Компле́ксные числа

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

Алгебраическая форма комплексных чисел

Пусть x и y – обычные вещественные числа. Число вида

$$z = x + iy$$

называется комплексным числом **в алгебраической форме**.

x называют **действительной частью** числа z, и обозначают так: $x = \operatorname{Re}(z)$. y называют **мнимой частью** числа z и обозначают так: $y = \operatorname{Im}(z)$. Если $\operatorname{Im}(z) = 0$, то число z называют **действительным** числом; если $\operatorname{Re}(z) = 0$, то число z называют **мнимым** числом.

Число $\bar{z} = x - iy$ называется числом, **комплексно сопряженным** числу z. Действует следующее общее правило: чтобы получить число, комплексно сопряженное данному числу, надо в нем заменить i на $-i$.

Рассмотрим операции над комплексными числами в алгебраической форме. Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

Равенство и сравнение комплексных чисел

Два комплексных числа считаются равными, если у них равны действительные части и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Но вот операции типа «больше» и «меньше» доя комплексных чисел **не имеют смысла**, то есть бессмысленно писать $z_1 \geq z_2$ или $z_1 < z_2$. Совершенно непонятно, что больше: $2+3i$ или $3+2i$. **Комплексные числа не упорядочены.**

Сложение и вычитание комплексных чисел

Сложение и вычитание двух комплексных чисел определяются совершенно естественно

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

то есть надо сложить (или вычесть) отдельно действительные и мнимые части.

Умножение комплексных чисел

Умножение двух комплексных чисел также чисел также определяется совершенно естественно. Надо лишь помнить, что $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексных чисел

Для деления комплексных чисел полезно запомнить следующее правило: чтобы разделить два комплексных числа друг на друга надо числитель и знаменатель умножить на число, комплексно сопряженное знаменателю:

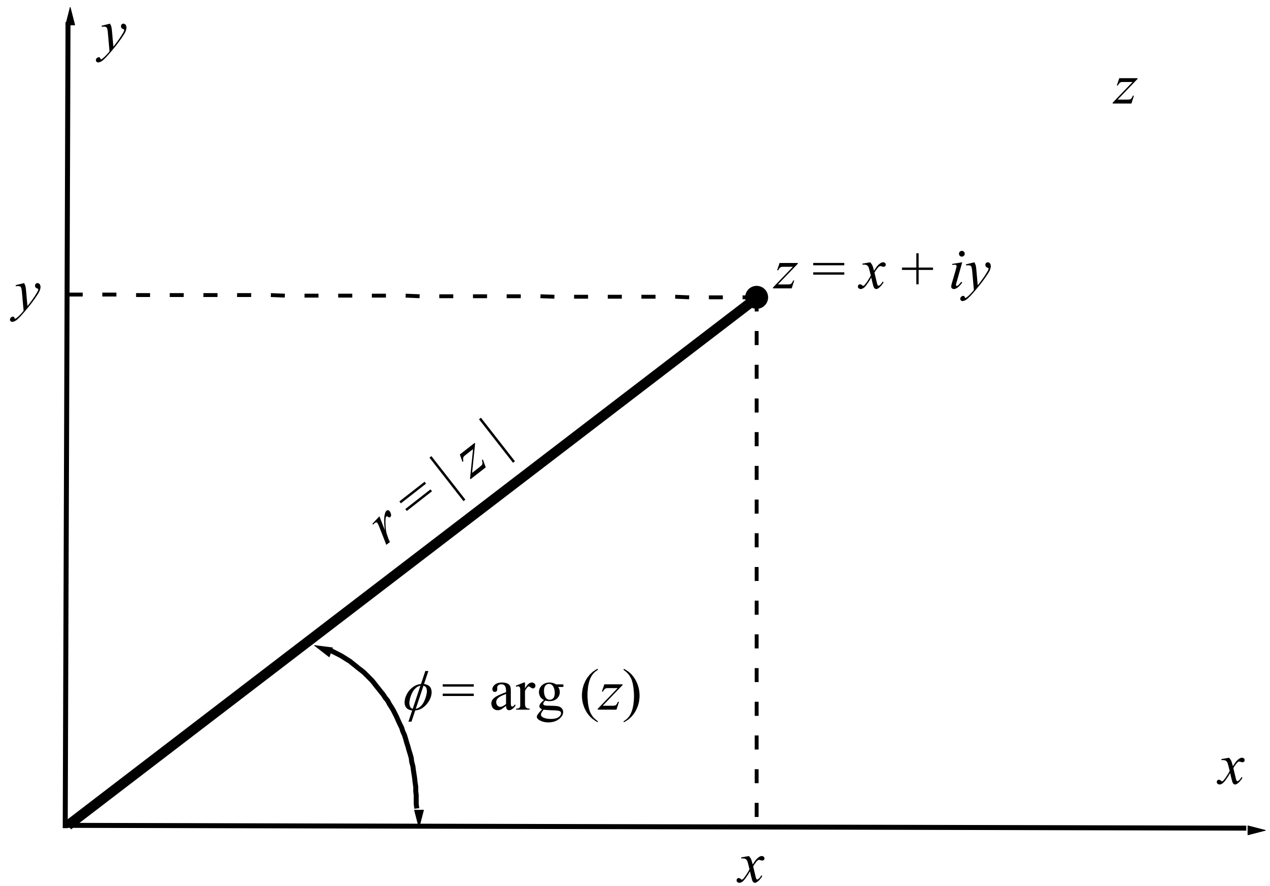
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+iy_1x_2-ix_1y_2-i^2y_1y_2}{x_2^2-i^2y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},$$

где учтено, что $i^2=-1$. Заметим, что при делении двух комплексных чисел снова получается комплексное число.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Пусть имеется комплексное число $z = x + iy$.



Тригонометрическая форма комплексных чисел

С геометрической интерпретацией связана и еще одна форма записи комплексных чисел, называемая тригонометрической формой.

Соединим точку (x, y) с началом координат отрезком прямой. Длина этого отрезка r называется **модулем** комплексного числа z и обозначается как $|z|$ или $\mathrm{mod}(z)$.

Угол φ, который этот отрезок образует с осью абсцисс, называется **аргументом** комплексного числа z и обозначается как $\arg(z)$. Он определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$.

Из рисунка видно, что имеет место соотношение $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Отсюда следует, что $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$. Таким образом, мы можем записать $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Эта форма записи и получила название комплексного числа в тригонометрической форме.

Рассмотрим операции над комплексными числами в тригонометрической форме. Пусть имеется два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

<u>Равенство чисел</u>

Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ считаются равными, если $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Умножение комплексных чисел

Имеем

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Таким образом, при перемножении комплексных **чисел их модули перемножаются,** а **аргументы – складываются.**

Деление комплексных чисел

Имеем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}\cdot\frac{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].$$

Таким образом, при делении комплексных **чисел их модули делятся,** а **аргументы – вычитаются.**

Возведение в степень

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда, согласно сказанному выше,

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

то есть при возведении в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на нее.

Отметим частный случай этой формулы. При $r = 1$ получаем $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Эта формула называется формулой Муавра.

Извлечение корней

Полученный выше результат позволяет вывести алгоритм извлечения корней из комплексных чисел.

Пусть имеется комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Что понимать под $\sqrt[n]{z}$?

Для ответа на этот вопрос вспомним прежде всего, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до $2\pi k$ то есть

$$z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)),\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Допустим, что $\sqrt[n]{z}$ есть также комплексное число $\sqrt[n]{z} = z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$. Но тогда должно иметь место соотношение $z = z_0^n$, или

$$r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) = r_0^n(\cos n\varphi_0 + i\sin n\varphi_0).$$

Отсюда получаем, что $r = r_0^n$, $\varphi + 2k\pi = n\varphi_0$, или $r_0 = \sqrt[n]{r}$, $\varphi_0 = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$. Таким образом

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right).$$

Заметим, что разные значения $\sqrt[n]{z}$ получаются лишь для $k = \overline{0, n-1}$, далее все повторяется. Таким образом, **корень *n*-й степени из комплексного числа имеет ровно *n* различных значений.**

Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Вспомним ряды Тейлора

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots \quad .$$

Далее заметим, что $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = 1$ и далее все повторяется.

Найдем теперь e^{ix}. Имеем

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\ldots+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\ldots\right)=$$

$$=\cos x+i\sin x.$$

Мы получили знаменитую формулу Эйлера

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

Полезно помнить некоторые следствия из этой формулы. Заменяя в ней i на $-i$, получим

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Складывая и вычитая эти две формулы, получим

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Вспоминая гиперболические функции, можем записать:

$$\cos x = \mathrm{ch}(ix),\ \sin x = \mathrm{sh}(ix)/i,$$

что говорит о родстве этих функций.

Вернемся к комплексным числам. Имеем

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

что и дает так называемую показательную форму комплексного числа. Так как аргумент φ определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$, то, в общем случае,

$$z = re^{i(\varphi+2k\pi)},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots .$$

Эта формула позволяет определить логарифм комплексного числа:

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad .$$

Заметим, что логарифм – бесконечнозначная функция.

В частности, $\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, так как $|-1| = 1$ и $\arg(-1) = \pi$.