# Глобальная минимизация таблично заданных функций: метод ломаных (Пиявского–Шуберта) и классические одномерные методы

## 1 Постановка задачи

Дана функция $f$, заданная таблично наборами точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$. Требуется найти приближение точки минимума

$$x^* \in [a, b], \qquad f(x^*) = \min_{x \in [a,b]} f(x),$$

где $[a, b]$ — границы области определения, извлечённые из табличных $x_i$.

Поскольку исходные данные дискретны, в алгоритме строится **линейная интерполяция** $\tilde{f}(x)$, и далее минимизируется именно $\tilde{f}$ на $[a, b]$.

## 2 Предобработка табличных данных

Входные файлы (`.txt` или `.csv`) содержат минимум два столбца: $x$ (первый столбец) и $y$ (второй столбец).

### 2.1 Разбор формата и очистка

Алгоритм чтения данных:

- выбирает разделитель **;** или **,** по первой подходящей строке;
- берёт $y$ из 2-го столбца только если он распознаётся как число;
- пытается интерпретировать $x$ как дату/время; если удаётся, переводит в секунды относительно первого времени;
- иначе пытается интерпретировать $x$ как число; если не получается — использует индекс строки;
- удаляет дубликаты по $x$, сортирует по $x$.

### 2.2 Границы интервала

После сортировки:

$$a = \min_i x_i, \qquad b = \max_i x_i.$$

# 3 Линейная интерполяция

Пусть $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ — очищенные точки с $x_1 < \dots < x_m$. Определим $\tilde{f}(x)$ как кусочно-линейную интерполяцию: для $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\tilde{f}(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k).$$

Вне узлов интервалов $\tilde{f}$ вычисляется стандартной операцией `interp`.

**Замечание.** После этого минимизируется не исходная (неизвестная) функция, а её аппроксимация $\tilde{f}$. Если таблица редкая или шумная, положение минимума может смещаться.

# 4 Липшицевость и оценка константы

## 4.1 Определение

Функция $f$ называется липшицевой на $[a, b]$, если существует $L > 0$, такое что

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|, \qquad \forall x, y \in [a, b].$$

$L$ называют **константой Липшица**.

## 4.2 Оценка $L$ по таблице

Для кусочно-линейной $\tilde{f}$ достаточно оценить максимальный модуль наклона на отрезках:

$$L_0 = \max_{k=1,\dots,m-1} \left| \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \right|.$$

В реализации применяется запасной множитель $r > 1$:

$$L = r\, L_0.$$

Это делает метод устойчивее, если наклоны недооценены из-за дискретизации/шума.

# 5 Метод ломаных (Пиявского–Шуберта)

## 5.1 Идея: нижняя оценка через конусы

Пусть $f$ липшицева с константой $L$. Тогда из неравенства Липшица:

$$f(x) \ge f(x_i) - L|x - x_i| \quad \forall x.$$

Для набора уже вычисленных точек $x_i$ можно построить **глобальный минорант**:

$$g(x) = \max_i \Big( f(x_i) - L|x - x_i| \Big),$$

который удовлетворяет $g(x) \le f(x)$ для всех $x$. График $g$ представляет собой верхнюю огибающую “конусов” и выглядит как ломаная.

## 5.2 Характеристика интервала и точка следующего измерения

Рассмотрим два соседних узла $x_i < x_{i+1}$ и значения $f_i = f(x_i)$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$. На интервале $[x_i, x_{i+1}]$ минимум минорната достигается в точке пересечения двух прямых:

$$x_{\text{new}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{f_{i+1} - f_i}{2L}.$$

Минимальное значение минорната на этом интервале (нижняя оценка на минимум $f$) равно

$$R_i = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} - \frac{L}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Далее выбирают интервал с **наиболее перспективной** (наименьшей) нижней оценкой:

$$i^* = \arg\min_i R_i,$$

вычисляют $f(x_{\text{new}})$, добавляют новую точку и повторяют процесс.

## 5.3 Итерационная схема

Инициализация: задать $[a, b]$, оценку $L$, начальные узлы $x_1 = a$, $x_2 = b$, вычислить $f(x_1)$, $f(x_2)$.

**Итерации.** Пусть на шаге $k$ имеется упорядоченный набор узлов $x_1 < \cdots < x_m$ и значения $f(x_j)$.

1. Для каждого интервала $[x_i, x_{i+1}]$ вычислить характеристику

$$R_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \frac{L}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

2. Найти индекс самого перспективного интервала:

$$i^* = \arg\min_i R_i.$$

3. Вычислить новую точку испытания:

$$x_{\text{new}} = \frac{x_{i^*} + x_{i^*+1}}{2} - \frac{f(x_{i^*+1}) - f(x_{i^*})}{2L},$$

   и ограничить её интервалом $[x_{i^*}, x_{i^*+1}]$.

4. Вычислить $f(x_{\text{new}})$, добавить точку $x_{\text{new}}$ в набор узлов (с сохранением сортировки).

**Критерии остановки.** Итерации прекращают при выполнении хотя бы одного из условий:

- $\left|f_{\min}^{(k)} - f_{\min}^{(k-1)}\right| < \varepsilon$, где $f_{\min}^{(k)} = \min_j f(x_j)$ на итерации $k$;
- $\left|x_{\min}^{(k)} - x_{\min}^{(k-1)}\right| < \delta$, где $x_{\min}^{(k)} = \arg\min_j f(x_j)$ на итерации $k$.

### 5.4 Сходимость (интуитивно)

Если $L$ не занижен (то есть $L \geq L_{\text{true}}$), то минорнат $g(x)$ корректен, а последовательность уточнений сужает "подозрительные" интервалы. При росте числа узлов метод стремится к глобальному минимуму (при стандартных предположениях).

## 6 Классические одномерные методы (для унимодальных функций)

Далее применяются три метода, которые гарантируют корректность при **унимодальности** функции на $[a, b]$ (имеется единственный минимум и нет других локальных минимумов).

### 6.1 Дихотомия

На каждом шаге берутся точки

$$x_1 = m - \delta, \quad x_2 = m + \delta, \quad m = \frac{a+b}{2},$$

и по сравнению $f(x_1)$ и $f(x_2)$ отбрасывается половина интервала. Остановка при $b - a \leq \varepsilon$.

### 6.2 Золотое сечение

Используется свойство самоподобия разбиений при коэффициенте

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Сохраняется одна из ранее вычисленных точек, поэтому после старта требуется по 1 новому вычислению $f$ за итерацию.

### 6.3 Поиск Фибоначчи

Число шагов заранее определяется через числа Фибоначчи $F_n$, выбираемые так, чтобы

$$F_n \gtrsim \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Метод минимизирует число вычислений $f$ при фиксированной точности и унимодальности.

## 7 Формирование результатов

Для каждого входного файла:

- строится интерполяция $\tilde{f}$;
- оценивается $L$;

- выполняется $N$ итераций метода ломаных, сохраняются точки $(x, f(x))$;
- выполняются дихотомия, золотое сечение и Фибоначчи на той же $\tilde{f}$;
- сохраняются текстовый отчёт и сводная таблица.

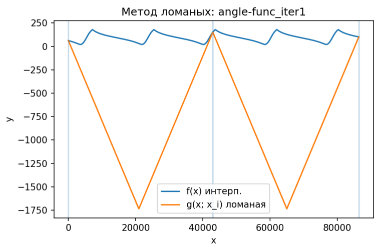
Отдельно строятся графики:

- $\tilde{f}(x)$ на равномерной сетке;
- минорнат $g(x) = \max_i(f(x_i) - L|x - x_i|)$ для текущего множества узлов метода ломаных.

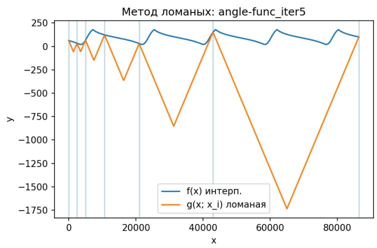
# 8 Графики (out/plots/)

Ниже приведены графики, автоматически сохранённые скриптом в каталог `out/plots/`. На каждом изображении показаны интерполированная функция $f(x)$ и нижняя оценка $g(x; x_i) = \max_i(f(x_i) - L|x - x_i|)$ для текущего набора узлов метода ломаных.

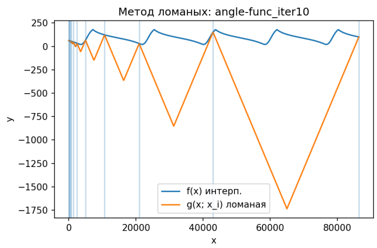
## 8.1 angle-func



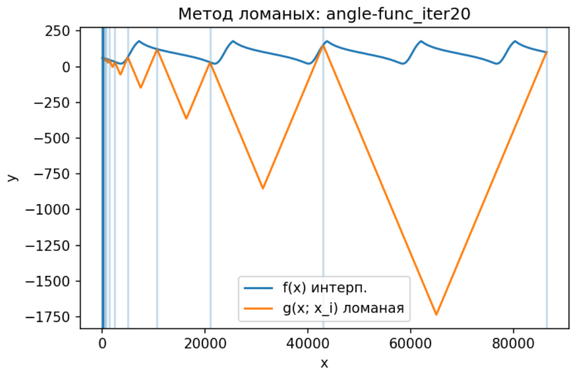

(a) Итерация 1



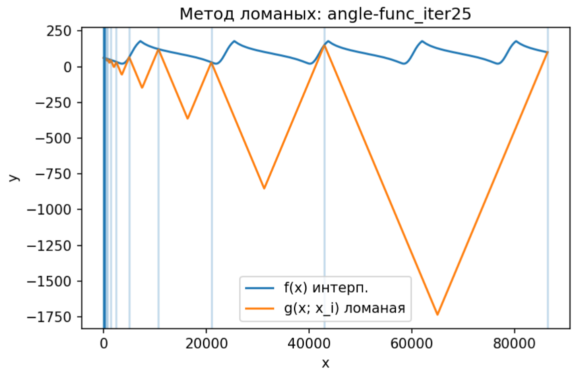

(b) Итерация 5




(c) Итерация 10



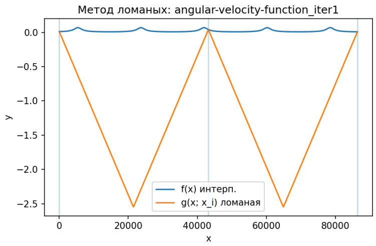

(d) Итерация 20



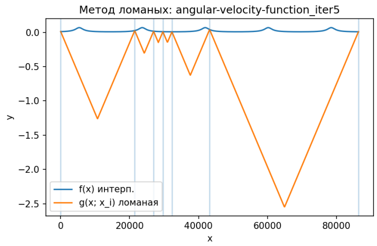

(e) Итерация 25

Рис. 1: Эволюция ломаной (Пиявского–Шуберта) для `angle-func`.

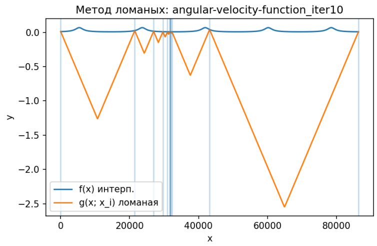
## 8.2 angular-velocity-function



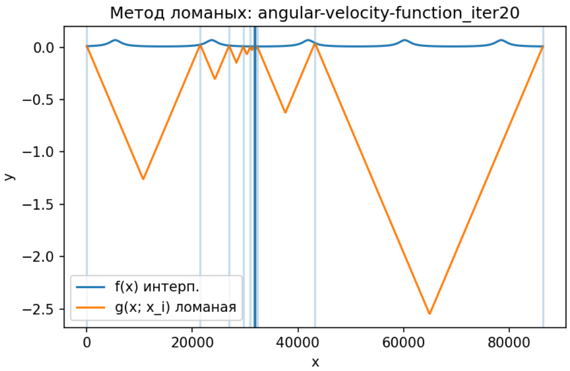

(a) Итерация 1



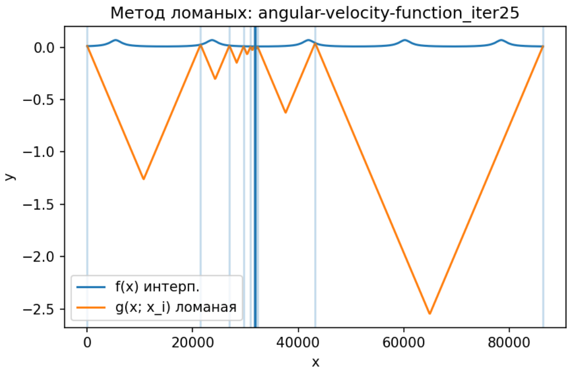

(b) Итерация 5




(c) Итерация 10



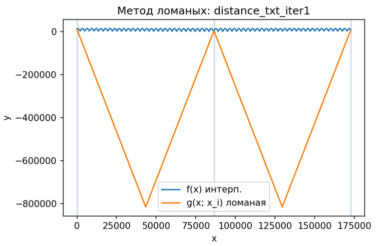

(d) Итерация 20



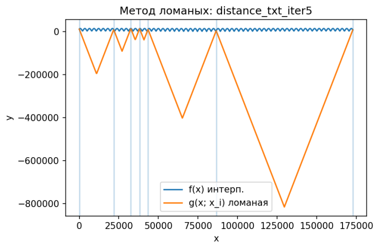

(e) Итерация 25

Рис. 2: Эволюция ломаной (Пиявского–Шуберта) для `angular-velocity-function`.

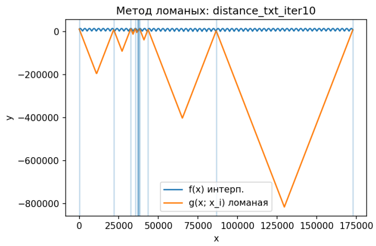
## 8.3 distance_txt



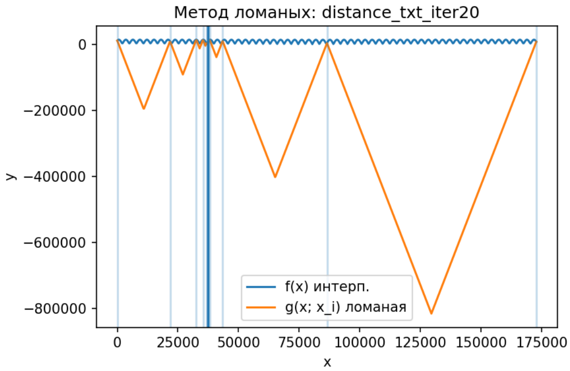

(a) Итерация 1



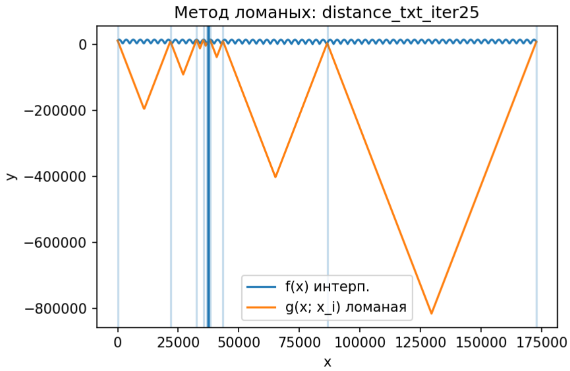

(b) Итерация 5




(c) Итерация 10



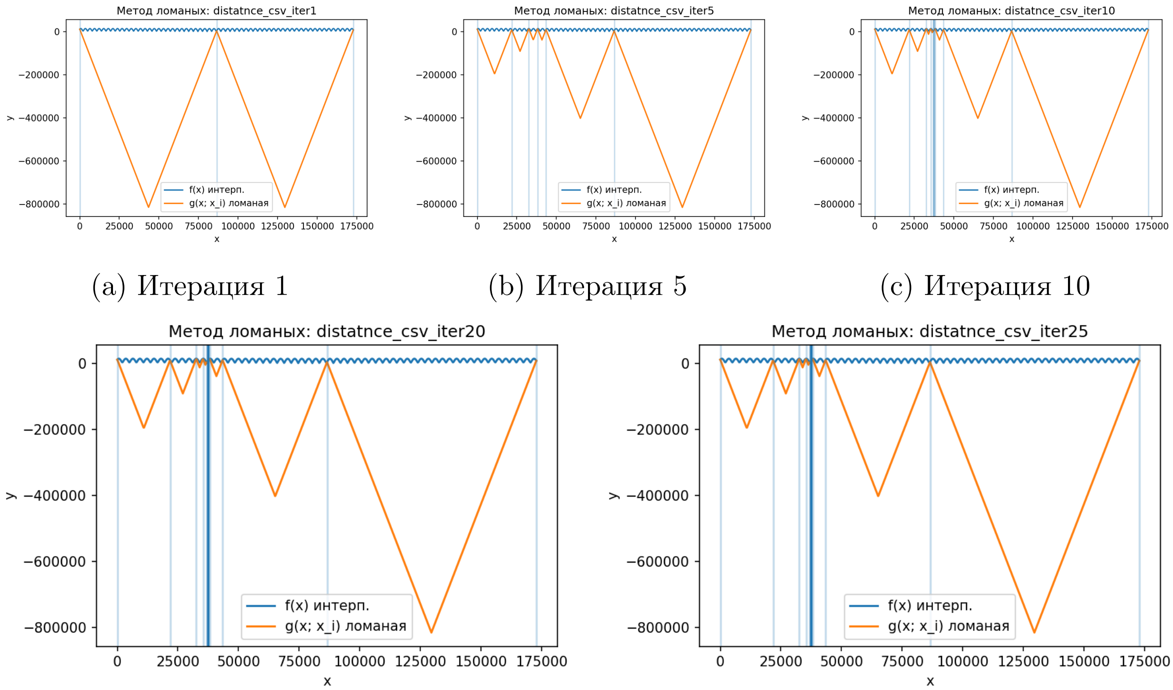

(d) Итерация 20




(e) Итерация 25

Рис. 3: Эволюция ломаной (Пиявского–Шуберта) для `distance_txt`.

## 8.4 distatnce_csv (да, с опечаткой в имени файла)

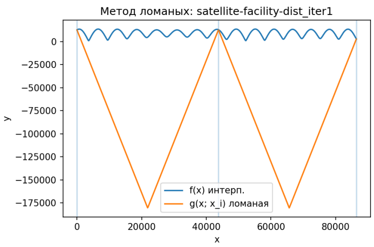



(a) Итерация 1 (b) Итерация 5 (c) Итерация 10

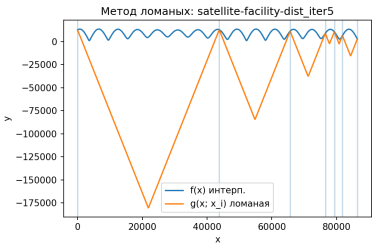
(d) Итерация 20 (e) Итерация 25

Рис. 4: Эволюция ломаной (Пиявского–Шуберта) для `distatnce_csv`.

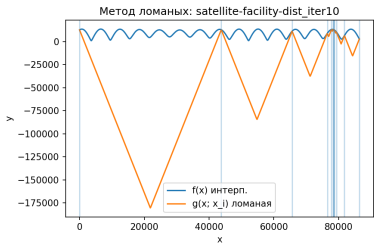
## 8.5 satellite-facility-dist



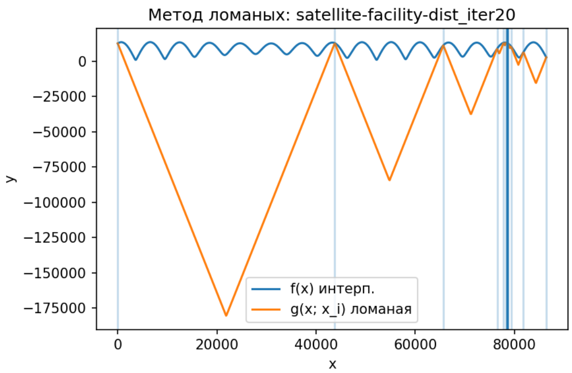

(a) Итерация 1



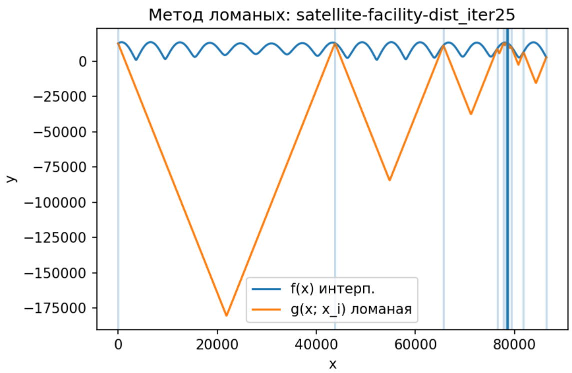

(b) Итерация 5




(c) Итерация 10




(d) Итерация 20




(e) Итерация 25

Рис. 5: Эволюция ломаной (Пиявского–Шуберта) для `satellite-facility-dist`.

# 9 Критические замечания по реализации

## 9.1 Выбор интервала в методе ломаных

По теории для минимизации нужно выбирать интервал с **минимальным** $R_i$:

$$i^* = \arg\min_i R_i$$

Если выбрать $\arg\max_i R_i$, то алгоритм систематически уточняет интервалы, где нижняя оценка *хуже* (выше), что противоречит логике глобального поиска минимума.

## 9.2 Значение $L$

Если $L$ занижен, минорнат $g(x)$ перестаёт быть нижней оценкой функции, и гарантии глобальности теряются. Практически это лечится выбором $r > 1$ и/или увеличением $r$ при подозрительных данных.

## 9.3 Унимодальные методы

Дихотомия/золотое сечение/Фибоначчи корректны и эффективны только при унимодальности. На многомодальных функциях они находят локальный минимум, зависящий от формы $\tilde{f}$.

# 10 Вывод

Описанный алгоритм объединяет:

- корректную работу с табличными данными и построение $\tilde{f}$ (линейная интерполяция);
- оценку липшицевой константы;
- глобальный метод Пиявского–Шуберта, способный искать глобальный минимум при корректном $L$;
- унимодальные методы как быстрые локальные альтернативы/бенчмарки.