Здравствуйте!

Лекция №2

Вещественные числа

Вещественным числом называется бесконечная десятичная дробь вида:

ЗНАК $a_0,a_1a_2a_3a_{4\ldots}$

где ЗНАК $\in \{+,-\}$

$a_0 \in \{0,1,2,3,4,\ldots\}$

а все цифры a_i после запятой принадлежат множеству $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Равенство двух вещественных чисел

Пусть даны два вещественных числа:

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

$$b = \pm b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

Будем считать, что $a = b$, если:

а)знак a = знак b

b) $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3 \ldots$

то есть если у них одинаковые знаки и совпадают все соответствующие друг другу цифры.

Сравнение двух вещественных чисел

1. Пусть оба вещественных числа имеют знак +.

$a = +a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$

$b = +b_0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots.$

Найдем первую по порядку цифру в этих числах, которые не равны друг другу. Пусть это будет цифра с номером n, то есть

$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots. a_{n\text{-}1} = b_{n\text{-}1}$, но $a_n \neq b_n$

(заметим, что символами математики это записывается так: $n = \min\{k{:}a_k \neq b_k\}$). Тогда, если $a_n > b_n$, то считаем, что $a>b$, а если $a_n < b_n$, то $a<b$.

2. Если вещественные числа a и b разных знаков, то большим считается число, имеющее знак +.

3. Пусть оба числа имеют знак –. Назовем модулем вещественного числа это же число, но со знаком +:

$$|a| = +a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Тогда, если $|a|>|b|$ то считаем, что $a<b$, если же $|a|<|b|$ то считаем, что $a>b$.

Супремум и инфимум числовых множеств

Определение. Множество, элементами которого являются вещественные числа, называется числовым множеством.

Числовые множества мы будем обозначать $\{x\}$, где под x будут пониматься вещественные числа.

Определение 1. Числовое множество $\{x\}$ называется ограниченным сверху, если

$$\exists M < +\infty \quad \forall x \in \{x\} \quad x \le M$$

(существует такое $M < +\infty$, что для любого $x \in \{x\}$ выполнено условие $x \le M$). Число M называется верхней гранью числового множества $\{x\}$.

Определение 2. Числовое множество $\{x\}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m > -\infty \quad \forall x \in \{x\} \quad x \ge m.$$

Число m называется нижней гранью числового множества $\{x\}$.

Определение 3. Числовое множество $\{x\}$ называется ограниченным, если

$$\exists m, M \quad \forall x \in \{x\} \quad m \le x \le M.$$

Определение 4. Наименьшая из верхних граней называется точной верхней гранью или **супремумом** числового множества $\{x\}$ (обозначение $\sup\{x\}$).

Наибольшая из нижних граней называется точной нижней гранью или **инфимумом** числового множества $\{x\}$ (обозначение $\inf\{x\}$).

Эти понятия столь важны, что опишем их в других терминах.

$\sup\{x\}$ определяется двумя свойствами:

1. $\forall x \in \{x\} \quad x \le \sup\{x\}$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \{x\} \qquad x > \sup\{x\} - \varepsilon$

Первое свойство означает, что $\sup\{x\}$ – верхняя грань, то есть все элементы $\{x\}$ не превосходят $\sup\{x\}$.

Второе свойство означает, что любая попытка уменьшить эту верхнюю грань приводит к появлению элемента из $\{x\}$, который окажется больше $\sup\{x\} - \varepsilon$.

Аналогично, $\inf\{x\}$ определяется двумя свойствами:

1. $\forall x \in \{x\} \quad x \geq \inf\{x\}$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \{x\} \quad x < \inf\{x\} + \varepsilon$

Заметим, что сами $\sup\{x\}$ и $\inf\{x\}$ могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{x\}$.

<u>Теорема о существовании супремума и инфимума</u>.

Если числовое множество $\{x\}$ не пусто и ограничено сверху, то у него существует $\sup\{x\}$.

Если числовое множество $\{x\}$ не пусто и ограничено снизу, то у него существует $\inf\{x\}$.

<u>Доказательство</u>.

Мы докажем эту теорему только для $\sup\{x\}$ при одном дополнительном предположении – в множестве $\{x\}$ имеются положительные числа. Доказательство разбивается на три части.

1. Процедура построения $\sup\{x\}$.

Пусть M – верхняя грань для $\{x\}$, то есть $\forall x \in \{x\}\ x \le M$. Проделаем следующее построение:

а) Выбросим из множества $\{x\}$ все отрицательные числа.

б) У оставшихся чисел выпишем те цифры x_0, которые стоят перед запятой. Множество $\{x_0\}$этих цифр конечно, так как этих цифр не более чем $[M]$ (целая часть M). **Обратите внимание, что именно в этом месте используется ограничение теоремы – существование верхней грани.** Если бы верхней грани не существовало, то множество $\{x\}$ было бы бесконечным.

В силу конечности множества $\{x_0\}$из этих цифр до запятой можно выбрать самую большую -–ведь их же конечное число. Обозначим самую большую из этих цифр через $\bar{x}_0$.

в) Выбросим из $\{x\}$ все те числа, у которых цифра до запятой меньше $\bar{x}_0$. У оставшихся чисел выпишем первую цифру после запятой. Этих цифр $\{x_1\}$ не более 10. Выберем из них самую большую и обозначим ее через $\bar{x}_1$.

г) Выбросим из $\{x\}$ все те числа, у которых первая цифра после запятой меньше $\bar{x}_1$. У оставшихся чисел выпишем вторую цифру после запятой. Этих цифр $\{x_2\}$ не более 10. Выберем из них самую большую и обозначим ее через $\bar{x}_2$.

д) Выбросим из $\{x\}$ все те числа, у которых…

Повторяя эту операцию до бесконечности мы построим число

$$\bar{x} = +\bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \ldots$$

Покажем, что $\bar{x}$ и есть $\sup\{x\}$.

2. Проверим первое свойство $\sup\{x\}$.

Возьмем любое $x \in \{x\}$. Если x имеет знак –, то ясно, что $x < \bar{x}$.

Пусть x имеет знак +. Тогда

$$x = +x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots$$

Сравним x_0 и $\bar{x}_0$. Вспомним, что $\bar{x}_0$ было самым большим из $\{x_0\}$. Поэтому может быть всего два варианта: либо $x_0 < \bar{x}_0$, либо $x_0 = \bar{x}_0$. В первом случае $x < \bar{x}$ и дальнейшая проверка ни к чему. Если же $x_0 = \bar{x}_0$, то сравним x_1 и $\bar{x}_1$. Опять-таки по построению возможны два варианта: либо $x_1 < \bar{x}_1$ и тогда $x < \bar{x}$ и дальнейшая проверка ни к чему, либо $x_1 = \bar{x}_1$.

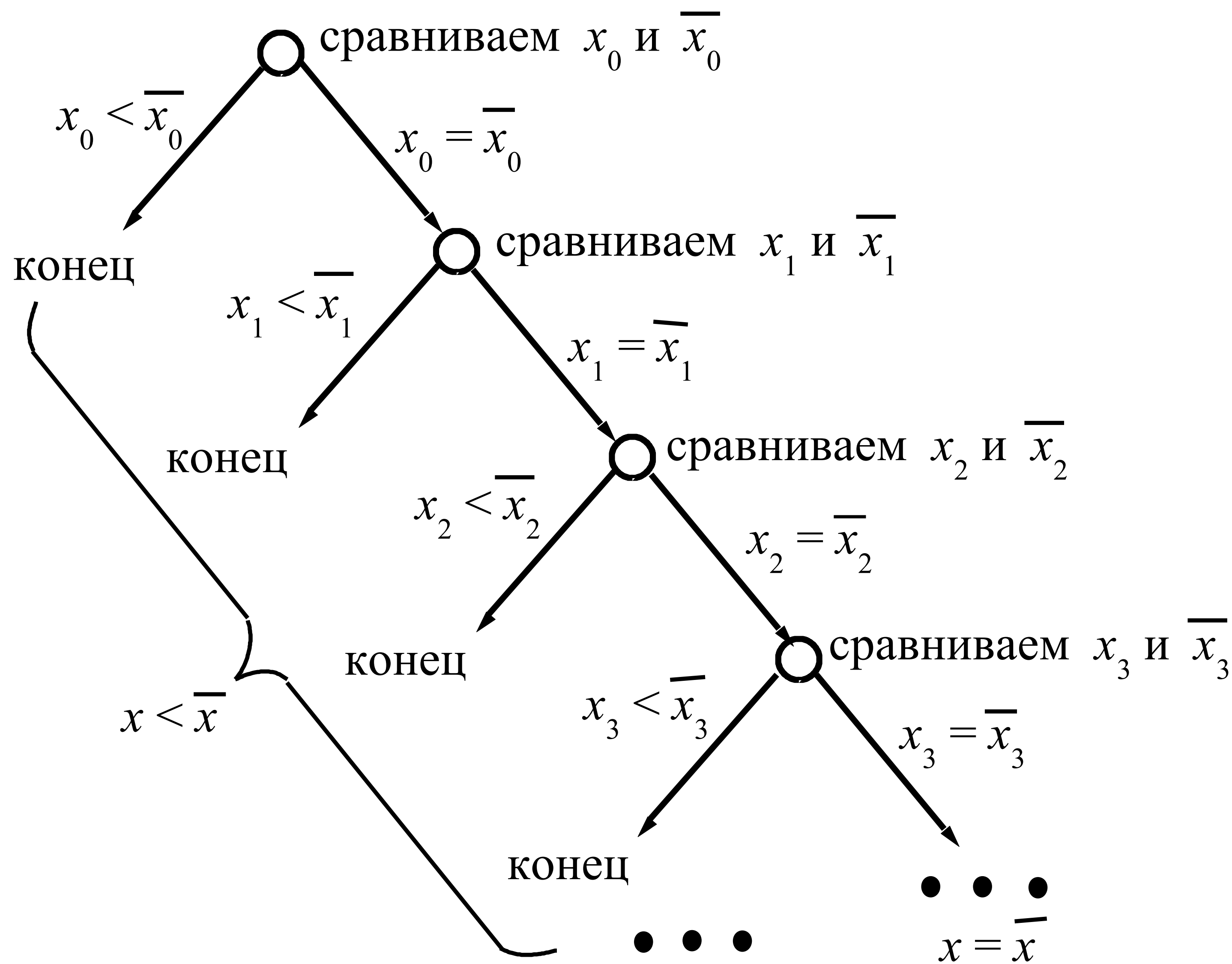
Если $x_1 = \bar{x}_1$, то сравним x_2 и $\bar{x}_2$. Опять-таки по построению возможны два варианта: либо $x_2 < \bar{x}_2$ и тогда $x < \bar{x}$ и дальнейшая проверка ни к чему, либо $x_2 = \bar{x}_2$.

Продолжая этот процесс и дальше, получим, что возможны два следующих варианта.

а) Найдется какое-то n, для которого $x_n < \bar{x}_n$. Тогда $x < \bar{x}$.

б) Для всех n $x_n = \bar{x}_n$. Тогда $x = \bar{x}$.

Поэтому всегда $x \leq \bar{x}$ и первое свойство супремума выполнено.


сравниваем x_0 и $\overline{x_0}$
$x_0 < \overline{x_0}$
$x_0 = \overline{x_0}$
конец
сравниваем x_1 и $\overline{x_1}$
$x_1 < \overline{x_1}$
$x_1 = \overline{x_1}$
конец
сравниваем x_2 и $\overline{x_2}$
$x_2 < \overline{x_2}$
$x_2 = \overline{x_2}$
конец
сравниваем x_3 и $\overline{x_3}$
$x_3 < \overline{x_3}$
$x_3 = \overline{x_3}$
конец
$x < \overline{x}$
$x = \overline{x}$

3. Проверка второго свойства супремума.

Заметим, что второе свойство $\sup\{x\}$ можно записать так: $\forall x' < \sup\{x\}\ \exists x \in \{x\}$ такой, что $x' < x \le \sup\{x\}$.

Возьмем положительное $x' < \bar{x}$:

$$x' = +x'_0, x'_1 x'_2 x'_3 \ldots.$$

Так как $x' < \bar{x}$, то найдется такое n, что

$$x'_0 = \bar{x}_0;\ x'_1 = \bar{x}_1;\ x'_2 = \bar{x}_2; \ldots; x'_{n\text{-}1} = \bar{x}_{n\text{-}1};\ x'_n < \bar{x}_n.$$

Но вспомним процедуру построения $\bar{x}$. На n-м шаге после выбрасывания во множестве $\{x\}$ оставались лишь те числа, для которых $x_0 = \bar{x}_0; x_1 = \bar{x}_1; \ldots; x_{n\text{-}1} = \bar{x}_{n\text{-}1}; x_n = \bar{x}_n$. Любое из этих чисел будет больше x' (так как $x_n = \bar{x}_n > x'_n$), но естественно, меньше или равно $\bar{x}$. Поэтому любое из этих чисел удовлетворяет второму свойству супремума.

Терминология. Неравенства.

В заключение уточним еще раз некоторые термины.

Множество чисел x, удовлетворяющее свойству $a \leq x \leq b$, называется замкнутым отрезком и обозначается $[a, b]$.

Множество чисел x, удовлетворяющее свойству $a < x < b$, называется открытым отрезком и обозначается (a, b).

Множество чисел x, удовлетворяющее свойству $a < x \leq b$ (или $a \leq x < b$), называется полуоткрытым отрезком и обозначается $(a, b]$ (соответственно $[a, b)$).

Модулем $|x|$ числа x называется это же число, взятое со знаком «+». Очевидно, что всегда

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

Важнейшее в дальнейшем для нас неравенство выглядит так: $|x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Последовательности

Определение 1. Последовательностью $\{x_n\}$ называется упорядоченное бесконечное множество чисел $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$.
Обратите внимание, что
а) всего чисел – бесконечное число и
б) они расположены в определенном порядке.

Операции над последовательностями

а) Умножение последовательности на число.

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и число c. Тогда произведением последовательности $\{x_n\}$ на число c называется последовательность вида

$$c \cdot \{x_n\} = \{cx_1, cx_2, cx_3, cx_4, \ldots\}$$

б) Сложение и вычитание последовательностей

Пусть даны две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Суммой $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность вида

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots\}$$

Разностью - последовательность виды

$$\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \ldots\}$$

в) Умножение и деление последовательностей

Произведение последовательностей

$$\{x_n\}\{y_n\} = \{x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \ldots\}.$$

Частное последовательностей

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \frac{x_4}{y_4}, \ldots\right\}$$

Определение 2. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists\, M < +\infty \ \forall\, n \ \ x_n \le M$;
ограниченной снизу, если $\exists\, m > -\infty \ \forall\, n \ \ x_n \ge m$
ограниченной, если $\exists\, m, M \ \forall\, n \ m \le x_n \le M$.
(Последнее часто пишут так: $\exists\, A < +\infty \ \forall\, n \ \ |x_n| \le A$).