Часть 5

Неопределенный интеграл

- При введении понятия производной данной функции нами была рассмотрена задача о нахождении мгновенной скорости точки по известному закону ее движения
- $S = S(t)$.
- В механике встречается обратная задача: по известному закону изменения скорости $V = V(t)$ найти закон движения, то есть найти такую функцию $S = S(t)$ производная которой равна $V(t)$. Эта задача приводит к понятию первообразной функции.

Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале *(a, b)*, если функции *f(x)* и *F(x)* определены на этом интервале, функция *F(x)* дифференцируема на интервале *(a, b)* и в каждой точке интервала выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример.

Рассматриваемый ниже пример очень важен для дальнейшего. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Утверждается, что в этом случае первообразная $F(x) = \ln|x|$.

Проверяем:

Пусть $x > 0$. Тогда $|x| = x$ и $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Пусть теперь $x < 0$. Тогда $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$,

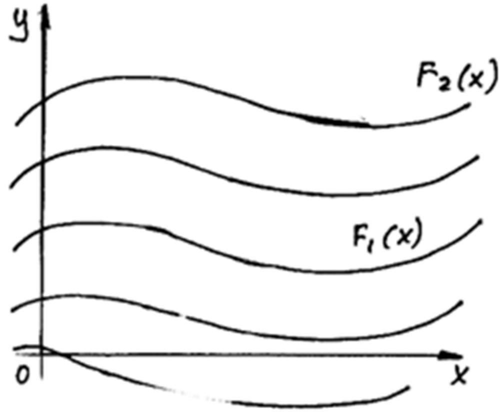
так что всегда $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Доказательство.

Действительно, в этом случае $[F_1(x) - F_2(x)]' = f(x) - f(x) \equiv 0$ и поэтому, согласно условия постоянства функции, $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Следствие. Если $F(x)$ есть одна из первообразных функции $f(x)$, то любая другая первообразная имеет вид $F(x) + C$.



Из теоремы следует, что если известен график одной из первообразных $F_1(x)$ для функции $f(x)$, то графики всех других первообразных для данной функции получаются из первого сдвигом вдоль оси Oy.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ есть любая из первообразных функции $f(x)$, C-произвольная постоянная.

Термины.

$f(x)$ – **подынтегральная функция**;

$f(x)dx$ – **подынтегральное выражение.**

Поскольку $F'(x) = f(x)$, подынтегральное выражение можно записать $f(x)dx = F'(x)dx = dF(x)$

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.

Действительно, если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $d\left(\int f(x)dx\right)=d\left(F(x)+C\right)=F'(x)dx=f(x)dx$.

2. $\int dF(x)=F(x)+C$

Действительно, $\int dF(x)=\int f(x)dx=F(x)+C$.

Подытоживая эти два свойства можно сказать, что стоящие рядом знаки d и $\int$ **взаимно уничтожаются**, то есть операция дифференцирования и операция интегрирования есть взаимно обратные операции.

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Действительно, пусть $\int f(x)dx = F(x)$ и $\int g(x)dx = G(x)$. Но тогда

$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

и поэтому

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = F(x) \pm G(x) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

4. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$.

Действительно, пусть $\int f(x)dx = F(x)$. Но тогда $[cF(x)]' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$ и поэтому

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot F(x) = c \cdot \int f(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C,$

$\mu \neq -1$

$\int dx = x + C$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

$\int e^{x} dx = e^{x} + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10 $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

11. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

12. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

Рассмотрим примеры непосредственного интегрирования:

1) $$\int \frac{2x^3 + x^2 e^x + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(2x + e^x + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx =$$

$$= 2\int x dx + \int e^x dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = x^2 + e^x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C \ .$$

2) $$\int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C \ .$$

3) $$\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\ln ae} + C = \frac{a^x e^x}{\ln a + 1} + C \ .$$

4) $$\int \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 dz = \int \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2} dz = \int \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} \right) dz = \int dz - 2\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z^2} =$$

$$= z - 2\ln|z| - \frac{1}{z} + C \ .$$

Основные приемы интегрирования

Замена переменных

Пусть надо вычислить $\int f(x)dx$. Перейдем от переменной x к переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, так что $t=\varphi^{(-1)}(x)$. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и мы получаем

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пусть нам каким-то способом удалось вычислить последний интеграл и он оказался равен $G(t)$, то есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=G(t)$. Тогда утверждается, что

$$\int f(x)dx=G(\varphi^{(-1)}(x)).$$

Докажем это. Итак

1. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)$. Это значит, что $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

2. Найдем производную от $G(\varphi^{(-1)}(x))$. Вспоминая формулу производной от сложной функции, а затем формулу производной от обратной функции, получим

$$[G(\varphi^{(-1)}(x))]' = G'(\varphi^{(-1)}(x)) \cdot \left(\varphi^{(-1)}(x)\right)' =$$

$$= f(\varphi(\varphi^{(-1)}(x)))\varphi'(\varphi^{(-1)}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{(-1)}(x))} = f(x),$$

так как сомножители $\varphi'(\varphi^{(-1)}(x))$ сокращаются, а $\varphi(\varphi^{(-1)}(x)) = x$.

Следовательно, $\int f(x)dx = G(\varphi^{(-1)}(x))$.

Эта формула является основным методом вычисления неопределенных интегралов. Ее пишут в виде цепочки

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) = G(\varphi^{(-1)}(x)).$$

Интегрирование подведением под знак дифференциала.

Этот вариант метода используется в том случае, если подынтегральная функция является сложной $f\left[u(x)\right]$ и в подынтегральном выражении удается выделить производную промежуточного аргумента $u'(x)$. Тогда $\int f\left[u(x)\right]u'(x)dx = \int f(u)du$.

Примеры:

1) $$\int \sin(2x+3)dx = \left| d(2x+3) = 2dx \ , \ \ dx = \frac{1}{2}d(2x+3) \right| =$$

$$= \int \sin(2x+3)\frac{1}{2}d(2x+3) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C \ .$$

2) $$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

3) $$\int xe^{x^2}dx = \left| d\left(x^2\right) = 2xdx \ , \ \ xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) \right| = \int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}\frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \ .$$

Метод подстановки - используется в том случае, когда переход к новой переменной $x=\varphi(x)$ позволяет существенно упростить подынтегральную функцию.

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$.

Перейдем к переменной *u*, используя подстановку $x=\phi(u)$. Тогда $dx=\phi'(u)du$, а $\int f(x)dx=\int f\left[\phi(u)\right]\phi'(u)du$

Примеры

1) $$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\left|\begin{matrix}x+1=u^2\Rightarrow x=u^2-1\\ dx=2udu\end{matrix}\right|=2\int\frac{udu}{1+u}=2\int\frac{1+u-1}{1+u}du=2\int du-2\int\frac{du}{1+u}=$$
$$=2u-2\ln|1+u|+C=2\sqrt{x+1}-2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|+C\quad.$$

2) $$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=\left|1+\ln x=t^2\quad,\quad\frac{dx}{x}=2tdt\right|=2\int\frac{t}{t^2-1}\cdot tdt=2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=$$
$$=2\int dt+2\int\frac{dt}{t^2-1}=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C$$

Интегрирование по частям

Пусть даны две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Тогда, по свойствам дифференциалов,

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Интегрируя это соотношение, получим $\int d(uv) = uv = \int udv + \int vdu$.

Отсюда следует, что

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

В развернутом виде эта формула имеет вид

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx.$$

Эта формула и носит название формулы интегрирования по частям.

Рассмотрим некоторые случаи, в которых целесообразно применение интегрирования по частям:

1) подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена $P_n(x)$ на e^{ax} или $\sin ax$, $\cos ax$ **. т.е.**

$f(x)=P_n(x)e^{ax}$, $f(x)=P_n(x)\cos ax$, $f(x)=P_n(x)\sin ax$, в этом случае

$u=P_n(x)$, $v'=\sin ax$, $v'=\cos ax$, $v'=e^{ax}$

<u>Пример</u>:

$$\int x\sin x dx=\left\{\begin{matrix} u=x \quad , & du=dx \\ dv=\sin x dx \ , & v=-\cos x \end{matrix}\right\}=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C$$

2) подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена $P_n(x)$ на $\ln x$, $arctgx$, $\arcsin x$ **.**

В этом случае полагают $u=\ln x$, $u=arctgx$ или $u=\arcsin x$

$$\int x^2\ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x \quad , & du=\dfrac{dx}{x} \\ \hline dv=x^2dx \ , & v=\dfrac{x^3}{3} \end{matrix}\right\}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

3) подынтегральная функция - произведение показательной функции e^{ax} на $\cdot \cos x$ или $\sin x$. В этом случае формулу интегрирования по частям применяют дважды.

<u>Пример</u>:

$$\int e^x \sin x dx = I_1 = \left\{ \begin{matrix} u = e^x \ , \quad du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \ , \ v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \ ,$$

$$I_2 = \int e^x \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} u_1 = e^x \ , \quad du_1 = e^x dx \\ dv_1 = \cos x dx \ , \ v_1 = \sin x \end{matrix} \right\} = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx = e^x \sin x - I_1$$

Тогда имеем $I_1 = -e^x \cos x + e^x \sin x - I_1$, или $2I_1 = e^x \left(\sin x - \cos x \right)$

$$I_1 = \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} \left(\sin x - \cos x \right) + C \ .$$

При двукратном применении формулы интегрирования по частям целесообразно в качестве *u(x)* и $u_1(x)$, $v'(x)$ и $v'_1(x)$ принимать одни и те же функции (показательную либо тригонометрическую). В противном случае после подстановки интеграла I_2 получим тождество $I_1 = I_1$.