Определители (Лекция 2)

Введем понятие **определителя** сначала для квадратных матриц первого, второго и третьего порядка, а затем распространим на квадратные матрицы любого порядка.

Обозначение: |**A**| или det **A**.

Определение. *Если* $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ *– квадратная матрица первого порядка, то ее определителем (определителем первого порядка) называется число* $\left|\mathbf{A}\right| = a_{11}$.

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 5\cdot(-3) = 8 + 15 = 23.$

Пример. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\}.$$

Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на $(-a_{12})$ и сложим их. В результате получим: $\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$,

откуда, $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, $\qquad x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Заметим, что числители и знаменатель в выражениях для x_1 и x_2 представляют собой значения определителей второго порядка следующего вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{21}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1 a_{21}$$

Тогда $$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Замечание: представленный способ нахождения корней квадратной системы уравнений через отношение определителей есть формулы Крамера, которые будут рассмотрены в следующих главах**.**

Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило треугольников.

Оно заключается в следующем:

элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются, образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Пример.

Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:

$\Delta = 2\cdot 0\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot(-4)\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot(-3) =$

$= 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$

Определитель произвольного порядка

Перестановкой n чисел 1, 2, 3, ..., n (или n любых различных между собой символов $a_1, a_2, ..., a_n$) называется любое расположение этих чисел (или символов) в определенном порядке. Число всех перестановок из n чисел равно $n!$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$). Говорят, что два числа в перестановке образуют **инверсию**, если большее число стоит впереди меньшего, или образуют **порядок**, если меньшее стоит впереди большего.

<u>Способ подсчета числа инверсий:</u> для каждого из чисел в порядке их записи считаем, сколько чисел, меньших данного, стоит правее него, и все полученные значения складываем.

Пример. В последовательности чисел $\{2,6,8,1,4,5\}$ найти количество инверсий.

Решение: количество чисел, меньших 2 и стоящих правее ее, – **1** (число 1); количество чисел, меньших 6 и стоящих правее ее, – **3** (числа 1, 4, 5); количество чисел, меньших 8 и стоящих правее ее, – **3** (числа 1, 4, 5); количество чисел, меньших 1 и стоящих правее ее, – 0; количество чисел, меньших 4 и стоящих правее ее, – 0; количество чисел, меньших 5 и стоящих правее ее, – 0.

Таким образом, количество инверсий равно 7 (1 + 3 + 3).

Пример. В последовательности чисел {2,4,5,7,9,1,8,3,6} – 14 инверсий.

Пусть дана квадратная матрица **А** порядка n.

Составим все возможные произведения из n различных элементов матрицы **А**, беря по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца матрицы. Каждое такое произведение, упорядоченное по номерам строк, можно записать в виде $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$, которое называется **членом определителя**.

Рассмотрим последовательность чисел $j_1, j_2, \ldots, j_n$ – по построению члена определителя это различные числа, которые представляют перестановку чисел $1,2,\ldots,n$.

Так как всего из n чисел можно сделать ***n*!** различных перестановок, то число различных членов определителя равно ***n!***

Определение. Определителем порядка n квадратной матрицы **A** порядка n (при $n > 1$) называется число

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} (-1)^{s(j_{1,}\ldots,j_n)} a_{1j_1} \cdot a_{1,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{1,j_2}, \quad (1)$$

где $s(j_{1,} \ldots, j_n)$ – число инверсий.

Формула разложения определителя по i – й строке

Определение. Определитель матрицы k-го порядка, образованной из произвольных k столбцов, $\left(k=\overline{1,n}\right)$, и произвольных k строк, $\left(k=\overline{1,n}\right)$, матрицы $\mathbf{A}$, называется **минором** k-го порядка квадратной матрицы $\mathbf{A}$.

Определение. Определитель Δ_{ij}, получаемый из $\det\mathbf{A}$ вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j, называется **дополнительным минором** к элементу a_{ij}, $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$.

Определитель n – го порядка (n x n) – матрицы A при n>1

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{s=1}^{n}\left(-1\right)^{s+1}a_{is}\Delta_{is}.$$

Замечание. Следует обратить внимание, что в записи формулы выше использованы элементы строки с номером i, а также дополнительные миноры к элементам строки с номером i. Представленная формула вычисления определителя называется **формулой разложения определителя по строке с номером *i***. Значение определителя не зависит от того, разложением по какой строке он будет вычислен.

Основные свойства определителя

1. Если две строки (столбца) поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала ситуацию, когда меняются местами две соседние строки: i и i+1. Разложим исходный определитель по строке i, а определитель с переставленными строками по строке i+1. Разложения будут отличаться друг от друга только знаком.

Действительно, соответствующие элементы строк совпадают, их миноры тоже совпадают. Но знак меняется на противоположный, поскольку в разложении исходного определителя его знак будет определяться степенью, в которую возводится (–1). В первом определителе это $i+j$, а во втором —на единицу больше. Таким образом, свойство справедливо для перестановки соседних строк или столбцов.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда меняются местами строки с номерами i и $i+k$. Мы можем представить эту перестановку как два последовательных шага: сначала строка i и опускается вниз на k строк, а затем строка $i+k$ поднимается вверх на k –1 одну строку. На первом шаге знак определителя меняется k раз. На втором шаге знак меняется еще k –1 раз

Значит, всего знак сменится нечетное число раз, и в результате перестановки знак определителя поменяется независимо от расположения строк в матрице

2. Если все элементы какой – нибудь строки умножить на одно и то же число, то весь определитель умножится на это число.

Например, $$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство: Если разложить определитель по указанной строке, то в формуле (1) перед каждым слагаемым появится общий множитель. После вынесения его за скобки в скобках останется исходный определитель, что и требовалось доказать.

Следствие. Определитель, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

1. Если к элементам строки определителя прибавить соответствующие элементы строки $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}$, то его можно будет представить в виде суммы двух: исходного определителя и определителя, в котором указанная строка заменена на прибавленную:

$$\Delta\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b} & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \Delta\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} + \Delta\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

$$\Delta\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 + \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \Delta\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} + \Delta\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n + \mathbf{b} \end{bmatrix} = \Delta\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} + \Delta\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_i+\mathbf{b} \quad \mathbf{a}_n\ \right]=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\left(a_{ij}+b_j\right)\Delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_j\Delta_{ij}=$$

$$=\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_i \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right]+\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{b} \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right].$$

Например, $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

4. Если в определителе две строки одинаковые, то он равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

Доказательство: действительно, если указанные строки поменять местами, то определитель, с одной стороны, не изменится, а с другой – у него изменится знак. Это возможно лишь в том случае, когда он равен нулю.

5. Определитель единичной матрицы равен 1. То есть,

$$\det \mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Доказательство: с помощью метода математической индукции.

Следствие 1. *Если в определителе две строки пропорциональны (*$\mathbf{a}_i = \lambda \mathbf{a}_j$ *и* $i \neq j$*), то он равен нулю.*

Если, пользуясь свойством **1**, вынести общий множитель, то получится, что две строки в определителе совпадают и, следовательно, он равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие 2. *Если одна из строк равна линейной комбинации остальных, то определитель равен нулю.*

Согласно свойству **2**, такой определитель можно представить в виде суммы определителей, в каждом из которых две строки пропорциональны.

Следствие 3. *Если к какой-нибудь строке определителя прибавить линейную комбинацию остальных строк, то определитель не изменится.*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_{i1} & a_{12}+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_{i2} & \cdots & a_{1n}+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_{i1} & \sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_{i2} & \cdots & \sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Согласно свойству **2** он может быть представлен в виде суммы двух определителей: исходного и определителя, в котором одна из строк равна линейной комбинации остальных.

Алгебраическое дополнение

Рассмотрим формулу (1), выражающую определитель матрицы **A** через ее элементы. Сгруппируем в ней все те слагаемые, которые содержат в качестве сомножителя элемент a_{ij}, и вынесем общий множитель a_{ij} за скобки. Та сумма, которая останется после этого в скобках, называется **алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij}. Иными словами, A_{ij} – это то, во что превращается правая часть выражения (1) при замене элемента a_{ij} на единицу, а всех остальных элементов i - й строки – на нули.

Теорема. *Алгебраическое дополнение элемента* a_{ij} *равно минору, дополнительному к* a_{ij}, *взятому со знаком* «+», *если число* $(i + j)$ *четно, и* «–», *если нечетно:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Доказательство. Из определения следует, что алгебраическое дополнение A_{ij} представляет собой определитель, полученный из det**A** заменой элемента a_{ij} на единицу, а всех остальных элементов i - й строки – на нули. С другой стороны, если такой определитель разложить по i - й строке, то окажется, что он равен $\left(-1\right)^{i+j}\Delta_{ij}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Доказанная теорема позволяет по-новому записывать формулу разложения определителя по i - й строке:

$$\det A=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{is}. \tag{2}$$

Теорема 1. Справедлива следующая формула, называемая формулой разложения определителя по j – му столбцу: $\det\mathbf{A}=\sum\limits_{s=1}^{n}a_{sj}A_{sj}$.

Теорема 2. Для любой $(n \times n)$ - матрицы **A** имеет место равенство $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно – в этом случае транспонированная матрица совпадает с исходной. Допустим, что теорема доказана для $n = k$. Тогда разложение определителя $(k + 1)$-го порядка матрицы $\mathbf{A}^T$ по первой строке совпадает с разложением определителя матрицы **A** по первому столбцу. Теорема доказана.

Следствие. *Все утверждения о строках определителя справедливы и для его столбцов.* Иными словами*, строки и столбцы в определителе равноправны.*

Теорема 3. Определитель произведения квадратных матриц.

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

Пример. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Решение.

Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Выберем третий столбец.

- а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;
- б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;
- в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки (напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки вторую строку, умноженнную на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

Пример. Вычислить определитель n-го порядка, в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .. & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Решение. Разложим определитель **A** по первой строке:

$$\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A_{11}} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & .. & 0 \\ a_{32} & a_{33} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n2} & a_{n3} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель, стоящий справа, можно снова разложить по первой строке, тогда получим:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & .. & 0 \\ a_{43} & a_{44} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n3} & a_{n4} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ И так далее.

После n шагов придем к равенству $\det \mathbf{A} = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$A = a11 a22... ann.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & .. & n \\ -1 & 0 & 3 & .. & n \\ -1 & -2 & 0 & .. & n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -2 & -3 & .. & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Если к каждой строке определителя, начиная со второй, прибавить первую строку, то получится определитель, в котором все элементы, находящиеся ниже главной диагонали, будут равны нулю. А именно, получим определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & .. & n \\ 0 & 2 & 6 & .. & 2n \\ 0 & 0 & 3 & .. & 2n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & n \end{vmatrix}$, равный исходному.

Рассуждая, как в предыдущем примере найдем, что он равен произведению элементов главной диагонали, т.е. n!.

Способ, с помощью которого вычислен данный определитель, называется способом приведения к треугольному виду.