Обратная матрица (Лекция 3)

Определение. Квадратная матрица $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$ называется обратной по отношению к матрице **A**, если $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

(3)

Обратная матрица обозначается символом $\mathbf{A}^{-1}$.

Таким образом, $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Из определения вытекает, что порядок матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ равен n.

Теорема 1. Квадратная матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда она невырожденная ($\det \mathbf{A} \neq 0$). Обратная матрица вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T .$$

Доказательство.

1. **Необходимость.** Предположим, что для матрицы **A** существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$. Тогда выполняется (3).

$\det(\mathbf{A}\times \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A}\times \det \mathbf{A}^{-1} = \det \mathbf{E} = 1$. Следовательно, $\det \mathbf{A} \neq 0$.

2. **Достаточность.** Пусть $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Введем матрицу $\mathbf{C} = \left[c_{ij} \right]$, элементы которой $c_{ij} = A_{ji}$, где A_{ij}– алгебраические дополнения элементов a_{ij}

Матрица **C** называется **присоединенной (союзной)** по отношению к матрице **A**.

Рассмотрим произведение матриц **AC**. Элемент произведения

$$\left(AC\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}\det\mathbf{A}, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Отсюда, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\det\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$.

Аналогично, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=\det\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$.

Имеем, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{C}=\det\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}^{-1}$,

Поэтому $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{C}}{\det\mathbf{A}}$ удовлетворяет определению обратной матрицы.

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}^{T}.$$

Теорема 2. Если матрица А имеет обратную матрицу, то она единственная.

Доказательство (от противного).

Предположим, что для некоторой матрицы **A** существуют две обратные матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Тогда

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E},$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

Умножим первое соотношение на матрицу $\mathbf{A}_2$ слева. Получим

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{E}=\mathbf{A}_2\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_1\right)=\left(\mathbf{A}_2\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{A}_1=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_1.$$

Свойства обратной матрицы:

1. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det\mathbf{A}$.

2. $\left(\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\right)^{-\mathbf{1}} = \mathbf{A}$.

3. $\mathbf{E}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{E}$.

4. $\left(\lambda\mathbf{A}\right)^{-\mathbf{1}} = \dfrac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$.

5. $\left(\mathbf{AB}\right)^{-\mathbf{1}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

6. $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-\mathbf{1}} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Вычислим определитель матрицы **A** разложением по первому столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы **A** существует.

2. Найдем алгебраические дополнения а элементам матрицы **A**:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij},$$

где Δ_{ij}, - минор, получаемый из определителя матрицы **A** вычеркиванием i – й строки и j – го столбца.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=11$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

3. Значит, $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^T$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса - Жордана.

Возьмём две матрицы: саму **A** и единичную **E**. Приведём матрицу **A** к единичной матрице методом Гаусса—Жордана применяя преобразования по строкам (можно также применять преобразования и по столбцам). После применения каждой операции к первой матрице применим ту же операцию ко второй. Когда приведение первой матрицы к единичному виду будет завершено, вторая матрица окажется равной $\mathbf{A}^{-1}$.

ПРИМЕР. Методом элементарных преобразований найти обратную

матрицу для матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Приписываем к исходной матрице справа единичную матрицу того же порядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований столбцов приведем левую “половину” к единичной, совершая одновременно точно такие преобразования над правой матрицей.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной к данной матрице А.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Понятие о линейной зависимости вектор-столбцов

Пусть даны m вектор-столбцов размера n x1

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

и m скаляров λ_1 λ_2 , … , λ_m .

Умножим первый столбец на λ_1 , второй столбец на λ_2 и, наконец, m-й столбец λ_m. Рассмотрим сумму

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \lambda_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_m a_{1m} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_m a_{2m} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \ldots + \lambda_m a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Определение. Вектор-столбец **a** называется ***линейной комбинацией вектор-столбцов*** $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.,…, $\mathbf{a}_m$. Числа λ_1, λ_2 ,…, λ_m называются ***коэффициентами линейной комбинации***.

Определение. Вектор-столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_m$ называются линейно зависимыми, если найдутся такие числа λ_1, λ_2 ,…, λ_m , не равные нулю одновременно, такие что имеет место равенство

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

где **0** – нулевой вектор-столбец размера nx1.

Если соотношение (1.41) выполняется лишь тогда, когда все λ_1, λ_2 ,…, λ_m равны нулю одновременно, то вектор-столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_m$ называются **линейно независимыми**.

Теоремы о линейной зависимости .

Теорема 1. *Если система вектор столбцов содержит нулевой столбец, то они линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть, например, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Тогда, имеем: $1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$,

Следовательно, столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если какие-нибудь* k *из* m *вектор-столбцов линейно зависимы, то все вектор-столбцы линейно зависимы.*

Доказательство.

Пусть, например, столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_k$ линейно зависимы.

Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ не равные нулю одновременно, такие что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, для системы из m столбцов имеем

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

что и означает, что столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если столбцы линейно зависимы, то один из них равен линейной комбинации остальных.*

Доказательство. Если столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

причем не все λ_i равны нулю.

Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$.

Тогда имеем

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1}\mathbf{a}_m,$$

что и требовалось доказать.

#