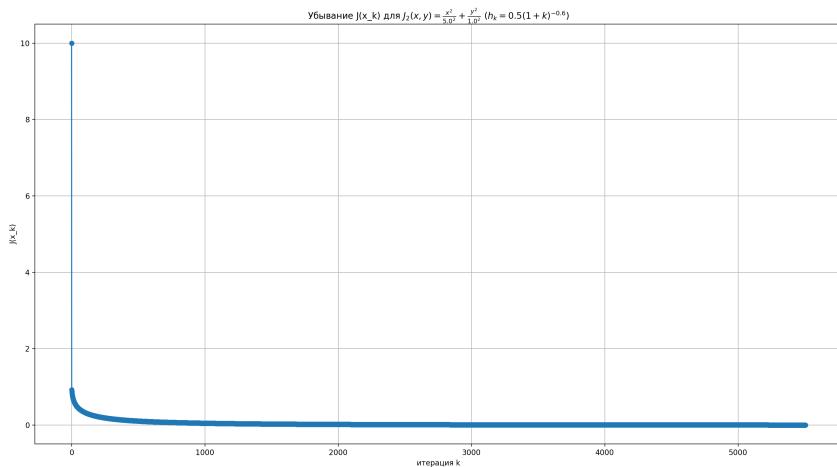


Рис. 10: График убывания  $J_2(x_k)$  при убывающем шаге (файл f2\_J\_power.png).

### 3.3 Функция $J_3(x, y) = 70(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1$

#### Траектории на плоскости

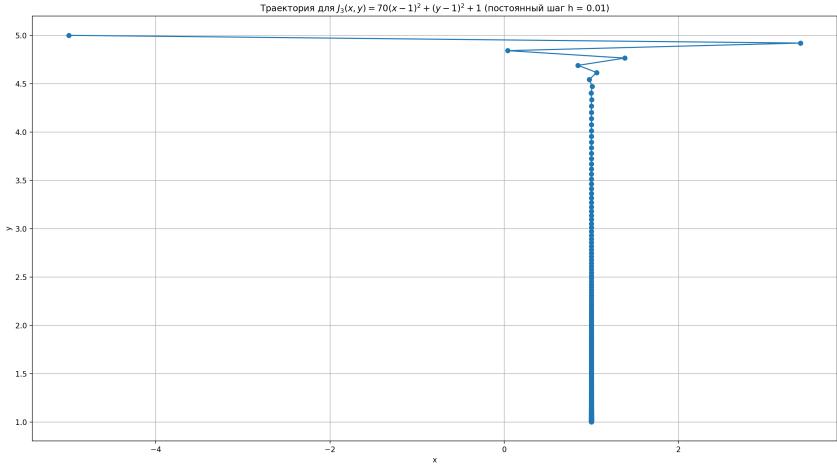


Рис. 11: Траектория градиентного спуска для  $J_3$  при постоянном шаге (файл f3\_traj\_constant.png).

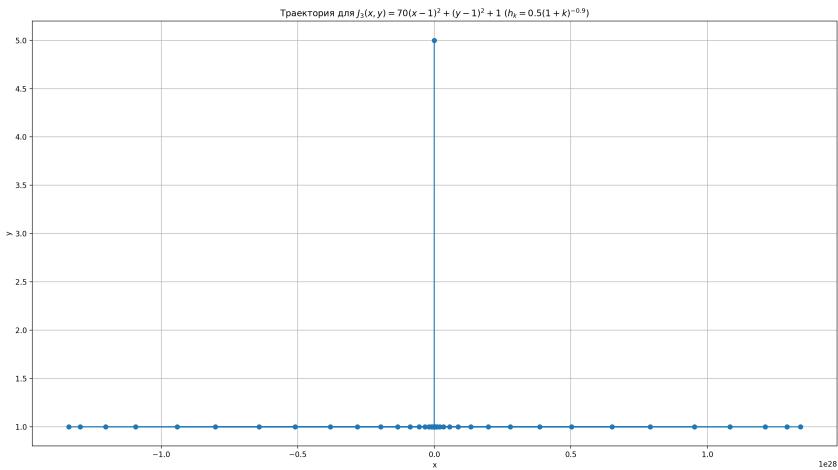


Рис. 12: Траектория градиентного спуска для  $J_3$  при убывающем шаге  $h_k = 0.5(1 + k)^{-0.9}$  (файл f3\_traj\_power.png).

## Убывание $J_3(x_k)$

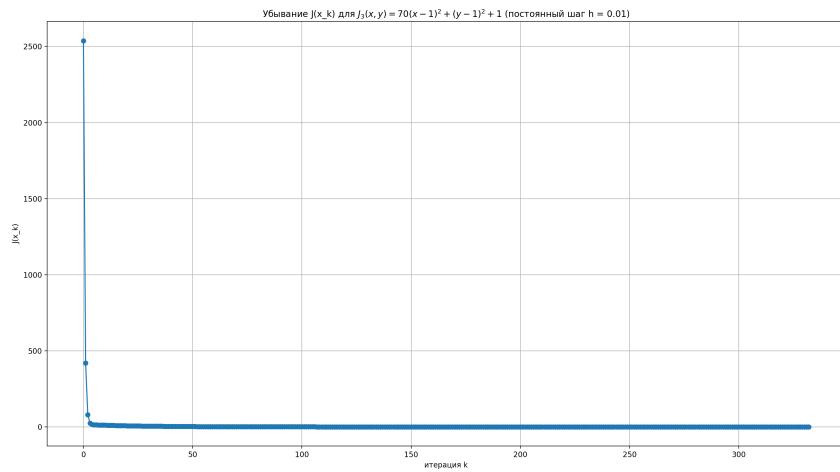


Рис. 13: График убывания  $J_3(x_k)$  при постоянном шаге (файл f3\_J\_constant.png).

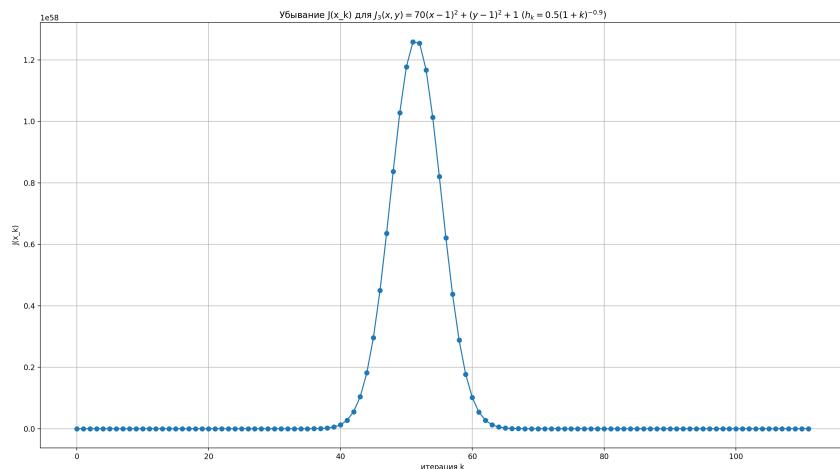


Рис. 14: График убывания  $J_3(x_k)$  при убывающем шаге (файл f3\_J\_power.png).

### 3.4 Функция $J_4(x, y)$

#### Траектории на плоскости

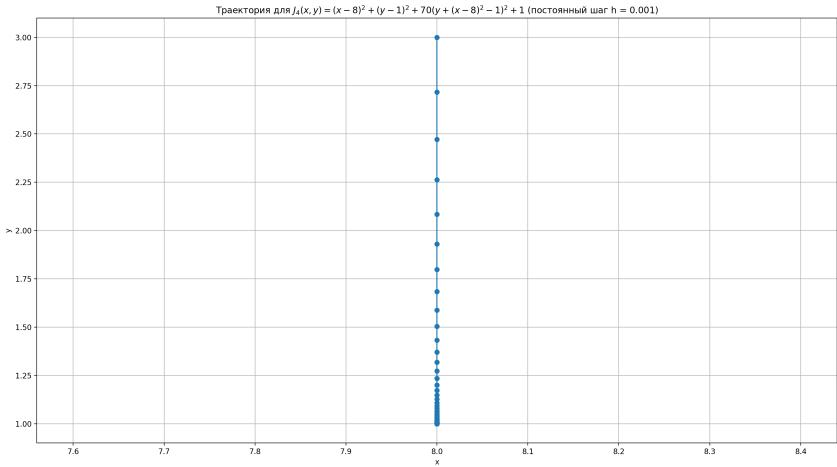


Рис. 15: Траектория градиентного спуска для  $J_4$  при постоянном шаге (файл f4\_traj\_constant.png).

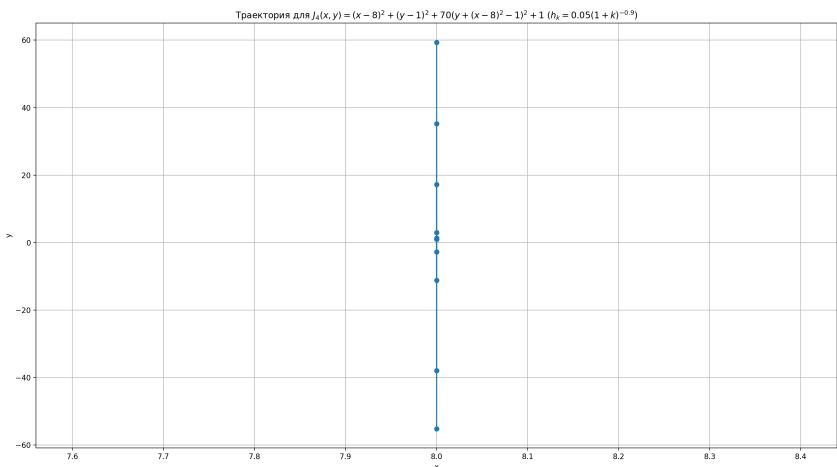


Рис. 16: Траектория градиентного спуска для  $J_4$  при убывающем шаге  $h_k = 0.05(1 + k)^{-0.9}$  (файл f4\_traj\_power.png).

## Убывание $J_4(x_k)$

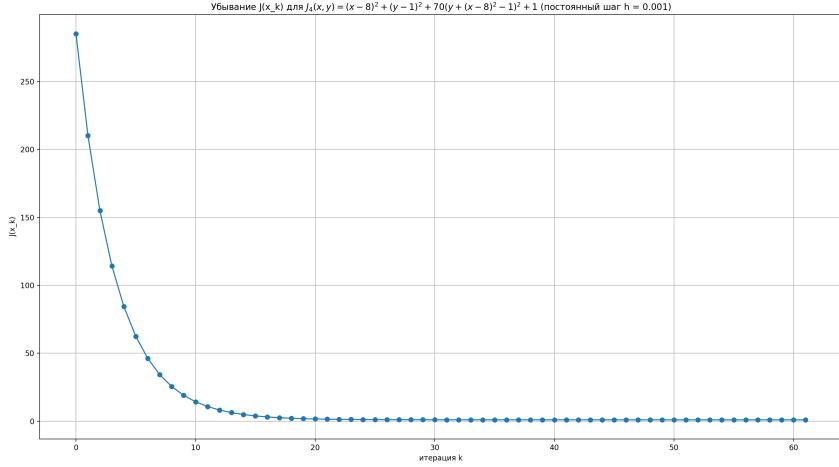


Рис. 17: График убывания  $J_4(x_k)$  при постоянном шаге (файл f4\_J\_constant.png).

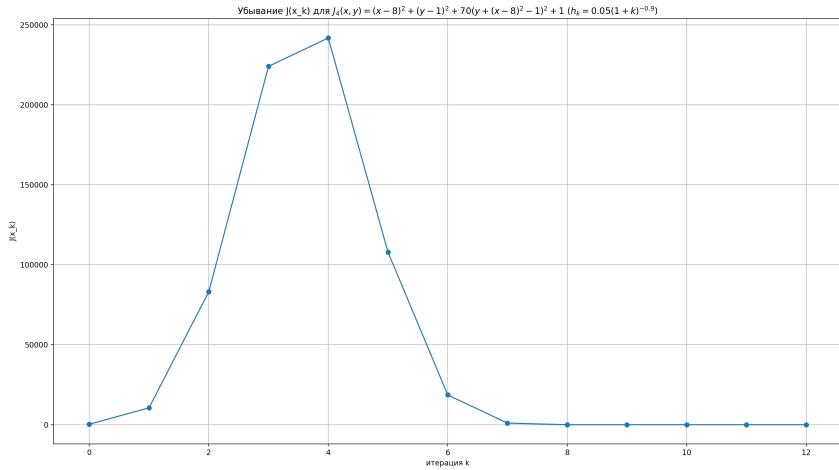


Рис. 18: График убывания  $J_4(x_k)$  при убывающем шаге (файл f4\_J\_power.png).

## 4 Итоговые точки минимума

Результаты работы метода удобно свести в таблицу. Здесь следует подставить значения, напечатанные программой.

Функция	Режим шага	Найденная точка $x^*$	$J(x^*)$	Критерий остановки
$J_1$	постоянный	(..., ...)	...	...
$J_1$	убывающий	(..., ...)	...	...
$J_1$	$h_k = 0.5/(k+1)$	(..., ...)	...	...
$J_2$	постоянный	(..., ...)	...	...
$J_2$	убывающий	(..., ...)	...	...
$J_3$	постоянный	(..., ...)	...	...
$J_3$	убывающий	(..., ...)	...	...
$J_4$	постоянный	(..., ...)	...	...
$J_4$	убывающий	(..., ...)	...	...

Таблица 1: Итоговые точки минимума и значения функционала для разных режимов шага.

## 5 Выводы

Здесь можно кратко описать:

- влияние выбора шага на скорость и устойчивость сходимости;
- различия поведения на хорошо обусловленных и вытянутых функциях;
- особенности поведения на сильно нелинейной функции  $J_4$ .