Здравствуйте!

Лекция №4

Предельный переход в неравенствах

Теорема 1. Пусть $\{x_n\}$ **сходящаяся последовательность и** $\forall\ n\ \ x_n \geq b$**. Тогда** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq b$**.**

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда утверждение, противоположное доказываемому, имеет вид: $a < b$.

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$. Тогда, по определению, предела последовательности, можно написать

$$\exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n - a| < \varepsilon = \frac{b-a}{2}.$$

Последнее неравенство распишем в виде двойного:

$$a - \frac{b-a}{2} < x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Но так как $a < b$, то $\dfrac{a+b}{2} < b$ и получается что $\forall\ n > N\ \ x_n < b$, что противоречит условию теоремы. ■

Следствие. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся последовательности и $\forall\ n\ \ x_n \geq y_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство дается следующей цепочкой следствий

$$x_n \geq y_n \Rightarrow x_n - y_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(x_n - y_n\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$$

Важное замечание

Если $\forall n \quad x_n > b$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq b$.

Теорема 2. (Теорема о двух милиционерах) Пусть

1. $\{x_n\}$ **и** $\{z_n\}$ **сходящиеся последовательности;**

2. $\forall\ n \quad x_n \le y_n \le z_n$ **;**

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ **.**

Тогда $\{y_n\}$ **также сходящаяся последовательность и** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ **.**

Доказательство

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1\ \ \forall\ n > N_1\ \ |x_n - a| < \varepsilon$ или

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \quad \Rightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_2\ \ \forall\ n > N_2\ \ |z_n - a| < \varepsilon$ или

$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$

Беря $N = \max(N_1, N_2)$ и учитывая, что $\forall\ n\ \ x_n \le y_n \le z_n$ можно записать

$$\forall\ n > N\ \ a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon.$$

Выбрасывая лишнее, получим что

$$\forall\ n > N \quad a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \text{ или } |y_n - a| < \varepsilon,$$

что и говорит о том, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Предел монотонной последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется

– монотонно возрастающей (неубывающей), если $\forall\ n$ $x_{n+1} \geq x_n$;

– строго монотонно возрастающей (неубывающей), если $\forall\ n$ $x_{n+1} > x_n$;

– монотонно убывающей (невозрастающей), если $\forall n$ $x_{n+1} \leq x_n$;

– строго монотонно убывающей (невозрастающей), если $\forall\ n$ $x_{n+1} < x_n$;

Монотонно возрастающие последовательности обозначают символом $x_n \uparrow$, монотонно убывающие – символом $x_n \downarrow$.

Теорема

1. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограниченна сверху, то она сходится к конечному пределу;
2. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, но не ограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Часть 1. Пусть x_n ограниченны сверху, то есть $\exists\ M < +\infty$ такое, что $\forall\ n\ \ x_n \le M$. Тогда, согласно теореме о существовании супремума мы можем утверждать, что $\exists\ \sup\{x_n\} = a$.

Вспомним свойства $\sup\{x_n\}$. Их было два

1. $\forall\ n\ \ x_n \le a$;
2. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ x_N > a - \varepsilon$.

Но учтем теперь что $x_n \uparrow$. Это значит, что $\forall\ n > N\ \ \ x_n \ge x_N$. Тогда имеем следующую цепочку неравенств $a - \varepsilon < x_N \le x_n \le a < a + \varepsilon$. Выбрасывая лишнее, получим, что $\forall\ n > N\ \ \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$, что и говорит о том, что $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Заметьте, что предел равен как раз супремуму множества $\{x_n\}$

Часть 2. Пусть теперь x_n не ограничена сверху. Это значит, что $\forall\ A > 0\ \exists\ N\ \ x_N > A$.

Но $x_n \uparrow$. Значит, $\forall\ n > N\ \ \ x_n \geq x_N$ и поэтому можно записать $\forall\ n > N\ \ \ x_n \geq x_N > A$. Выбрасывая в этом неравенстве x_N, получим окончательно

$$\forall A > 0\ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n > A,$$

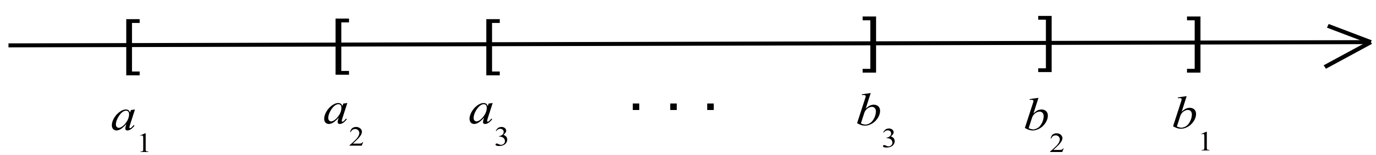
что и говорит о том, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

Лемма о вложенных отрезках

Определение 1. Множество, элементами которого являются отрезки, называется системой отрезков.

Определение 2. Система замкнутых отрезков $\left[a_n, b_n\right]$ называется стягивающейся, если

1. $\forall\ n\ \left[a_{n+1}, b_{n+1}\right] \subset \left[a_n, b_n\right]$ то есть каждый последующий отрезок расположен внутри предыдущего;
2. $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть длины отрезков стремятся к нулю



Лемма о вложенных отрезках

Для любой системы замкнутых стягивающихся отрезков

1. существуют $\lim\limits_{n\to\infty} a_n , \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2. они равны друг другу, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$;

3. точка c принадлежит всем отрезкам сразу, то есть $\forall n \quad c \in [a_n , b_n]$.

Доказательство.

1. Рассмотрим множество $\{a_n\}$ левых концов наших отрезков. Очевидно, что

а) $a_n \uparrow$,

б) $\forall\ n \ \ a_n < b_1$.

Поэтому, по предыдущей теореме, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

2. Рассмотрим множество $\{b_n\}$ правых концов наших отрезков. Очевидно, что

а) $b_n \downarrow$,

б) $\forall\ n\ \ b_n > a_1$.

Поэтому существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3. Так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Обозначим этот общий предел через c: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

4. Так как $a_n \uparrow$ а $b_n \downarrow$, то, очевидно, что $\forall\ a_n \le c \le b_n$, то есть точка $c \in [a_n, b_n]\ \ \forall\ n$; (она принадлежит всем отрезкам сразу)

Бином Ньютона

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! = 1$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

$$C_n^0 = 1 \qquad C_n^1 = n$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^k$$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 +$$

$$+ \ldots + b^n$$

Число *e*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\left(a=1, b=\frac{1}{n}\right)$$

$$x_n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}=$$

$$2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что $x_n \uparrow$

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) +$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n+1!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$n+1 > n \qquad 1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\forall\, n \quad x_{n+1} > x_n$$

Покажем, что x_n ограничена сверху

$$1-\frac{k}{n}<1$$

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

$$2!=1\cdot 2=2 \qquad 3!=1\cdot 2\cdot 3\cdot >1\cdot 2\cdot 2=2^2$$

$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4>1\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^3$$

$$n!>2^{n-1} \qquad \frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828\ldots$$

Подпоследовательности

Пусть $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ – некоторая последовательность. Пусть $\{n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots\}$ есть также последовательность, у которой

а) все n_k - целые положительные числа;

б) n_k монотонно возрастает с ростом k;

в) $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Рассмотрим теперь последовательности вида $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, \ldots\}$, которая представляет собой «кусочек» исходной последовательности $\{x_n\}$ и которая получается из нее оставлением членов с номерами $n_1, n_2, n_3, \ldots$. Она называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Теорема.

1. Если последовательность $\left\{x_n\right\}$ сходится, то любая ее подпоследовательность тоже сходится к тому же самому пределу.

2. Если последовательность $\left\{x_n\right\}$ бесконечно большая, то любая ее подпоследовательность тоже бесконечно большая.

Доказательство.

1. Пусть исходная последовательность сходящаяся. Имеем

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ \left|x_n - a\right| < \varepsilon ,$$

$$n_k \uparrow +\infty \Rightarrow \forall N\ \exists s\ \forall k > s\ n_k > N .$$

Совершим «прогулку» по этим строкам кванторов по следующему маршруту

$$\underline{\forall\varepsilon>0} \to \exists N \to \forall N \to \underline{\exists s} \to \underline{\forall k>s} \to n_k>N \to \forall n_k>N \to \underline{|x_n-a|<\varepsilon}$$

Тогда комбинация кванторов $\exists N \forall N$ «взаимно уничтожается». Оставляя лишь подчеркнутые кванторы, получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists s\ \forall k > s\ |x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

что по определению означает, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

2. Пусть теперь исходная последовательность бесконечно большая. Тогда имеем

$$\{x_n\} - \text{б.б.п.} \Rightarrow \forall A > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ |x_n| > A,$$

$$n_k \uparrow +\infty \Rightarrow \forall N\ \exists s\ \forall k > s\ n_k > N\ .$$

Совершим «прогулку» по этим строкам кванторов по следующему маршруту

$$\underline{\forall A > 0} \to \exists N \to \forall N \to \underline{\exists s} \to \underline{\forall k > s} \to n_k > N \to \forall n_k > N \to \underline{|x_n| > A}.$$

Оставляя лишь подчеркнутые кванторы, получим

$$\forall A\ \ \exists s\ \ \forall k > s\ \ |x_{n_k}| > A,$$

откуда, по определению, и следует, что $\{x_{n_k}\}$ – б.б.п.

Лемма Больцано - Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Из любой неограниченной последовательности можно выбрать бесконечно большую подпоследовательность.

Доказательство.

Часть 1. При доказательстве этой леммы использован широко применяемый прием – «деление отрезка пополам».

Итак, пусть некоторая последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то есть $\exists\, a,b \;\; \forall\, n \;\; a \le x_n \le b$. Это означает, что все члены x_n последовательности $\{x_n\}$ лежат на отрезке $[a,b]$.

1. Построение стягивающейся системы отрезков.

Разделим отрезок $[a,b]$ пополам точкой $\dfrac{a+b}{2}$. Мы получим два отрезка $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$. Так как на всем отрезке $[a,b]$ имеется бесконечно много членов последовательности, то хотя бы на одной половине также будет бесконечно много членов последовательности. Оставим для дальнейшего рассмотрения эту половину (если на обеих половинах бесконечно много членов последовательности, то оставим любую из них), и назовем ее отрезком $[a_1,b_1]$.

Разделим отрезок $[a_1,b_1]$ пополам. Мы получим два отрезка $\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$. Так как на всем отрезке $[a_1,b_1]$ находиться бесконечно много членов последовательности, то хотя бы на одной половине также находится бесконечно много членов последовательности. Оставим для дальнейшего рассмотрения эту половину и назовем ее отрезком $[a_2,b_2]$.

Продолжим эту процедуру до бесконечности. В результате мы получим систему отрезков $\left[a_1,b_1\right]$, $\left[a_2,b_2\right]$, $\left[a_3,b_3\right]$, …, которые характеризуются тем, что

а) на каждом из них имеется бесконечно много членов последовательности;

б) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\dots$

в) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

По лемме о вложенных отрезках отсюда следует, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$

2. Выделение подпоследовательности

Рассмотрим отрезок $\left[a_1, b_1\right]$ и возьмем любой член последовательности $x_{n_1} \in \left[a_1, b_1\right]$.

Рассмотрим отрезок $\left[a_2, b_2\right]$ и возьмем любой член последовательности $x_{n_2} \in \left[a_2, b_2\right]$. Так как на $\left[a_2, b_2\right]$ бесконечно много членов $\left\{x_n\right\}$, то всегда можно выбрать $n_2 > n_1$.

Рассмотрим отрезок $\left[a_3, b_3\right]$ и возьмем любой член последовательности $x_{n_3} \in \left[a_3, b_3\right]$. Так как на $\left[a_3, b_3\right]$ бесконечно много членов $\left\{x_n\right\}$, то всегда можно выбрать $n_3 > n_2$.

Продолжая эту процедуру до бесконечности, получим подпоследовательность $\left\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\right\}$ такую, что $\forall\ k \quad x_{n_k} \in \left[a_k, b_k\right]$

3. Сходимость получившейся подпоследовательности

Так как $\forall\ k\ \ a_k \le x_{n_k} \le b_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$ то по теореме «о двух милиционерах» $\exists\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

Часть 2. Слова «неограниченная последовательность» означают, что $\forall A > 0 \ \exists x_n \ \ |x_n| > A$.

Возьмем последовательность $\{A_n\}$ такую, что

$$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < \ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty} A_n = +\infty.$$

Но тогда для любого A_k существует такое x_{n_k}, что $|x_{n_k}| > A_k$. Кроме того, так как в последовательности $\{x_n\}$ бесконечно много членов, всегда можно добиться того, что будет $n_k > n_{k-1}$. В результате получится подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, обладающая тем свойством, что $\forall k \ \ |x_{n_k}| > A_k$. Но тогда

$$\lim_{k\to\infty} |x_{n_k}| \geq \lim_{k\to\infty} A_k = +\infty,$$

откуда и следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} |x_{n_k}| = +\infty$, то есть, что $\{x_{n_k}\}$ – бесконечно большая последовательность.

Признак Больцано–Коши.

Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к конечному пределу, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\ \varepsilon\ \ \exists\ N\ \ \forall\ m,n>N\ \ |x_m-x_n|<\varepsilon .$$

Последовательность, удовлетворяющая этому условию называется «фундаментальной последовательностью» или последовательностью, «сходящейся в себе».

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Это значит, что

$$\forall\ \varepsilon\ \ \exists\ N\ \ \forall\ n>N\ \ |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} .$$

Но тогда $\forall\ m,n>N$

$$|x_m-x_n|=|(x_m-a)-(x_n-a)|<|x_m-a|+|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon ,$$

что и утверждается в условии теоремы.

Достаточность

1. Доказательство ограниченности последовательности.

Итак, пусть $\forall\ \varepsilon\ \exists\ N\ \forall\ m,n > N\ \left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$. Зафиксируем $m > N$. Тогда $\forall\ n > N$

$$x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon .$$

Рассмотрим

$$a = \min\left(x_1, x_2, \ldots, x_N, x_m - \varepsilon\right),$$

$$b = \max\left(x_1, x_2, \ldots, x_N, x_m + \varepsilon\right).$$

Тогда очевидно, что $\forall\ n\ \ a \le x_n \le b$ и последовательность $\{x_n\}$ ограниченна.

2. Выделение сходящейся подпоследовательности

Ссылаясь на лемму Больцано–Вейерштрасса выделим из нашей последовательности подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ которая сходится к конечному пределу $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

3. Доказательство того, что вся последовательность сходится к тому же пределу

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, то $\forall\ \varepsilon\ \ \exists\ N_1\ \ \forall\ n_k > N_1\ \ \left|x_{n_k} - c\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

По условию теоремы $\forall\ \varepsilon\ \ \exists\ N_2\ \ \forall\ m,n > N_2\ \ \left|x_m - x_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем $N = \max\left(N_1, N_2\right)$. Тогда $\forall\ n > N$, взяв произвольное $n_k > N$, получим

$$\left|x_n - c\right| = \left|(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - c)\right| \le \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и говорит о том, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.