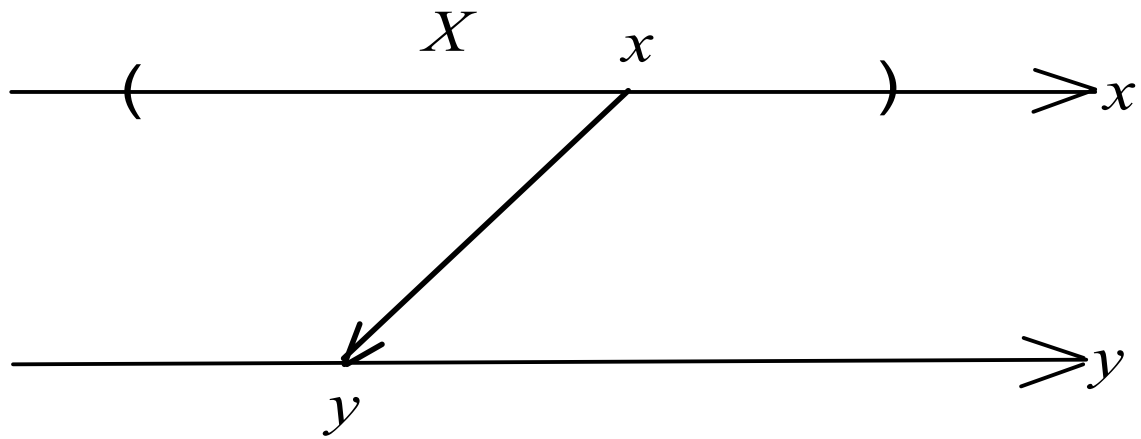
Здравствуйте!

Лекция № 5

Функция и способы ее задания

Пусть имеются две вещественные оси OX и OY. Пусть на оси OX выбрано некоторое множество X. Правило, которое каждому значению $x \in X$ ставит в соответствие некоторое число $y \in OY$, называется функцией одной переменной и обозначается $y = f(x)$.



Множество X, где такое определение имеет смысл, называется областью определения функции. Однако, при доказательстве различных теорем в качестве множества X мы будем брать только какую-то часть области определения. Эту часть мы будем называть областью задания функции.

Способы задания функции.

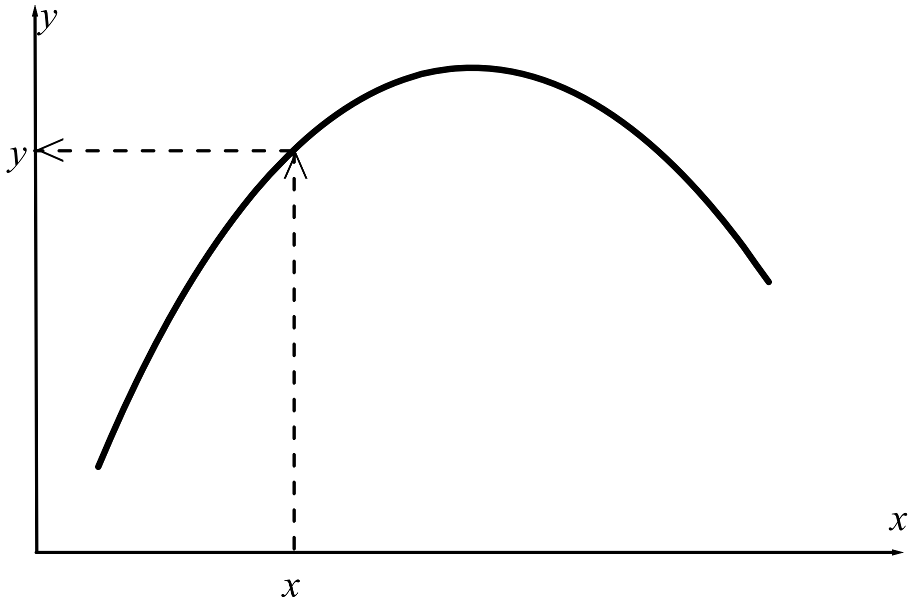
1. Аналитический способ.

В этом случае функция $f(x)$ задается в виде одной или нескольких формул, описывающих правило, устанавливающее соответствие $x \to y$. Например

$$f(x) = \sin\left(x^2 \operatorname{tg}(x)\right),$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ \sin\left(x^3\right), & 0 < x \le 1, \\ e^{tg(x)}, & x > 1. \end{cases}$$

2. Графический способ.



В этом случае оси OX и OY располагаются перпендикулярно друг другу так, что они образуют декартову систему координат. Соответствие $y = f\left(x\right)$ для каждого x определяет некоторую точку на плоскости OXY. Совокупность этих точек образует некоторую кривую на плоскости OXY, которая называется графиком функции. Если нарисован график функции, то тем самым задано и правило, определяющее соответствие $x \xrightarrow{f} y$

Предел функции.

Определение. Число b называется пределом или предельным значением функции $f(x)$ при x стремящимся к a (обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$) если

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x\ \ |x - a| < \delta\ \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Это понятие предела также связано с идеей движения. В этом случае движение отражается в том, что при изменении аргумента x изменяется значение функции. Понятие предела возникает при определенном типе такого движения - когда аргумент приближается к a, то значения функции приближается к b.

Варианты

а) $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=+\infty$ это значит, что

$$\forall\ A>0\ \ \exists\ \delta\ \ \forall\ x\ \ \left|x-a\right|<\delta\ \ f\left(x\right)>A;$$

б) $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=-\infty$ это значит, что

$$\forall\ A<0\ \ \exists\ \delta\ \ \forall\ x\ \ \left|x-a\right|<\delta\ \ f\left(x\right)<A;$$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=b$ это значит, что

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ A\ \ \forall\ x\ \ x>A\ \ \left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon;$$

г) $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=b$ это значит, что

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ A<0\ \ \forall\ x\ \ x<A\ \ \left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon;$$

д) $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=+\infty$ это значит, что

$$\forall\ A>0\ \ \exists\ B>0\ \ \forall\ x\ \ x>B\ \ f\left(x\right)>A\cdot$$

Односторонние пределы.

Определение. Число b называется пределом или предельным значением $f\left(x\right)$ при $x \to a$ справа (обозначение $\lim\limits_{x \to a+0} f\left(x\right) = b$) если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \left|x - a\right| < \delta \ x > a \ \left|f(x) - b\right| < \varepsilon.$$

Число b называется пределом или предельным значением $f\left(x\right)$ при $x \to a$ слева (обозначение $\lim\limits_{x \to a-0} f\left(x\right) = b$) если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \left|x - a\right| < \delta \ x < a \ \left|f(x) - b\right| < \varepsilon.$$

Связь понятий предел функции и предел последовательности

Между понятиями «предел функции» и «предел последовательности» существует связь, которая дается нижеследующей теоремой.

Теорема. Для того, чтобы существовал $\lim_{x\to a} f(x) = b$ **необходимо и достаточно, чтобы <u>для любой</u> последовательности** $\{x_n\}$**, у которой** $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ **выполнялось условие** $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Это значит, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x\ \ |x-a| < \delta\ \ |f(x) - b| < \varepsilon \cdot$$

Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$ у которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Это значит, что

$$\forall\delta\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ |x_n - a| < \delta$$

Совершим «прогулку» по этим выражениям по следующему маршруту:

$$\underline{\forall\varepsilon > 0} \to \exists\delta > 0 \to \forall\delta \to \underline{\exists N} \to \underline{\forall n > N} \to |x_n - a| < \delta \to |x - a| < \delta \to \underline{|}$$
$$\underline{f(x) - b\ | < \varepsilon}.$$

Оставляя только подчеркнутые куски и заменяя в последних выражениях x на x_n, получим

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N\ \forall n > N\ \ |f(x_n) - b| < \varepsilon,$$

что и говорит о том, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Достаточность. Докажем достаточность методом «от противного».

Чтобы написать противоположное утверждение, надо сделать следующее:

1. заменить квантор $\forall$ на квантор $\exists$, и наоборот, квантор $\exists$ на квантор $\forall$;
2. последнее утверждение заменить на противоположное.

А теперь приступим к доказательству. Итак

Надо доказать:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x\ \ \left|x - a\right| < \delta\ \ \left|f\left(x\right) - b\right| < \varepsilon\ .$$

Противоположное утверждение имеет вид

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists x\ \ |\,x - a\,| < \delta\ \ |\,f\,(x) - b\,| \geq \varepsilon\,.$$

Сведем это утверждение к противоречию.

Берем то $\varepsilon > 0$, которое «существует». Далее, возьмем последовательность $\{\delta_n\}$ такую, что

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \delta_4 > \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty}\delta_n = 0.$$

Тогда, согласно противоположному утверждению,

для δ_1 существует x_1 такое, что $|x_1 - a| < \delta_1$, но $|f(x_1) - b| \geq \varepsilon$;

для δ_2 существует x_2 такое, что $|x_2 - a| < \delta_2$, но $|f(x_2) - b| \geq \varepsilon$;

для δ_3 существует x_3 такое, что $|x_3 - a| < \delta_3$, но $|f(x_3) - b| \geq \varepsilon$;

и вообще

для δ_n существует x_n такое, что $|x_n - a| < \delta_n$, но $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$.

В результате получается некоторая последовательность $\{x_n\}$. Что хорошего можно о ней сказать?

1. так как, по построению $\forall n \quad |x_n - a| < \delta_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;

2. но $\forall n \; |f(x_n) - b| \geq \varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$. (Заметим, что этот предел может и вообще не существовать).

Но это противоречит условию «<u>для любой последовательности</u>», которое стоит в формулировке теоремы. Это и доказывает достаточность.

Свойства предела функции

Предельное значение функции обладает теми же свойствами, что и пределы последовательности, в частности

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[c\cdot f\left(x\right)\right]=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right]=\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\pm\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right]=\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\cdot\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)}{\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)}$ если $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)\neq 0$

5. Если $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=b$ и $b\neq\pm\infty$, то в некоторой окрестности $x=a$ $f\left(x\right)$ ограничена

6. Если $f\left(x\right)\geq b$ то $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\geq b$.

Докажем, например, свойство 3. Берем любую последовательность $\{x_n\}$ у которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Для нее верно соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_n)\cdot g(x_n)\right] = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

Но так как это верно для любой последовательности с указанным свойством, то, по только что доказанной теореме, верно и свойство

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Остальные свойства доказываются аналогично.

Предел монотонной функции

Определение. Функция $f(x)$ называется

– монотонно возрастающей, если из $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

– строго монотонно возрастающей, если из $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

– монотонно убывающей, если из $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

– строго монотонно убывающей, если из $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

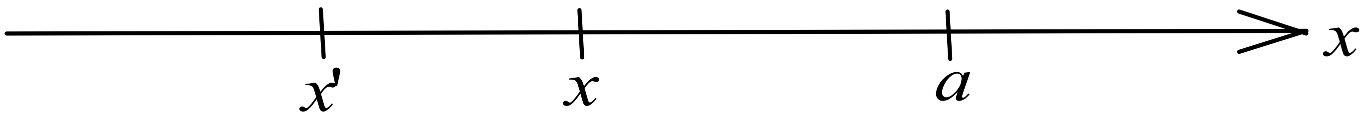
Теорема. Если $f(x)$ монотонно возрастает и ограничена сверху при $x<a$, то существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Доказательство.

Рассмотрим множество $\{f(x)\}$ значений функции $f(x)$ при $x<a$. По условию теоремы, это множество ограниченно сверху, то есть $\exists\, M \ \forall\, x<a \ \ f(x)\le M$. По теореме о существовании супремума отсюда следует, что существует конечный $\sup\limits_{x<a}\{f(x)\}=b$.

Покажем, что $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$. По свойствам супремума

1. $\forall\, x<a \ \ f(x)\le b$;
2. $\forall\, \varepsilon>0 \ \exists\, x'<a \ f(x')>b-\varepsilon$



Обозначим $a - x' = \delta$. Возьмем любое x, для которого $x < a$, но $|x - a| < \delta$. Как видно из рисунка, из этого следует, что $x > x'$. Но тогда, в силу монотонности $f(x)$,

а) $f(x) \geq f(x') > b - \varepsilon$,

б) $f(x) \leq b$.

Поэтому имеем

$$b - \varepsilon < f(x') \leq f(x) \leq b < b + \varepsilon$$

Выбрасывая лишнее, получим, что

$$\forall\ x\ |x - a| < \delta\ \ x < a\ \ b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$$

или, что то же самое, $|f(x) - b| < \varepsilon$. По определению предела функции это означает, что $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$

Признак Больцано–Коши для функции

Теорема. Для того, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ **необходимо и достаточно чтобы**

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta>0\ \ \forall\ x,x'\ \ \left|x-a\right|<\delta\ \left|x'-a\right|<\delta\ \ \left|f\left(x\right)-f\left(x'\right)\right|<\varepsilon\cdot$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=b$. Это значит, что

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta>0\ \ \forall\ x\ \ \left|x-a\right|<\delta\ \ \left|f\left(x\right)-b\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда $\forall\ x,x'\ \ \left|x'-a\right|<\delta\ \ \left|x-a\right|<\delta$ имеем

$$|\,f\,(x)-f\,(x')\,|=|\,(\,f\,(x)-b\,)-(\,f\,(x')-b\,)\,|\leq$$

$$\leq|\,f\,(x)-b\,|+|\,f\,(x')-b\,|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

что и сказано в условии теоремы.

Достаточность.

1. Сведение к пределу последовательности

Итак, пусть

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x, x'\ |x - a| < \delta\ |x' - a| < \delta\ \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a, то есть у которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Это значит, что

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n - a| < \delta\cdot$$

Но тогда $\forall\ n, m > N$ будут выполнены условия $|x_n - a| < \delta$, $|x_m - a| < \delta$ и получится, что $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Итак, получилось, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ m, n > N\ \ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

По признаку Больцано–Коши для последовательности, отсюда следует, что существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

2. Независимость от выбора последовательности.

Возникающая здесь трудность заключается в том, что значение предела b может зависеть от выбора последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что этого не может быть.

Пусть имеется последовательность $\{x'_n\}$ для которой также верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = a$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = b'$.

Составим «смешанную» последовательность вида

$$\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, x_4, x'_4, \ldots\} = \{\bar{x}_n\}.$$

Так как и $x_n \to a$ и $x'_n \to a$ то ясно, что $\bar{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Тогда теми же рассуждениями, что и в п. 1 показывается, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = \bar{b}$.

Но и $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ и $\left\{f\left(x'_n\right)\right\}$ есть подпоследовательности последовательности $\left\{f\left(\overline{x}_n\right)\right\}$, а как показано выше, любая подпоследовательность сходится к тому же пределу, что и исходная последовательность. Поэтому

$$b=\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\overline{b}$$

$$b'=\lim_{n\to\infty} f\left(x'_n\right)=\overline{b}$$

отсюда и следует, что $b=b'$.

Независимость $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$ от вида последовательности $\left\{x_n\right\}$ и говорит о том, что $\exists \lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=b$.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин.

<u>Определение.</u> Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to a$ если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Пусть имеются две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Тогда возможны следующие варианты:

1. **Существует** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$ **и** $c \neq 0, \pm\infty$.

В этом случае говорят, что бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости и обозначают это так: $\alpha = O(\beta)$ или, что то же самое, $\beta = O(\alpha)$ (символ O читается «О большое»)

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ **или, что то же самое,** $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right|=+\infty$.

В этом случае говорят, что $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$ и обозначают это так: $\alpha=o(\beta)$ (символ «o» читается «о малое»)

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ **не существует.**

В этом случае говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы.

Для стандартизации вводят стандартную бесконечно малую величину $\beta(x) = x - a$. Пусть при некотором k существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^k} = c$ и $c \neq 0, \neq \infty$. В этом случае говорят, что $\alpha(x)$ является бесконечно - малой k -го порядка и записывают это так

$$\alpha(x) = c \cdot (x - a)^k + o\left((x - a)^k\right).$$

Выражение $c \cdot (x - a)^k$ называют главным членом $\alpha(x)$.

Определение. Функция $A(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$ если $\lim\limits_{x\to a}|A(x)| = +\infty$.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ две бесконечно большие величины. Тогда возможны следующие варианты.

1. Существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A(x)}{B(x)} = c$**, и** $c \neq 0, \pm\infty$**.**

В этом случае говорят, что $A(x)$ и $B(x)$ две бесконечно большие одного порядка.

2. $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{A(x)}{B(x)}\right| = \infty$ **или, что то же самое,** $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{B(x)}{A(x)}\right| = 0$**.**

В этом случае говорят, что $A(x)$ является бесконечно большой более высокого порядка, чем $B(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{A(x)}{B(x)}\right|$ **не существует.**

В этом случае говорят, что бесконечно большие $A(x)$ и $B(x)$ несравнимы.

В качестве стандартной бесконечно большой величины берут $B(x)=\dfrac{1}{x-a}$. Пусть при некотором k существует $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^k A(x)=c$ и $c\neq 0,\pm\infty$. В этом случае говорят, что $A(x)$ является бесконечно большой k-го порядка и записывают это так: $A(x)\sim\dfrac{c}{(x-a)^k}$. (Знак $\sim$ читается «асимптотически равно»).