Часть 3

Производная

Определение производной

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Определение. Производной от функции $f(x)$ в точке x_0 называется величина

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Дадим некоторые расшифровки этого важнейшего понятия математического анализа.

а) Вспоминая определение предела, можно записать определение $f'(x_0)$ через кванторы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta x \quad |\Delta x| < \delta \quad \left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

б) Величина Δx называется приращением аргумента, а величина $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ приращением функции. Тогда

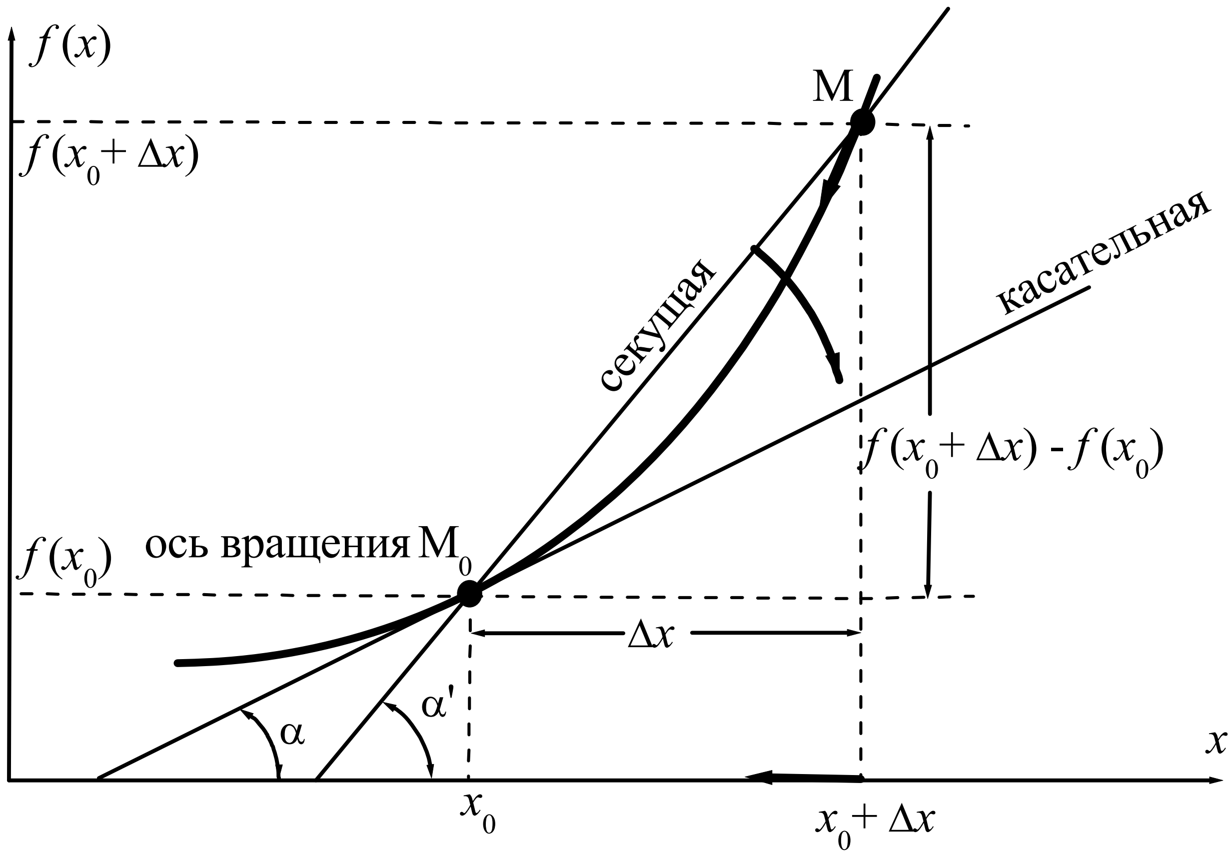
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

в) Обозначая $x_0 + \Delta x = x$, можно записать

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

https://conf62.mipt.ru/course/1133/tema-3-proizvodnaya-teoremy-o-differenciruemyh-funkciyah-formula-tejlora-chast-1

Геометрический смысл производной



$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha' \qquad f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$$

Алгебра производных

Выведем важнейшие формулы, касающиеся вычисления производных. В дальнейшем $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, у которых существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, а c – некоторая константа (число).

1. $[cf(x)]' = cf'(x)$.

Доказательство.

$$[cf(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Доказательство

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(x)+g'(x)$$

Аналогично выводится формула для $[f(x)-g(x)]'$

3. $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$

Доказательство

$$[f(x)\cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

(В числителе дроби прибавим и вычтем комбинацию $f(x+\Delta x)g(x)$)

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

4. $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} =$$

(прибавляем и вычитаем в числителе комбинацию $f(x)g(x)$)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)}\left[g(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

5. $\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

В выражении $f'(g(x))$ подразумевается, что производная от функции f берется так, как будто $g(x)$ является единым целым (аргументом).

Доказательство

Пусть аргумент x получил приращение Δx. Тогда функция $g(x)$ получила приращение $\Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x)$ так что $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$. Поэтому

$$\left[f(g(x))\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta x} =$$

(делим и умножаем дробь на Δg)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} =$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

6. $\left[f^{(-1)}(x)\right]' = \dfrac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}$

Доказательство

Пусть $y = f^{(-1)}(x)$ так что $x = f(y)$. Если аргументу x дать приращение Δx , то величина y получит приращение $\Delta y = f^{(-1)}(x+\Delta x) - f^{(-1)}(x)$. Поэтому

$$\left[f^{(-1)}(x)\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(-1)}(x+\Delta x) - f^{(-1)}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}$$

Однако в данной формуле есть одна неувязка. Слева стоит функция от x, а справа получилась функция от y. Чтобы устранить это несоответствие надо в правой части заменить y на $f^{(-1)}(x)$. Тогда получим окончательно

$$\left[f^{(-1)}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}.$$

Таблица производных

Выведем теперь таблицу производных от элементарных функций.

1. $c' = 0$

Действительно, если $f(x) = c$, то

$$c' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0 \, .$$

2. $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu - 1}$

Имеем

$$(x^{\mu})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

(вынесем вверху x за скобки)

$$= x^{\mu} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\Delta x} =$$

(Сделаем «замену переменных» $\dfrac{\Delta x}{x} = z$. Тогда $\Delta x = z \cdot x$ и)

$$= \frac{x^{\mu}}{x} \lim_{z \to 0} \frac{(1+z)^{\mu} - 1}{z} = \mu \cdot x^{\mu - 1},$$

где был использован замечательный предел.

Рекомендуется запомнить некоторые частные случаи этой формулы

а) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

б) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\dfrac{1}{x^2}$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

Имеем

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a,$$

где был использован замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Особенно простой результат получается при $a = e$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(\dfrac{x + \Delta x}{x} \right)}{\Delta x} =$$

сделаем «замену переменных» $\dfrac{\Delta x}{x} = z$. Тогда $\Delta x = z \cdot x$ и $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\log_a (1 + z)}{z} = \dfrac{1}{\ln a}$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\log_a (1 + z)}{z \cdot x} = \frac{1}{x} \lim_{z \to 0} \frac{\log_a (1 + z)}{z} = \frac{1}{x \ln a}$$

Особенно простой результат получается при $a = e$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

5. $(\sin x)' = \cos x$

Имеем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \, .$$

где также был использован замечательный предел.

6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

$$\left(\cos x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Так как $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Вывод аналогичен.

9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

В данном случае $y = \arcsin x = f^{(-1)}(x)$ и $x = \sin y = f(y)$, то есть $f(y) = \sin y$. Поэтому по формуле для сложной функции

$$\left[f^{(-1)}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Вывод аналогичен.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

В данном случае $y = f^{(-1)}(x) = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y = f(y)$, то есть $f(y) = \operatorname{tg} y$. Поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1/\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Вывод аналогичен.

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

Действительно

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 (x)}$.

Вывод аналогичен.

7. $\left[f(x)^{g(x)} \right]' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)} \right]$

Доказательство

Обозначим $y = f(x)^{g(x)}$. Тогда $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$. Вычисляя производную от обеих частей этого равенства, получим

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Отсюда

$$y' = \left[f(x)^{g(x)} \right]' = y \cdot \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right] =$$

$$= f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$