Здравствуйте!

Лекция №7

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Дадим несколько расшифровок этого важнейшего определения.
а) Вспоминая понятие предела, запишем непрерывность $f(x)$ в точке x_0 в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

б) Так как $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то непрерывность в точке x_0 можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Отсюда следует важнейшее свойство непрерывной функции: для непрерывной функции можно переставлять местами знак функции и знак предельного перехода

$$\lim f(...) = f(\lim ...)$$

в) Обозначим $\Delta x = x - x_0$ (приращение аргумента) и $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ (приращение функции). Тогда непрерывность в точке x_0 означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$, то есть бесконечно-малому приращению аргумента соответствует бесконечно-малое приращение функции.

Ведем обозначения:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0), \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0),$$

если эти пределы существуют.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 слева (справа) если $f(x_0)=f(x_0-0)$ $(f(x_0)=f(x_0+0))$. Очевидно, что непрерывность в точке x_0 означает непрерывность слева и справа одновременно.

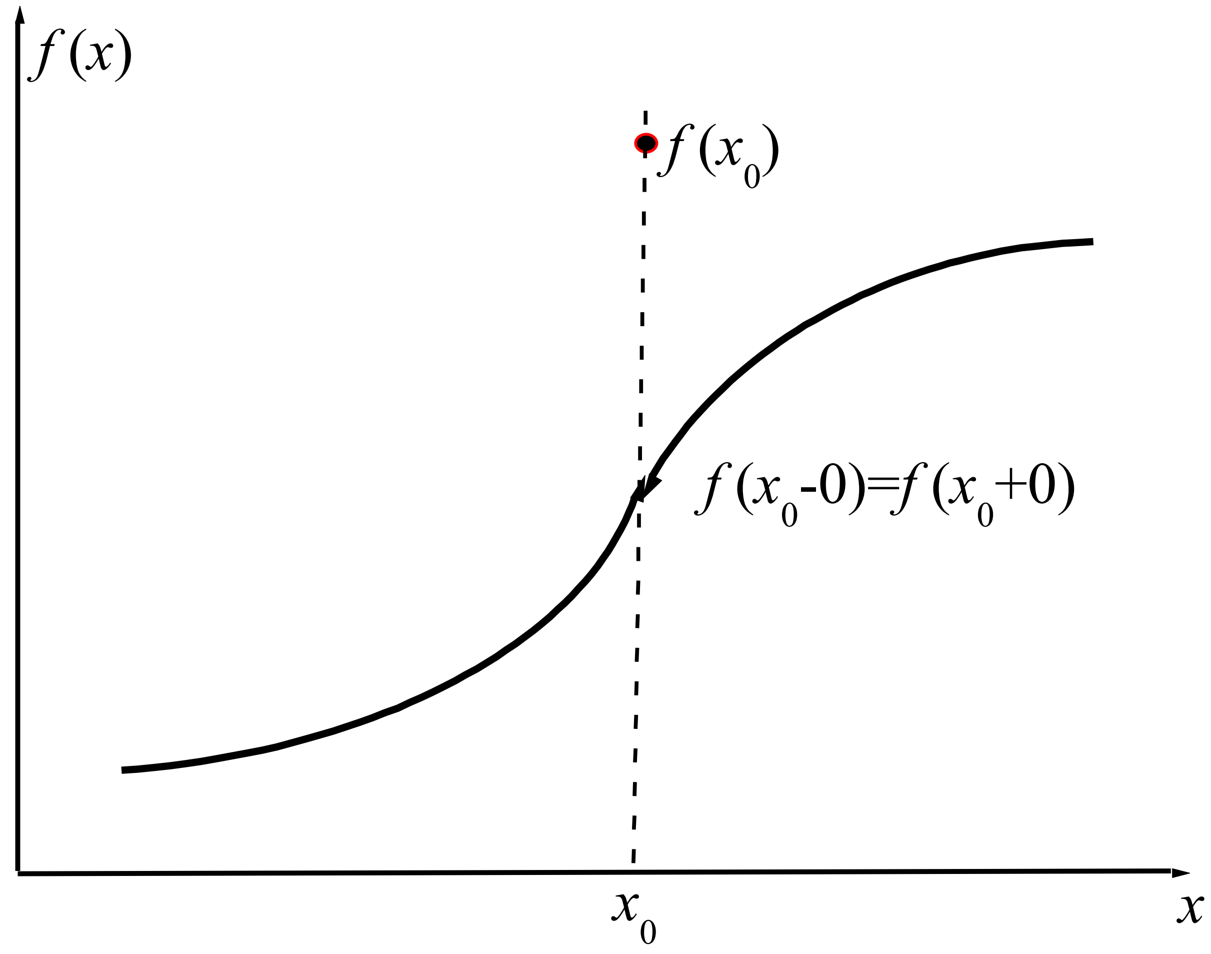
Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной на некотором множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества, то есть если

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Обратите внимание, где стоит квантор $\forall x_0 \in X$, это важно.

Определение. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет разрыв.

Типы разрывов.

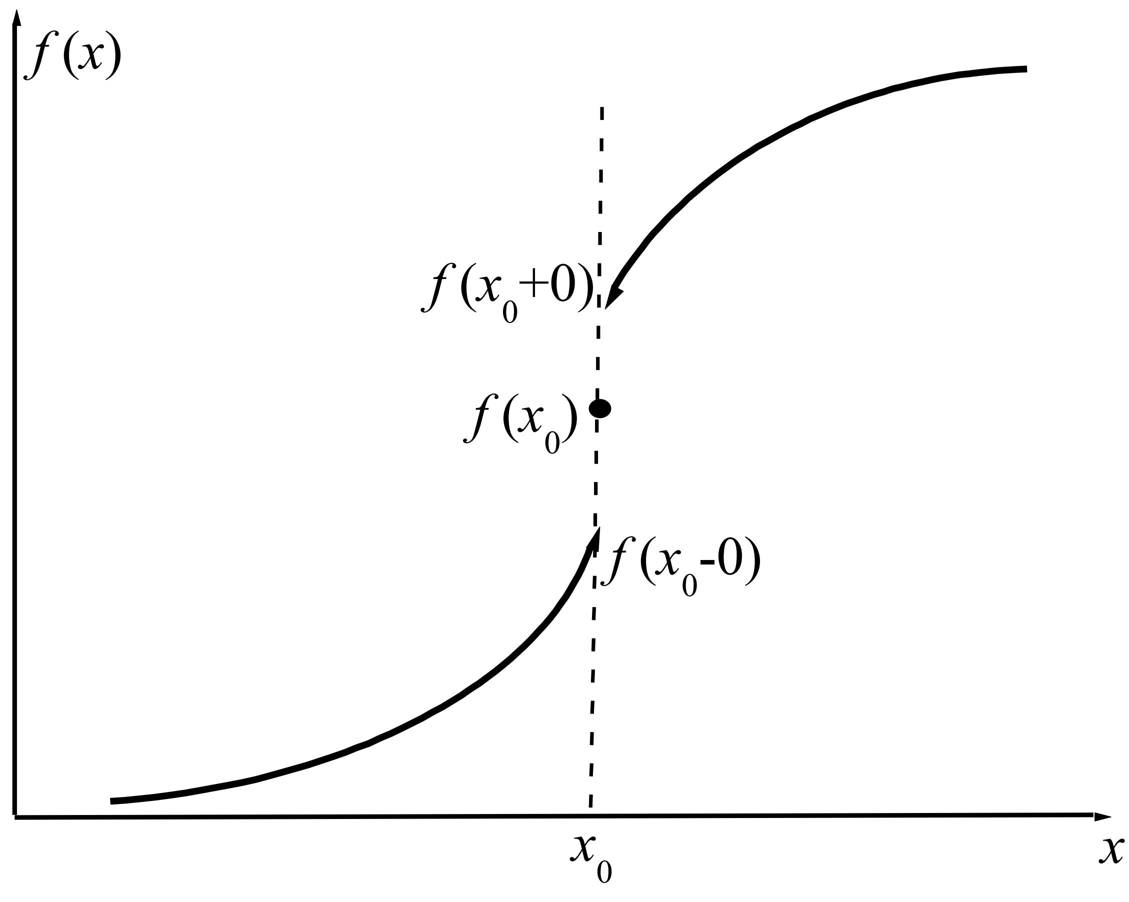


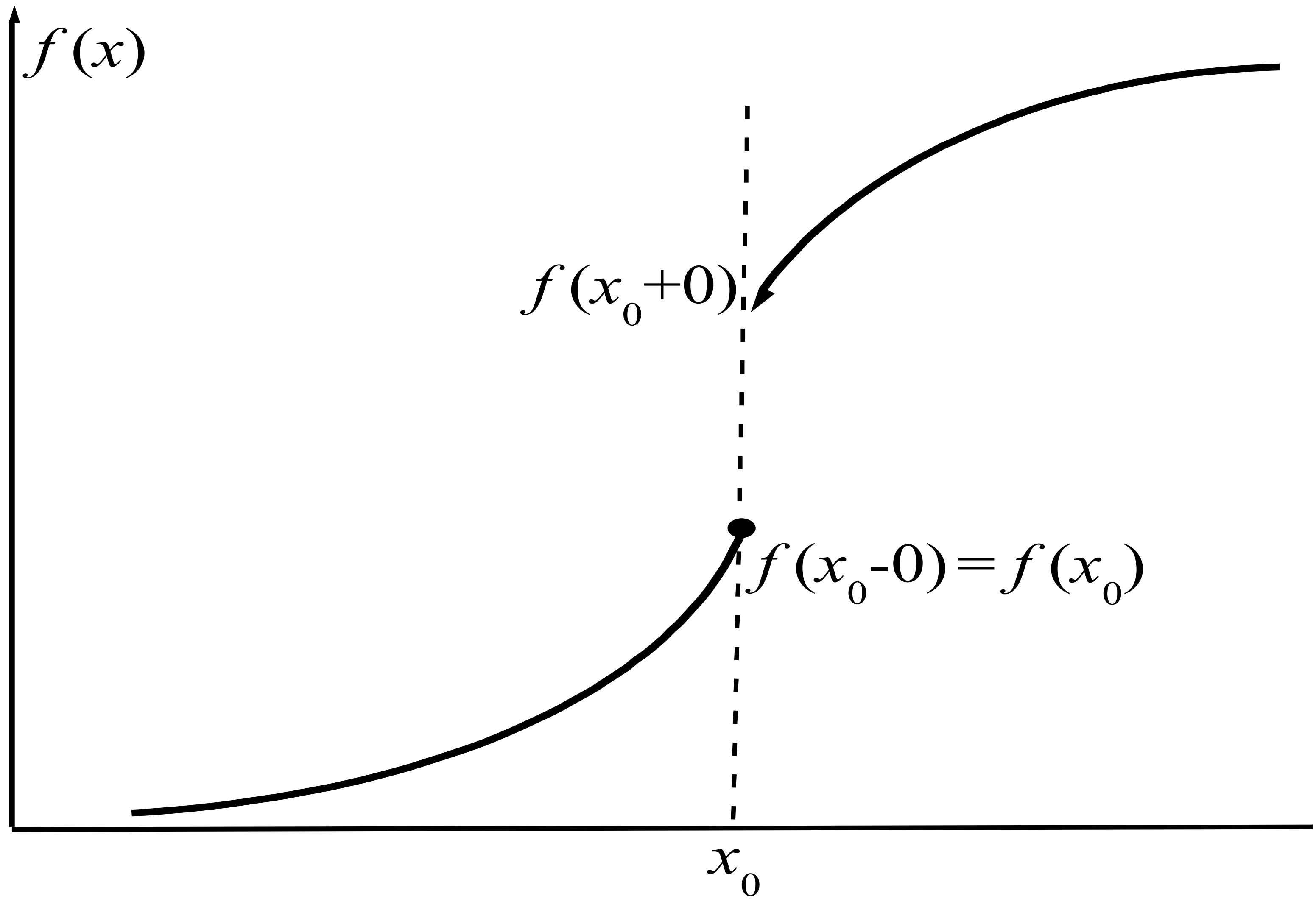
А. Пусть существуют конечные $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, они равны друг другу, но не равны значению функции в точке x_0, то есть выполнено условие

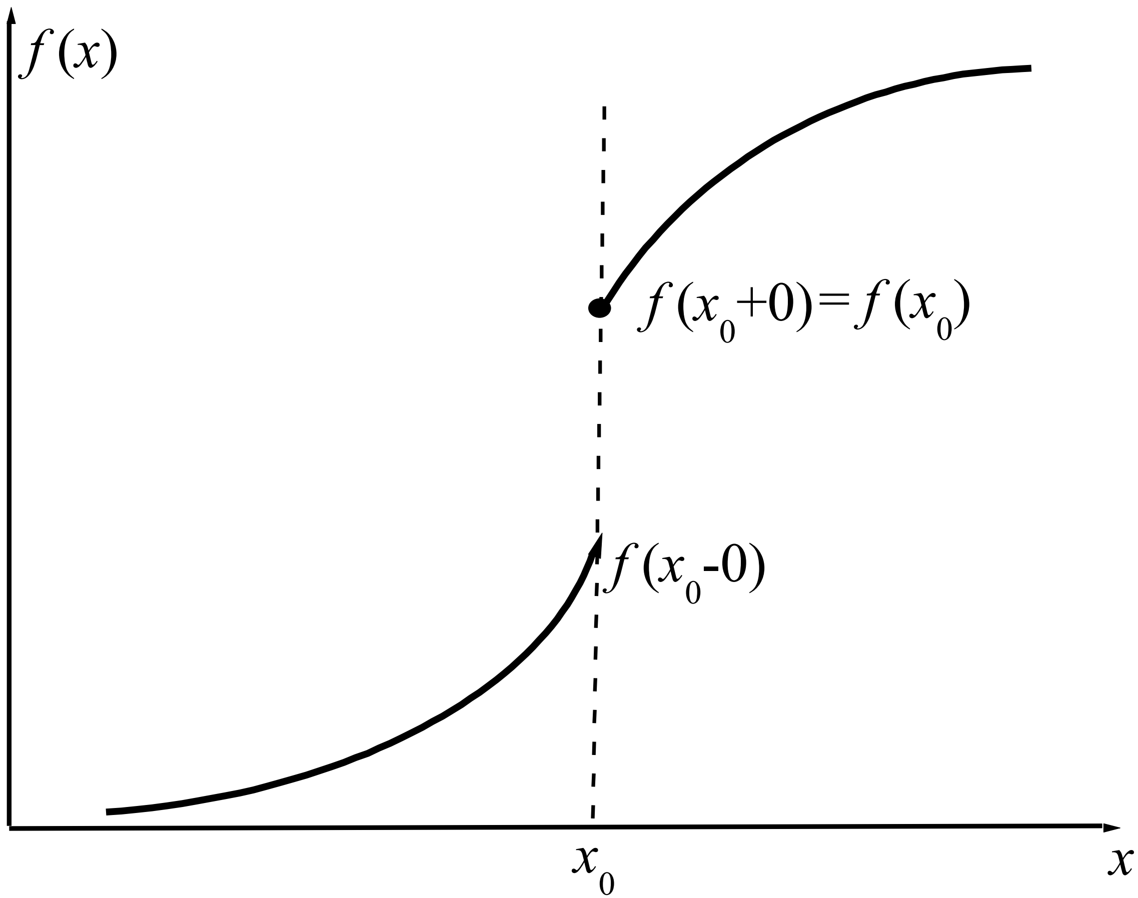
$$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0),$$

то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет <u>устранимый разрыв</u>. Действительно, достаточно изменить значение функции в точке x_0 и разрыв исчезнет.

В. Пусть существуют конечные $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, но они <u>не равны друг другу</u> $\left(f(x_0-0)\neq f(x_0+0)\right)$. Тогда говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет <u>разрыв I рода</u> или <u>скачок</u>.

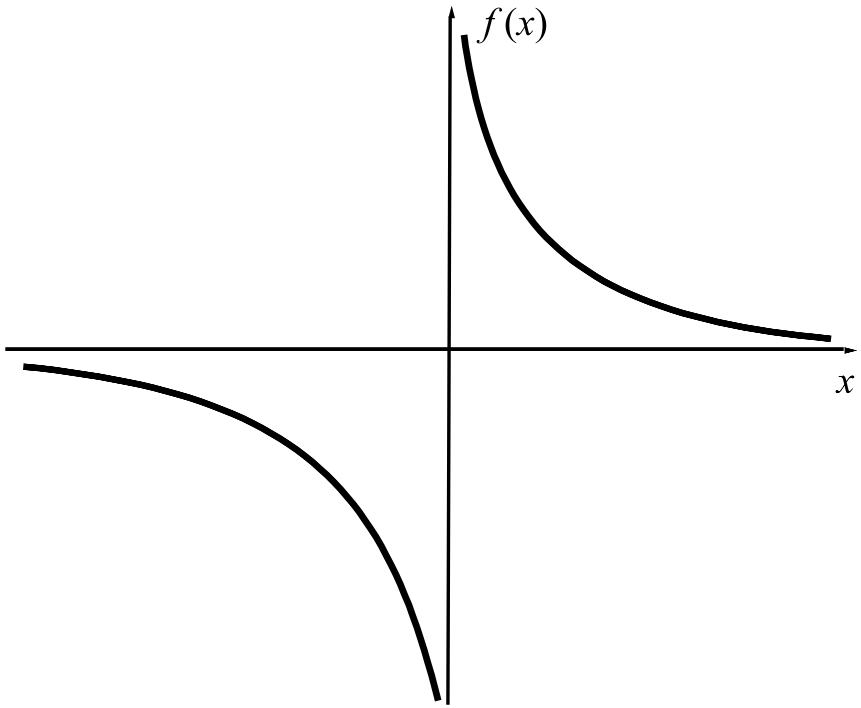



$f(x)$
$f(x_0+0)$
$f(x_0\text{-}0) = f(x_0)$
x_0

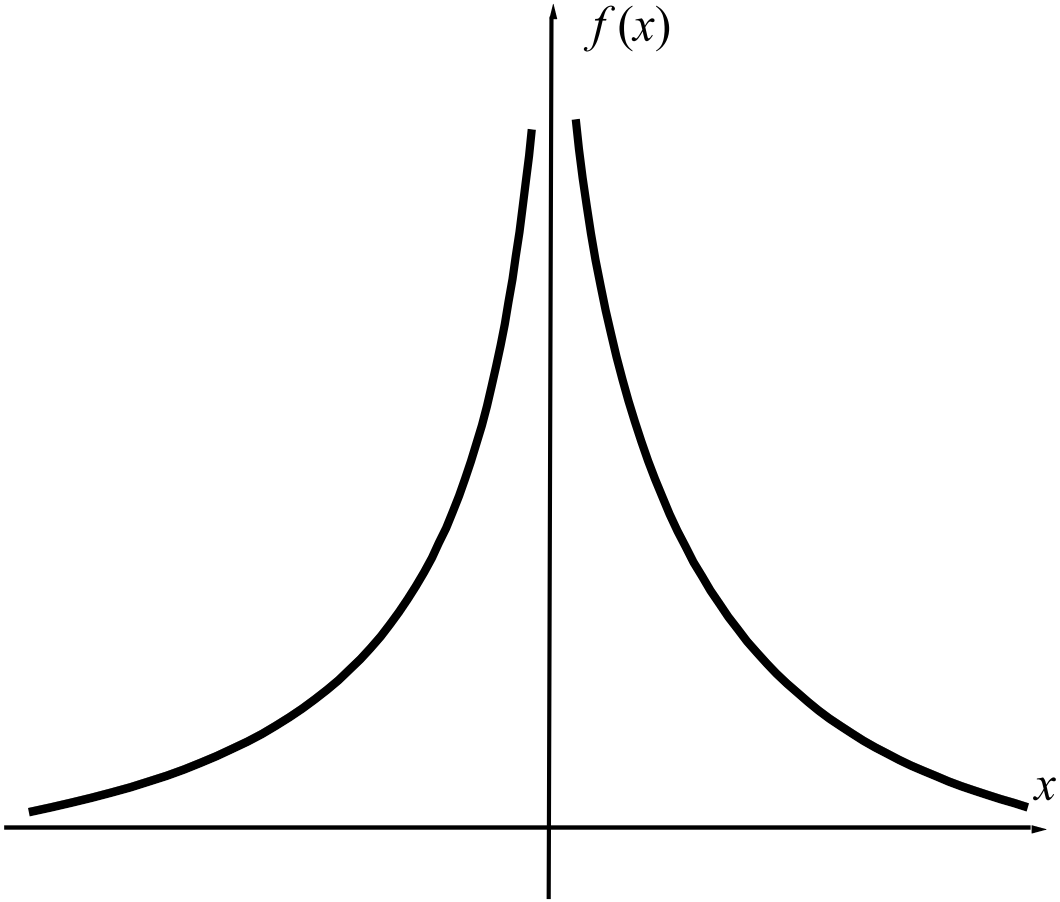


Величина $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ называется величиной скачка функции $f(x)$ в точке x_0.

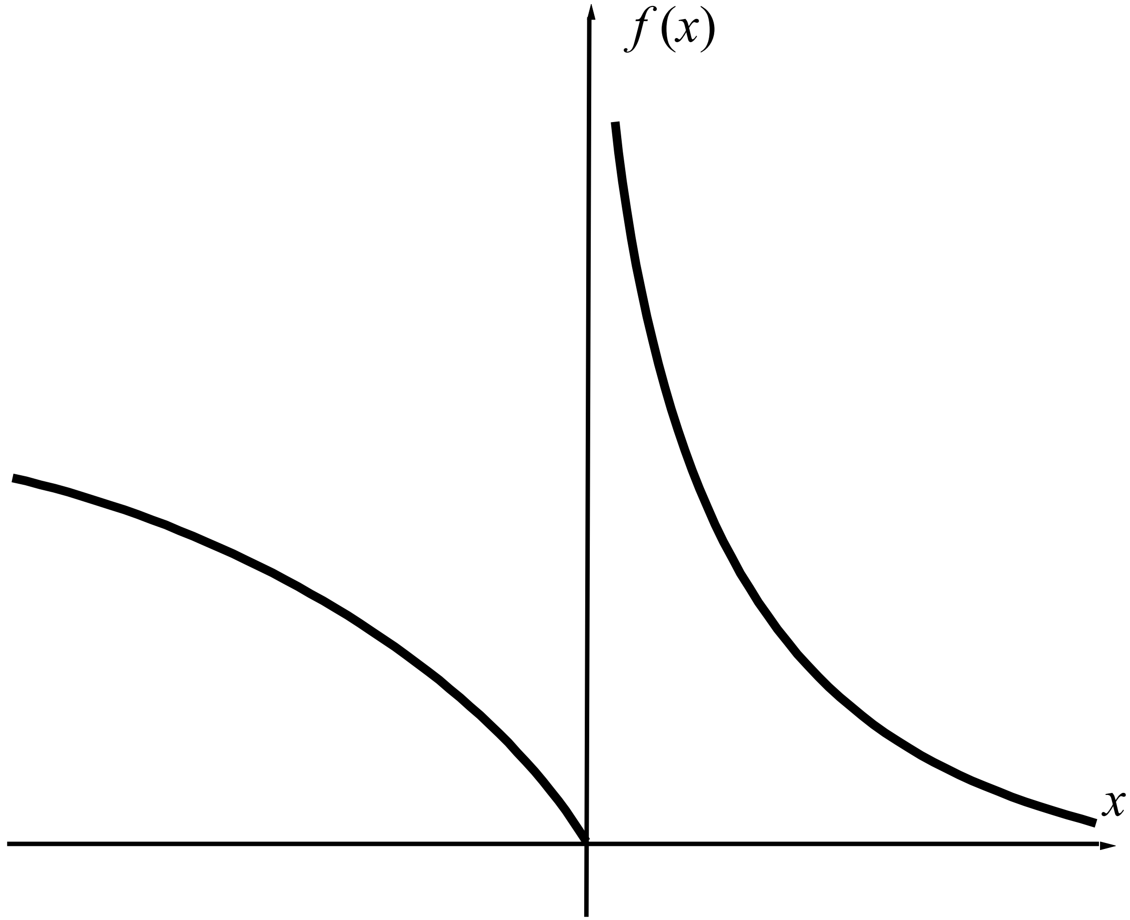
Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ бесконечен или не существует, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет <u>разрыв второго рода</u>.



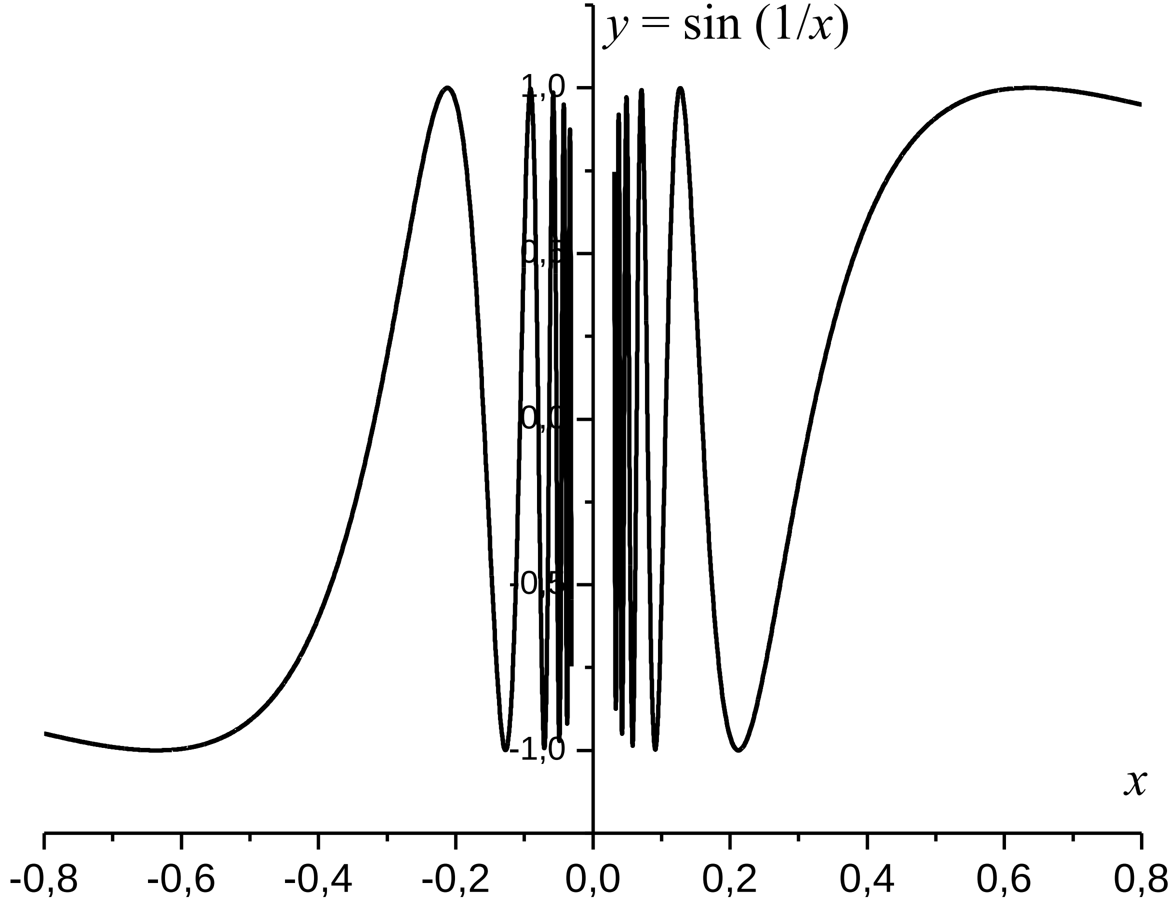
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -0} f(x) = -\infty$$



$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \ \lim_{x \to +0} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to -0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} f(x) = 0$$



$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right);\ \lim_{x\to+0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ и } \lim_{x\to-0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

не существуют.

Свойства непрерывных функций.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x_0)\neq 0$) непрерывны в точке x_0.

<u>Доказательство.</u>

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. Но тогда, по свойствам пределов

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Последнее свойство верно, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)\neq 0$. ■

Непрерывность сложной функции.

Пусть $y=f(x)$, но x, в свою очередь, является функцией некоторого аргумента t: $x=\varphi(t)$. Тогда комбинация $y=f(\varphi(t))$ называется сложной функцией, или суперпозицией функций $f(x)$ и $\varphi(t)$.

Примеры:

а) $y=\sin(x)$, $x=e^t \Rightarrow y=\sin(e^t)$

б) $y=e^x$, $x=\sin(t) \Rightarrow y=e^{\sin(t)}$

Теорема о непрерывности сложной функции.

Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0=\varphi(t_0)$. Тогда функция $f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.

Доказательство.

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow$

$\underline{\forall\varepsilon > 0}\quad \exists\delta \quad \forall x \quad |x\text{-}x_0| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$

$\varphi(t)$ непрерывна в точке $t_0 \Rightarrow$

$\forall\delta > 0 \quad \underline{\exists\eta} \quad \underline{\forall t} \quad |t - t_0| < \eta \ \ |\varphi(t)\text{-}\varphi(t_0)| < \delta$, или $|x - x_0| < \delta$.

Выписывая подчеркнутые кванторы, получим, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\eta \quad \forall t \quad |t - t_0| < \eta \quad |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon,$$

что и говорит о том, что $f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0. ■

Обратите внимание на следующие детали:

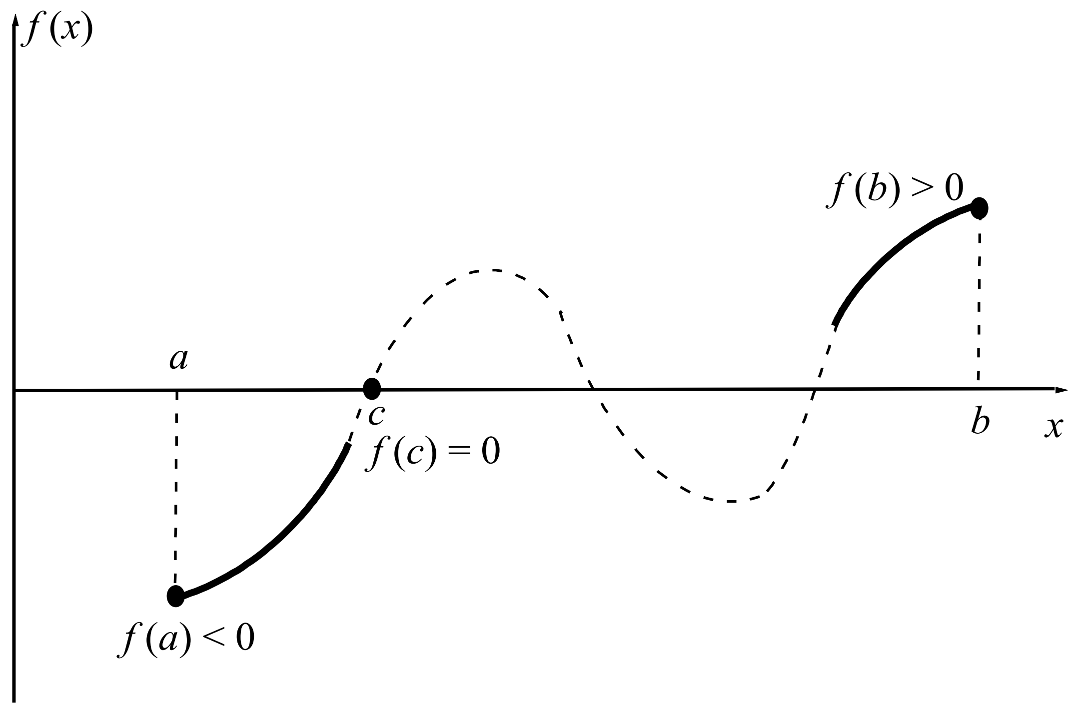
а) так как $x=\varphi(t)$, то $|\varphi(t)\text{-}\varphi(t_0)|<\delta$□ может быть записано как $|x-x_0|<\delta$□, и $f(x)$ превращается в $f(\varphi(t))$;

б) при определении непрерывности $\varphi(t)$ в точке t_0 в первом кванторе стоит буква δ. Это необходимо для согласования с квантором $\exists\delta$ в предыдущей строке и взаимного уничтожения $\exists\delta$ и $\forall\delta$. Любая другая буква на этом месте не дала бы верного результата.

<u>Первая теорема Больцано-Коши.</u> Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает разные по знаку значения. Тогда существует точка $c\in[a, b]$ в которой $f(c)=0$.

<u>Доказательство.</u>

Пусть, для определенности, $f(a)<0$, $f(b)>0$. Ситуация выглядит так:



1. Деление отрезков пополам.

Разделим отрезок [a, b] пополам. Серединой его будет точка $\frac{a+b}{2}$. Тогда возможны такие варианты:

а) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$. В этом случае, взяв $c=\frac{a+b}{2}$, теорему можно считать доказанной.

б) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$. В этом случае для дальнейшего рассмотрения оставим отрезок $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, который обозначим [$a_1$, b_1].

в) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ В этом случае для дальнейшего рассмотрения оставим отрезок $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, который обозначим [$a_1$, b_1].

Проделаем такую же процедуру с отрезком $[a_1, b_1]$, получив отрезок $[a_2, b_2]$, затем то же самое с отрезком $[a_2, b_2]$, получив отрезок $[a_3, b_3]$ и т.д. Заметим, что для дальнейшего рассмотрения все время оставляется тот отрезок, для которого $f(a_n)<0$ и $f(b_n)>0$.

2. Построение точки c.

В результате этой процедуры возможны два варианта.

А. На каком-то шаге n получится, что $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$. В этом случае в качестве точки c следует взять $c=\frac{a_n+b_n}{2}$ и теорема будет доказана.

Б. $\forall n \quad f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\neq 0.$

В этом случае мы получаем систему отрезков $[a_n, b_n]$, для которой

а) $[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset[a_3, b_3]\ldots$

б) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}\to 0$

в) $f(a_n)<0$; $f(b_n)>0$.

3. Но тогда, по лемме о вложенных отрезках, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c\in[a,b]$. Используя непрерывность функции $f(x)$, получим

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(c)\leq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(c)\geq 0,$$

так как всегда было $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$. Сравнивая эти два неравенства получим, что $f(c)=0$, что и требовалось доказать.

<u>**Вторая теорема Больцано-Коши.**</u> **Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $<a, b>$ и** $m=\inf\limits_{x\in<a,b>} f(x)$ **и** $M=\sup\limits_{x\in<a,b>} f(x)$**. Тогда** $\forall C$ $\ \ m<C<M\ \ \exists c\in<a, b>\ \ f(c)=C$**.**

<u>Примечание</u>. Символ < означает любой из двух символов – (или [, а символ > – любой из двух символов –) или]. Таким образом, отрезок $<a, b>$ означает <u>любой</u> из следующих отрезков – [*a*, *b*], (*a*, *b*], [*a*, *b*), или (*a*, *b*).

Доказательство.

Так как к супремуму и инфимуму можно подойти сколь угодно близко, то можно утверждать, что

$\exists x_1 \in <a, b> \qquad m < f(x_1) < C,$

$\exists x_2 \in <a, b> \qquad C < f(x_2) < M$

Очевидно, что отрезок $[x_1, x_2] \subset <a, b>$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Для нее имеем:

$$\varphi(x_1) = f(x_1) - C < 0; \quad \varphi(x_2) = f(x_2) - C > 0.$$

Согласно первой теореме Больцано-Коши, $\exists c \in [x_1, x_2]$, такая, что $\varphi(c) = 0$. Но тогда эта же точка $c \in <a, b>$ и для нее $\varphi(c) = f(c) - C = 0$, то есть $f(c) = C$.

Первая теорема Вейерштрасса.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке, то есть существуют такие числа m и M, что $\forall x \in [a, b] \quad m \le f(x) \le M$.

Доказательство.

Доказательство этой теоремы проведем методом от противного.

Предположим противное – пусть, например, функция $f(x)$ неограничена сверху.

1. Построение последовательности. Мы предположили, что $f(x)$ неограничена сверху на $[a, b]$. Это означает, что для любого числа A найдется такая точка $x \in [a, b]$, что $f(x) > A$.

Возьмем в качестве числа A числа 1, 2, 3, 4,… Тогда $\forall n \ \exists x_n$, что $f(x_n) > n$. Мы получили, таким образом, некоторую последовательность $\{x_n\} \in [a, b]$ и удовлетворяющую свойству $f(x_n) > n$.

2. <u>Выделение подпоследовательности</u>. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то по лемме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся последовательность $\{x_{n_k}\}$, то есть $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. <u>В силу замкнутости</u> отрезка $[a, b]$ точка $c \in [a,b]$.
(Отметим, что в этом месте используется ограничение теоремы – замкнутость $[a, b]$. Если бы, например, был (a, b), то c могла бы и не принадлежать (a, b)).
3. <u>Сведение к противоречию</u>. Так как согласно п.1 $f(x_{n_k}) > n_k$, то, переходя к пределу $k\to\infty$, получим

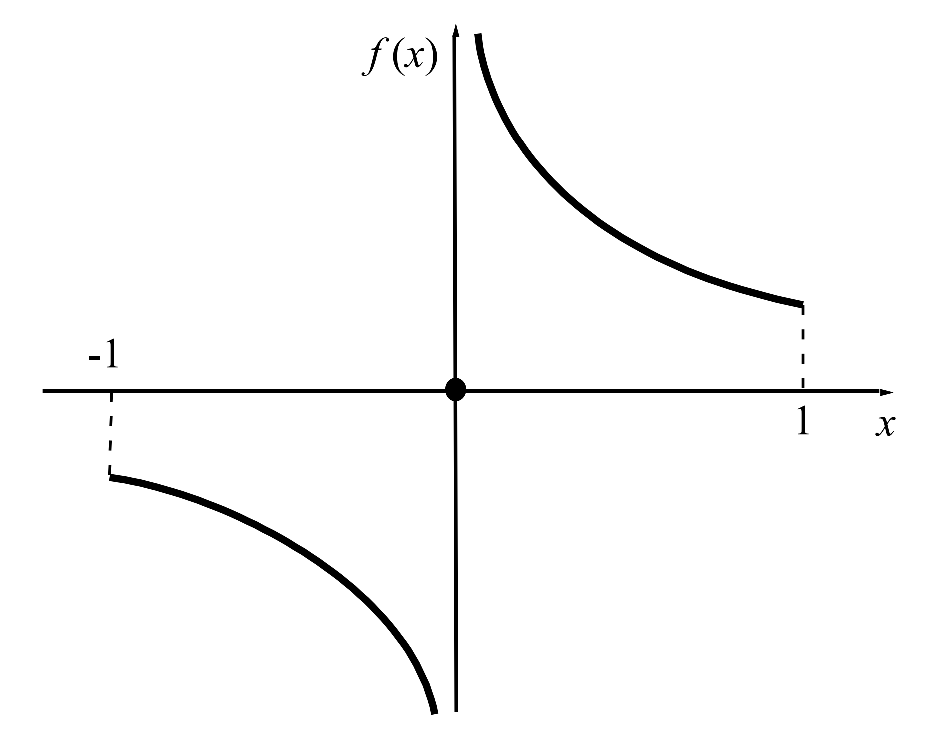
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(c) \geq \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty,$$

то есть $f(c)=+\infty$, что противоречит условию теоремы, где сказано, что $f(x)$ <u>определена</u> на отрезке $[a,b]$, что означает, что $f(c)$ должна иметь конечное значение.

Существенность ограничений теоремы.

В теореме два ограничения – непрерывность функции $f(x)$ и замкнутость отрезка $[a,\ b]$. Покажем на примерах, что отказ от любого из этих ограничений приводит к тому, что теорема становится неверной.

1. **Непрерывность функции.**

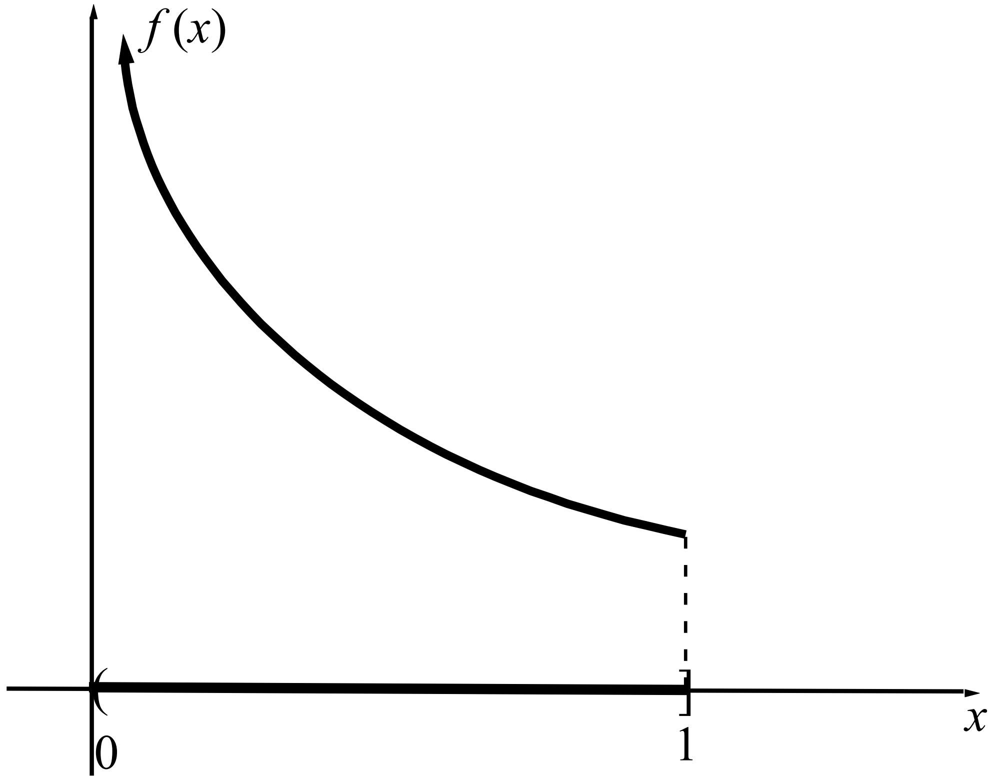


Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

и $x\in[-1,1]$. Как видно из рисунка, эта функция неограничена на $[-1,1]$.

2. **Замкнутость отрезка.**

	Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}$ и $x\in(0,1]$. Как видно из рисунка, данная функция на этом отрезке также неограничена.

<u>Вторая теорема Вейерштрасса</u>.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$. Тогда существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то есть инфимум и супремум $f(x)$ <u>достигаются</u> на $[a, b]$.

<u>Доказательство.</u>

Докажем теорему только для супремума.

<u>1. Построение последовательности</u>. По первой теореме Вейерштрасса, $f(x)$ ограничена сверху на $[a, b]$, то есть $\exists \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$

По свойствам супремума, к нему можно подойти сколь угодно близко. Поэтому $\forall n \ \exists x_n \in [a, b] \ \ M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M$. Беря n=1,2,3,… получим последовательность $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ такую, что $\forall n \ \ M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M$.

2. Выделение подпоследовательности. Так как $\forall n\ a \le x_n \le b$, то по лемме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, причем $c \in [a, b]$ в силу его замкнутости.

3. Достижение супремума. Для нашей подпоследовательности верно условие

$$\forall k \quad M - \frac{1}{n_k} \le f\left(x_{n_k}\right) \le M .$$

Переходя к пределу $k \to \infty$, получим

$$\lim_{k\to\infty}\left(M - \frac{1}{n_k}\right) \le \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) \le M .$$

Но $n_k \to \infty$, кроме того, в силу непрерывности $f(x)$,

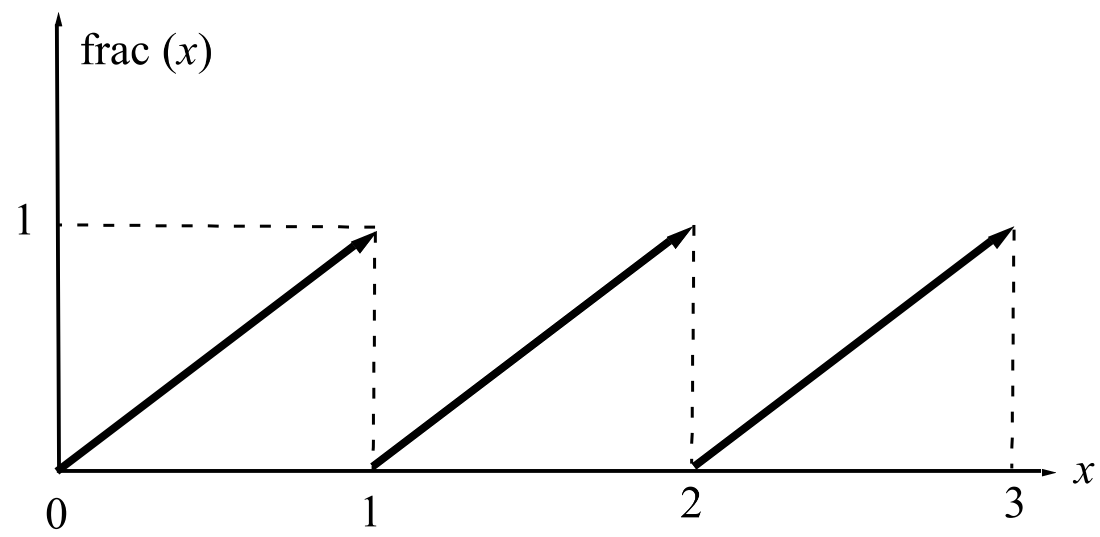
$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(c)$. В результате получим, что

$M \le f(c) \le M$, то есть $f(c) = M$ и супремум $f(x)$ достигается в точке c.

Существенность ограничений теоремы.

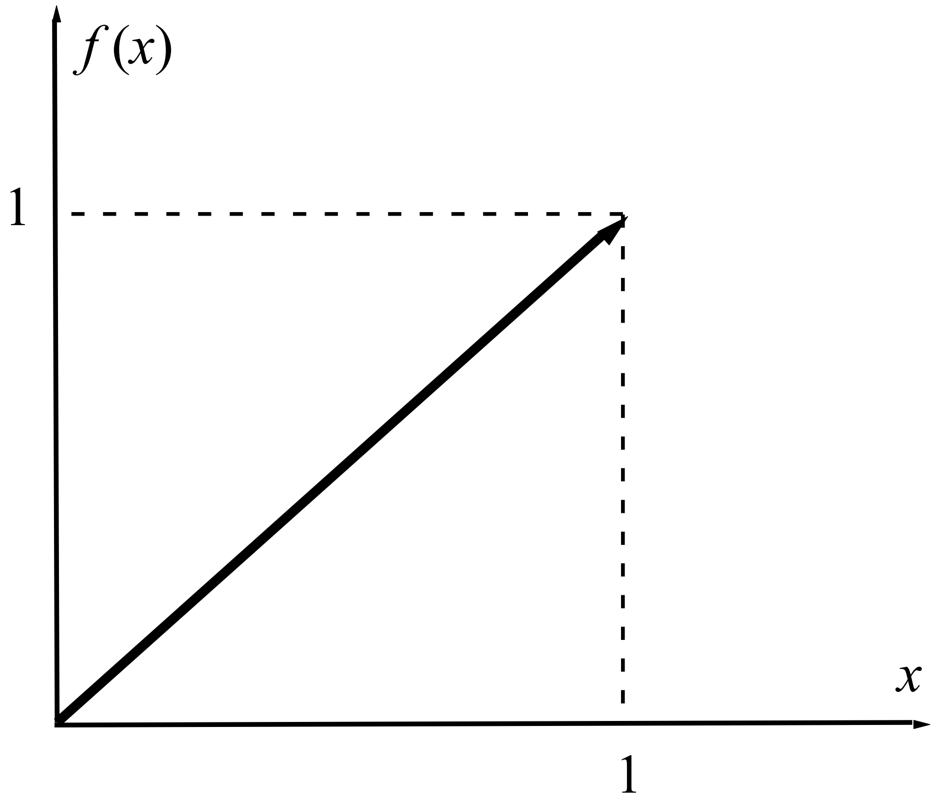
В этой теореме также два ограничения – непрерывность функции $f(x)$ и замкнутость отрезка $[a, b]$. Покажем на примерах, что отказ от любого из этих ограничений приводит к тому, что теорема становится неверной.

1. **Непрерывность функции.**



Рассмотрим функцию $f(x) = x - [x] = \mathrm{frac}(x)$, называемую дробной частью числа x. Ее график приведен на рисунке. Ясно, что супремум этой функции равен 1, но он нигде не достигается.

2. **Замкнутость отрезка.**



Рассмотрим функцию $f(x) = x$ и пусть $x \in [0,1)$. В этом случае $\sup\limits_{0 \le x < 1} f(x) = 1$, но этот супремум не достигается, так как точка $x = 1 \notin [0,1)$