

ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
КАФЕДРА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ  
КІБЕРНЕТИКИ

## Дипломна робота

на тему: «Математичне моделювання групової динаміки  
процесів симбіозу»

Освітня програма Комп'ютерне моделювання та обчислювальні методи

Спеціальність 113 Прикладна математика

Галузь знань 11 Математика та статистика

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Виконав : студент групи ПА-17м-1

Кривоносов Олександр Дмитрович

(прізвище, ім'я, по-батькові)

Керівник к.ф.-м.н., доц. Кузенков О.О.

(підпис, наук. ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рецензент к.т.н., с.н.с, доц. Скороход Г.І.

(підпис, наук. ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

м.Дніпро  
2018

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

Факультет прикладної математики

Кафедра обчислювальної математики та математичної кібернетики

Рівень (освітньо-кваліфікаційний рівень) другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(шифр і назва)

Освітня програма Комп'ютерне моделювання та обчислювальні методи

(шифр і назва)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики  
(повна назва)

Турчина В.А.

(підпис)

(П.І.Б.)

“ ” 2018 року

## **З А В Д А Н Н Я** **НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ**

Кривоносову Олександр Дмитровичу

(прізвище, ім'я по батькові)

1. Тема роботи Математичне моделювання групової динаміки процесів симбіозу

керівник роботи Кузенков Олександр Олександрович, к.ф.-м.н., доц.

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджена наказом по університету від “13” лютого 2018 р. № 242с

2. Строк подання роботи \_\_\_\_\_

3. Вхідні дані до роботи \_\_\_\_\_

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що їх належить розробити) 1. Ознайомитися з існуючими моделями симбіозу. 2. Побудувати диференційну модель симбіозу. 3. Оцінити реалістичність отриманої моделі. 4. Виконати дискретизацію отриманої моделі. 5. Оцінити поведінку дискретизації моделі. 6. Побудувати диференційну модель симбіозу з затримками. 7. Встановити чи є отримана модель з затримками асимптотично збіжною.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) Графічне зображення поля напрямів для диференційної моделі симбіозу. Скріншоти графіків дискретизації моделі побудованих у MATLAB, презентація у Microsoft PowerPoint.

6. Консультанти по роботі, із зазначенням розділів проекту, що стосуються їх

Розділ	Консультант	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв
Розділ 3	Кузенков О.О.		
Розділ 4	Кузенков О.О.		
Розділ 5	Кузенков О.О.		

7. Дата видачі завдання \_\_\_\_\_

#### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

Пор. №	Назва станів дипломної роботи	Термін виконання станів роботи	Примітка
1	Огляд задачі побудови математичної моделі симбіозу та існуючих моделей, опрацювання літературних джерел		виконав
2	Побудови диференційної моделі симбіозу і оцінка її адекватності		виконав
3	Удосконалення диференційної моделі симбіозу		виконав
4	Дискретизація отриманої моделі симбіозу		виконав
5	Побудувати диференційну модель симбіозу з затримками		виконав
6	Встановити чи є отримана модель з затримками асимптотично збіжною		виконав
7	Оформлення пояснювальної записки		виконав

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Кривоносов О.Д.  
(прізвище та ініціали)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

Кузенков О.О.  
(прізвище та ініціали)

## РЕФЕРАТ

**Дипломна робота:** «Математичне моделювання групової динаміки процесів симбіозу» 63 с., 12 рисунків, 23 джерела.

**Об'єктом дослідження** є симбіоз.

**Мета роботи:** побудувати модель процесів симбіозу, для кращого розуміння цієї області екології з точки зору досліджень.

**Методи дослідження:** математичне моделювання, дискретизація диференційної моделі, метод Ейлера.

**У процесі роботи** запропонована диференційна модель симбіозу, знайдено точки рівноваги цієї моделі і її вдосконаленого варіанта, побудована дискретизація моделі симбіозу з використанням кусочно-постійного аргументу і дискретизація за допомогою методу Ейлера, виконано графічне порівняння дискретних моделей; побудована диференційну модель симбіозу з затримками, встановлено, що отримана модель з затримками асимптотично збіжна.

**В результаті роботи** виявлено, що зміна знаків простої моделі конкуренції для створення позитивної взаємодії дає нереалістичну довготривалу поведінку розміру популяцій; асимптотична стабільність дискретних моделей може залежати від вибору методу дискретизації, оскільки різні методи можуть давати істотно відмінну поведінку з плином часу.

**Ключові слова:** симбіоз, мутуалізм, математичне моделювання, диференційна модель, дискретизація, метод Ейлера, кусочно-постійний аргумент, диференціальна модель з затримками.

## ABSTRACT

The graduation research of the master Kryvonosov Oleksandr deals with mathematical modeling of group dynamics of symbiosis processes.

Purpose of the work is to build a model of symbiosis in order to gain a better understanding of an area of ecology in terms of research.

In the process of work there were proposed differential model of symbiosis, the points of equilibrium of this model and its improved variant were found; the discretization of the symbiosis model using a piecewise constant argument and the discretization using the Euler method were constructed; a graphical comparison of discrete models was performed; a differential model of symbiosis with delay was constructed, it was established that the model with delayed asymptotically convergent.

There was found that simply changing the signs of a simple competition model to create a positive interaction yields unrealistic long-term population behavior; the asymptotic stability of discrete models may depend on the choice of the discretization method, since different methods can produce essentially different behaviors over time.

Bibliog. 23, ill. 12.

## ЗМІСТ

1 ВСТУП.....	8
1.1 Означення симбіозу .....	8
1.2 Вивчення симбіозу.....	8
2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	11
3 МОДЕЛЮВАННЯ СИМБІОЗУ .....	12
3.1 Початкова спроба моделювати симбіоз .....	12
3.2 Актуальність моделі .....	22
4 ПОБУДОВА БІЛЬШ РЕАЛІСТИЧНОЇ МОДЕЛІ.....	23
4.1 Ресурсо-залежна модель симбіозу .....	23
4.2 Модель з контролем народжуваності та смертності .....	24
5 ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ .....	29
5.1 Введення в дискретні за часом моделі.....	29
5.2 Дискретизація моделі симбіозу (4.10а) - (4.10б) з використанням кусочно-постійного аргументу .....	30
5.3 Чисельні методи.....	31
5.4 Дискретизація моделі симбіозу (4.10а) - (4.10б) за допомогою методу Ейлера .....	33
5.5 Графічне порівняння дискретних моделей.....	34
6 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЗАТРИМКАМИ .....	37
6.1 Введення в диференціальні рівняння з затримками .....	37
6.2 Користь диференціальні рівнянь з затримками у моделюванні .....	37
6.3 Побудова та вирішення логістичного рівняння Ферхюльста-Перла..	38
6.4 Додавання затримки до рівняння (6.6) .....	41

	7
7 ВВЕДЕННЯ ЗАТРИМКИ У МОДЕЛЬ (4.10а) - (4.10б) .....	42
7.1 Підготовчі заходи .....	44
7.2 Збіжність моделі з затримками .....	45
7.3 Збіжність моделі без затримок .....	49
8 ВИСНОВКИ .....	53
8.1 З'ясовано .....	53
8.2 Майбутня робота.....	53
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	56
ДОДАТОК А Код програми .....	59
ДОДАТОК Б Матриця яacobіан.....	62

## 1 ВСТУП

### 1.1 Означення симбіозу

Симбіоз - взаємодія й співіснування різних біологічних видів. Раніше симбіозом називали взаємовигідне співробітництво. Тепер симбіозом можуть називати всі взаємовідносини між організмами, при яких хоча б один організм отримує вигоду для себе (+/+; +/0; +/-). В контексті даної роботи термін «симбіоз» буде використовуватися як означення взаємовигідного співіснування різних біологічних видів. Синонімом такого означення симбіозу є мутуалізм.

### 1.2 Вивчення симбіозу

Відомо, що існують три основні варіанти взаємодії організмів: конкуренція, хижацтво і взаємність [3]. Існує багато досліджень для побудови моделей взаємодії організмів «конкуренція» та «хижак-жертва», але у літературі з екології таких досліджень для симбіозу дуже мало. Важко не погодитися з тим, що симбіоз є одним з головних механізмів формування тварин і рослин, і що розуміння взаємовідносин та їх наслідків залишається однією з найбільш складних завдань в галузі екології [1]. Важливість симбіозу відзначав Чарльз Дарвін у записах про свої подорожі: «Якби на Мадагаскарі вимерли б великі метелики, то, безумовно, орхідеї вимерли б також» [5]; він бачив, що деякі види загинуть, якщо їх взаємний партнер вимре. Отже, вирішено побудувати модель процесів симбіозу, щоб краще зрозуміти цю область екології з точки зору досліджень.

#### 1.2.1 Приклади симбіозу

Яншен [14] ретельно вивчив природну історію симбіозу і зробив висновок, що більшість мутуалістичних взаємозв'язків можна розділити на один з чотирьох типів.

**Розсіювання.** Багато рослин покладаються на тварин для переносу та поширення їх насіння. Рослини виробляють фрукти та горіхи для залучення тварин, а їжа для тварин є сильною мотивацією знову повернутися до рослини.



Білки є дуже активними агентами розсіювання, вони збирають жолуді та горіхи з дерев і ховають їх у різних місцях.

**Запилення.** Запилення - це перенесення пилку рослини перед заплідненням. Класичний приклад такого симбіозу є між бджолами та квітами, бджоли використовують квіти для нектару і взаємно запилюють інші квіти, з якими вони контактують під час подорожей. На відміну від покритонасінних, голонасінні покладаються на вітер для переносу пилку. Очевидною перевагою запилення тваринами є те, що пилок може переноситися далеко від хазяїна, а це сприяє розмноженню та генетичній мінливості. Квітки покритонасінних часто нагороджують запилювачів нектаром для мотивації і підтримки процесу запилення.

**Травлення.** Травна система багатьох тварин використовує симбіоз з різними видами організмів (бактеріями, дріжджами, тощо), які допомагають перетравлювати їжу. Часто тварина-носій не в змозі перетравлювати їжу самотійно. Тварини, такі як велика рогата худоба, залежать від бактерій, щоб переробити рослинну целюлозу на більш прості корисні речовини. Мікроорганізми винагороджуються за таку поведінку, маючи середовище, в якому вони можуть вижити, тобто кишківник тварини [16].

**Захист.** Симбіоз такого типу - це відносини між організмами різних біологічних видів, при яких організм одного виду захищає організм іншого виду від хижаків чи іншої небезпеки, як правило, отримуючи за це винагороду. Дуже хорошим прикладом такого симбіозу є риба клоун та актинія. У риби клоуна є імунітет до жалких клітин актиній, завдяки чому вона може гніздитися між отруйними щупальцями. Актинія також отримує захист від риби клоуна, коли риба клоун відганяє дрібних риб, що живляться щупальцями актинії.

Швидше за все, існує багато інших типів симбіозу, багато з яких можуть бути невідкритим наукою.

### ***1.2.2 Залежність від симбіозу***

Ми будемо визначати два різних типи залежності від симбіозу, які використовує еколог Kot [16].

**Необов'язковий симбіоз.** Тип симбіозу, в якому взаємодіючі види отримують користь один від одного, але відсутність одного з видів не гарантує вимирання іншого. Це найпоширеніший тип симбіозу, прикладом якого є рослини, що виробляють фрукти, які їдять птахи, та птахи, що допомагають розсіянню рослин.

**Обов'язковий симбіоз.** Тип симбіозу, в якому задіяні види знаходяться в тісній близькості і взаємозалежні один від одного таким чином, що відсутність одного з видів гарантує вимирання іншого. Гарним прикладом таких відносин є гриб та водорості, що формують лишайник. Грибок забезпечує водорості водою та мінералами, коли водорості використовують мінерали та воду, щоб виготовити їжу для грибка і себе (шляхом фотосинтезу). Коли водорості та грибки лишайників культивували окремо в лабораторних умовах, обидва вони не можуть розвиватися без симбіотичного партнера [2].

**Мета роботи:** побудувати модель процесів симбіозу, для кращого розуміння цієї області екології з точки зору досліджень.

Робота складається з декількох розділів.

- У розділі під номером 3 запропоновано диференційну модель симбіозу.
- У розділі під номером 4 запропоновано удосконалену диференційну модель симбіозу.
- У розділі під номером 5 виконано дискретизацію моделі з розділу 4.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Відсутність математичної моделі процесів симбіозу стримує розвиток області екології, що займається дослідженням відносин між видами тварин.

Ставиться задача побудувати математичну модель симбіозу.

Для її розв'язання у роботі необхідно:

1. Ознайомитися з існуючими моделями симбіозу.
2. Побудувати диференціальну модель симбіозу.
3. Оцінити реалістичність отриманої моделі.
4. Виконати дискретизацію отриманої моделі.
5. Оцінити поведінку дискретизації моделі.
6. Побудувати диференціальну модель симбіозу з затримками.
7. Встановити чи є отримана модель з затримками асимптотично збіжною.

### 3 МОДЕЛЮВАННЯ СИМБІОЗУ

#### 3.1 Початкова спроба моделювати симбіоз

Протягом наступних двох розділів ми будемо стежити за роботою, виконаною в главах 12 і 13 автором Кот в книзі "Елементи математичної екології", а також відтворимо отримані графіки.

Почнемо з того, що ми маємо два види, 1 і 2, кожне з яких має розміри популяції  $N_1$  та  $N_2$  відповідно, що зростають логістично (сигмоподібно) за відсутності іншого. Кожен вид має темп приросту на душу населення, який лінійно зменшується за розміром населення. Тому ми починаємо з наступної моделі:

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{N_1}{K_1} \right) \quad (3.1a)$$

$$\frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = r_2 \left( 1 - \frac{N_2}{K_2} \right), \quad (3.1b)$$

де кожен вид має свій власний відповідний темп росту і власне відповідне граничне навантаження біологічного виду (ємність середовища)  $K_1$  і  $K_2$ . Тепер давайте додамо конкуренцію до моделі, ми можемо зробити це беручи до уваги ефект міжвидової конкуренції. Через конкуренцію, кожен індивід одного виду викликає зниження темпу приросту на душу населення другого виду, і навпаки. Тепер, оскільки є два різні види, особи з різних видів можуть мати сильніший або слабший вплив на темпи приросту на душу населення, ніж особи з одного і того ж виду. Для параметризації цього ефекту вводимо пару коефіцієнтів конкуренції  $\alpha_{12}$  та  $\alpha_{21}$ , які вимірюють силу ефекту виду 2 до виду 1 та виду 1 на види 2 відповідно. Отже виконаємо перехід:

$$N_1 \rightarrow N_1 + \alpha_{12} N_2$$

$$N_2 \rightarrow N_2 + \alpha_{21} N_1$$

Тоді маємо:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1} N_1 (K_1 - N_1 - \alpha_{12} N_2) \quad (3.2a)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{r_2}{K_2} N_2 (K_2 - N_2 - \alpha_{21} N_1) \quad (3.2b)$$

Тепер, оскільки ми хочемо модифікувати цю модель конкуренції для створення моделі симбіозу, змінимо знаки перед коефіцієнтами конкуренції  $\alpha_{12}$  і  $\alpha_{21}$  на протилежні:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1} N_1 (K_1 - N_1 + \alpha_{12} N_2) \quad (3.3a)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{r_2}{K_2} N_2 (K_2 - N_2 + \alpha_{21} N_1) \quad (3.3b)$$

Це модель необов'язкового симбіозу, оскільки параметри  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ,  $K_1 > 0$  та  $K_2 > 0$ . Іншими словами, кожен вид може вижити без іншого.

Зазначимо, що будемо мати модель для обов'язкового симбіозу, якщо параметри  $r_1 < 0$ ,  $r_2 < 0$ ,  $K_1 < 0$  та  $K_2 < 0$ .

### 3.1.1 Пошук точок рівноваги отриманої системи

Ми можемо знайти точки рівноваги задавши

$$\frac{dN_1}{dt} = 0$$

Матимемо

$$\frac{r_1}{K_1} N_1 (K_1 - N_1 + \alpha_{12} N_2) = 0$$

тоді

$$\frac{r_1}{K_1} N_1 = 0$$

або

$$K_1 - N_1 + \alpha_{12} N_2 = 0$$

що означає ізоклінами для  $N_1$  є

$$N_1 = 0$$

та

$$N_1 = K_1 + \alpha_{12}N_2$$

Аналогічним чином для  $N_2$  отримуємо ізокліни

$$N_2 = 0$$

та

$$N_2 = K_2 + \alpha_{21}N_1$$

Отже, наші чотири точки рівноваги такі:

$(0; 0)$  в якій обидва види вимирають, як показано на рисунку 3.1,

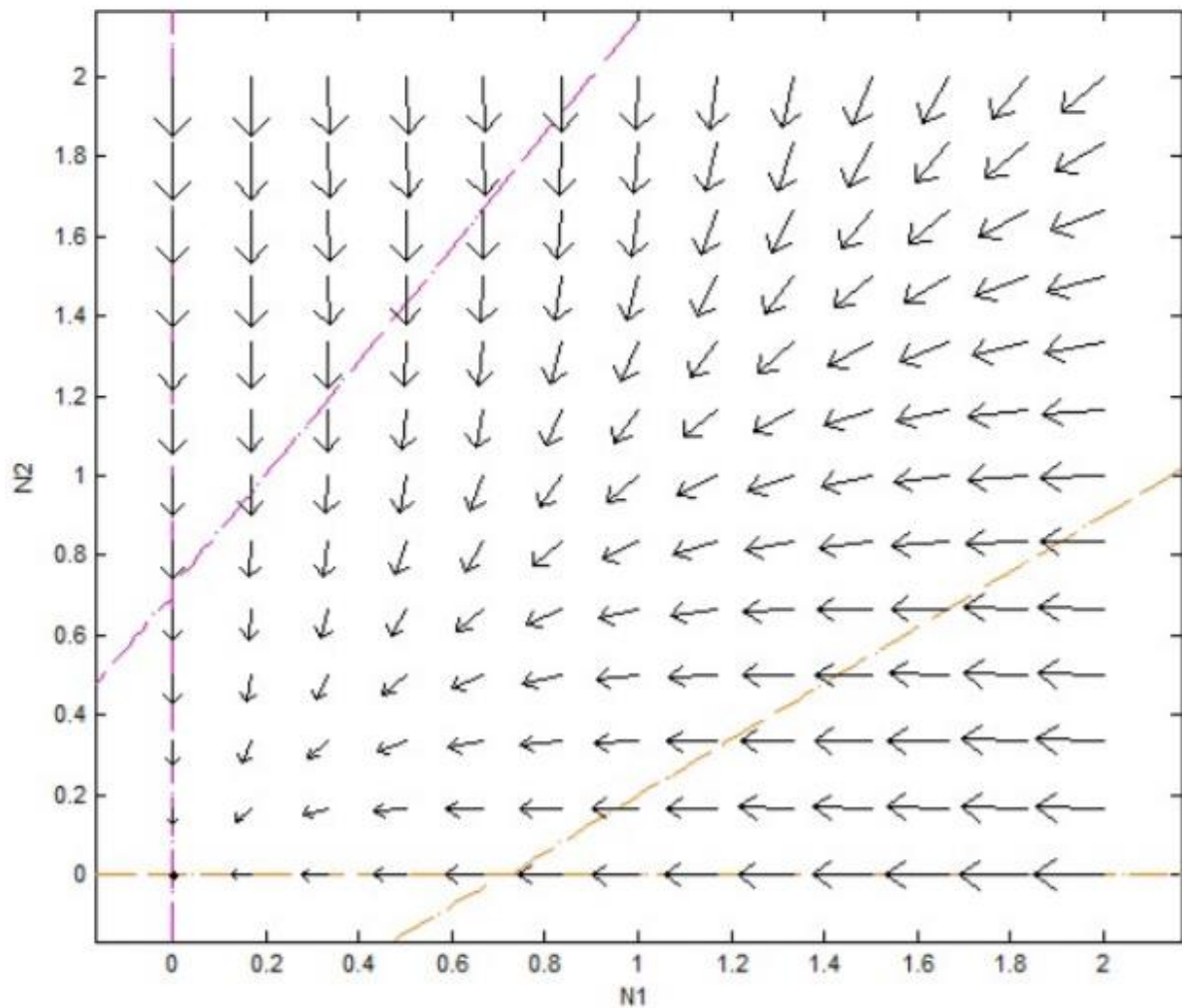


Рисунок 3.1 – Фазовий портрет обов'язкового симбіозу для  $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$

$(K_1; 0)$  в якій вид 2 гине, а вид 1 зупиняє ріст на його граничному навантаженні,

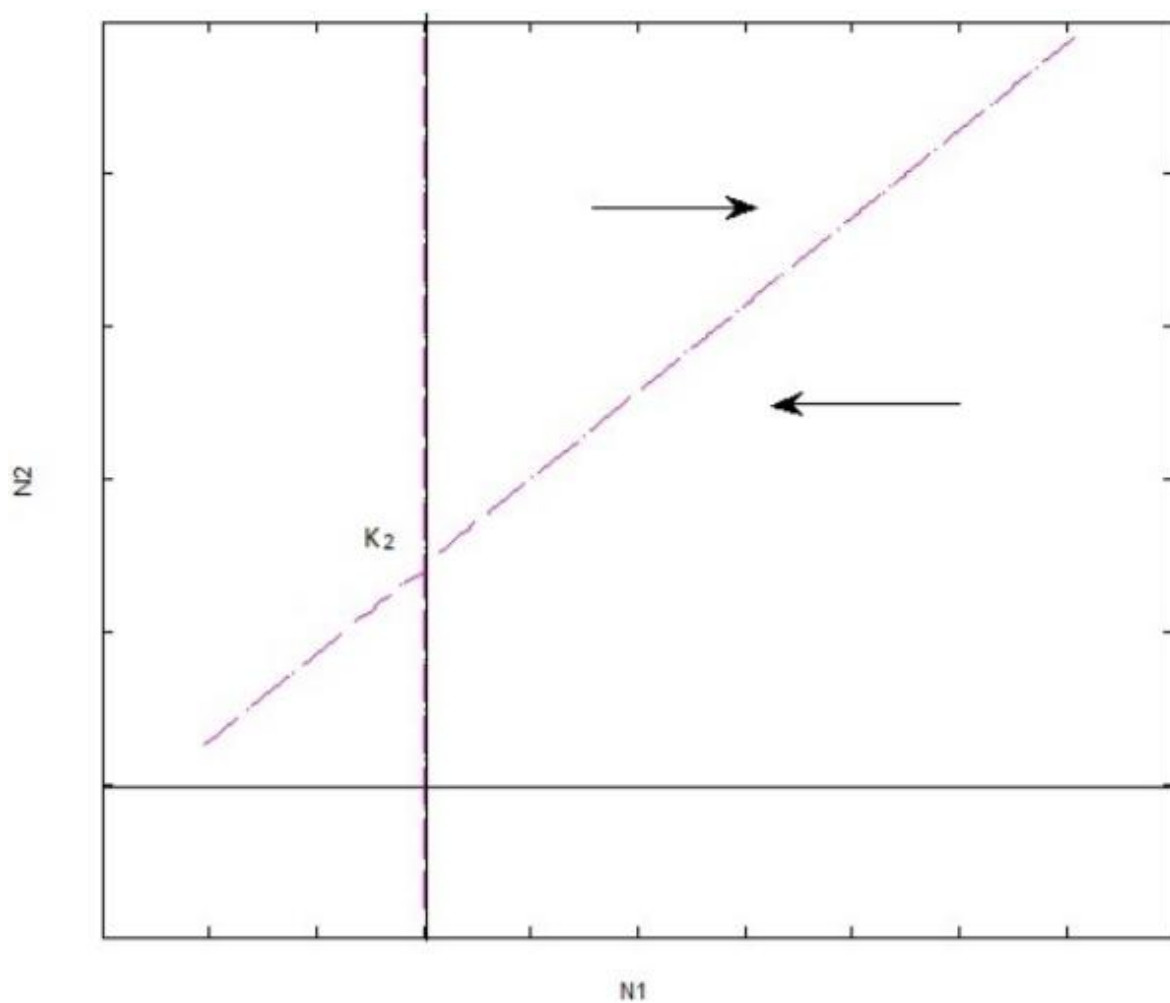


Рисунок 3.2 –  $N_1$  ізокліна,  $K_1 < 0$

На рисунку 3.2 ми бачимо, що ліворуч від лінії  $N_1 = K_1 + \alpha_{12}N_2$ ,  $N_1$  збільшується, а праворуч від цієї лінії  $N_1$  зменшується.

(0;  $K_2$ ), в якій вид 1 гине, а вид 2 зупиняє ріст на його граничному навантаженні,

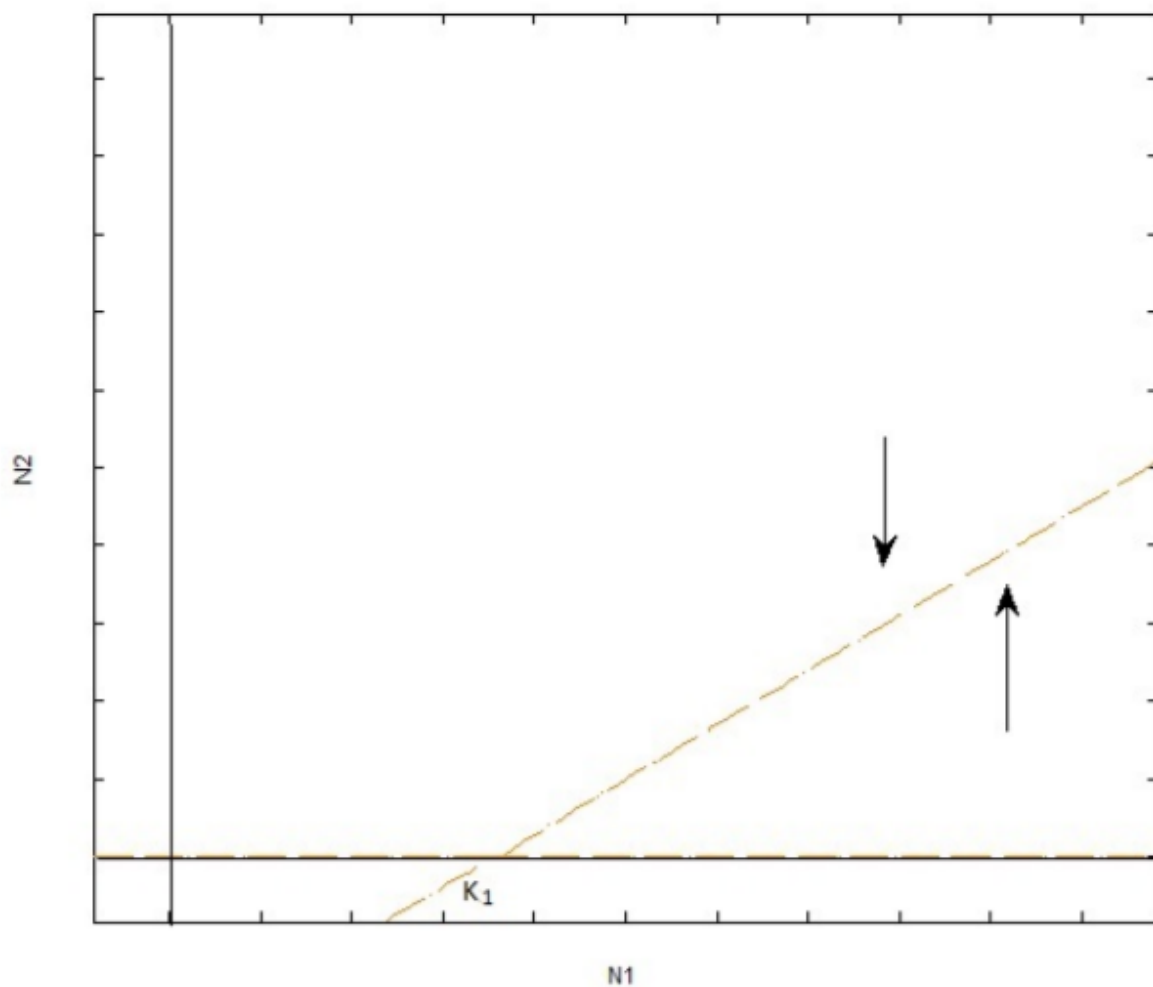


Рисунок 3.3 –  $N_2$  ізокліна,  $K_2 < 0$

На рисунку 3.3 ми бачимо, що нижче від лінії  $N_2 = K_2 + \alpha_{21}N_1$ ,  $N_2$  збільшується, а вище від цієї лінії  $N_2$  зменшується.



$(K_1 + \alpha_{12}N_2; K_2 + \alpha_{21}N_1)$  що є нетривіальною точкою рівноваги, яка лежить у першій чверті,

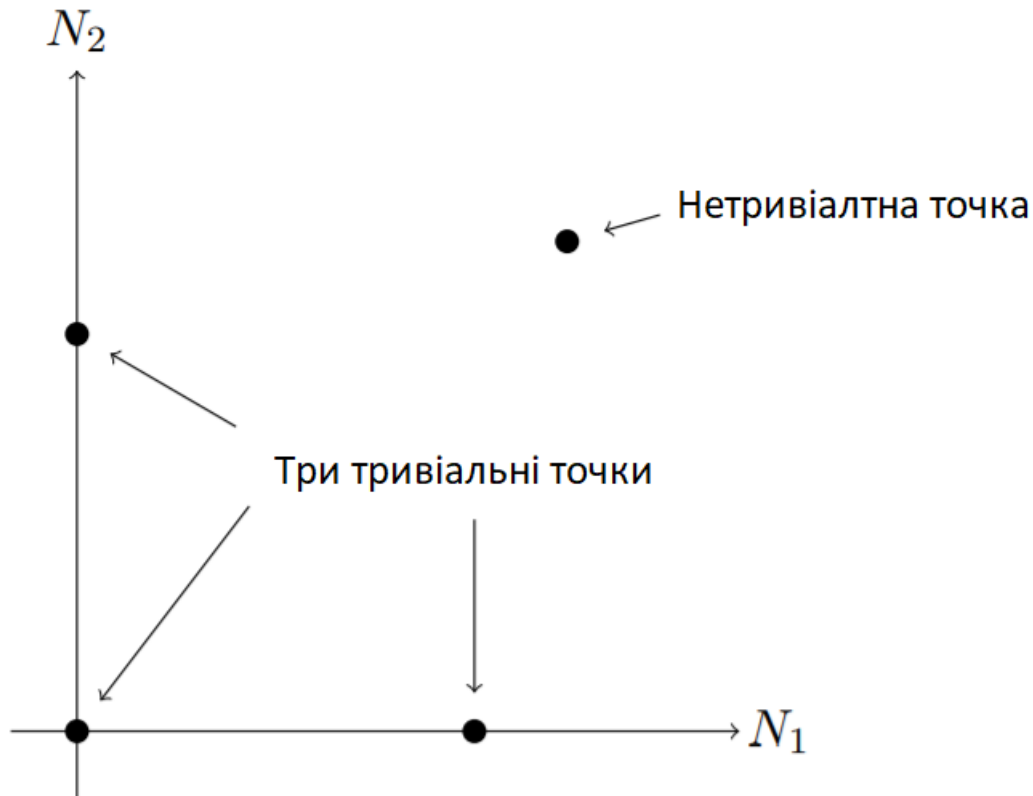


Рисунок 3.4 – Зображено довільну множину  $(N_1; N_2)$  з чотирма точками рівноваги

Звернемо увагу, що ізокліни розділяють кожен графік на дві частини. Зліва і знизу ізокліни (у відповідних графіках) розмір популяції збільшується, тому що види не досягли свого граничного навантаження, а справа і зверху ізокліни (у відповідних графіках) розмір популяції зменшується, оскільки види перевищили своє граничне навантаження. На рисунку 3.3 ізокліна перетинає графік на осі  $N_1$ , коли вид 1 досягає свого граничного навантаження  $K_1$  і немає особин виду 2. На рисунку 3.2 ізокліна перетинає графік на осі  $N_2$ , коли вид 2 досягає свого граничного навантаження  $K_2$  і немає особин виду 1.

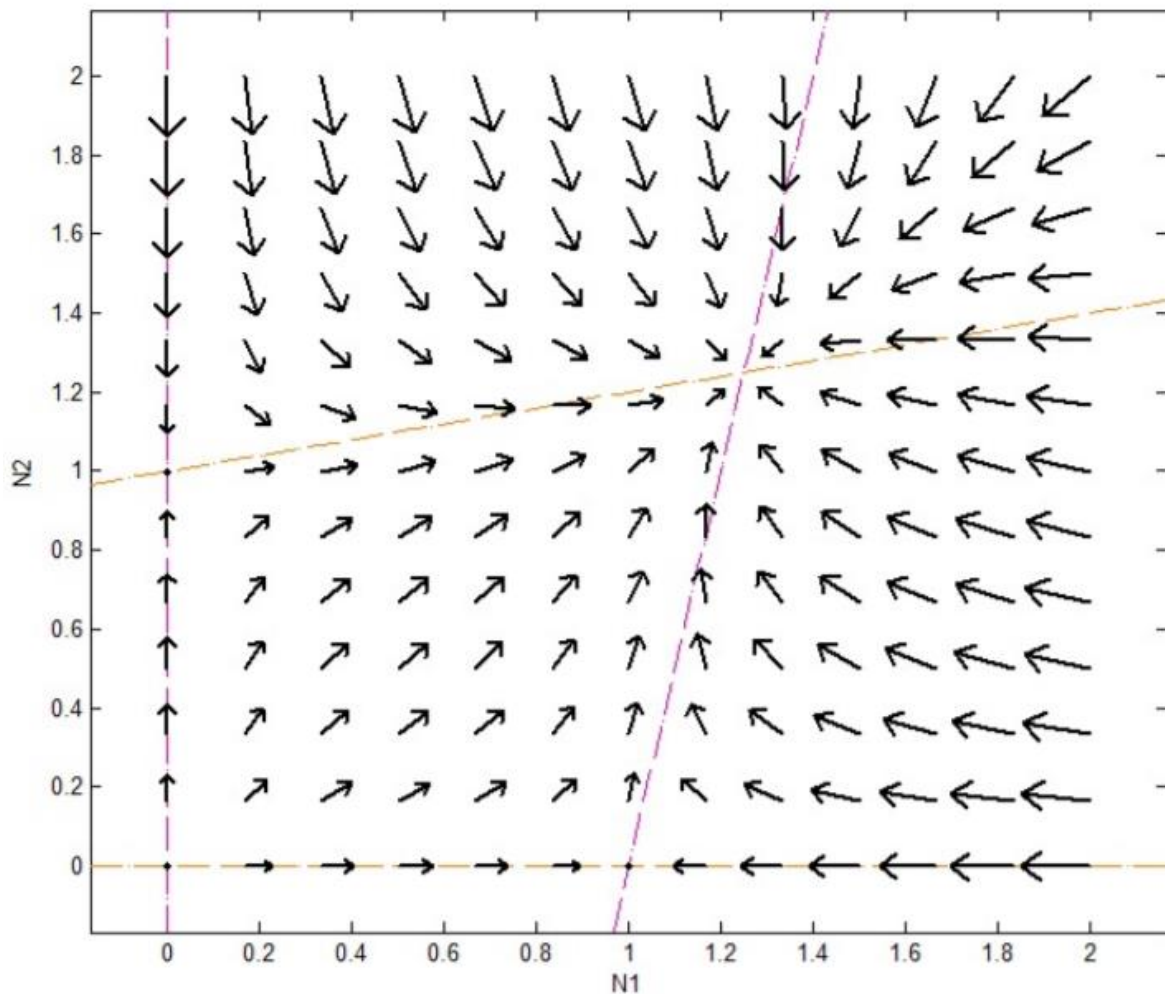


Рисунок 3.5 – Фазовий портрет неов'язкового симбіозу для  $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$

Ізокліни

$$N_1 = K_1 + \alpha_{12}N_2$$

і

$$N_2 = K_2 + \alpha_{21}N_1$$

можуть сходитися або розходитися. Вони сходяться, якщо

$$\frac{1}{\alpha_{12}} > \alpha_{21} \Rightarrow \alpha_{12}\alpha_{21} < 1,$$

у цьому випадку на перетині ізокліни маємо стійкий вузол у першій чверті (як показано на рисунку 3.5). Координати стійкого вузла перевищують відповідні значення граничного навантаження **K1** і **K2**, тобто кожен вид перевищує своє граничне навантаження завдяки симбіозу.

Якщо

$$\alpha_{12}\alpha_{21} > 1,$$

тоді ізокліни розходяться. У цьому випадку лише в точці  $(\infty; \infty)$  існує нетривіальна точка рівноваги у першій чверті.

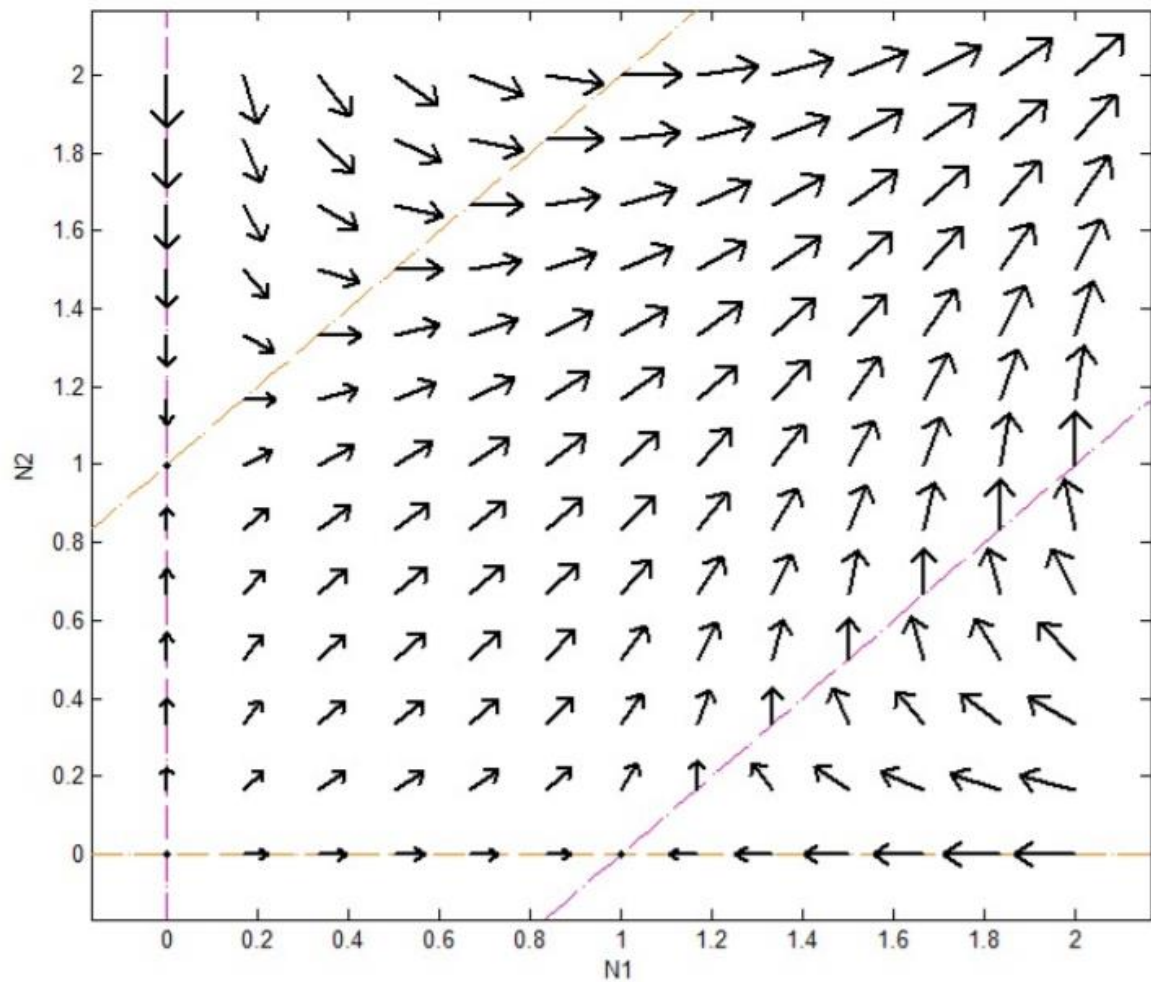


Рисунок 3.6 – Фазовий портрет неов'язкового симбіозу для  $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$

Для обов'язкового симбіозу:

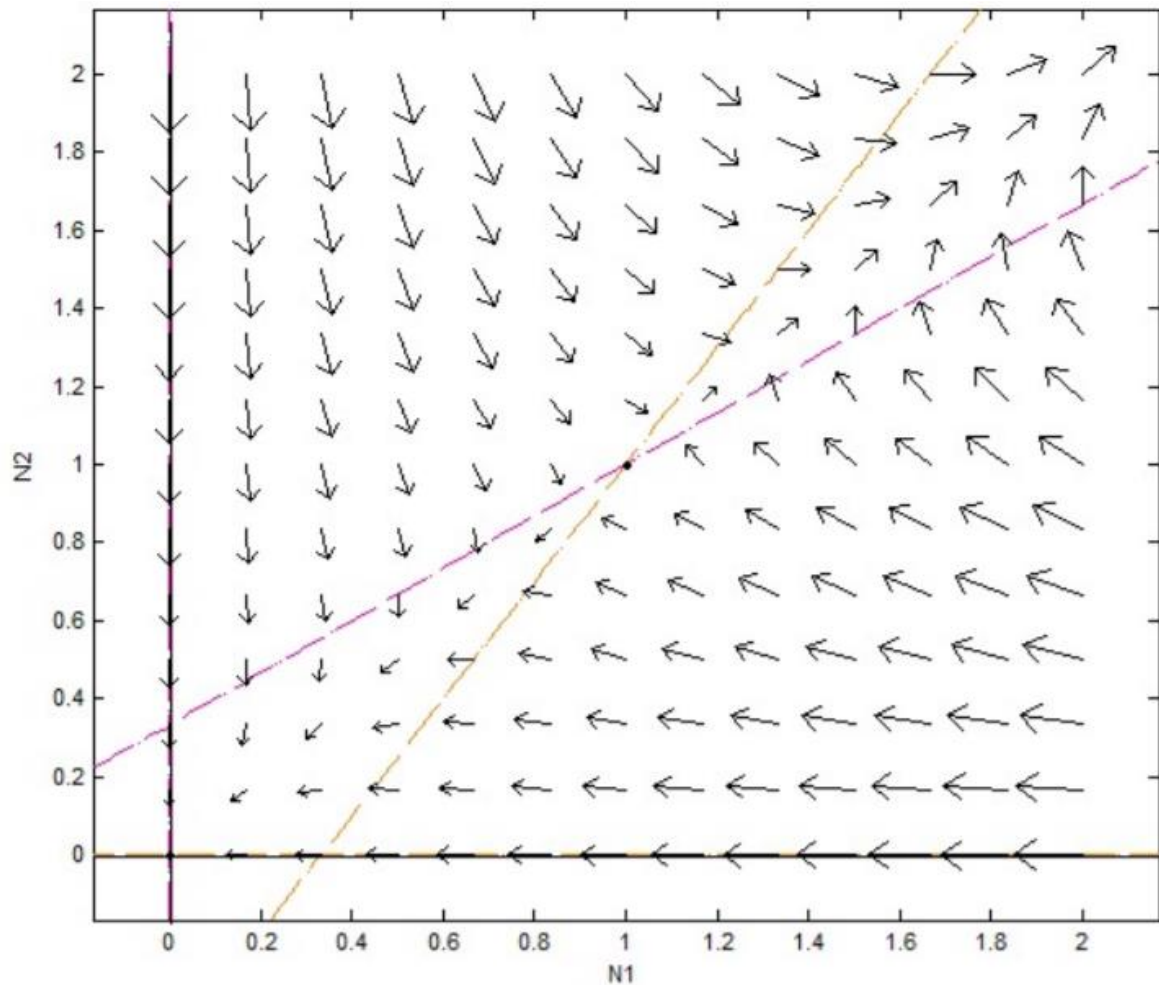


Рисунок 3.7 – Фазовий портрет обов'язкового симбіозу для  $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$

матимемо особливу точку сідло. Якщо взаємодія популяцій, між якими є обов'язковий симбіоз, замала, то обидві популяції вимирають. Якщо взаємодія популяцій достатня для того, щоб чисельність популяцій не зменшувалась, то популяції будуть зростати безмежно (як показано на рисунку 3.7).

Отримана модель симбіозу має тенденцію до збіжності або розбіжності. Однак ми повинні переконатися, що немає обмежених циклів, які ми могли пропустити. Щоб зробити це доведемо, що система сумісна.

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \phi(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= \sigma(N_1, N_2)\end{aligned}$$

визначена на  $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  є сумісна, якщо

$$\frac{\partial \phi}{\partial N_2} \geq 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial N_1} \geq 0$$

для усіх  $(\mathbf{N1}, \mathbf{N2}) \in \mathbf{D}$ .

У контексті нашої моделі нехай

$$\frac{dN1}{dt} = \frac{r_1}{K_1} N_1 (K_1 - N_1 + \alpha_{12} N_2) = f_1(N_1, N_2)$$

$$\frac{dN2}{dt} = \frac{r_2}{K_2} N_2 (K_2 - N_2 + \alpha_{21} N_1) = g_1(N_1, N_2)$$

тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial N_2} &= \frac{\partial}{\partial N_2} \left( \frac{r_1}{K_1} N_1 (K_1 - N_1 + \alpha_{12} N_2) \right) \\ &= \alpha_{12} \frac{r_1}{K_1} N_1 \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial N_1} &= \frac{\partial}{\partial N_1} \left( \frac{r_2}{K_2} N_2 (K_2 - N_2 + \alpha_{21} N_1) \right) \\ &= \alpha_{21} \frac{r_2}{K_2} N_2 \end{aligned}$$

Це означає, що

$$\frac{\partial f_1}{\partial N_2} \geq 0$$

і

$$\frac{\partial g_1}{\partial N_1} \geq 0.$$

Сформулюємо і доведемо теорему.

**Теорема.** Напрями сумісної системи або збігається до точки рівноваги або розбігається до нескінченності.

Доведення. Якщо система сумісна скрізь, перша чверть площини  $(\mathbf{N1}, \mathbf{N2})$  становить інваріант. Щоб показати це, розглянемо напрям, який

намагається залишити першу чверть і перетинає позитивну частину осі **N2**. Використовуючи означення сумісної системи, ми можемо показати, що

$$\frac{d^2 N_1}{dt^2} = \frac{\partial \phi}{\partial N_1} \frac{dN_1}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial N_2} \frac{dN_2}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial N_2} \frac{dN_2}{dt} > 0$$

На позитивній частині осі **N2**. З цього маємо, що напрям не перетинає позитивну частину осі **N1**. Також відмітимо, що напрям не може пройти через початок координат, оскільки це означало б, що траєкторія, яка проходить через початок координат, проходить і через інші точки. Аналогічним чином можна показати, що третя чверть є інваріантом. Коли  $t \rightarrow \infty$ , знаки **N1** та **N2** залишаються незмінними, тобто, якщо ми починаємо в першій або третій чверті, ми залишаємось у цій чверті. Якщо ми почнемо з другої чи четвертої чверті, ми або залишаємось в них, або переміщаємось до одної з двох інваріантних чвертей [16].

### 3.2 Актуальність моделі

Отримана модель не є придатною для симбіозу через те, що існує точка рівноваги в  $(\infty, \infty)$ , коли  $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$ , як показано на рисунках 3.6 і 3.7. Така модель допускає безмежне зростання популяції, що є абсолютно нереалістичним, оскільки фізичні аспекти нашого світу, як обмеження простору та нестача ресурсів, завжди будуть обмежувати розмір популяції. Неможливим є і те, що розмір популяції може бути негативним значенням. Виявивши ці проблеми, намагатимемося побудувати модель симбіозу, яка відображатиме реальність краще.

## 4 ПОБУДОВА БІЛЬШ РЕАЛІСТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Ми повинні спробувати побудувати модель, яка більш підходить для реальної ситуації в світі. Один з підходів для запобігання необмеженому зростанню популяції полягає в тому, щоб побудувати ресурсо-залежну модель.

### 4.1 Ресурсо-залежна модель симбіозу

Ця модель взята виключно з Kot [16]. Приклад можна знайти в роботі Lee [21] про взаємодію молочнокислих і пропіоновокислих бактерій. Молочнокислі бактерії потребують глюкозу і виробляють молочну кислоту. Пропіоновокислі бактерії потребують молочну кислоту (сіль молочної кислоти) і перетворюють на пропіонову кислоту і вуглекислий газ. Хоча це односторонній симбіоз (+, 0), результати вивчення такої взаємодії можуть бути легко поширені на двосторонній симбіоз (+, +) (що можна знайти в роботах Meyer [19], Miura [20] та Dean [6]). Модель Lee може бути записана так:

$$\frac{dS}{dT} = D(S_i - S) - \frac{1}{Y_1} \frac{\mu_1 S N_1}{K_1 + S} - cN_1, \quad (4.1a)$$

$$\frac{dN_1}{dT} = \frac{\mu_1 S N_1}{K_1 + S} - DN_1, \quad (4.1б)$$

$$\frac{dP}{dT} = a \frac{\mu_1 S N_1}{K_1 + S} + bN_1 - \frac{1}{Y_2} \frac{\mu_1 P N_2}{K_2 + P} - DP, \quad (4.1в)$$

$$\frac{dN_2}{dT} = \frac{\mu_1 P N_2}{K_2 + P} - DN_2, \quad (4.1г)$$

де  $S$  – субстрат (глюкоза),  $P$  – продукт (молочна кислота),  $N_1$  – розмір популяції молочнокислих бактерій,  $N_2$  – розмір популяції пропіоновокислих бактерій. Дві величини  $cN_1$  та  $bN_1$  означають витрати на підтримку життя молочнокислих бактерій. (Молочнокислі бактерії потребують споживання глюкози навіть коли чисельність популяції не зростає [16].) Ця модель дуже специфічна, в наступному підрозділі буде розглянуто більш узагальнений спосіб зробити модель симбіозу більш реалістичною.



## 4.2 Модель з контролем народжуваності та смертності

Приклад підходу побудови моделі, яка обмежує народжуваність і смертність на душу населення можна знайти у роботах Wolin і Lawler [13]. Вони почали з розгляду моделі, де бере участь лише один вид ( $N_1$ ), в якій народжуваність на душу населення ( $\sim b$ ) зменшується зі зростанням населення,

$$\bar{b} = b_0 - bN_1, \quad (4.2)$$

а смертність на душу населення ( $\sim d$ ) збільшується зі зростанням населення,

$$\bar{d} = d_0 + dN_1, \quad (4.3)$$

де  $b_0$  і  $d_0$  вказують максимальне і мінімальне значення народжуваності та смертності відповідно. Тоді швидкість росту населення  $N_1$  можна визначити так:

$$\frac{dN_1}{dt} = (\bar{b} - \bar{d}) N_1, \quad (4.4)$$

а при розгортанні отримаємо

$$\frac{dN_1}{dt} = b_0N_1 - bN_1^2 - d_0N_1 - dN_1^2;$$

після групування спільних множників маємо

$$\frac{dN_1}{dt} = (b_0 - d_0)N_1 - (b + d)N_1^2. \quad (4.5)$$

Відмітимо, що це просто логістичне диференціальне рівняння

$$\frac{dN_1}{dt} = rN_1 - \frac{r}{K}N_1^2, \quad (4.6)$$

де

$$r = b_0 - d_0, \quad K = \frac{b_0 - d_0}{b + d}.$$

Припустимо, що неонов'язковий симбіоз з популяцією  $N_2$  збільшує народжуваність на душу населення  $N_1$ ; додамо  $mN_2$  до (4.2) де  $m \in \mathbf{R}$  – деяка константа,

$$\bar{b} = b_0 - bN_1 + mN_2, \quad (4.7)$$

а на смертність вид 2 ніяк не буде впливати; тоді отримаємо:



$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= \left( (b_0 - bN_1 + mN_2) - (d_0 + dN_1) \right) N_1 \\
&= (b_0 - bN_1 + mN_2 - d_0 - dN_1) N_1 \\
&= b_0N_1 - bN_1^2 + mN_1N_2 - d_0N_1 - dN_1^2 \\
&= (b_0 - d_0)N_1 - (b - d)N_1^2 + mN_1N_2,
\end{aligned}$$

вносимо  $N_1$  за дужки і отримуємо рівняння у формі

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{r}{K} N_1 \left( K - N_1 + \frac{mK}{r} N_2 \right), \quad (4.8)$$

де знов

$$r = b_0 - d_0, \quad K = \frac{b_0 - d_0}{b + d}.$$

Підмітимо, що, замінивши  $mK/r$  на  $\alpha$ , (4.8) приймає вигляд рівнянь системи (3.3а) - (3.3б) – модель, яку ми вважаємо нереалістичною. Ще одна причина не йти цим шляхом в тому, що з рівняння (4.7) видно, що наявність багатьох особин виду 2 підвищить народжуваність особин виду 1 на душу населення вище за  $b_0$ . Однак, оскільки  $b_0$  є максимальною народжуваністю на душу населення, це неможливо, тому ми не можемо продовжувати цю ідею.

Тоді нехай завдяки симбіозу зменшується залежність народжуваності на душу населення від розміру популяції  $N_1$  як показано нижче:

$$\tilde{b} = b_0 - \frac{b}{1 + \alpha_{12}N_2} N_1, \quad (4.9)$$

підставляючи це в (4.4) маємо

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= \left( b_0 - \frac{b}{1 + \alpha_{12}N_2} N_1 - d_0 - dN_1 \right) N_1 \\
&= \left( (b_0 - d_0) - \frac{b}{1 + \alpha_{12}N_2} N_1 - dN_1 \right) N_1,
\end{aligned}$$

припускаючи  $r = b_0 - d_0$ , приходимо до рівняння

$$\frac{dN_1}{dt} = \left( r - \frac{bN_1}{1 + \alpha_{12}N_2} - dN_1 \right) N_1.$$

Роблячи аналогічне припущення щодо другого виду і додавши відповідні індекси для кожного з позначень **b**, **d** та **r**, ми отримуємо систему

$$\frac{dN_1}{dt} = \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2} - d_1 N_1 \right) N_1 \quad (4.10a)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \left( r_2 - \frac{b_2 N_2}{1 + \alpha_{21} N_1} - d_2 N_2 \right) N_2 \quad (4.10б)$$

де

$$K_1 = \frac{r_1}{b_1 + d_1}, \quad K_2 = \frac{r_2}{b_2 + d_2}. \quad (4.11)$$

Це модель, на дослідженні якої ми зосередимося далі.

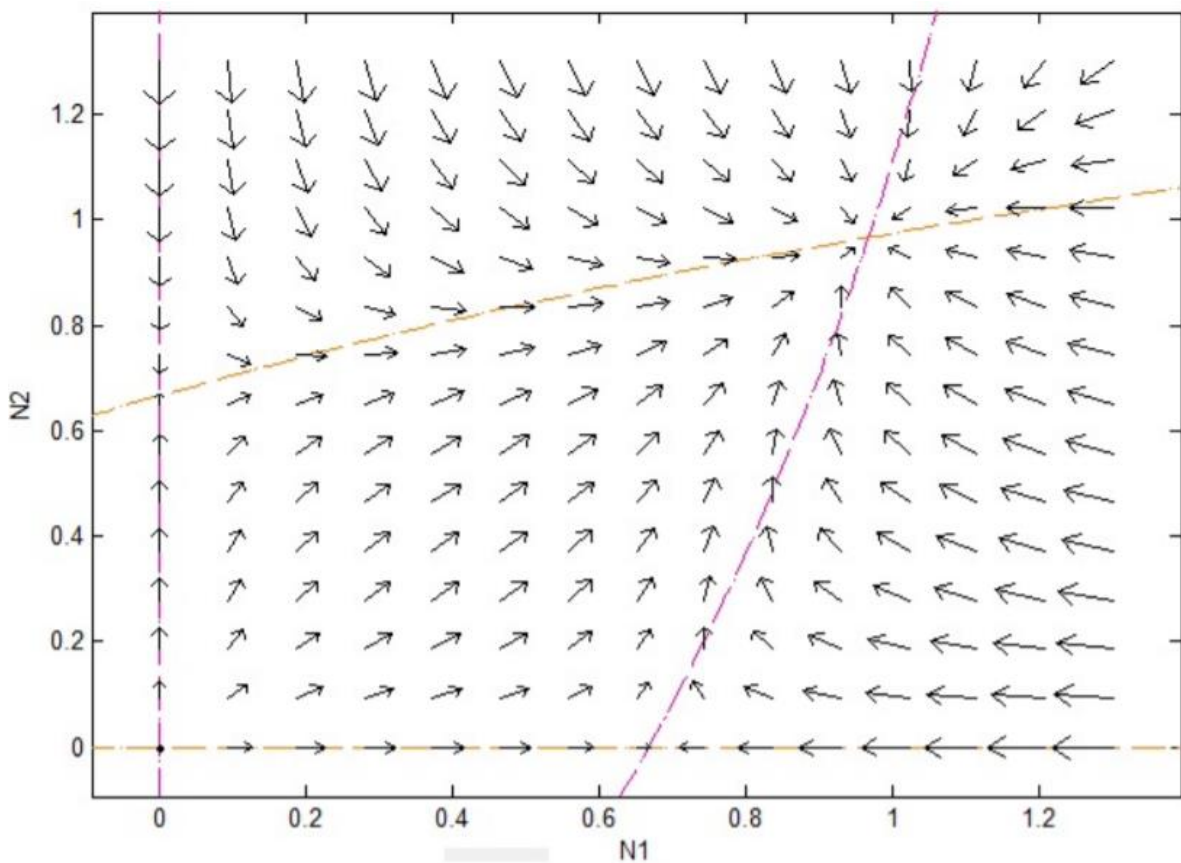


Рисунок 4.1 – Криволінійні ізокліни зі значенням параметрів **r1 = r2 = b1 = b2 = 1; α12, α21 = 0,9; d1 = d2 = 0,5**

Давайте знайдемо нетривіальну точку рівноваги для цієї системи. З рівняння (4.10a), задавши

$$\frac{dN_1}{dt} = 0$$

отримаємо

$$\left( r_1 - \frac{b_1 N_1^*}{1 + \alpha_{12} N_2^*} - d_1 N_1^* \right) N_1^* = 0$$

тоді

$$N_1^* = 0$$

або

$$r_1 - \frac{b_1 N_1^*}{1 + \alpha_{12} N_2^*} - d_1 N_1^* = 0$$

Ми шукаємо нетривіальну точку, тому продовжуємо роботу з другим рівнянням. Виконуємо перетворення:

$$\begin{aligned} r_1 - N_1^* \left( \frac{b_1}{1 + \alpha_{12} N_2^*} + d_1 \right) &= 0 ; \\ N_1^* \left( \frac{b_1}{1 + \alpha_{12} N_2^*} + \frac{d_1(1 + \alpha_{12} N_2^*)}{1 + \alpha_{12} N_2^*} \right) &= r_1 \\ \Rightarrow N_1^* \left( \frac{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12} N_2^*)}{1 + \alpha_{12} N_2^*} \right) &= r_1 \\ \therefore N_1^* &= \frac{r_1(1 + \alpha_{12} N_2^*)}{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12} N_2^*)}. \end{aligned} \quad (4.11a)$$

Аналогічно для (4.10б) маємо

$$N_2^* = \frac{r_2(1 + \alpha_{21} N_1^*)}{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21} N_1^*)}. \quad (4.11б)$$

Тому нетривіальна точка рівноваги для системи (4.10а) - (4.10б) є

$$(N_1^*, N_2^*) = \left( \frac{r_1(1 + \alpha_{12} N_2^*)}{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12} N_2^*)}, \frac{r_2(1 + \alpha_{21} N_1^*)}{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21} N_1^*)} \right),$$

як показано на рисунку 4.1 точка перетину двох ізоклін.

#### 4.2.1 Перевірка виводу рівнянь за допомогою експерименту

У нас є рівняння (4.11a). Побудуємо графік за допомогою MATLAB використовуючи наступні значення параметрів  $r_1 = r_2 = b_1 = b_2 = 1$ ;  $a_{12}, a_{21} = 0,9$ ;  $d_1 = d_2 = 0,5$ . Також застосуємо ці значення параметрів у (4.11a):

$$N_1^* = \frac{1(1 + 0.9N_2^*)}{1 + 0.5(1 + 0.9N_2^*)},$$

задавши  $N_2^* = 0$ , ми можемо знайти числове значення  $N_1^*$ .

$$\begin{aligned} N_1^* &= \frac{1(1 + 0.9 \times 0)}{1 + 0.5(1 + 0.9 \times 0)} \\ &= \frac{1}{1.5} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

звертаючись до рисунку 4.1, ми бачимо, що ізокліна ріст для  $N_1^*$  (відображається як рожева лінія) перетинає вісь  $N_1$  у цьому значенні. Ми можемо показати подібним чином, що  $N_2^*$  ізокліна перетинає вісь  $N_2$  у тому ж значенні.

Це підтверджує правильність виведення рівнянь.

## 5 ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ

### 5.1 Введення в дискретні за часом моделі

#### 5.1.1 Що так дискретна за часом модель

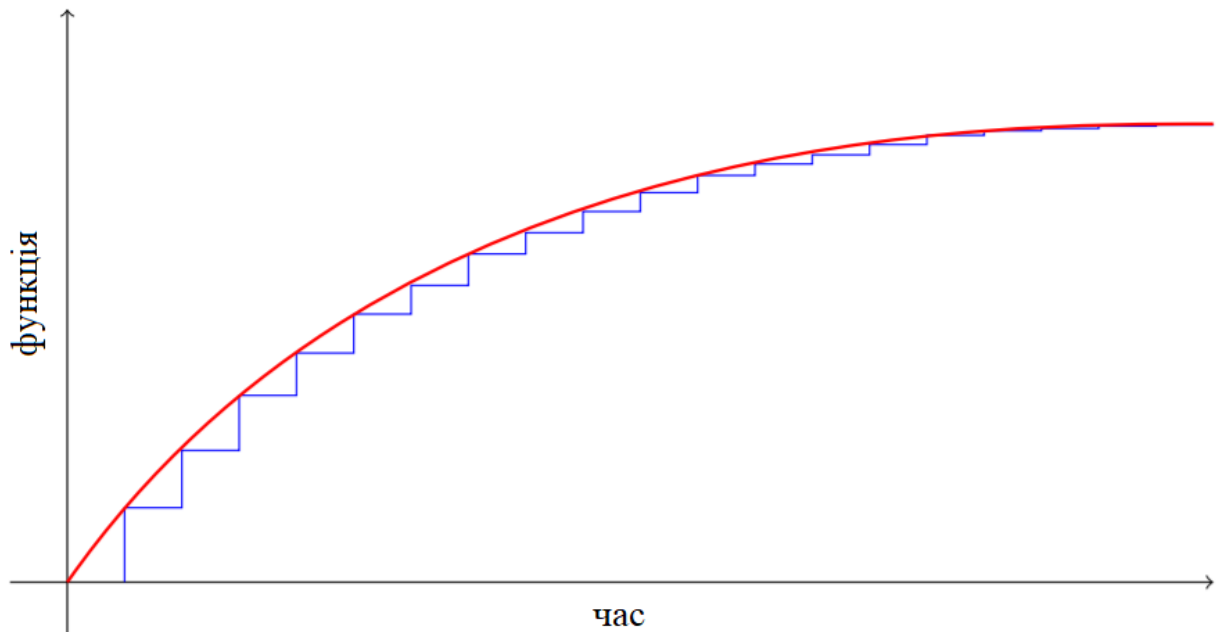


Рисунок 5.1 – Графік показує неперервну поведінку (червоним) у порівнянні з дискретною поведінкою (синім) довільної функції часу

Робота з дискретним часом полягає в тому, щоб думати про час як про дискретну величину. Можемо розглянути приклад годинника, щоб краще візуалізувати це поняття: звичайні годинники мають хвилину і годинникову стрілки, які знаходяться у неперервному русі по колу, а цифрові годинники не мають стрілок, а тому лише “стрибають” (наприклад з 19:59 до 20:00), тобто кожна хвилина цифрових годинників є дискретним періодом часу. Дивіться рисунок 5.1 для прикладу неперервної та дискретної поведінки функції часу.

#### 5.1.2 Дискретна природа динаміки населення

Народження організмів в природі часто відбуваються під час регулярних "сезонів розмноження", які в основному дуже специфічні. Наприклад, багато видів комах паруються протягом усього життя і відкладають яйця перед смертю. Це залишає період часу між поколіннями. Більшість моделей розглядаються у постійному середовищі, тобто модель вважається автономною – всі біологічні та екологічні параметри вважаються

постійними в часі. Однак це нечасто буває в реальному житті, тому що багато таких параметрів насправді змінюються в часі (з урахуванням сезонних коливань, наприклад). Враховуючи це, модель повинна бути неавтономною. Freedman [10] стверджує, що дискретні моделі часу, побудовані на різницевих рівняннях, є більш доцільними, ніж неперервні, в яких популяції не мають часового відриву між поколіннями.

## 5.2 Дискретизація моделі симбіозу (4.10а) - (4.10б) з використанням кусочно-постійного аргументу

Почнемо з дискретизації моделі (4.10а) - (4.10б) з використанням підходу, що описаний у роботі Fan і Wang [8]. Для цього ми візьмемо систему (4.10а) - (4.10б), розділивши обидві сторони на  $N_1$  і  $N_2$ , відповідно:

$$\frac{1}{N_1(t)} \frac{dN_1}{dt} = r_1 - \frac{b_1 N_1(t)}{1 + \alpha_{12} N_2(t)} - d_1 N_1(t)$$

$$\frac{1}{N_2(t)} \frac{dN_2}{dt} = r_2 - \frac{b_2 N_2(t)}{1 + \alpha_{21} N_1(t)} - d_2 N_2(t).$$

Дискретизуємо праву частину системи таким чином, щоб вона мала наступну форму:

$$\frac{1}{N_1(t)} \frac{dN_1}{dt} = r_1 - \frac{b_1 N_1([t])}{1 + \alpha_{12} N_2([t])} - d_1 N_1([t]) \quad (5.1a)$$

$$\frac{1}{N_2(t)} \frac{dN_2}{dt} = r_2 - \frac{b_2 N_2([t])}{1 + \alpha_{21} N_1([t])} - d_2 N_2([t]) \quad (5.1б)$$

де  $[t]$  представляє цілу частину  $t$ ,  $t \in (0, \infty)$ . Рівняння типу (5.1а) - (5.1б) відомі як диференціальні рівняння з кусочно-постійними аргументами.

На кожному інтервалі  $[k, k + 1]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , ми можемо інтегрувати (5.1а):

$$\int_k^t \frac{1}{N_1(t)} \frac{dN_1(t)}{dt} dt = \int_k^t \frac{dN_1}{N_1(t)} = \int_k^t \left( r_1 - \frac{b_1 N_1([t])}{1 + \alpha_{12} N_2([t])} - d_1 N_1([t]) \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_k^t \frac{dN_1}{N_1(t)} = \int_k^t r_1 dt - \int_k^t \frac{b_1 N_1([t])}{1 + \alpha_{12} N_2([t])} dt - \int_k^t d_1 N_1([t]) dt \\
&\Rightarrow \left[ \ln(N_1(t)) \right]_k^t = \left[ r_1 t \right]_k^t - \left[ \frac{b_1 N_1(k)}{1 + \alpha_{12} N_2(k)} t \right]_k^t - \left[ d_1 N_1(k) t \right]_k^t \\
&\Rightarrow \ln(N_1(t)) - \ln(N_1(k)) = \left[ (r_1 t) - (r_1 k) \right] - \left[ \left( \frac{b_1 N_1(k)}{1 + \alpha_{12} N_2(k)} t \right) - \left( \left( \frac{b_1 N_1(k)}{1 + \alpha_{12} N_2(k)} k \right) \right) \right] \\
&\quad - \left[ (d_1 N_1(k) t) - (d_1 N_1(k) k) \right] \\
&\Rightarrow \ln(N_1(t)) - \ln(N_1(k)) = r_1(t - k) - \frac{b_1 N_1(k)}{1 + \alpha_{12} N_2(k)}(t - k) - d_1 N_1(k)(t - k)
\end{aligned}$$

ми можемо використати правила перетворення логарифмів, щоб переписати ліву частину, і винести  $(t-k)$  у правій частині щоб отримати

$$\ln \left( \frac{N_1(t)}{N_1(k)} \right) = \left( r_1 - \frac{b_1 N_1(k)}{1 + \alpha_{12} N_2(k)} - d_1 N_1(k) \right) (t - k)$$

Проекспонуємо обидві частини рівняння

$$\frac{N_1(t)}{N_1(k)} = e^{\left( \left( r_1 - \frac{b_1 N_1(k)}{1 + \alpha_{12} N_2(k)} - d_1 N_1(k) \right) (t - k) \right)}$$

тепер можна помножити обидві сторони на  $N_1(k)$

$$N_1(t) = N_1(k) e^{\left( \left( r_1 - \frac{b_1 N_1(k)}{1 + \alpha_{12} N_2(k)} - d_1 N_1(k) \right) (t - k) \right)}$$

Поклавши  $t \rightarrow k + 1$ , отримаємо дискретний аналог (4.10а) - (4.10б):

$$N_1(k + 1) = N_1(k) e^{\left( r_1 - \frac{b_1 N_1(k)}{1 + \alpha_{12} N_2(k)} - d_1 N_1(k) \right)} \quad (5.2a)$$

$$N_2(k + 1) = N_2(k) e^{\left( r_2 - \frac{b_2 N_2(k)}{1 + \alpha_{21} N_1(k)} - d_2 N_2(k) \right)} \quad (5.2б)$$

## 5.3 Чисельні методи

### 5.3.1 Чисельний метод розв'язування звичайних диференціальних рівнянь

Дуже часто неможливо аналітично розв'язати таку задачу:

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (5.3)$$

Тому, щоб такі диференціальні рівняння мали практичне застосування, потрібно розробити методи отримання апроксимації  $y(t)$  з (5.3). Можна взяти

приблизні значення  $y_1, y_2, \dots, y_N$  функції  $y(t)$  при кінцевому числі точок  $t_1, t_2, \dots, t_N$  [4].

### 5.3.2 Метод Ейлера

Нехай  $\hat{y}(t)$  – функція, яка на кожному з інтервалів  $[t_i; t_{i+1}]$  є прямою лінією, що з'єднує точки  $(t_i; y_i)$  і  $(t_{i+1}; y_{i+1})$  (дивіться рисунок 5.2), ми можемо записати  $\hat{y}(t)$  таким рівнянням:

$$\hat{y}(t) = y_i + \frac{1}{h}(t - t_i)(y_{i+1} - y_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

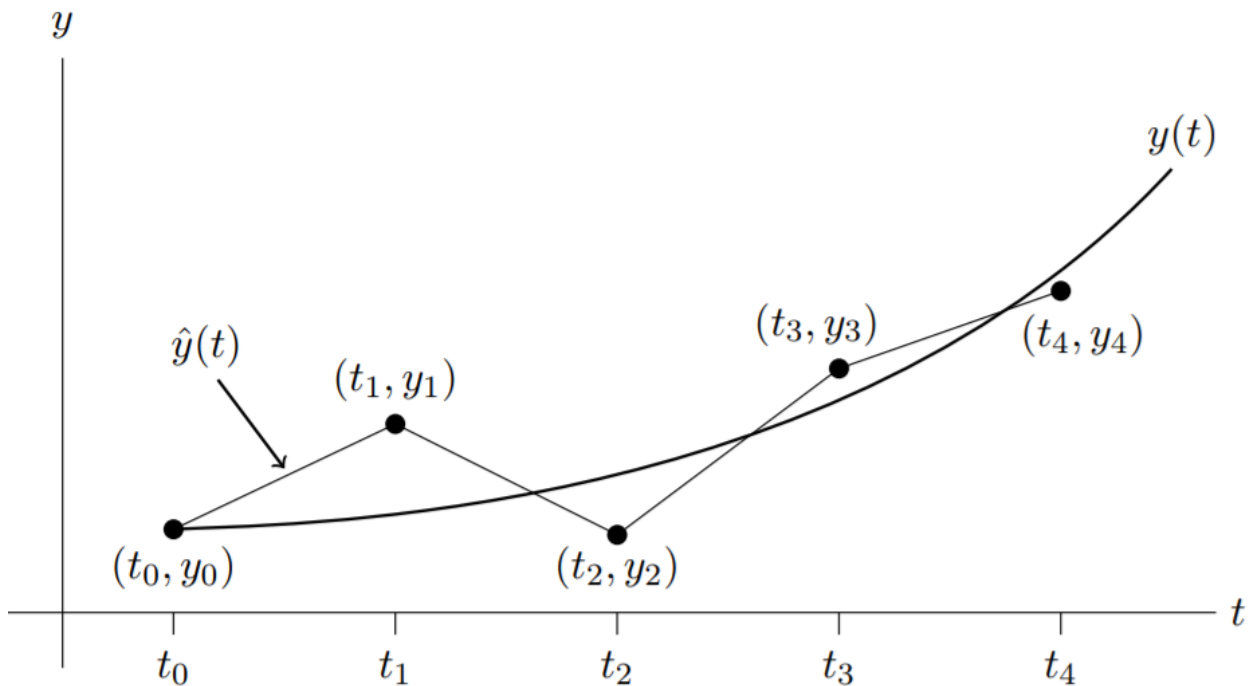


Рисунок 5.2 – Графік, що показує порівняння між  $\hat{y}(t)$  та  $y(t)$

Якщо  $\hat{y}(t)$  близька до  $y(t)$  при  $t=t_i$ ; тобто, якщо  $y_i$  близька до  $y(t_i)$ , і якщо  $t_{i+1}$  близька до  $t_i$ , тоді  $\hat{y}(t)$  близька до  $y(t)$  на всьому інтервалі  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Це витікає з неперервності як  $y(t)$ , так і  $\hat{y}(t)$ . Тоді потрібно як можна точніше знайти наближення  $y_1, y_2, \dots, y_N$ . Для простоти вимагатимемо щоб точки  $t_1, t_2, \dots, t_N$  були рівномірно розташовані. Це досягається шляхом вибору великого  $N \in \mathbb{N}$  і встановленням  $t_n = t_0 + n \cdot h$ , де  $n = 1, 2, \dots, N$ , а  $h = a/N$ .

Єдине, що ми знаємо про функцію  $y(t)$ , це те, що вона задовольняє диференціальне рівняння 5.3, і що її значення при  $t=t_0$  є  $y_0$ . Використаємо цю інформацію для наближення значення  $y_1$  до  $y(t_1)$ . Тоді використаємо значення



$y_1$  для знаходження наближеного значення  $y_2$  до  $y(t_2)$  і так далі. Щоб це зробити ми повинні застосувати теорему, яка дає нам змогу обчислити значення  $y(t_{i+1})$  зі значення  $y(t_i)$ . Теорема, яку ми будемо використовувати – теорема Тейлора,

$$y(t_n + h) = y(t_n) + h \frac{dy(t_n)}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 y(t_n)}{dt^2} + \dots, \quad (5.4)$$

Таким чином, якщо ми знаємо значення  $y(t_i)$ , то можна обчислити значення  $y(t_{i+1})$ . Оскільки  $y(t)$  задовольняє (5.3), то її похідна, при  $t=t_n$ , повинна бути рівною  $f(t_n, y(t_n))$ . Більш того, з властивостей часткової похідної, ми можемо отримати

$$\frac{d^2 y(t_n)}{dt^2} = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right] (t_n, y(t_n))$$

і всі інші похідні більш високого порядку  $y(t_n)$ . Отже, ми можемо переписати (5.4) так:

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2!} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right] (t_n, y(t_n)) + \dots \quad (5.5)$$

Найпростішу апроксимацію  $y(t_{i+1})$  отримуємо шляхом обрізання ряду Тейлора (5.5) після другого елементу. Це дає чисельний метод

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0), \quad y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1),$$

а в загальному випадку

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad y_0 = y(t_0). \quad (5.6)$$

Рівняння (5.6) відоме як метод Ейлера [4].

#### 5.4 Дискретизація моделі симбіозу (4.10а) - (4.10б) за допомогою методу Ейлера

Застосування методу Ейлера до системи (4.10а) - (4.10б)

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2} - d_1 N_1 \right) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= \left( r_2 - \frac{b_2 N_2}{1 + \alpha_{21} N_1} - d_2 N_2 \right) N_2 \end{aligned}$$

дає наступну дискретну модель симбіозу

$$N_1(t_{n+1}) = N_1(t_n) + hN_1(t_n) \left( r_1 - \frac{b_1 N_1(t_n)}{1 + \alpha_{12} N_2(t_n)} - d_1 N_1(t_n) \right) \quad (5.7a)$$

$$N_2(t_{n+1}) = N_2(t_n) + hN_2(t_n) \left( r_2 - \frac{b_2 N_2(t_n)}{1 + \alpha_{21} N_1(t_n)} - d_2 N_2(t_n) \right) \quad (5.7б)$$

### 5.5 Графічне порівняння дискретних моделей

Існує цілий ряд значень параметрів, для яких дискретна модель, отримана з використанням методології кусково-постійних аргументів, не має асимптотично-стійку рівновагу в першій чверті. Ми повинні бути дуже обережними, використовуючи цей підхід при створенні дискретних моделей: основні властивості стабільності не переносяться так легко [17].

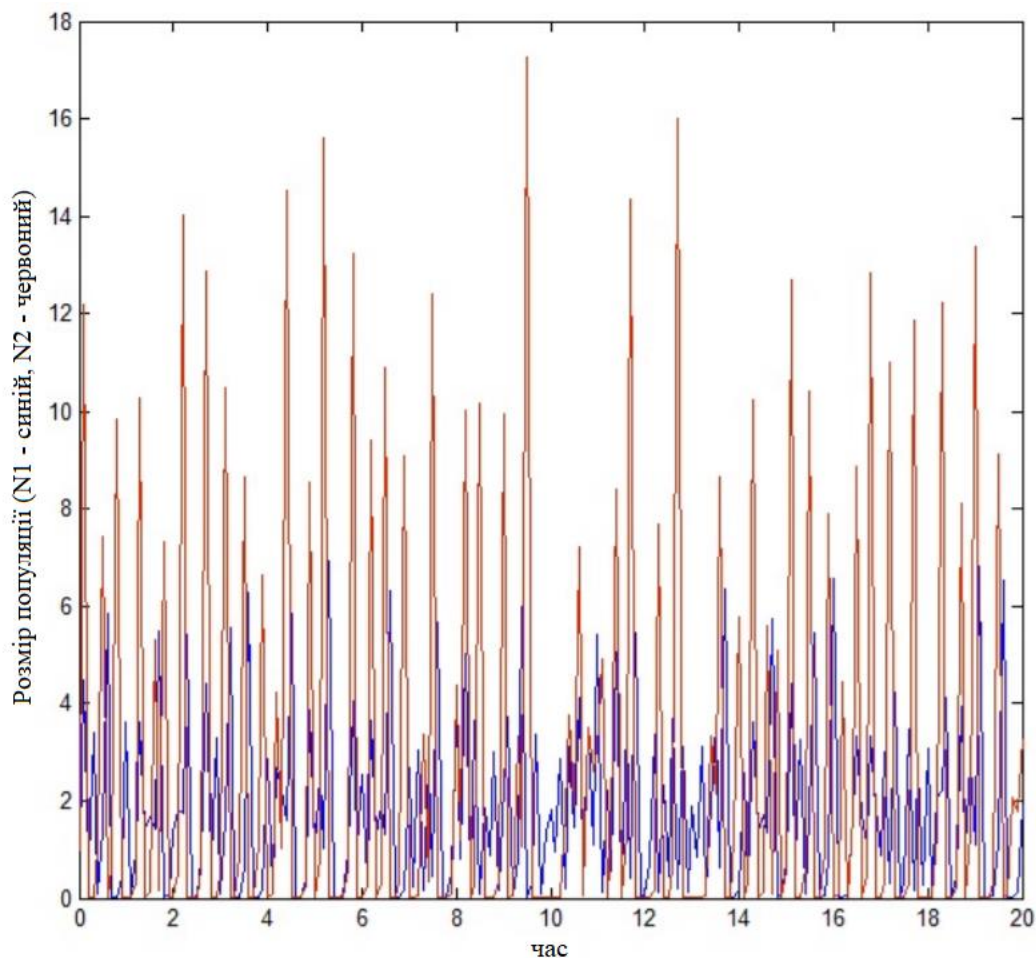


Рисунок 5.3 – Графік показує кусочно дискретну модель (5.2a) - (5.2б) зі значеннями параметрів  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = b_1 = b_2 = d_1 = d_2 = 1$ ;  $r_1 = 3$ ;  $r_2 = 4$  і розмір кроку  $h = 0,1$

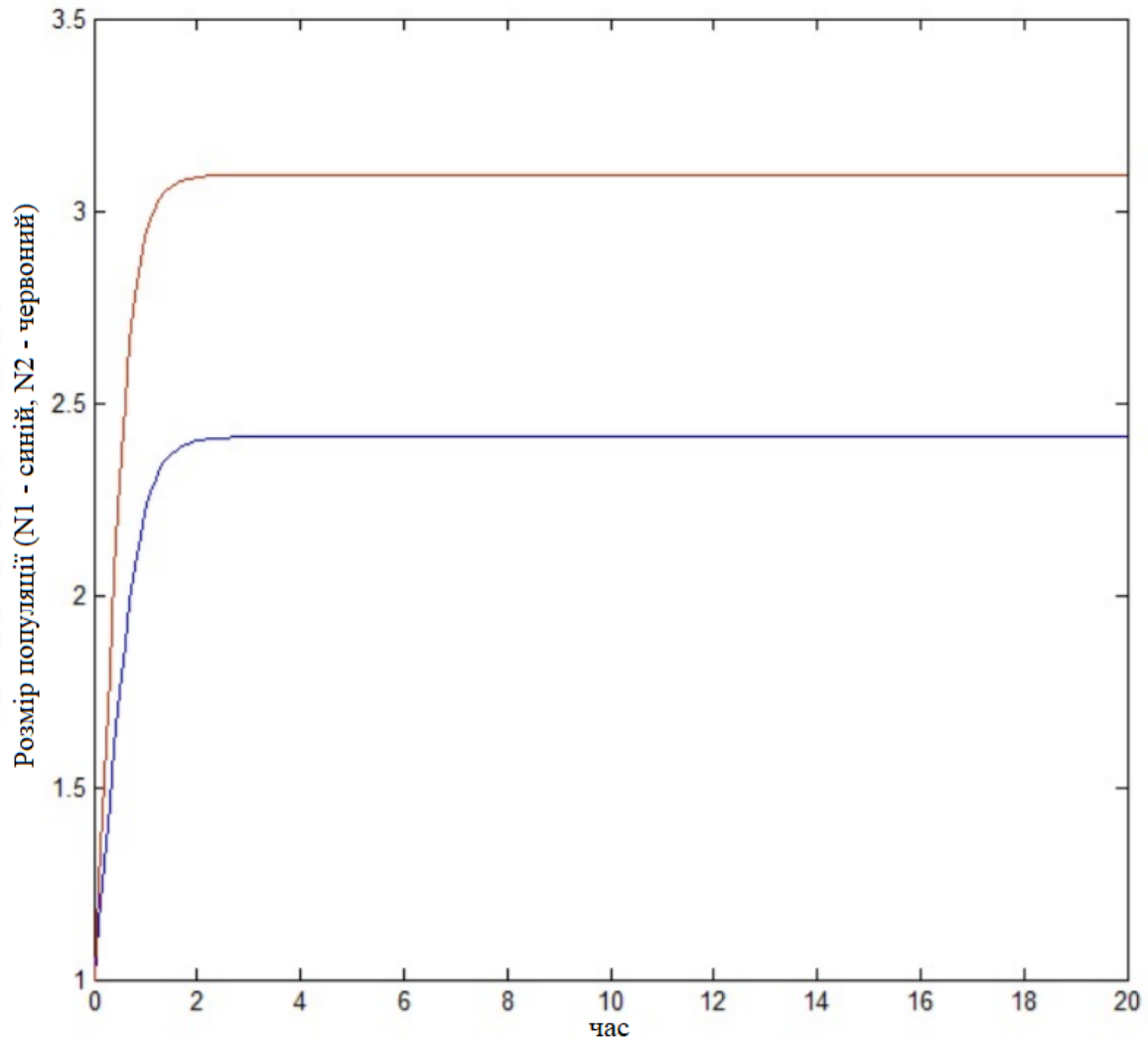


Рисунок 5.4 – Графік показує модель за методом Ейлера (5.7а) - (5.7б) зі значеннями параметрів  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = b_1 = b_2 = d_1 = d_2 = 1$ ;  $r_1 = 3$ ;  $r_2 = 4$  і розмір кроку  $h = 0,1$

Наведені вище графіки цілком однозначно ілюструють відмінності між двома моделями коли ті ж значення параметрів використовуються. На рисунку 5.3 показана стійка коливальна поведінка розмірів популяцій обох видів для дискретної моделі (5.2а) - (5.2б). Рисунок 5.4 показує явну асимптотичну стабільність розмірів популяцій обох видів. Як ми могли б очікувати, розмір популяції виду 2 досягає більшого значення, оскільки  $r_2 > r_1$ . Незважаючи на те, що всі значення параметрів є однаковими, як і розмір кроку обох методів,

застосованих для однієї і тієї ж моделі (4.10а) - (4.10б) (тобто відрізняються лише самі методи), ми бачимо кардинально різні результати.

## 6 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЗАТРИМКАМИ

### 6.1 Введення в диференціальні рівняння з затримками

#### 6.1.1 Означення диференціальних рівнянь з затримками

Диференціальні рівняння з затримками – це рівняння форми

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1(t, y(t))), y(t - \tau_2(t, y(t))), \dots) \quad (6.1)$$

де значення  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  – затримки, що є вимірюваними фізичними величинами і можуть бути константами, функціями часу або функцією від двох аргументів  $t$  і  $y$ . Теорія для диференціальних рівнянь з затримками і без мають багато подібного і методи аналізу для диференціальних рівнянь без затримок можуть бути поширені на диференціальних рівнянь з затримками, коли це можливо. Однак їх різниця породжую необхідність у нових підходах. Затримки викликають серйозні математичні ускладнення і тим самим роблять великий діапазон явищ можливими [11].

#### 6.1.2 Різниця між диференціальних рівнянь з затримками і без

Звичайне диференціальних рівняння припускають, що ефект будь-яких змін в системі є миттєвий, коли диференціальні рівняння з затримками беруть до уваги минулі стани. З точки зору вирішення рівнянь диференціальних рівнянь без затримок вимагають початкового значення, а диференціальних рівнянь з затримками вимагають початкової функції. Перевагою диференціальних рівнянь з затримками є те, що вони дозволяють більш точно відображати модель, ніж диференціальні рівнянь без затримок, однак аналітична теорія для такого виду рівнянь менш розвинена.

### 6.2 Користь диференціальні рівнянь з затримками у моделюванні

При математичному моделюванні, звичайно, намагаються як найкраще наблизитися до реального процесу. З огляду на це, можна помітити, що в деяких, якщо не у більшості ситуацій, існує певний термін часу між початком дії та результуючою зміною. Хоча диференціальні рівняння без затримки використовувалися як основний інструмент у математичному моделюванні

дуже довго, при їх використанні не береться до уваги наявність будь-яких затримок у реальних процесах.

Затримки можна знайти у багатьох ситуаціях, наприклад, у повсякденному житті:

- Натискання кнопки «вкл» на пульті  $\Rightarrow$  Увімкнення телевізора.
- Вмикання душу  $\Rightarrow$  Зміна температури води.
- Натискання педалі гальма в автомобілі  $\Rightarrow$  Автомобіль фізично сповільнюється.

У біології також є багато прикладів, у яких відбуваються затримки:

- Чужорідні клітини в крові  $\Rightarrow$  Виробляються білі кров'яні клітини.
- Вживання алкоголю  $\Rightarrow$  Споживач відчуває ефект.
- Больові подразники  $\Rightarrow$  Реакція організму.

У нашому конкретному випадку маємо справу з динамікою населення.

Затримки в цьому процесі можна знайти одразу:

- Організм народився  $\Rightarrow$  Організм стає здатним до розмноження.

### 6.3 Побудова та вирішення логістичного рівняння Ферхюльста-Перла

Якщо зростання популяції за відсутності регулювання підпорядковується рівнянню  $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$ , то "природний період" системи становить це  $\frac{1}{r}$ .

Давайте побудуємо модель, щоб відобразити ситуацію, коли чистий темп приросту на душу населення, що позначається як  $f(N)$ , є функцією від загальної чисельності популяції  $N(t)$ . Тоді швидкість зростання популяції представляється рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N). \quad (6.2)$$

Тепер, коли  $N$  занадто велике, то  $\frac{df(N)}{N}$  має бути від'ємним, оскільки чим більше стає популяція, тим більше повинен бути його гальмуючий вплив на

подальший ріст. Найпростіший варіантом це зробити – припустити, що  $f(N)$  лінійна:

$$f(N) = r - sN \quad (6.3)$$

де константи  $r > 0$  та  $s > 0$ . Підставляючи (6.3) в (6.2) отримуємо

$$\frac{dN}{dt} = N(r - sN) \quad (6.4)$$

це рівняння відоме як логістичне рівняння Ферхюльста-Перла.

Через  $r$  позначити внутрішню швидкість природного приросту для зростання (швидкість, з якою популяція збільшується в розмірах), і через  $K$  позначити ємність середовища. Тоді, коли  $N$  знаходиться близько до 0 або  $K$ , ми вимагаємо, щоб  $f(N)$  було близько до  $r$  та 0 відповідно. Тож давайте розглянемо

$$f(N) = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (6.5)$$

що зменшується лінійно при збільшенні  $N$ . Підставивши (6.5) в (6.2), отримаємо

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (6.6)$$

Тепер розв'яжемо рівняння (6.6). Відокремлення змінних дає

$$\frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r dt \quad (6.7)$$

$$\frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{\left(1 - \frac{N}{K}\right)} \quad (6.8)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{A \left(1 - \frac{N}{K}\right)}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} + \frac{BN}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)}$$

$$\therefore dN = A \left(1 - \frac{N}{K}\right) + BN$$

$$N = 0$$

$$\Rightarrow A = dN$$

$$\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0 \quad \therefore K = N$$

$$\Rightarrow B = \frac{dN}{K}.$$

Отже, підставляючи вирази для **A** і **B** назад у рівняння (6.8), отримуємо

$$\frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{dN}{N} + \frac{dN}{K \left(1 - \frac{N}{K}\right)}, \quad (6.9)$$

а з (6.7), (6.9) можна перетворити так

$$\frac{dN}{N} + \frac{dN}{K \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r dt. \quad (6.10)$$

Інтегруючи обидві сторони (6.10), отримуємо

$$\int \frac{1}{N} dN + \frac{1}{K} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{N}{K}\right)} dN = \int r dt$$

$$\ln(N) - \ln\left(1 - \frac{N}{K}\right) = rt + C$$

$$\ln\left(\frac{N}{\left(1 - \frac{N}{K}\right)}\right) = rt + C$$

Експонуємо обидві сторони

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{K}} = e^{rt+C}$$

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{K}} = \mu e^{rt}$$

де  $\mu = e^C$ ,

$$\Rightarrow N = \mu e^{rt} \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$N = \mu e^{rt} - \mu e^{rt} \left(\frac{N}{K}\right)$$

Винесення N дає нам загальний розв'язок для (6.6)

$$N(t) = \frac{\mu e^{rt}}{\left(1 + \frac{\mu e^{rt}}{K}\right)} \quad (6.11)$$



Можна усунути константу  $\mu$ , встановивши  $t = 0$  і зазначивши  $N(0) = N_0$  бути початковий станом, це дає

$$\mu = \frac{N_0}{k - N_0} \quad (6.12)$$

Підстановка (6.12) в (6.11) дає частковий розв'язок для (6.6)

$$N(t) = \frac{N_0 e^{rt}}{(K - N_0) \left( 1 + \frac{N_0 e^{rt}}{(k - N_0)K} \right)} \quad (6.13)$$

#### 6.4 Додавання затримки до рівняння (6.6)

Підставляємо затримку  $\tau$  до рівняння (6.6)

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) \quad (6.14)$$

Диференціальне рівняння з затримкою (6.14) тепер може бути використане для моделювання динаміки зростання популяції одного виду з ємністю середовища  $K$  і з константною швидкістю розмноження  $r$ ; величина  $\left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right)$  дає залежність від розміру популяції  $\tau$  одиниць часу назад.

Замінивши змінних наступним чином:  $N(t) = Ky(t)$ ,  $\alpha = r\tau$  і  $t = s\tau$ , (6.14) можна привести до рівняння в безрозмірній формі

$$\frac{dy(s)}{ds} = -\alpha y(s - 1) (1 + y(s)) \quad (6.15)$$

де  $\alpha$  – позитивна константа, яка відображає співвідношення затримки до часу зростання [11]. Рівняння (6.15) глибоко вивчено низкою авторів, зокрема Kakutani та Markus [15] і Wright [12].

Це хороший приклад того, як можна застосувати затримку. В наступному розділі цей підхід буде взятий на увагу і використаний для моделі (4.10а) - (4.10б).

## 7 ВВЕДЕННЯ ЗАТРИМКИ У МОДЕЛЬ (4.10a) - (4.10б)

Наступні кілька підрозділів основанийі на прикладі введення затримки у роботі Joharjee та Roberts [17].

Розглядаючи модель (4.10a) - (4.10б)

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2} - d_1 N_1 \right) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= \left( r_2 - \frac{b_2 N_2}{1 + \alpha_{21} N_1} - d_2 N_2 \right) N_2\end{aligned},$$

можна ввести затримку в рівняння, щоб відобразити ідею про те, що наслідки симбіозу не реалізується миттєво, тоді модель приймає таку форму

$$\frac{dN_1}{dt} = \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2(t - \tau_2)} - d_1 N_1 \right) N_1 \quad (7.1a)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \left( r_2 - \frac{b_2 N_2}{1 + \alpha_{21} N_1(t - \tau_1)} - d_2 N_2 \right) N_2 \quad (7.1б)$$

для того, щоб отримати частковий розв'язок, ця модель повинна бути зв'язана з парою вхідних функцій:

$$N_1(t) = \xi_1(t) \quad \text{для} \quad -\tau_1 \leq t \leq 0 \quad (7.2a)$$

$$N_2(t) = \xi_2(t) \quad \text{для} \quad -\tau_2 \leq t \leq 0 \quad (7.2б)$$

де кожна початкова функція диференційована над її областю визначення і елементи її область значення є позитивні дійсні числа. У цьому розділі ми постараємось довести, що система (7.1a) - (7.1б) має асимптотичну стійкість, але перш ніж ми це зробимо, ми повинні довести, що наступна нерівність є вірною.

**Лема 7.1.** Якщо  $r_1, r_2, b_1, b_2, d_1, d_2 \in (0, \infty)$ ,  $\alpha_{12}, \alpha_{21} \in [1, \infty)$ , то

$$\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}b_1b_2(N_1^*N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12}N_2^*)^2(1 + \alpha_{21}N_1^*)^2} < r_1r_2 \quad (7.3)$$

**Доведення.** Оскільки

$$E = (N_1^*, N_2^*) = \left( \frac{r_1 (1 + \alpha_{12}N_2^*)}{b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12}N_2^*)}, \frac{r_2 (1 + \alpha_{21}N_1^*)}{b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21}N_1^*)} \right),$$

то

$$N_1^* N_2^* = \frac{r_1 r_2 (1 + \alpha_{12} N_2^*) (1 + \alpha_{21} N_1^*)}{(b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*))}, \quad (7.4)$$

тоді

$$r_1 r_2 = \frac{N_1^* N_2^* (b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*))}{(1 + \alpha_{12} N_2^*) (1 + \alpha_{21} N_1^*)}. \quad (7.5)$$

Оскільки  $b_1, b_2, d_1, d_2 \in (0, \infty)$ ,  $\alpha_{12}, \alpha_{21} \in [1, \infty)$  і  $(N_1^*; N_2^*) \neq (0; 0)$ , тоді очевидно що

$$\begin{aligned} b_1 &< b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*) \\ b_2 &< b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*), \end{aligned} \quad (7.6)$$

тоді з (7.6)

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^* N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} \\ &< \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} (b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)) (N_1^* N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Для простоти нехай

$$\Theta = \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} (b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)) (N_1^* N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2}.$$

Тому, підставляючи значення для  $N_1^* N_2^*$  з рівняння (7.4) в праву частину (7.7) ми отримуємо

$$\begin{aligned} \Theta &= \left( \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} (b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*))}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{r_1 r_2 (1 + \alpha_{12} N_2^*) (1 + \alpha_{21} N_1^*)}{(b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*))} \right)^2 \end{aligned}$$

тобто

$$\Theta = \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} (r_1 r_2)^2 (1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2 (b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*))}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2 (b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2^*))^2 (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1^*))^2}$$

скорочення дає

$$\Theta = \frac{\alpha_{12}\alpha_{21} (r_1 r_2)^2}{(b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12}N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21}N_1^*))} \quad (7.8)$$

виносимо  $r_1 r_2$  з (7.8)

$$\Theta = \frac{\alpha_{12}\alpha_{21} r_1 r_2}{(b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12}N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21}N_1^*))} (r_1 r_2) \quad (7.9)$$

з (7.5) і (7.9) отримуємо

$$\begin{aligned} \Theta = & \left( \frac{\alpha_{12}\alpha_{21} r_1 r_2}{(b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12}N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21}N_1^*))} \right) \\ & \times \left( \frac{N_1^* N_2^* (b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12}N_2^*)) (b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21}N_1^*))}{(1 + \alpha_{12}N_2^*) (1 + \alpha_{21}N_1^*)} \right) \end{aligned}$$

Після скорочення маємо

$$\Theta = \frac{\alpha_{12}\alpha_{21} r_1 r_2 N_1^* N_2^*}{(1 + \alpha_{12}N_2^*) (1 + \alpha_{21}N_1^*)},$$

що можна переписати так

$$\Theta = r_1 r_2 \left( \frac{\alpha_{12}N_2^*}{1 + \alpha_{12}N_2^*} \right) \left( \frac{\alpha_{21}N_1^*}{1 + \alpha_{21}N_1^*} \right).$$

Тепер, оскільки ми знаємо  $\alpha_{12}, \alpha_{21} \in [1, \infty)$  і  $(N_1^*; N_2^*) \neq (0; 0)$ , то

$$\left( \frac{\alpha_{12}N_2^*}{1 + \alpha_{12}N_2^*} \right), \left( \frac{\alpha_{21}N_1^*}{1 + \alpha_{21}N_1^*} \right) \in (0, 1)$$

Тому

$$\frac{\alpha_{12}\alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^* N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12}N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21}N_1^*)^2} = r_1 r_2 \left( \frac{\alpha_{12}N_2^*}{1 + \alpha_{12}N_2^*} \right) \left( \frac{\alpha_{21}N_1^*}{1 + \alpha_{21}N_1^*} \right) < r_1 r_2$$

справедливо, отже, доказ леми (7.1) завершено.

Далі представимо деякі характеристичні рівняння та теорію стійкості.

## 7.1 Підготовчі заходи

### 7.1.1 Характеристичні рівняння для випадку затримки

Характеристичні рівняння використовуються в процесі визначення стабільності системи. Протягом цього підрозділу ми помітимо, що характерні

рівняння для модель з затримками відрізняється від характерних рівнянь для модель без затримок. Наприклад, характеристичне рівняння для  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{a}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\mathbf{x}(t-\tau)$  це  $\lambda - \mathbf{a} - \mathbf{e}^{-\lambda\tau} = 0$ . Корни  $\lambda$  характеристичного рівняння називають характерними коріннями. Зверніть увагу, що корінь з'являється в експоненті останнього терміну в характеристичному рівнянні, що змушує характеристичне рівняння мати нескінченну кількість коренів. Ми будемо використовувати цю інформацію при визначенні асимптотичної стабільності моделі з затримками.

## 7.2 Збіжність моделі з затримками

**Теорема 7.1.** Припустимо, що  $r_1, r_2, b_1, b_2, d_1, d_2 \in (0, \infty)$ ,  $\alpha_{12}, \alpha_{21} \in [1, \infty)$ . Тоді стан  $E = (N_1^*, N_2^*)$  системи (7.1a) - (7.1б) з початковими функціями (7.2a) - (7.2б) асимптотично стабільна.

**Доведення.** Нагадаємо, що не тривіальна точка рівноваги є

$$E = (N_1^*, N_2^*) = \left( \frac{r_1 (1 + \alpha_{12} N_2)}{b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2)}, \frac{r_2 (1 + \alpha_{21} N_1)}{b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1)} \right).$$

Давайте побудуємо матрицю якобіан (див. Додаток Б) системи (7.1a) - (7.1б).

По-перше, визначаючи функції  $f_2$  і  $g_2$  як

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2(t - \tau_2)} - d_1 N_1 \right) N_1 = f_2(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= \left( r_2 - \frac{b_2 N_2}{1 + \alpha_{21} N_1(t - \tau_1)} - d_2 N_2 \right) N_2 = g_2(N_1, N_2) \end{aligned}$$

Далі обчислимо часткові похідні, що мають бути елементами матриці якобіану

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2}{\partial N_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial N_1} & \frac{\partial g_2}{\partial N_2} \end{pmatrix}.$$

Для  $\frac{\partial f_2}{\partial N_1}$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N_1} = \frac{\partial}{\partial N_1} \left( \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2(t - \tau_2)} - d_1 N_1 \right) N_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial N_1} &= \left( \frac{b_1}{1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2)} - d_1 \right) N_1 + \left( r_1 - \frac{b_1N_1}{1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2)} - d_1N_1 \right) \times 1 \\
&= r_1 - 2N_1 \left( \frac{b_1}{1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2)} + d_1 \right) \\
\frac{\partial f_2}{\partial N_1} &= r_1 - 2N_1 \left( \frac{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2))}{1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2)} \right)
\end{aligned}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{\partial g_2}{\partial N_2} = r_2 - 2N_2 \left( \frac{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21}N_1(t - \tau_1))}{1 + \alpha_{21}N_1(t - \tau_1)} \right)$$

Далі для  $\frac{\partial f_2}{\partial N_2}$  і для  $\frac{\partial g_2}{\partial N_1}$  маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial N_2} &= \left( 0 - b_1N_1 \times \frac{\partial}{\partial N_2} \left( \frac{1}{1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2)} \right) - 0 \right) N_1 + \left( r_1 - \frac{b_1N_1}{1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2)} - d_1N_1 \right) \times 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial N_2} &= -b_1N_1^2 \times \frac{\partial}{\partial N_2} \left( \frac{1}{1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2)} \right)
\end{aligned}$$

видалення констант з диференціального дає

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial N_2} &= -b_1N_1^2(-\alpha_{12}) \left( \frac{1}{(1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2))^2} \right) \times \frac{\partial}{\partial N_2} N_2(t - \tau_2) \\
\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial N_2} &= \frac{\alpha_{12}b_1N_1^2}{(1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2))^2} \times \frac{\partial}{\partial N_2} N_2(t - \tau_2)
\end{aligned}$$

отже

$$\frac{\partial f_2}{\partial N_2} = \frac{\alpha_{12}b_1N_1^2}{(1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2))^2} e^{-\lambda\tau_2}$$

Аналогічно можемо показати, що

$$\frac{\partial g_2}{\partial N_1} = \frac{\alpha_{21}b_2N_2^2}{(1 + \alpha_{21}N_1(t - \tau_1))^2} e^{-\lambda\tau_1}$$

То ж матриця якобіан має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} r_1 - 2N_1 \left( \frac{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2))}{1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2)} \right) & \frac{\alpha_{12}b_1N_1^2}{(1 + \alpha_{12}N_2(t - \tau_2))^2} e^{-\lambda\tau_2} \\ \frac{\alpha_{21}b_2N_2^2}{(1 + \alpha_{21}N_1(t - \tau_1))^2} e^{-\lambda\tau_1} & r_2 - 2N_2 \left( \frac{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21}N_1(t - \tau_1))}{1 + \alpha_{21}N_1(t - \tau_1)} \right) \end{pmatrix}$$



Тепер ми можемо побудувати матрицю яacobian, що оцінюється в точці  $E$   
 $= (N_1^*; N_2^*)$ :

$$J_E = \begin{pmatrix} r_1 - 2N_1^* \left( \frac{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12}N_2^*)}{1 + \alpha_{12}N_2^*} \right) & \frac{\alpha_{12}b_1(N_1^*)^2}{(1 + \alpha_{12}N_2^*)^2} e^{-\lambda\tau_2} \\ \frac{\alpha_{21}b_2(N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{21}N_1^*)^2} e^{-\lambda\tau_1} & r_2 - 2N_2^* \left( \frac{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21}N_1^*)}{1 + \alpha_{21}N_1^*} \right) \end{pmatrix}.$$

Елементи на головній діагональній можуть бути спрощені наступним чином

$$\begin{aligned} r_1 - 2N_1^* \left( \frac{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12}N_2^*)}{1 + \alpha_{12}N_2^*} \right) &= r_1 - 2 \left( \frac{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12}N_2^*)}{1 + \alpha_{12}N_2^*} \right) \left( \frac{r_1(1 + \alpha_{12}N_2)}{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12}N_2)} \right) \\ &= r_1 - 2r_1 \\ &= -r_1 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} r_2 - 2N_2^* \left( \frac{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21}N_1^*)}{1 + \alpha_{21}N_1^*} \right) &= r_2 - 2 \left( \frac{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21}N_1^*)}{1 + \alpha_{21}N_1^*} \right) \left( \frac{r_2(1 + \alpha_{21}N_1)}{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21}N_1)} \right) \\ &= r_2 - 2r_2 \\ &= -r_2. \end{aligned}$$

Отже, виглядає матриця яacobian, що оцінюється в точці рівноваги  $E$ , так:

$$J_E = \begin{pmatrix} -r_1 & \frac{\alpha_{12}b_1(N_1^*)^2}{(1 + \alpha_{12}N_2^*)^2} e^{-\lambda\tau_2} \\ \frac{\alpha_{21}b_2(N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{21}N_1^*)^2} e^{-\lambda\tau_1} & -r_2 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Віднімаючи  $\lambda I$

$$(J_E - \lambda I) = \begin{pmatrix} -r_1 - \lambda & \frac{\alpha_{12}b_1(N_1^*)^2}{(1 + \alpha_{12}N_2^*)^2} e^{-\lambda\tau_2} \\ \frac{\alpha_{21}b_2(N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{21}N_1^*)^2} e^{-\lambda\tau_1} & -r_2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

тепер можна знайти характеристичне рівняння:

$$\det(J_E - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -r_1 - \lambda & \frac{\alpha_{12}b_1(N_1^*)^2}{(1 + \alpha_{12}N_2^*)^2} e^{-\lambda\tau_2} \\ \frac{\alpha_{21}b_2(N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{21}N_1^*)^2} e^{-\lambda\tau_1} & -r_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left( \lambda^2 + (r_1 + r_2)\lambda + r_1 r_2 \right) - \left( \frac{\alpha_{12} b_1 (N_1^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2} e^{-\lambda \tau_2} \right) \left( \frac{\alpha_{21} b_2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} e^{-\lambda \tau_1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + (r_1 + r_2)\lambda + r_1 r_2 - \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^*)^2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} = 0 \quad (7.12)$$

для зручності, будемо записувати (7.12) як

$$\lambda^2 + A\lambda + B - Ce^{-\lambda\tau} = 0, \quad (7.13)$$

де

$$A = r_1 + r_2 \quad (7.14)$$

$$B = r_1 r_2 \quad (7.15)$$

$$C = \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^*)^2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} \quad (7.16)$$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2. \quad (7.17)$$

Точка рівноваги Е асимптотично стійка, якщо коріння характерного рівняння (7.13) мають негативну дійсну частину.

Підставляючи  $\lambda = x + iy$  в (7.13), маємо

$$(x + iy)^2 + A(x + iy) + B - Ce^{-(x+iy)\tau} = 0,$$

що розкривається до

$$x^2 + 2ixy - y^2 + Ax + Aiy + B - C(e^{-x\tau} \cos(y\tau) - ie^{-iy\tau} \sin(y\tau)) = 0. \quad (7.18)$$

Розділяємо дійсну та уявної частини (7.18) на два рівняння

$$\text{Real} \Rightarrow (x^2 - y^2) + (Ax + B) = Ce^{-x\tau} \cos(y\tau) \quad (7.19)$$

$$\text{Imaginary} \Rightarrow 2xy + Ay = -Ce^{-x\tau} \sin(y\tau). \quad (7.20)$$

Звівши в квадрат і додавши (7.19) - (7.20) отримуємо

$$((x^2 - y^2) + (Ax + B))^2 + (2xy + Ay)^2 = (Ce^{-x\tau} \cos(y\tau))^2 + (-Ce^{-x\tau} \sin(y\tau))^2$$

що розгортається у



$$\begin{aligned}
& x^4 - x^2 y^2 + x^3 A + x^2 B - x^2 y^2 + y^4 - x y^2 A - y^2 B + x^3 A - x y^2 A + x^2 A^2 + x A B \\
& + x^2 B - y^2 B + x A B + B^2 + 4 x^2 y^2 + 2 A x y^2 + 2 A x y^2 + A^2 y^2 \\
& - C^2 e^{-2 x \tau} (\cos^2(y \tau) + \sin^2(y \tau)) = 0.
\end{aligned}$$

Після скорочення отримуємо

$$x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 + x^2 A^2 + 2x y^2 A + A^2 y^2 - 2y^2 B + 2x^3 A + 2x^2 B + 2x A B + B^2 - C^2 e^{-2x\tau} = 0$$

що тепер може бути згорнуто так:

$$(x^2 + y^2)^2 + x^2 A^2 + y^2 (2xA + A^2 - 2B) + 2x(x^2 A + xB + AB) + B^2 \left(1 - \frac{C^2}{B^2} e^{-2x\tau}\right) = 0 \quad (7.21)$$

Використовуючи нашу лему (7.1), ми маємо додаткову інформацію

$$0 < \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^* N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} < r_1 r_2$$

що є

$$0 < C < B \quad (7.22)$$

Ясно також, що  $AB > 0$  і  $A^2 - 2B > B$ . Якщо припустити, що  $x \geq 0$ , то (7.21) задовольняється лише тоді, коли  $x = y = 0$  і  $B = C$ . Це суперечить (7.22) і тому  $x = \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ . Тому ми робимо висновок, що кожен корінь характеристичного рівняння (7.13) має від'ємну дійсну частину і, отже, асимптотична стійкість точки рівноваги  $E$  підтверджена. Це доводить теорему.

### 7.3 Збіжність моделі без затримок

Встановлюючи затримки  $\tau_1, \tau_2 = 0$ , ми можемо підтвердити асимптотичну стійкість початкової моделі, тоді маємо систему рівнянь для  $f_3$  і  $g_3$

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2} - d_1 N_1 \right) N_1 = f_3(N_1, N_2) \\
\frac{dN_2}{dt} &= \left( r_2 - \frac{b_2 N_2}{1 + \alpha_{21} N_1} - d_2 N_2 \right) N_2 = g_3(N_1, N_2)
\end{aligned}$$

з точкою рівноваги

$$E = (N_1^*, N_2^*) = \left( \frac{r_1 (1 + \alpha_{12} N_2)}{b_1 + d_1 (1 + \alpha_{12} N_2)}, \frac{r_2 (1 + \alpha_{21} N_1)}{b_2 + d_2 (1 + \alpha_{21} N_1)} \right).$$

Знову розраховуємо наступні часткові похідні  $\frac{\partial f_3}{\partial N_1}, \frac{\partial f_3}{\partial N_2}, \frac{\partial g_3}{\partial N_1}, \frac{\partial g_3}{\partial N_2}$  як і раніше

$$\frac{\partial f_3}{\partial N_1} = r_1 - 2N_1 \left( \frac{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12}N_2)}{1 + \alpha_{12}N_2} \right)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial N_2} = r_2 - 2N_2 \left( \frac{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21}N_1)}{1 + \alpha_{21}N_1} \right)$$

розрахунок  $\frac{\partial f_3}{\partial N_2}$  трохи відрізняється, оскільки відсутня затримка для диференціювання,

$$\frac{\partial f_3}{\partial N_2} = \frac{\partial}{\partial N_2} \left( \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2} - d_1 N_1 \right) N_1 \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial N_2} &= \left( 0 - b_1 N_1 \times \frac{\partial}{\partial N_2} \left( \frac{1}{1 + \alpha_{12} N_2} \right) - 0 \right) N_1 + \left( r_1 - \frac{b_1 N_1}{1 + \alpha_{12} N_2} - d_1 N_1 \right) \times 0 \\ &= -b_1 N_1^2 \times \frac{\partial}{\partial N_2} \left( \frac{1}{1 + \alpha_{12} N_2} \right). \end{aligned}$$

І на кінець

$$\frac{\partial f_3}{\partial N_2} = \frac{\alpha_{12} b_1 N_1^2}{(1 + \alpha_{12} N_2)^2}.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{\partial g_3}{\partial N_1} = \frac{\alpha_{21} b_2 N_2^2}{(1 + \alpha_{21} N_1)^2}.$$

Матриця яacobіан має таку форму

$$J = \begin{pmatrix} r_1 - 2N_1 \left( \frac{b_1 + d_1(1 + \alpha_{12}N_2)}{1 + \alpha_{12}N_2} \right) & \frac{\alpha_{12} b_1 N_1^2}{(1 + \alpha_{12}N_2)^2} \\ \frac{\alpha_{21} b_2 N_2^2}{(1 + \alpha_{21}N_1)^2} & r_2 - 2N_2 \left( \frac{b_2 + d_2(1 + \alpha_{21}N_1)}{1 + \alpha_{21}N_1} \right) \end{pmatrix},$$

який в точці рівноваги спрощується до

$$J_E = \begin{pmatrix} -r_1 & \frac{\alpha_{12} b_1 (N_1^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2} \\ \frac{\alpha_{21} b_2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} & -r_2 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Отже, тепер можна знайти характеристичне рівняння так

$$\det(J_E - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -r_1 - \lambda & \frac{\alpha_{12} b_1 N_1^2}{(1 + \alpha_{12} N_2)^2} \\ \frac{\alpha_{21} b_2 N_2^2}{(1 + \alpha_{21} N_1)^2} & -r_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left( \lambda^2 + (r_1 + r_2)\lambda + r_1 r_2 \right) - \left( \frac{\alpha_{12} b_1 (N_1^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2} \right) \left( \frac{\alpha_{21} b_2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + (r_1 + r_2)\lambda + r_1 r_2 - \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^*)^2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} = 0$$

можна спростити до

$$\lambda^2 + A\lambda + (B - C) = 0, \quad (7.24)$$

де

$$A = r_1 + r_2,$$

$$B - C = r_1 r_2 - \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^*)^2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2}.$$

Тепер можна розв'язати характеристичне рівняння. Отримуємо

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4(B - C)}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4(B - C)}}{2}.$$

Щоб підтвердити асимптотичну стійкість системи, треба показати, що дійсні частини обох розв'язків  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  є негативними.

Тепер розглянемо дискримінант (позначимо через  $\Delta$ ), якщо  $\Delta > 0$ , тоді не існує уявної частини у коренів. Так покажемо це: відомо, що  $A, B, C > 0$  і що  $B > C$ .

$$\begin{aligned}
\Delta &= A^2 - 4(B - C) \\
\Rightarrow \Delta &= (r_1 + r_2)^2 - 4 \left( r_1 r_2 - \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^*)^2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} \right) \\
\Rightarrow \Delta &= r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 - 4r_1 r_2 + 4 \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^*)^2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} \\
\Rightarrow \Delta &= r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 + 4 \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^*)^2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} \\
\Rightarrow \Delta &= (r_1 - r_2)^2 + 4 \frac{\alpha_{12} \alpha_{21} b_1 b_2 (N_1^*)^2 (N_2^*)^2}{(1 + \alpha_{12} N_2^*)^2 (1 + \alpha_{21} N_1^*)^2} \\
\therefore \Delta &> 0.
\end{aligned}$$

Тепер, відомо  $\Delta > 0$ , то і корінь дискримінанта більше за 0, тож зрозуміло, що  $\lambda_2 < 0$ . Далі покажемо, що  $\lambda_1 < 0$ , для цього треба показати, що

$$0 > -A + \sqrt{A^2 - 4(B - C)} \quad (7.25)$$

Ми знаємо, що множення правої частини (7.25) на 0.5 не змінить її знаку. Тому,

$$0 > -A + \sqrt{A^2 - 4(B - C)}$$

$$A > \sqrt{A^2 - 4(B - C)}$$

$$A^2 > A^2 - 4(B - C)$$

$$0 > -4(B - C)$$

що справедливо з  $B > C$ . Отже,  $\lambda_1 < 0$  і  $\lambda_2 < 0$ . Асимптотична стабільність підтверджена для окремого випадку системи, коли затримки  $\tau_1, \tau_2 = 0$ .

## 8 ВИСНОВКИ

### 8.1 З'ясовано

Під час виконання дипломної роботи було виявлено, що зміна знаків простої моделі конкуренції для створення позитивної взаємодії дає нереалістичну довготривалу поведінку розміру популяцій. Було встановлено, що побудовані нами вдосконалені моделі асимптотично стабільні в їхніх нетривіальних точках рівноваги для систем диференціальних рівнянь з затримками і без. Асимптотична стабільність дискретних моделей може залежати від вибору методу дискретизації, оскільки різні методи можуть давати істотно відмінну поведінку з плином часу, тому при дискретизації моделі важливо робити це з обережністю. У розділі 5 виявили, що метод з використанням кусково-постійних аргументів і метод Ейлера дають надзвичайно різні результати. Отримана модель (4.10а) - (4.10б) не може бути застосована до будь-якої ситуації в реальному житті; в дійсності можуть бути ситуації, коли відображається поведінка з рисунку 5.3 та інші ситуації де відображається поведінка з рисунку 5.4.

### 8.2 Майбутня робота

#### 8.2.1 Альтернативні числові методи

Ми можемо створити ще більш точні моделі, застосувавши більш складні числові методи замість методу Ейлера, серед таких методів удосконалений метод Ейлера, методи Рунге-Кутти і методи Ньютона-Рафсона. При застосуванні більш складних методів необхідно дотримуватися уваги, бо, безумовно, складні методи породжують більш складні різниці рівняння.

#### 8.2.2 Стохастичні моделі

Ми можемо зробити наші моделі більш складними і, таким чином, більш реалістичними різними способами, одним з яких може бути перехід від фіксованих констант до функцій часу. Наприклад константи **b1**, **b2** – швидкості народжуваності для виду 1 і виду 2 відповідно, але дуже наївно припускати, що швидкість народжуваності є константою, оскільки набагато ймовірніше,

що це функція. Давайте припустимо, що всі наші константи тепер є функціями часу, система (4.10a) - (4.10б) тепер приймає наступну форму:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = \left( r_1(t) - \frac{b_1(t)N_1(t)}{1 + \alpha_{12}(t)N_2(t)} - d_1(t)N_1(t) \right) N_1(t)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \left( r_2(t) - \frac{b_2(t)N_2(t)}{1 + \alpha_{21}(t)N_1(t)} - d_2(t)N_2(t) \right) N_2(t)$$

Наприклад, такі випадки, як смерть, відбутися не у заздалегідь відомий момент часу. Особливо в природі, смерть це те, що може статися в будь-який час з багатьох різних причин. Фактично, на розмір популяції насправді часто впливають стохастичні фактори (екологічний шум), що робить неможливим застосування ідеї про те, що параметри є абсолютними константи. Мао [22] дійшов висновку, що навіть досить невеликий шум може стримувати вибухи в динаміці населення. Qiu [18] також розглядає це і пропонує наступну модель симбіозу:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \left( \frac{a_1(t) + a_2(t)y(t)}{1 + y(t)} - c_1(t)x(t) \right) \quad (8.1a)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \left( \frac{b_1(t) + b_2(t)x(t)}{1 + x(t)} - c_2(t)y(t) \right) \quad (8.1б)$$

і, беручи до уваги ефекти випадково середовища, можна застосувати до системи (8.1a) - (8.1б) білий шум. Тому неавтономна стохастична система може бути описана так

$$dx(t) = x(t) \left( \frac{a_1(t) + a_2(t)y(t)}{1 + y(t)} - c_1(t)x(t) \right) dt + \sigma_1(t)x(t)dB_1(t) \quad (8.2a)$$

$$dy(t) = y(t) \left( \frac{b_1(t) + b_2(t)x(t)}{1 + x(t)} - c_2(t)y(t) \right) dt + \sigma_2(t)y(t)dB_2(t) \quad (8.2б)$$

де  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $c_i(t)$ ,  $\sigma_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  – це позитивні, неперервні та обмежені функції на  $[0, +\infty)$ ;  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  – функції білого шуму; а  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – інтенсивність білого шуму. Для майбутньої роботи можна застосувати такий підхід і використовувати його моделей, що представлені у цій роботі.

### **8.2.3 Збір даних**

Одним з важливих аспектів математичного моделювання, якого немає в цій роботі, це перевірки моделей шляхом збору даних. Це треба застосувати у майбутніх роботах. Приклад збору даних для моделювання населення можна знайти в книзі Braun [4], в якій можна знайти рівняння для розміру популяції як функцію часу. Модель використовується для прогнозування розміру населення в США з 1790 по 1950 рік, а отримані результати прогнозування порівнюється з фактичними даними. Це можна було б застосувати і для прогнозування розміру популяції комах і рослин.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Bascompte J. Mutualistic Networks / J. Bascompte, P. Jordano. – Princeton University Press. 2014. – 102 с.
2. Biology Online [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://www.biology-online.org>.
3. Boucher D.H. The Ecology of Mutualism Annual Review of Ecology and Systematics / D.H. Boucher, S. James, K.H. Keeler. – New York. 1982. – 305 с.
4. Braun M. Differential Equations and their Applications / M. Braun. – Springer. 1993. – 412 с.
5. Darwin C. The Various Contrivances by which British and Foreign Orchids are Fertilized by Insects / C. Darwin. – London John Murray. 1862. – 252 с.
6. Dean A.M. The Biology of Mutualism / A.M. Dean. – Oxford University Press. 1985. – 524 с.
7. Elaydi S.N. An Introduction to Difference Equations / S.N. Elaydi – Springer. 1996. – 435 с.
8. Fan M. Periodic Solutions of a Discrete Time Nonautonomous RadioDependent Predator-Prey System / M. Fan, K. Wang. – New York. 2001. – 606 с.
9. Fowler A.C. An Asymptotic Analysis of the Delayed Logistic Equation when the Delay is Large / A.C. Fowler. – Massachusetts Institue of Technology, USA. 1981. – 589 с.
10. Freedman H.I. Deterministic Mathematical Models in Population Ecology / H.I. Freedman. – Marcel Dekker, New York. 1980. – 452 с.



11. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Popular Dynamics / K. Gopalsamy. – Kluwer Academic Publishers. 1992. – 602 c.
12. Wright E.M. A Nonlinear Difference Differential Equation / E.M. Wright. – New York. 1955. – 943 c.
13. Wolin C.L. Models of facultative mutualism: density effects / C.L. Wolin, L.R. – New York. 1984. – 221 c.
14. Janzen D.H. The natural history of mutualisms / D.H. Janzen. – Oxford University Press. 1985. – 442 c.
15. Kakutani S. Contributions to the theory of Nonlinear Oscillations / S. Kakutani, M. Markus. – New York. 1958. – 271 c.
16. Kot M. Elements of Mathematical Ecology / M. Kot. – Cambridge University Press. 2010. – 588 c.
17. Roberts J.A. Continuous and Discrete Models of Mutualism / J.A. Roberts, N.G. Joharjee. – University of Chester. 2013. – 290 c.
18. Qui H. Two types of permanence of a stochastic mutualism model / H. Qui, K. Wang. – Springer, China. 2013. – 374 c.
19. Meyer J.S. Dynamics of mixed populations having complementary metabolism / J.S. Meyer, A.G. Fredrickson, H.M. Tsuchiya. – New York. 1975. – 312 c.
20. Miura Y. Stability analysis of commensal and mutual relations with competitive assimilation in continuous mixed culture / Y. Miura, H. Tanaka, M. Okazaki. – New York. 1980. – 332 c.
21. Lee I.H. Dynamics of mixed cultures of *Lactobacillus plantarum* and *Propionibacterium shermanii* / I.H. Lee, A.G. Fredrickson, H.M. Tsuchiya. – New York. 1976. – 198 c.

22. Mao X.R. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics / X.R. Mao, G. Marion, E. Renshaw. – Springer, China. 2002. – 245 с.
23. Кривоносов О.Д. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XV міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2017, Дніпро, 22-24 листопада 2017 р. / О.Д. Кривоносов, О.О. Кузенков. // Під загальною редакцією О.М. Кісельової. – Д.: ДНУ. 2017. – 244 с. – С. 109-110.

**ДОДАТОК А**  
**Код програми**

**Код MATLAB використаний для створення рисунку 5.3:**

```

h=0.5;
tmax=100;
N1=zeros(1,tmax/h+1);
N2=zeros(1,tmax/h+1);
N1(1)=1;
N2(1)=1;
r1=3;
b1=1;
a12=1;
d1=1;
r2=4;
b2=1;
a21=1;
d2=1;
for k=1:(tmax/h)
N1(k+1)=N1(k)*exp(r1-((b1*N1(k))/(1+a12*N2(k)))-d1*N1(k));
N2(k+1)=N2(k)*exp(r2-((b2*N2(k))/(1+a21*N1(k)))-d2*N2(k))
end
t=0:h:tmax;
plot(t,N1,t,N2);

```

**Код MATLAB використаний для створення рисунку 5.4:**

```

h=0.01;
tmax=100;
N1=zeros(1,tmax/h+1);
N2=zeros(1,tmax/h+1);
N1(1)=1;
N2(1)=1;
r1=3;
b1=1;
a12=1;
d1=1;
r2=4;
b2=1;
a21=1;
d2=1;
for n=1:(tmax/h)
N1(n+1)=N1(n)+(h*N1(n)*(r1-((b1*N1(n))/(1+a12*N2(n)))-d1*N1(n)));
N2(n+1)=N2(n)+(h*N2(n)*(r2-((b2*N2(n))/(1+a21*N1(n)))-d2*N2(n)));
end
t=0:h:tmax;
plot(t,N1,t,N2);

```

**ДОДАТОК Б**  
**Матриця яacobian**

У векторному численні матриця якобіан є матрицею всіх часткових похідних першого порядку функції векторних значень. Припустимо  $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  – це функція, задана  $m$  функціями дійсних чисел від  $n$  аргументів,  $\mathbf{F1}(\mathbf{x1}, \dots, \mathbf{xn}), \dots, \mathbf{Fm}(\mathbf{x1}, \dots, \mathbf{xn})$ . Якщо вони мають часткові похідні від усіх своїх аргументів, то можна організувати їх в  $m \times n$  матрицю, матриця якобіан  $\mathbf{J}$  для  $\mathbf{F}$  показано нижче:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$