Поверхности второго порядка

- **Определение.** Уравнение поверхности

$$F(x,y,z)=0$$

Замечание: Поверхности второго порядка, за исключением случаев вырождения, можно разделить на пять классов:

- эллипсоиды,
- гиперболоиды,
- параболоиды,
- конические поверхности
- цилиндрические поверхности

Поверхности 2-го порядка

- в общем случае уравнение поверхности 2-го порядка имеет вид

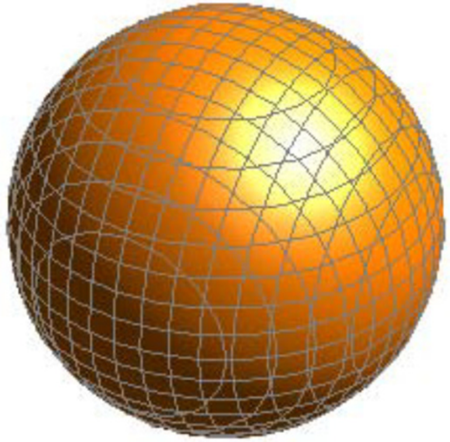
$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0\ .$$

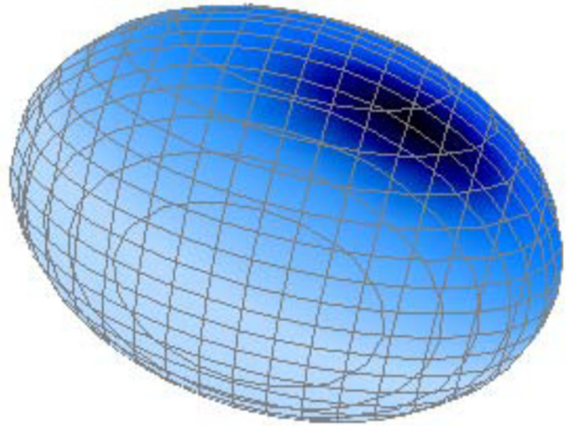
При этом предполагается, что по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33} отличен от нуля.

Поверхности второго порядка делятся на

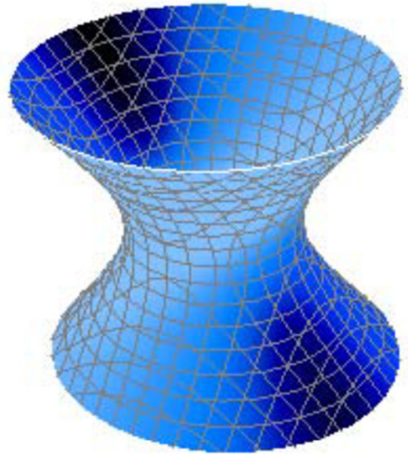
1) ***вырожденные***
2) ***невырожденные***

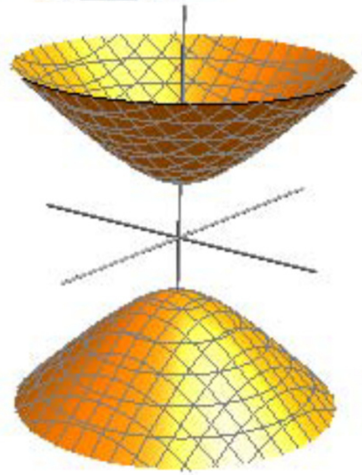
Эллипсоиды (сфера)



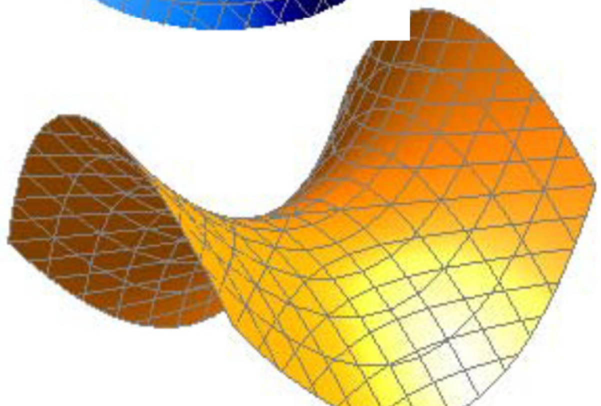


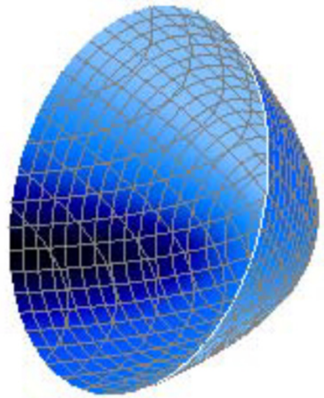
Гиперболоиды





Параболоиды



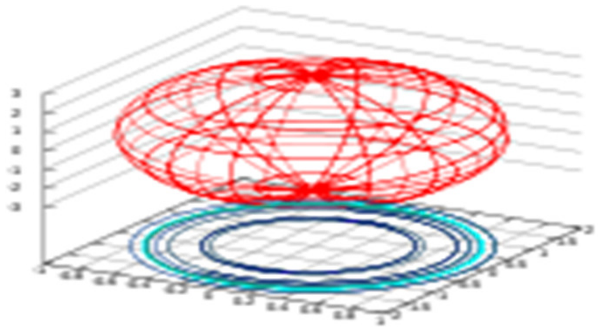


Эллипсоиды

- **Определение.** ***Эллипсоид*** – поверхность, определяемая в системе декартовых прямоугольных координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ ***каноническое уравнение эллипсоида***

a,b,c - полуоси эллипсоида, если они различны, то эллипсоид трехосный.



Эллипсоид может быть получен вращением эллипса вокруг одной из его осей.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА

1) Эллипсоид имеет центр симметрии $O(0;\ 0;\ 0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz

2) Точки пересечения с координатными осями:

с осью $\boldsymbol{OX}$: $\mathbf{A}_1(a;\ 0;\ 0)$, $\mathbf{A}_2(-a;\ 0;\ 0)$

с осью $\boldsymbol{OY}$: $\mathbf{B}_1(0;\ b;\ 0)$, $\mathbf{B}_2(0;\ -b;\ 0)$

с осью $\boldsymbol{OZ}$: $\mathbf{C}_1(0;\ 0;\ c)$, $\mathbf{C}_2(0;\ 0;\ -c)$

Величины a, b и c называются ***полуосями*** эллипсоида.

Если все они различны, то эллипсоид называется ***трехостным***.

Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения.

Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < a$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $|h| = a$ – точку $A_{2,1}(\pm a;\ 0;\ 0)$;

в) при $|h| > a$ – мнимую кривую.

Пересечение с плоскостью ZOY: x = 0

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x = 0. \end{cases}$$

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

а) при $|h| < b$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $|h| = b$ – точку $B_{2,1}(0; \pm b; 0)$;

в) при $|h| > b$ – мнимую кривую.

Пересечение с плоскостью ZOX: $y = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

3) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

а) при $|h| < c$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

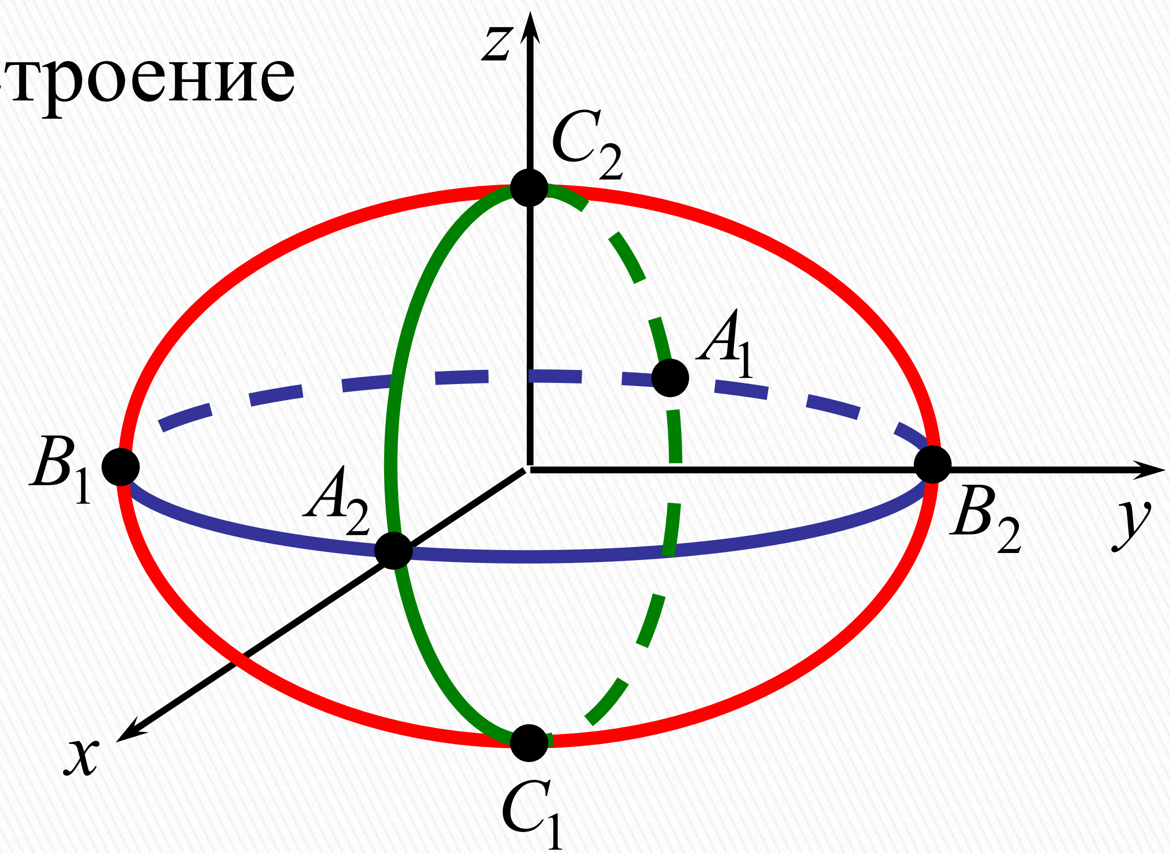
б) при $|h| = c$ – точку $C_{2,1}(0;\ 0;\ \pm c)$;

в) при $|h| > c$ – мнимую кривую.

Пересечение с плоскостью XOY: z = 0

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

- Построение

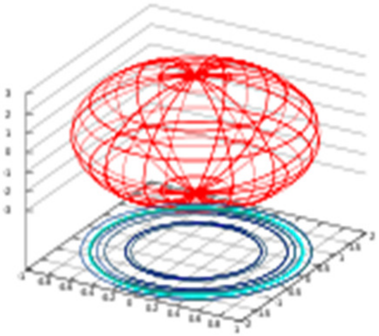


Параметры:

a=1,b=3,c=2

Сфера

Определение . Сфера в пространстве - геометрическое место точек, одинаково удаленных от некоторой точки, называемой ***центром*** сферы.



уравнение сферы r и центром в точке (x_0,y_0,z_0)

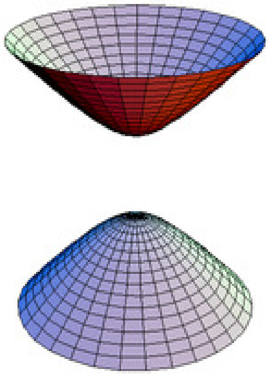
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

- Сфера с центром в начале координат есть уравнение

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

✓Замечание Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют ***сферой***

Гиперболоиды

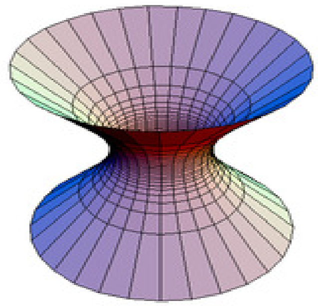


- *Определение Двухполостный гиперболоид* – поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, определяется уравнением

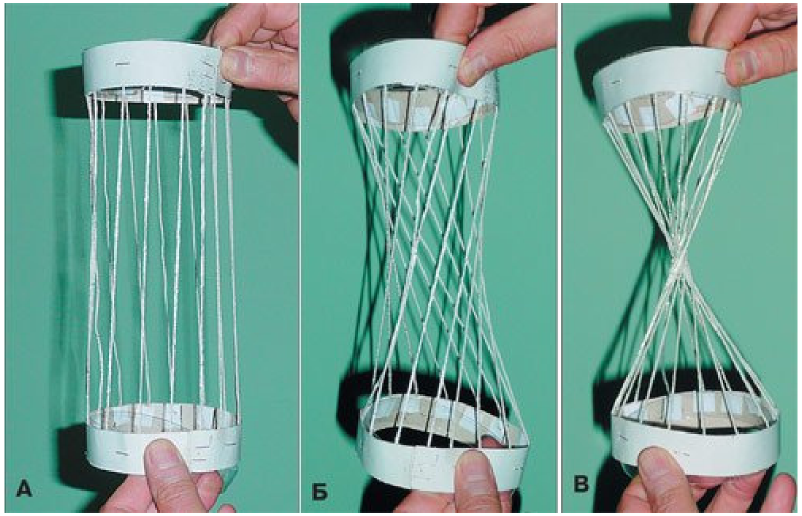
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- ***Определение*** *Однополостный гиперболоид* –
- поверхность, которая в некоторой системе
- декартовых прямоугольных координат, определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



- Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид — дважды линейчатые поверхности, то есть через любую точку такой поверхности можно провести две пересекающиеся прямые, которые будут целиком принадлежать поверхности. Вдоль этих прямых и устанавливаются балки, образующие характерную решётку. Такая конструкция является жёсткой: если балки соединить шарнирно, гиперболоидная конструкция всё равно будет сохранять свою форму под действием внешних сил.
- https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B8%D0%B4%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%82%D1%80%D1%83%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8
-



- Шуховская башня расположена в Москве на улице Шаболовка. Построена в 1919—1922г. русским архитектором Владимиром Григорьевичем Шуховым (1853—1939).
- Шуховская башня имеет конструкцию, благодаря чему достигается минимальная ветровая нагрузка.

- По форме секции башни — это однополостные гиперболоиды вращения, сделанные из прямых балок, упирающихся концами в кольцевые основания.
- Такие конструкции часто употребляются для устройства высоких радиомачт, водонапорных башен
- https://lifeglobe.net/blogs/details?id=349

Гиперболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Однополостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (2)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (2) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (2) – ***каноническим уравнением однополостного гиперболоида***.

✓ Замечание Однополостный гиперболоид имеет центр симметрии $O(0;\,0;\,0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < a$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oy$;

б) при $|h| > a$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

в) при $|h| = a$ – пару прямых.

Пересечение с плоскостью ZOY: $x = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Фокусы на OY

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

а) при $|h| < b$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Ox$;

б) при $|h| > b$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

в) при $|h| = b$ – пару прямых.

Пересечение с плоскостью ZOX: y = 0

Фокусы на OX

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

3) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

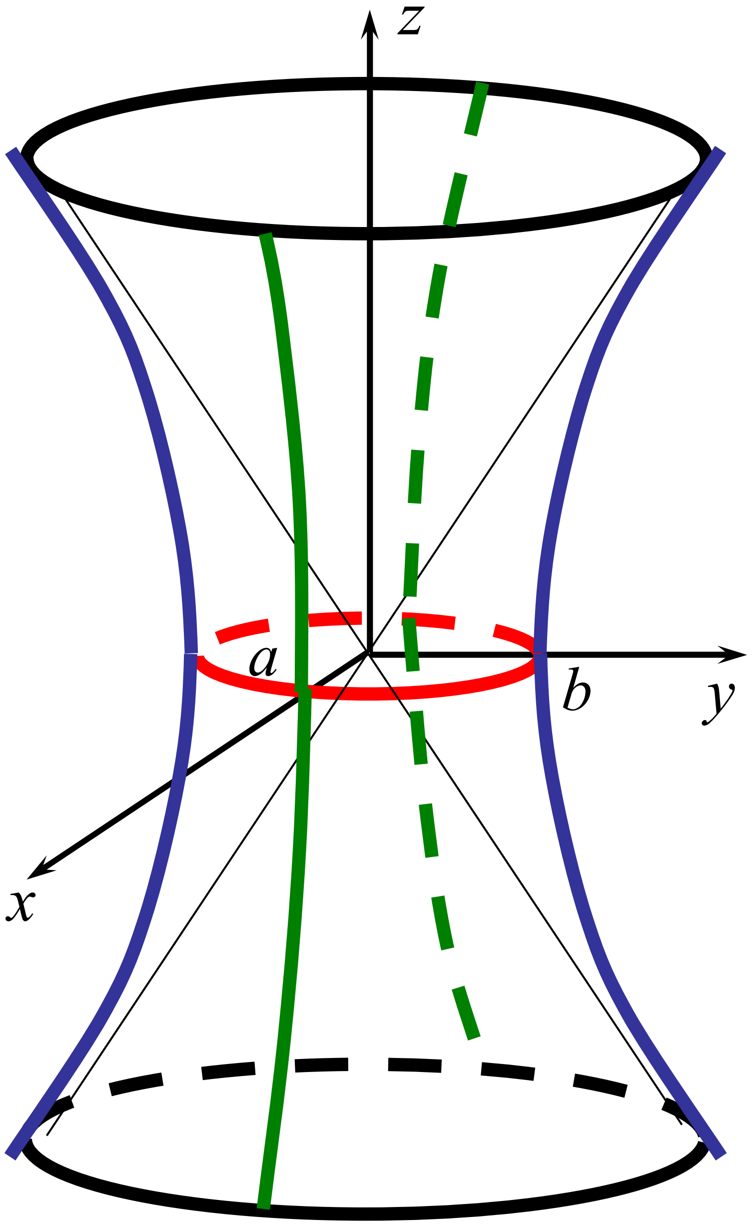
Это уравнение определяет эллипс при любом h.

При $h = 0$ полуоси эллипса будут наименьшими.

Пересечение с плоскостью XOY: $z = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Этот эллипс называют ***горловым эллипсом*** однополостного гиперболоида.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** однополостного гипер-болоида.

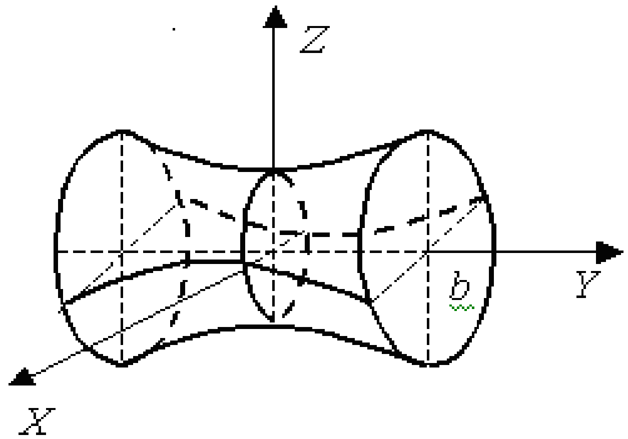
Если $a = b$, то однополостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в резуль-тате вращения вокруг своей мнимой оси гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

✓ *Замечание.* Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Двуполостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (3)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой двуполостный гиперболоид имеет уравнение (3) называется его ***канонической системой координат***,

а уравнение (3) – ***каноническим уравнением двуполостного гиперболоида***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДВУПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$.

2) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет гиперболу, с действительной осью || Oz.

3) Сечения плоскостями $z = h$:

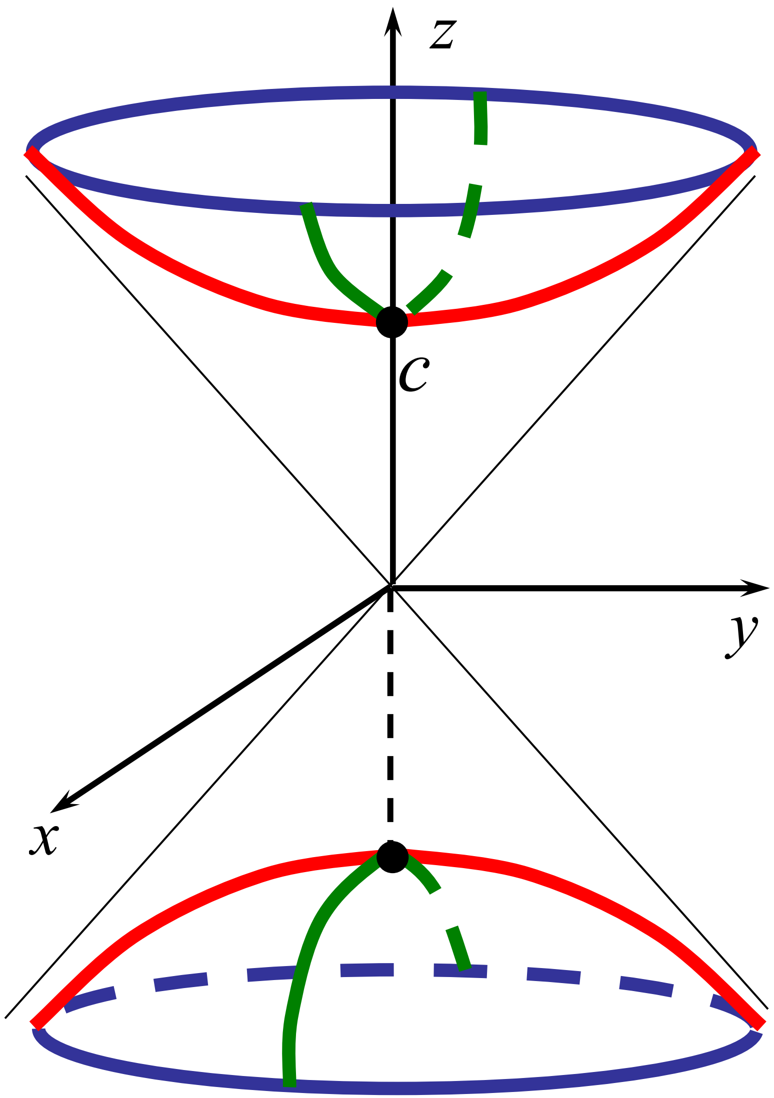
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| > c$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);

б) при $|h| = c$ – точку $C_{2,1}(0;\, 0;\, \pm c)$;

в) при $|h| < c$ – мнимую кривую.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** двуполостного гиперболоида.

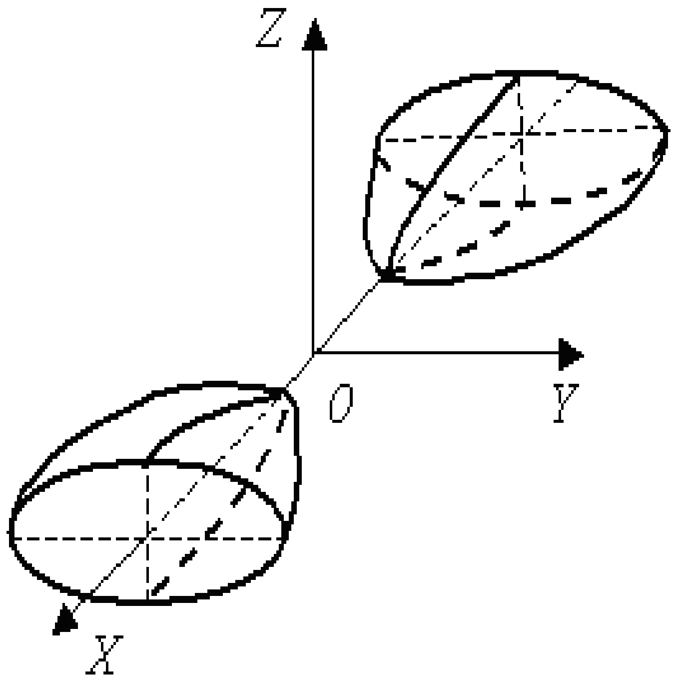
Если $a = b$, то двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей действительной оси гиперболы

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Замечание.

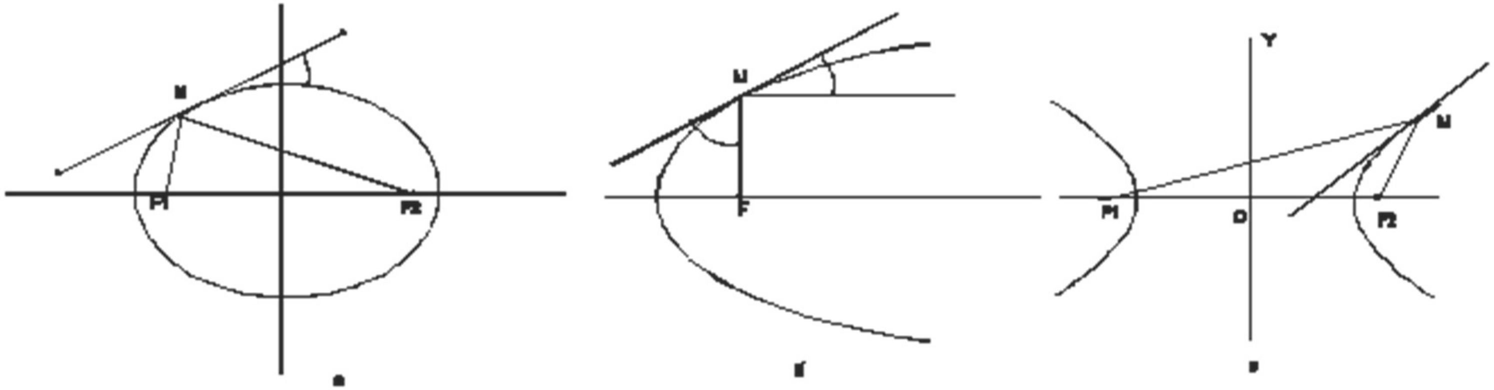
Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$



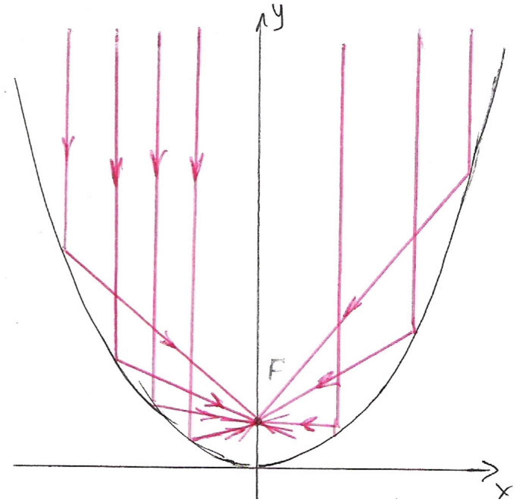
тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно

Оптические свойства КВП

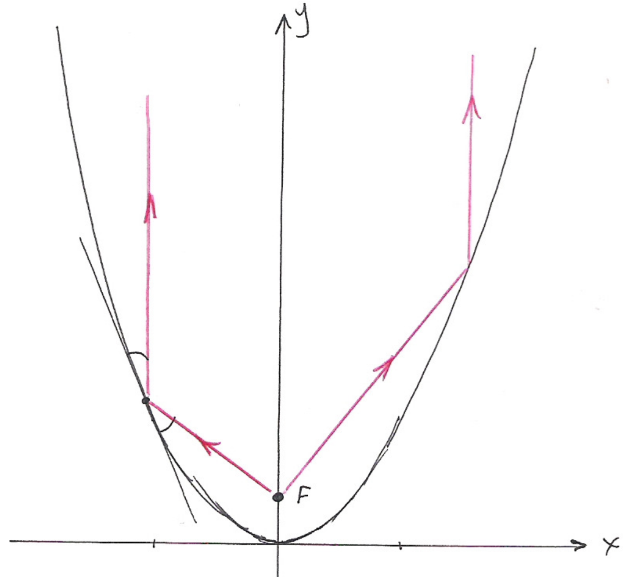


- 1. Прямая, касающаяся эллипса в некоторой точке *M,* составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит вне угла F_1MF_2
- 2. Прямая, касающаяся параболы в некоторой точке *M,* составляет равные углы с фокальным радиусом *FM.* и с лучом, который, исходя из точки *M*, идет параллельно оси параболы в сторону оси
- 3. Прямая, касающаяся гиперболы в некоторой точке *M,* составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит внутри угла F_1MF_2

Фокальные свойства параболы



Если луч, идущий параллельно оси параболы падает на её зеркальную внутреннюю сторону, то, отразившись далее, он пройдёт через фокус. В итоге, если плоский пучок света, параллельный её оси, падает на параболу изнутри, то все лучи, отразившись от неё, изменят направление на фокальное. То есть, соберутся в фокусе.



Если луч света выходит из фокуса, то, отразившись от параболы, он пойдёт параллельно оси. Это следует из закона отражения и свойства параболы.

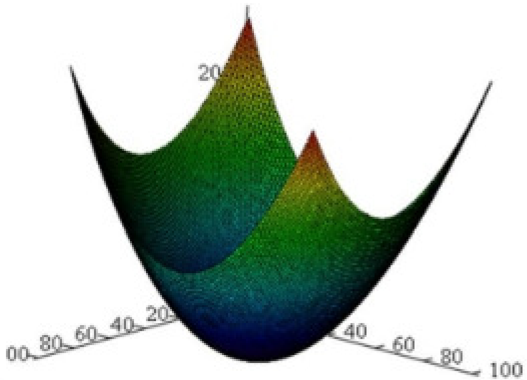
Параболоиды

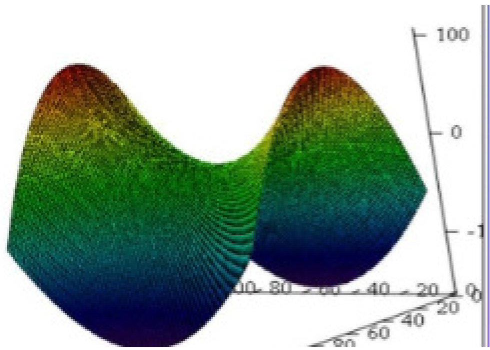
Параболоиды делятся на

- Эллиптические;

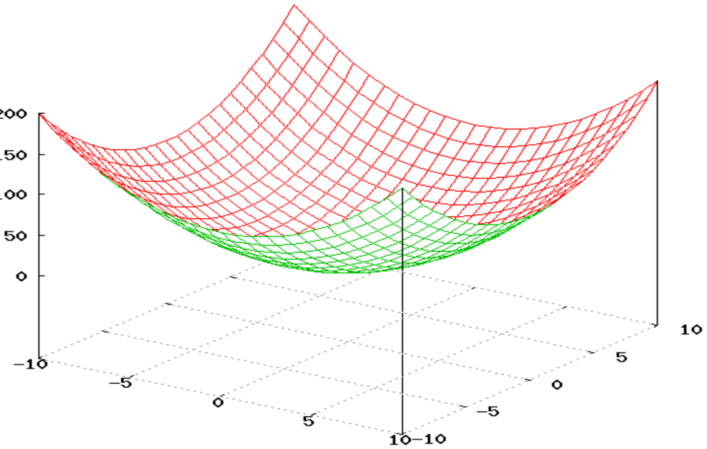
и

- Гиперболические.





Эллиптический параболоид



Описанный в романе гиперболоид на самом деле является параболоидом. Будучи сам инженером по образованию, А. Н. Толстой прекрасно знал об этом, однако выбрал слово "ГИПЕРБОЛОИД" из-за более внушительного звучания.

В фокусе зеркала, изготовленного в виде параболоида вращения, помещается источник света (нить накаливания). Лучи света от этого источника отражаются от зеркальной поверхности параболоида и направляются параллельно оси параболоида. В результате получается параллельный пучок света.

Лампочка светит во всех направлениях. Это удобно для освещения помещения. Но иногда требуется направленный пучок света. Например, для фар автомобиля, или для маяка, или для прожектора на границе. Прожектор может освещать очень отдалённые объекты, поскольку световая энергия не рассеивается во всех направлениях, а сосредоточена в узком пучке.

Иногда необходимо, наоборот, собрать параллельный пучок света в одной точке – фокусе. Например, параболические зеркала используют в телескопах. Такие телескопы называются рефлекторы.

Параболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эллиптическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, \qquad (5)$$

где a, b *– положительные константы.*

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет уравнение (5) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (5) – ***каноническим уравнением эллиптического параболоида***.

Эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии xOz, yOz.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = b^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

2) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = a^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

3) Сечения плоскостями $z = h$:

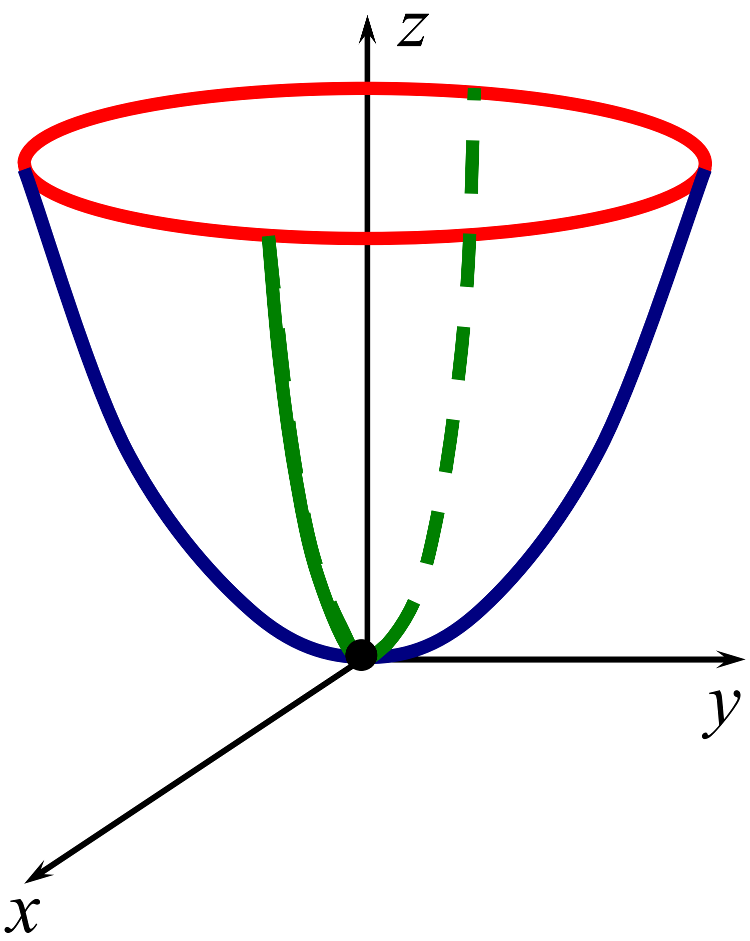
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

Это уравнение определяет

а) при $h > 0$ – эллипс (причем, чем больше h, тем больше полуоси эллипса);

б) при $h = 0$ – точку $O(0;\, 0;\, 0)$;

в) при $h < 0$ – мнимую кривую.



Величины a и b называются *параметрами* параболоида. Точка O называется *вершиной параболоида*.

Если $a = b$, то параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси Oz параболы

$$y^2 = 2b^2 z$$

Эллиптический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

✓ ***Замечания***:

1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$$

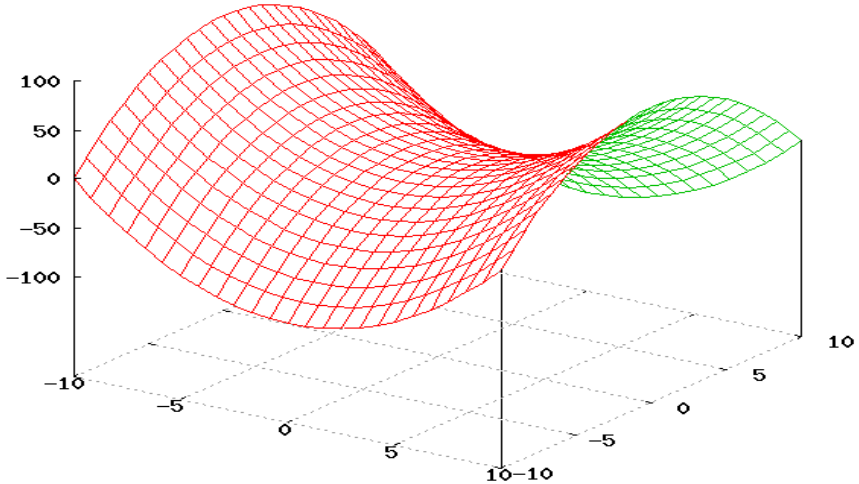
тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2y, \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2x$$

определяют эллиптические параболоиды, с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

Гиперболический параболоид



Ввиду схожести гиперболический параболоид называют *«седлом»*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Гиперболическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z\,, \qquad (6)$$

где a, b *– положительные константы.*

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет уравнение (6) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (6) – ***каноническим уравнением гиперболического параболоида***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вниз, параметр $p = b^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

2) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = a^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вниз.

3) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу
при $h > 0$ – действительная ось гиперболы || Ox,
при $h < 0$ – действительная ось гиперболы || Oy;

б) при $h = 0$ – пару прямых .

✓ ***Замечания***:

1) Уравнение

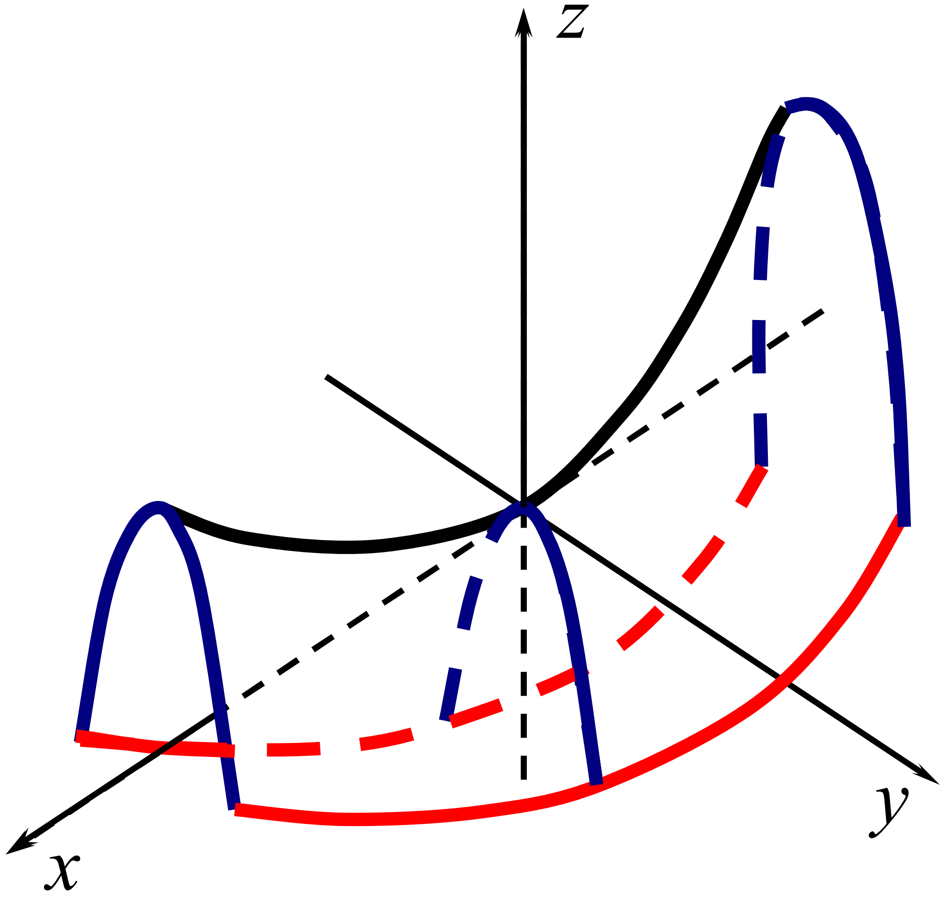
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$$

тоже определяет гиперболический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y, \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

определяют гиперболические параболоиды, у которых «неподвижные параболы» лежат в плоскости xOy и имеют оси Oy и Ox соответственно.



Величины a и b называются ***параметрами*** параболоида.

Гиперболический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны).

Цилиндрические поверхности второго порядка

- *Определение.* ***Цилиндрическая поверхность*** – поверхность, образованная прямыми (образующими), параллельными некоторой данной прямой и пересекающими данную линию (направляющую).

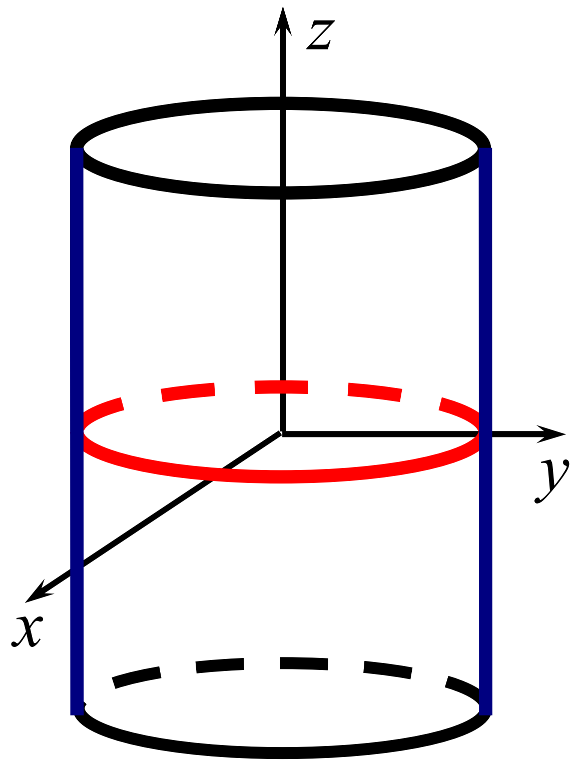
$$F(x, y) = 0$$

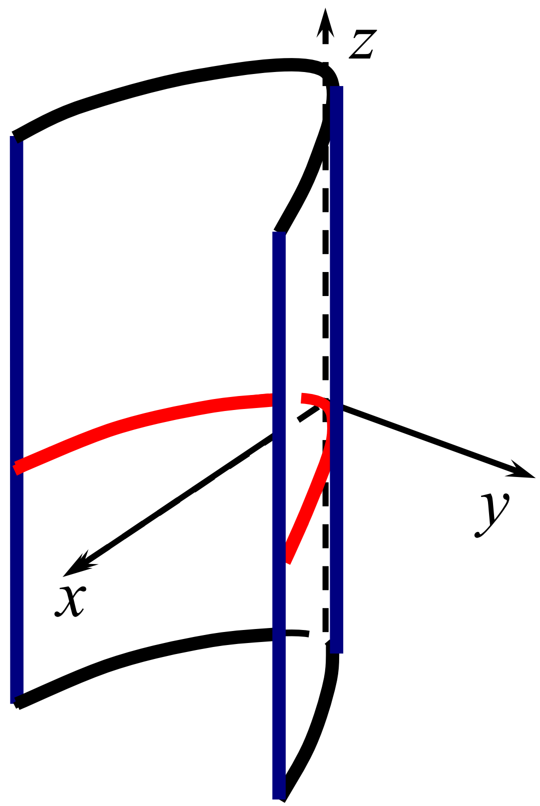
- ***Определение*** Тело, ограниченное замкнутой конечной цилиндрической поверхностью
- и двумя сечениями, благодаря которым она была получена, называется *цилиндром*.

Цилиндры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Цилиндрической поверхностью*** (***цилиндром***) *называется поверхность, которую описывает прямая (называемая* ***образующей****), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой* ***направляющей****)* .

Цилиндры называют по виду направляющей: круговые, эллиптические, параболические, гиперболические.

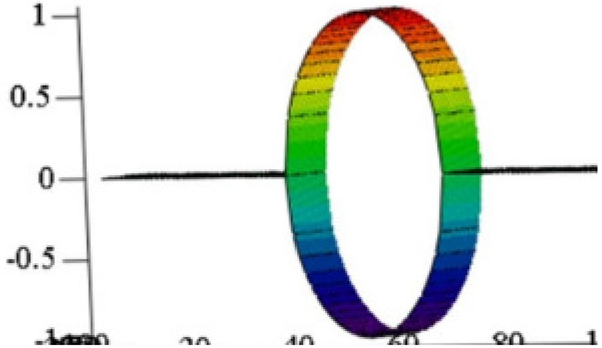


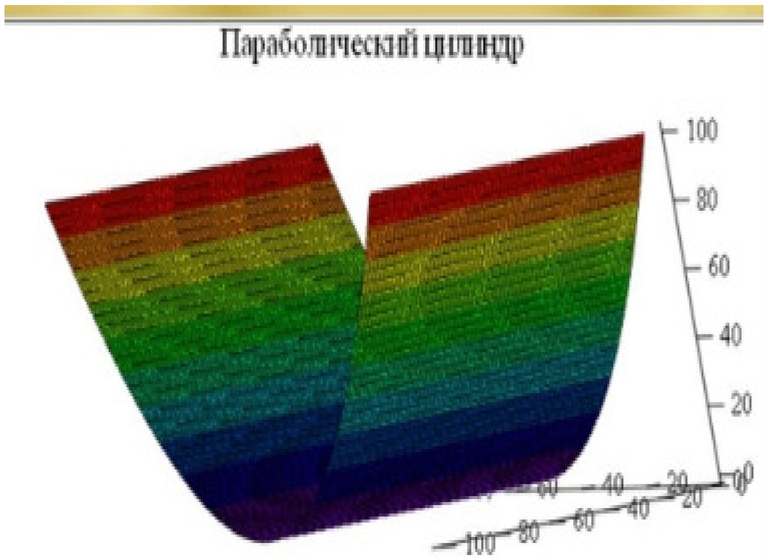


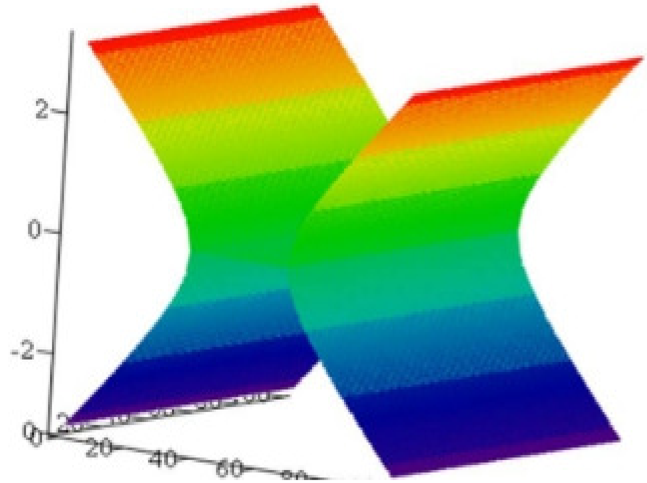
Замечание Цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат.

Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.

Цилиндры



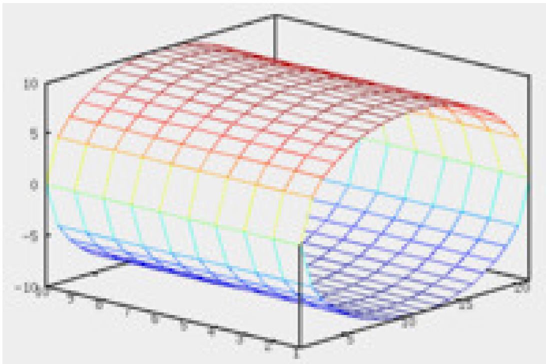




Классификация цилиндрических поверхностей второго порядка

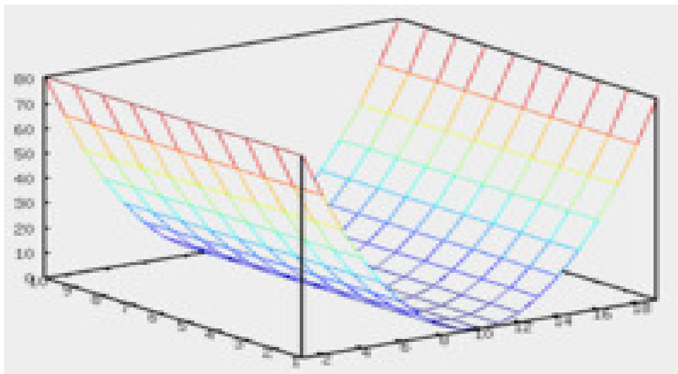
- Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



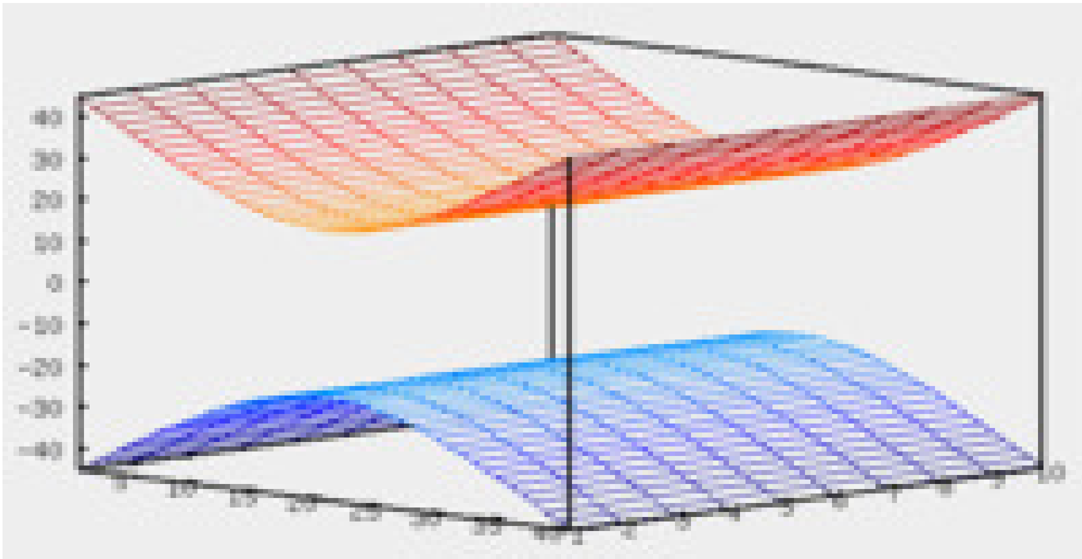
Параболический цилиндр

$$y^2=2px$$



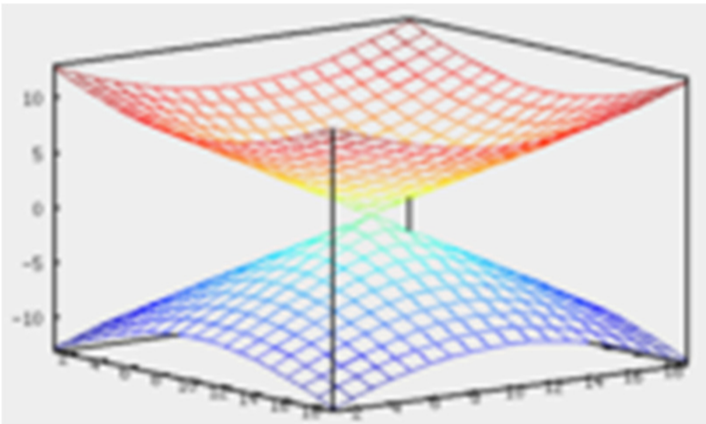
- Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



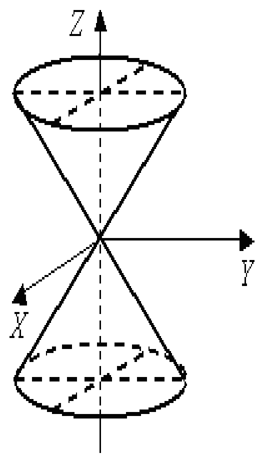
Конические поверхности 2-го порядка

- *Определение* *Коническая поверхность*– поверхность, образованная прямыми (***образующими конуса***), проходящими через данную точку (***вершину конуса***) и пересекающими данную линию (***направляющую конуса***).



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

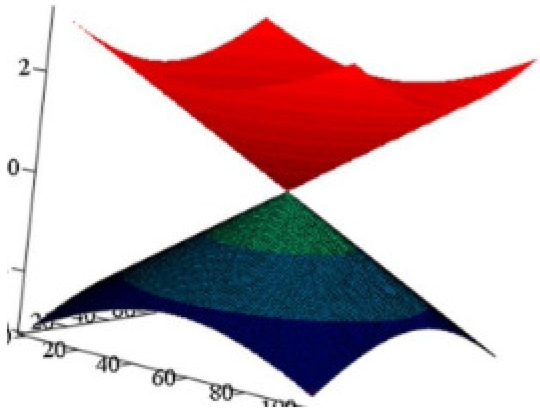
Конус



Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Конусом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

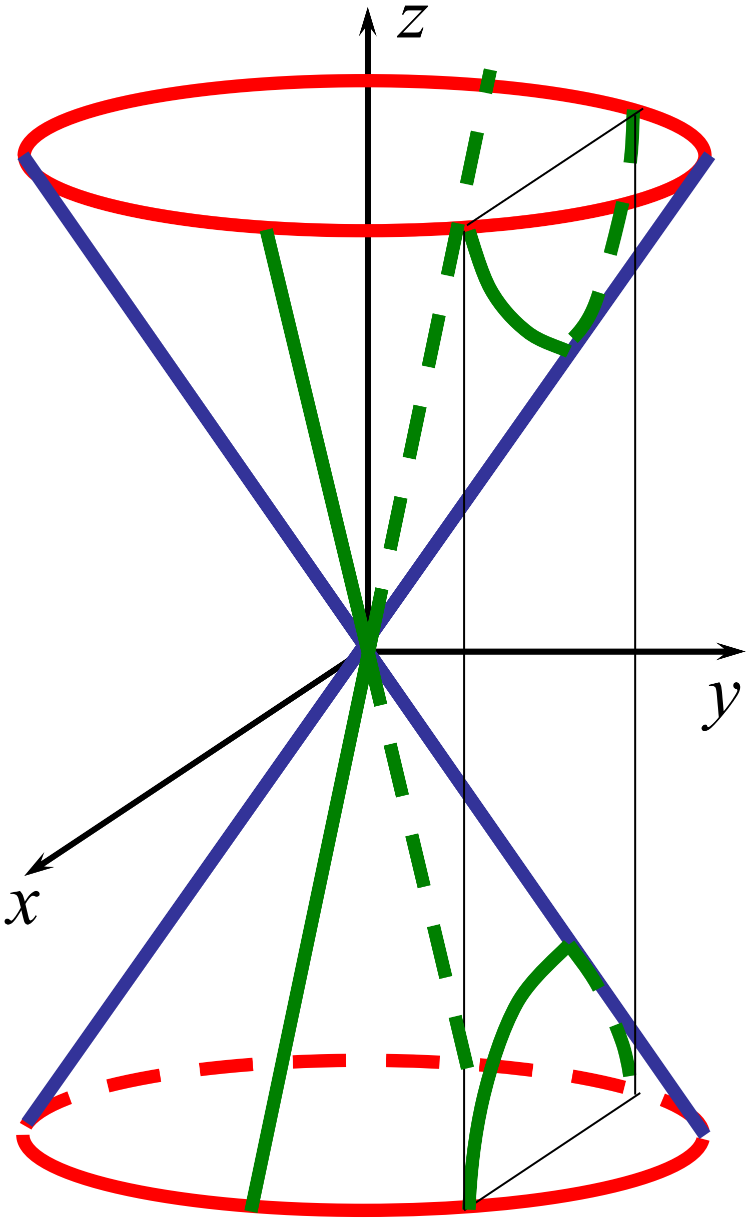
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (4)$$



где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой конус имеет уравнение (4) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (4) – ***каноническим уравнением конуса***.

Конус имеет центр симметрии $O(0;\ 0;\ 0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz



Величины a, b и c называются ***полуосями*** конуса.

Центр симметрии O называется ***вершиной конуса***.

Если $a = b$, то конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси Oz прямой

$$z = \frac{c}{b} y$$

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОНУСА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

б) при $h = 0$ – пару прямых.

2) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу, с действительной осью || Oz;

б) при $h = 0$ – пару прямых.

3). Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);

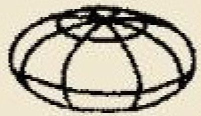
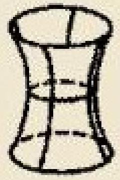
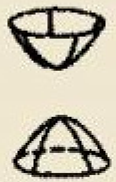
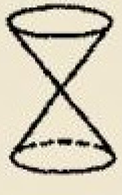
б) при $h = 0$ – точку $O(0;0;0)$.

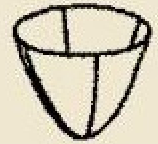
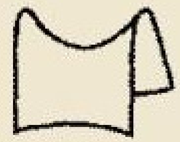
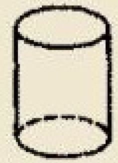
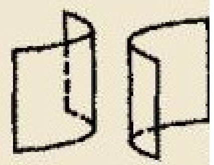
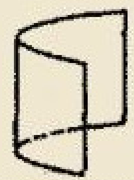
✓ ***Замечание.***

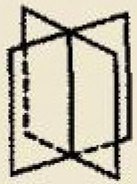
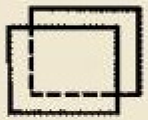
Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Двухполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллиптический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	
Гиперболический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$	
Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$	

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	
Пара параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	
Пара совпадающих плоскостей	$x^2 = 0$	

Название поверхности	*Каноническое уравнение*
Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
Миимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
Пара мнимых параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = -1$
Мнимый конус второго порядка с действительной вершиной (0; 0; 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
Пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$