Понятие о линейной зависимости вектор-столбцов Лекция 4

Пусть даны m вектор-столбцов размера n x1

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

и m скаляров λ_1 λ_2 , … , λ_m .

Умножим первый столбец на λ_1 , второй столбец на λ_2 и, наконец, m-й столбец λ_m. Рассмотрим сумму

$$\mathbf{a}=\lambda_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}+\lambda_m\begin{bmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{12}+\ldots+\lambda_m a_{1m}\\\lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\ldots+\lambda_m a_{2m}\\\vdots\\\lambda_1 a_{n1}+\lambda_2 a_{n2}+\ldots+\lambda_m a_{nm}\end{bmatrix}.$$

Определение. Вектор-столбец **a** называется ***линейной комбинацией вектор-столбцов*** $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.,…, $\mathbf{a}_m$. Числа λ_1, λ_2 ,…, λ_m называются ***коэффициентами линейной комбинации***.

Пример

$$\mathbf{a}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\4\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3\\2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3\\3\lambda_1+\lambda_3\\4\lambda_2-2\lambda_3\end{bmatrix}.$$

Определение. Вектор-столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_m$ называются линейно зависимыми, если найдутся такие числа λ_1, λ_2 ,…, λ_m , не равные нулю одновременно, такие что имеет место равенство

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор-столбец размера nx1.

Если соотношение (1.41) выполняется лишь тогда, когда все λ_1, λ_2 ,…, λ_m равны нулю одновременно, то вектор-столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_m$ называются **линейно независимыми**.

Пример 1: $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, линейно зависимы, так как

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \lambda_1 = -3\lambda_2 \Rightarrow,$$

$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1$

Пример 2: $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$ **линейно независимые**.

Теоремы о линейной зависимости .

Теорема 1. *Если система вектор столбцов содержит нулевой столбец, то они линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть, например, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Тогда, имеем: $1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$,

Следовательно, столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если какие-нибудь k из m вектор-столбцов линейно зависимы, то все вектор-столбцы линейно зависимы.*

Доказательство.

Пусть, например, столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_k$ линейно зависимы.

Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ не равные нулю одновременно, такие что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, для системы из m столбцов имеем

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

что и означает, что столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если столбцы линейно зависимы, то один из них равен линейной комбинации остальных.*

Доказательство. Если столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

причем не все λ_i равны нулю.

Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$.

Тогда имеем

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1}\mathbf{a}_m,$$

что и требовалось доказать.

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу **A** размера mхn :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} ,$$

Если в этой матрице выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k -го порядка.

Определитель этой матрицы M_k будет называть **минором** k -го порядка матрицы **A**.

Очевидно, что матрица **A** обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n .

Если не все элементы матрицы равны нулю, то всегда можно указать целое число ***r***, такое, что у матрицы **A** имеется минор M_r r -го порядка, отличный от нуля.

Определение. Натуральное число r называется **рангом матрицы A**, если:

1) существует минор M_r матрицы **A** порядка r , отличный от нуля;

2) все имеющиеся миноры порядка r +1 и выше, если это возможно, равны нулю.

Ранг матрицы обозначается одним из следующих символов:

$$r = \mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) .$$

Очевидно, что $\mathrm{Rang}(\mathbf{0}) = 0$.

Если $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, т $\quad 0 < \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) < \min(m,n)$.

Если r = Rang(**A**), то любой ненулевой минор порядка r назовем ***базисным*** минором матрицы **A**, а строки и столбцы матрицы A, на пересечении которых расположен базисный минор, назовем ***базисными строками и столбцами***

Определение. Всякий минор матрицы A порядка r , отличный от нуля, называется **базисным** минором. Столбцы и строки матрицы, пересечением которых образован базисный минор, называются ***базисными столбцами и базисными строками***.

.

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

В этой матрице отличен от нуля только один минор второго порядка, $M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1$. Все миноры третьего порядка равны нулю, поскольку содержат нулевую строку или нулевой столбец. Тогда то Rang($\mathbf{A}$)=2.

Первая и третья строки являются базисными строками, а первый и второй столбцы являются базисными столбцами.

Пример 2. Вычислить ранг матрицы $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$. Так как существует $M_2=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-3\neq 0$, а единственный $M_3=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}=0$, то Rang(**A**)=2.

Первая и вторая строки являются базисными строками, а первый и второй столбцы являются базисными столбцами.

Рассмотрим методы вычисления ранга матрицы.

Пусть M_k- минор k-го порядка матрицы $\boldsymbol{A}$.Выберем строку с номером i и столбец с номером j, которые не проходят через минор M_k. Тогда минор порядка k+1, проходящий через k строк и столбцов минора M_k и также i-ю строку и j-й столбец назовем минором, окаймляющим минор M_k.

Метод окаймляющих миноров.

Поскольку $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, то $rang\mathbf{A} \geq 1$, т.е. существует ненулевой минор первого порядка $a_{ij} \neq \mathbf{0}$.

Если все миноры второго порядка матрицы **A**, окаймляющие a_{ij}, равны нулю, то $rang\mathbf{A} = 1$. В противном случае выберем ненулевой минор второго порядка $\mathbf{M}_2$, окаймляющий a_{ij}. Опять имеем две возможности.

Если все миноры третьего порядка матрицы **A**, окаймляющие минор $\mathbf{M}_2$, равны нулю, то $rang\mathbf{A} = 2$. В противном случае выберем ненулевой минор третьего порядка $\mathbf{M}_3$, , окаймляющий , и т.д.

Продолжая подобным образом, получим, что либо на некотором шаге для ненулевого минора $\mathbf{M}_k$ все окаймляющие миноры $k+1$ -го порядка равны нулю, и тогда $rang\mathbf{A} = k$, либо дойдем до ненулевого минора $\mathbf{M}_l$ максимально возможного порядка, равного $l = \min(n, m)$, тогда $rang\mathbf{A} = l$.

Пример. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Решение. Начинаем с миноров 1-го порядка, т.е. с элементов матрицы A. Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи **второй** строки и **третьего** столбца, получаем минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, отличный от нуля.

Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый). Вычисляем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы A равен двум.

Свойства ранга матрицы.

1. Ранг матрицы не изменится при умножении всех элементов столбца или строки на отличное от нуля число.
2. Ранг матрицы не изменится при перестановке её строк или столбцов.
3. При транспонировании матрицы её ранг не меняется.
4. Ранг матрицы не изменится, если к одному из её столбцов (строке) прибавить другой столбец (строку), умноженный на некоторое число.
6. Ранг матрицы не изменится, если удалить из неё столбец (строку), который является линейной комбинацией других столбцов (строк).

Элементарные преобразования матрицы.
Вычисление ранга матрицы

Рассмотрим теперь другой метод вычисления ранга матрицы, а именно метод элементарных преобразований.

Для матриц большой размерности вычисление всех миноров затруднительно, в этом случае матрицу преобразуют к так называемому **треугольному** виду (когда элементы, стоящие ниже a_{ii},равны 0), воспользовавшись операциями, не изменяющими ранг матрицы (эквивалентными преобразованиями).

Определение. Элементарными преобразованиями называются следующие преобразования матриц:

1. Перестановка двух любых столбцов (строк) матрицы.
2. Умножение столбца (строки) на отличное от нуля число.

3. Прибавление к одному столбцу (строке) линейной комбинации других столбцов (строк).

4. Транспонирование матрицы

Из свойств ранга матрицы вытекает, что элементарные преобразования матрицы не меняют её ранг.

Определение. Две матрицы А и В называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Эквивалентность матриц обозначается с помощью символов А ~ В.

Из определения вытекает, что эквивалентные матрицы **не являются равными**, но имеют одинаковый ранг.

Определение. Матрица вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

называется **канонической**.

Ранг канонической матрицы равен, очевидно, числу единиц $\mathbf{r}$, стоящих на её диагонали.

Алгоритм:

Шаг 1. Если $a_{11} \neq 0$, то умножаем первую строку матрицы **А** на $\frac{1}{a_{11}}$, в результате получим $a'_{11} = 1$. В противном случае вначале перестановкой строк и/или столбцов матрицы **А** добиваемся, чтобы $a_{11} \neq 0$, а затем применяем указанное выше преобразование.

Шаг 2. С помощью $a'_{11} = 1$ получаем **нули в первом столбце** посредством следующих элементарных преобразований:

- ко второй строке прибавляем первую строку, предварительно умноженную на $-a_{21}$;

- к третьей строке прибавляем первую строку, предварительно умноженную $-a_{31}$, и так далее;

- к m-й строке прибавляем первую строку, предварительно умноженную $-a_{m1}$

, и так далее;

В результате получаем матрицу $\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$.

Далее аналогичный алгоритм применяем к матрице $\mathbf{A}'$

Пример. Определить ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$. Ранг равен 2

Пример. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

У матрицы **A** существуют миноры до 4-го порядка включительно, поэтому $r(\mathbf{A}) \leq 4$

1) Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы элемент a_{11} стал равным 1:

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

.

2. Прибавим к третьей строке первую, ко второй – удвоенную первую, к четвертой – первую, умноженную на 3. Тогда все элементы 1-го столбца, кроме a_{11}, окажутся равными нулю:

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку полученной матрицы из третьей и четвертой строк:

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычеркнем нулевые строки:

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы **A** равен рангу полученной матрицы размера 2×6, т.е. $r(\boldsymbol{A}) \leq 2$. Минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

следовательно, $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

Вопросы:

1. Как изменится определитель n-го порядка, если транспонировать его матрицу?
2. Как изменится определитель n-го порядка, если поменять местами его две строки?
3. Чему равен определитель n-го порядка с двумя пропорциональными столбцами?
4. Как изменится определитель n-го порядка, если к первой его строке прибавить сумму всех остальных строк?
5. Верно ли, что определитель суммы матриц равен сумме определителей?

6. Верно ли, что определитель произведения матриц равен произведению определителей ?

7. Сформулируйте метод окаймляющих миноров вычисления ранга матрицы.

8. Сформулируйте метод элементарных преобразований вычисления ранга матрицы.

9. Чему равен ранг невырожденной матрицы порядка n&

10. Если матрица порядка $\boldsymbol{n}$ имеет ранг n, то означает ли это, что матрица невырожденная?

11. Верно ли, что обратная матрица к невырожденной матрице также является невырожденной матрицей?

12. Сформулируйте метод вычисления обратной матрицы через вычисление

13. присоединенной матрицы.

14. Сформулируйте метод вычисления обратной матрицы через присоединение

15. единичной матрицы

Теория к коллоквиуму

1. **Понятие матрицы. Равенство матриц. Виды матриц (вектор-столбец, вектор-строка, нулевая, диагональная, скалярная, симметричная).**
2. **Алгебраические операции над матрицами: сложение и разность матриц. Свойства с доказательством.**

3. **Алгебраические операции над матрицами: умножение матрицы на число. Свойства с доказательством. Транспонирование матриц.**
4. **Алгебраические операции над матрицами: Произведение матриц. Свойства (без доказательств**
5. **Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц. Свойства.**
6. **Определители. Определение, свойства+следствия.**
7. **Определение линейной зависимости строк (столбцов) матрицы. Доказать теорему:** *Если система вектор столбцов содержит нулевой столбец, то они линейно зависимы.*
8. **Определение линейной зависимости строк (столбцов) матрицы. Доказать теорему:** *Если какие-нибудь k из m вектор-столбцов линейно зависимы, то все вектор-столбцы линейно зависимы.*

9. **Определение линейной зависимости строк (столбцов) матрицы. Доказать теорему:** *Если столбцы линейно зависимы, то один из них равен линейной комбинации остальных.*
10. **Обратная матрица(определение). Доказать теорему: Если матрица А имеет** обратную матрицу, то она единственная.
11. **Обратная матрица(определение). Свойства.**
12. **Обратная матрица(определение). Способы вычисления обратной матрицы.**
13. **Ранг матрицы. Определение. Свойства. Методы вычисления.**