Алгебра и геометрия

Моисеева Светлана Петровна

доктор физ.- мат. наук,

Профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики ИПМКН

1. Лившиц К. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия Ч.1. [учебник для вузов по направлению ВПО 010400 "Прикладная математика и информатика"] /К. И. Лившиц. – Томск: НТЛ, 2011. – 247с.
2. Лившиц К. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия Ч.2. [учебник для вузов по направлению ВПО 010400 "Прикладная математика и информатика"] /К. И. Лившиц. – Томск: НТЛ, 2011. -274с.
3. Ильин В.И.Линейная алгебра [учебник для студентов физических специальностей и специальности "Прикладная математика и информатика"]/ В.И Ильин., Э.Г Позняк. – Москва : Физматлит , 2010.– 278с.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии /Д. В. Клетеник ; под ред. Н. В. Ефимова Санкт-Петербург: Лань , 2010–222с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры: Учебник. —19 изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2013. —432 с. —http://e.lanbook.com/view/book/30198. Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений.
6. Проскуряков И. В.Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. 13-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2010. —480 с.
7. Фаддеев Д. К., Соминский И. С.Задачи по высшей алгебре. — Учебное пособие. 13-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2008. —

§1. Понятие матрицы (Лекция 1)

Определение. ***Матрицей*** $\mathbf{A}$ ***порядка (mxn)*** *(или m,n-матрицей)* называется прямоугольная таблица чисел – элементов матрицы, имеющая ***m*** строк и ***n*** столбцов.

Элемент матрицы $\mathbf{A}$, находящийся на пересечении строки с номером *i* и столбца с номером *j*, обозначается a_{ij}. Сама матрица $\mathbf{A}$ записывается как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

или коротко $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right], \left(i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n \right)$.

Замечание. Произвольное число a можно рассматривать как матрицу (размерности 1×1): $\mathbf{A} = \left[a \right] = a$

Обозначения:

$$\mathbf{a_i} = \left[a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} \right] \text{ – } i\text{-я строка матрицы } \mathbf{A}\left(i = 1, 2, \ldots, m \right),$$

$$\mathbf{a_j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{bmatrix} - j\text{-й столбец матрицы } \mathbf{A}\left(j = 1, 2, \ldots, n \right).$$

Определение. Матрица размера $(1 \times n)$ называется вектор-строкой. Например, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ – это вектор-строка размерности (1×4).

Определение. Матрица размера $(m \times 1)$ называется вектор-столбцом.

Например, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ – вектор-столбец размерности (3×1).

Определение. Две матрицы называются ***равными***, если они имеют одинаковый размер и элементы, стоящие на одинаковых местах в этих матрицах, равны.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}, \Leftrightarrow \text{ если } a_{ij} = b_{ij}\ , \ \forall\ i=1,2,\ \ldots,\ m, \qquad j=1,2,\ \ldots,n$$

Определение. Матрица размера $n \times n$ называется **квадратной** матрицей порядка ***n***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю матрицы размера $n \times n$ называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Побочной диагональю матрицы размера $n \times n$ называется совокупность элементов $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ ..

Определение. Квадратная матрица, все элементы которой, не стоящие на главной диагонали равны нулю, называется **диагональной**.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Определение. Диагональная матрица, в которой все элементы главной диагонали равны, называется **скалярной**.

Определение. Скалярная матрица, в которой все элементы главной диагонали единицы, называется **единичной** и обозначается

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}.$$

Единичная вектор-строка обозначается $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Определение. Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой – нули. $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение. Квадратная матрица, у которой $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i,j называется **симметричной.**

Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие выше (ниже) главной диагонали равны нулю, называется

верхней (правой) треугольной матрицей $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

нижней (левой) треугольной матрицей $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \mathrm{a}_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определение. Кососимметричной называют матрицу, элементы которой, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны по величине и противоположны по знаку: $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех i, j.

Из определения следует, что все элементы главной диагонали кососимметричной матрицы равны нулю: $a_{ii} = 0$.

Например, следующие матрицы кососимметричны:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & -1 & 2 \\ -a & 0 & -b & 3 \\ 1 & b & 0 & ab \\ -2 & -3 & -ab & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & -x \\ -7 & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Определение. Следом $Sp(\mathbf{A})$ квадратной матрицы $\mathbf{A}$ порядка n называется сумма диагональных элементов матрицы $Sp(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

§2. Основные операции над матрицами и их свойства

Сложение матриц (только для матриц одинаковой размерности!)

Определение. Суммой двух матриц $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ и $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$ размерности $(m \times n)$ называется матрица $\mathbf{C} = \left[c_{ij} \right]$ размерности $(m \times n)$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,,\ \forall\ i=1,2,\ \ldots,\ m, \qquad j=1,2,\ \ldots,\ n.$$

Теорема. Сложение матриц обладает следующими **свойствами**:

1. Для любых $(m \times n)$ – матриц **A**, **B**, **C** выполняются равенства:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C};$$

2. Существует единственная $(m \times n)$– матрица **0** такая, что для любой $(m \times n)$ – матрицы **A** выполняется равенство $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.

3. Для любой матрицы **A** существует единственная матрица **(–A)** такая, что $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Доказательство.

Выберем в матрице $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)$ произвольный элемент $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{ij}$.

$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}=\left(\mathbf{B}+\mathbf{A}\right)_{ij}$, следовательно, $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)=\left(\mathbf{B}+\mathbf{A}\right)$.

Аналогично, $\left[\mathbf{A}+\left(\mathbf{B}+\mathbf{C}\right)\right]_{ij}=a_{ij}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}=\left[\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)+\mathbf{C}\right]_{ij}$.

Согласно определению, $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Это число равно a_{ij} тогда и только тогда, когда $b_{ij}=0$. Следовательно, единственной матрицей, удовлетворяющей условию $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$, является матрица $\mathbf{0}$.

Равенство $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $b_{ij}=-a_{ij}$. Следовательно, единственной матрицей $\mathbf{A}$, удовлетворяющей условию $\mathbf{A}+\left(-\mathbf{A}\right)=\mathbf{0}$, является матрица $-\mathbf{A}=\left[-a_{ij}\right]$.

Замечание. Матрица **A+(-B)** называется разностью матриц **A** и **B.**

Определение. Разностью между матрицами **A** и **B** одинакового размера называется матрица того же размера, каждый элемент которой равен разности между соответствующими элементами данных матриц.

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. Найти сумму.

Решение

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2-1 & -3+4 & 1+0 & 1-1 \\ 0+2 & 4-2 & -2+5 & 8+7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{bmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

Определение. Произведением $(m \times n)$ – матрицы $\mathbf{A}$ на число λ называется такая $(m \times n)$ – матрица $\mathbf{B}$, что $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Теорема. Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1. для любой $(m \times n)$ – матрицы $\mathbf{A}$ имеет место равенство $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
2. для любой матрицы $\mathbf{A}$ и любых чисел λ и μ имеет место равенство
$$\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{A};$$
3. для любой матрицы $\mathbf{A}$ и любых чисел λ и μ имеет место равенство
$$(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A};$$
4. для любых матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и любого числа λ выполняется равенство
$$\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}.$$

Доказательство. Имеем:

1. $(1\cdot \mathbf{A})_{ij} = 1\cdot a_{ij} = a_{ij}$, поэтому $1\cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

2. $\left[\lambda(\mu\mathbf{A})\right]_{ij} = \lambda\left(\mu a_{ij}\right) = (\lambda\mu)a_{ij} = \left[(\lambda\mu)\mathbf{A}\right]_{ij}$, т.е. $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$.

3. $\left[(\lambda+\mu)\mathbf{A}\right]_{ij} = (\lambda+\mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij} = (\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A})_{ij}$, т.е. $(\lambda+\mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$.

4. $\left[\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right]_{ij} = \lambda\left(a_{ij}+b_{ij}\right) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = (\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B})_{ij}$, т.е. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$.

Пример 2. Найти матрицу $5\mathbf{A}-2\mathbf{B}$

Решение

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5\cdot 2-2\cdot(-1) & 5\cdot(-3)-2\cdot 4 & 5\cdot 1-2\cdot 0 & 5\cdot 1-2\cdot(-1) \\ 5\cdot 0-2\cdot 2 & 5\cdot 4-2\cdot(-2) & 5\cdot(-2)-2\cdot 5 & 5\cdot 8-2\cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -23 & 5 & 7 \\ -4 & 24 & -20 & 26 \end{bmatrix}.$$

Транспонирование матриц

Операция транспонирования матрицы заключается в перемене местами строк и столбцов матрицы с сохранением их номеров.

Определение. Матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ называется **транспонированной** по отношению к матрице **A**, если для всех *i,j* $b_{ij} = a_{ji}$.

Пример 3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Произведение матриц

Операция умножения матрицы **A** размера $(m \times n)$ на матрицу **B** размера $(n \times k)$ вводится для прямоугольных матриц в предположении, что **число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.**

Определение. Произведением матрицы **A** размера $(m \times n)$ на матрицу **B** размера $(n \times k)$ называется матрица **C**=**AB** размера $(m \times k)$, элемент которой, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, равен скалярному произведению *i*–й строки матрицы **A** на *j*-й столбец матрицы **B**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} \,,$$

то есть элемент c_{ij} матрицы **C** есть сумма произведений элементов *i*-й строки матрицы **A** на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы **B**.

Пример. Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 7 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2\cdot5+1\cdot2+0\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot4 & 2\cdot7+1\cdot1+0\cdot2 & 2\cdot0+1\cdot3+0\cdot2\\ 3\cdot5+0\cdot2+5\cdot3 & 3\cdot1+0\cdot0+5\cdot4 & 3\cdot7+0\cdot1+5\cdot2 & 3\cdot0+0\cdot3+5\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12 & 2 & 15 & 3\\ 30 & 23 & 31 & 10\end{pmatrix}.$$

Свойства произведения матриц

1. Умножение на число $\lambda(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\lambda\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$;
2. Дистрибутивность: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$;
3. Ассоциативность $\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$;
4. Умножение на единичную матрицу $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{E})=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$;
5. Правило транспонирования произведения $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$.

Замечание 1. Произведение матрицы **A** на матрицу **B** существует лишь при условии, что число столбцов матрицы **A** равно числу строк матрицы **B**. Возможен случай, когда **AB** существует, а **BA** не существует вследствии несовпадения числа строк матрицы **A** с числом столбцов матрицы **B**.

Если обе матрицы квадратные одного размера, то **AB** и **BA** – матрицы того же размера, но и тогда они, вообще говоря, различны, например:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}7 & 9\\ 19 & 26\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}24 & 41\\ 5 & 9\end{pmatrix}.$$

Таким образом, произведение матриц в общем случае не коммутативно, а именно: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\neq(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$.

Исключение составляет случай, когда **A** и **B** квадратные матрицы одинакового порядка n и при этом матрица **B** является скалярной.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 2\\ 3\cdot 2+2\cdot 0 & 3\cdot 0+5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 10\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+0\cdot 3 & 2\cdot 2+0\cdot 5\\ 0\cdot 1+2\cdot 3 & 0\cdot 2+2\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 10\end{pmatrix}$$

Замечание 2. Для чисел a и b из равенства $a{\cdot}b = 0$ следует, что хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Для матриц это утверждение **неверно**, т.е. произведение ненулевых матриц может быть равно нулевой матрице, например:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3-3 & 6-6\\ 6-6 & 12-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0.$$

Практические примеры

Пример 1. Пусть $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ и $\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)_{m,n}$ – матрицы объемов производства n видов продукции на m заводах в первом и во втором квартале соответственно, то

A+B – аналогичная матрица для первого полугодия.

B–A – матрица приростов объемов производства во втором квартале по сравнению с первым кварталом.

Если объемы производства даны в рублях, и λ – курс рубля по отношению к доллару (т.е. один рубль равен λ долларам), то $\lambda\mathbf{A}$ есть матрица объемов производства в долларах.

Пример 2. Предприятие производит n видов продукции, используя m видов ресурсов. Матрица $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$, элементы которой – норма затрат ресурса i - го вида на производство единицы продукции j – го вида,

$\mathbf{X} = \left(x_j\right)_{n,1}$ - вектор столбец, где x_j - количество продукции j – го вида, произведенное предприятием за месяц.

Тогда матрица $\mathbf{C = AX}$ является вектором затрат ресурса i – го вида на производство всей месячной продукции:

$$\mathbf{C = AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix},$$

Пример 3. Завод производит и продает автомобили. Каждый автомобиль может находиться в одном из двух состояний: 1) работает хорошо; 2) требует регулировки. Статистические исследования показали, что из тех автомобилей, которые сегодня работают хорошо, через месяц 70% также будут работать хорошо и 30% потребуют регулировки, а из тех автомобилей, которые сегодня потребовали регулировки, через месяц 60% будут работать хорошо и 40% потребуют регулировки.

В момент продажи все автомобили работают хорошо.

Каковы доли машин, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через 2 месяца и через 3 месяца после их выхода из ворот завода?

Решение. Введем вектор состояний в момент t: $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t})$, где x_{it} - доля автомобилей, находящихся в момент t в состоянии i.

Согласно условиям задачи $\mathbf{x}_0 = (1; 0)$. Введем также матрицу A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix},$$

где a_{ij}- доля автомобилей, которые в настоящий момент находятся в состоянии i, а через месяц будут находится в состоянии j.

Тогда вектор состояний через месяц имеет вид:

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{x_0 A} = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = (0,7 \;\; 0,3)$$

Вектор состояний через два месяца: $\mathbf{x_2 = x_1 A = x_0 AA = x_0 A^2}$

Вектор состояний через 3 месяца: $\mathbf{x_3 = x_2 A = x_0 A^2 A = x_0 A^3}$**.**

Вычислим матрицы $\mathbf{A}^2$ **и** $\mathbf{A}^3$**:**

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,67 & 0,33\\ 0,66 & 0,34\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0,67 & 0,33\\ 0,66 & 0,34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,667 & 0,333\\ 0,666 & 0,334\end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_0\mathbf{A}^2=(1;\,0)\begin{pmatrix}0,67 & 0,33\\ 0,66 & 0,34\end{pmatrix}=(0,67;\,0,33),$$

$$\mathbf{x}_3=\mathbf{x}_0\mathbf{A}^3=(1;\,0)\begin{pmatrix}0,667 & 0,333\\ 0,666 & 0,334\end{pmatrix}=(0,667;\,0,333).$$

Вывод: Через 2 месяца и через 3 месяца 2/3 автомобилей будут работать хорошо, а 1/3 автомобилей потребуют ремонта.

Пример 4. В сервисный центр поступают смартфоны, 70% которых требуют обновления ПО, 20% – требуют ремонта, 10% – подлежат замене. Статистически установлено, что 10% смартфонов, получивших обновление, через год требуются ремонт, 60% – требуют повторного обновления и 30% – подлежат замене. Из смартфонов, прошедших ремонт, 20% требуют через год обновление ПО, 50% – повторного ремонта и 30% – подлежат замене. Из смартфонов, подлежащих замене, через год 60% требуют обновление ПО, 40% – требуют ремонта. Найти доли из обслуженных в начале года смартфонов, которые будут требовать ремонта, обновления ПО или замены через год, 2 года и 3 года?

Ответ: через год 17% смартфонов будет требовать обновления ПО, 56% – ремонта и 27% – замены; через 2 года эти доли равны соответственно 29,1%, 49%, 21,9%; через 3 года – 25,85%, 50,72%, 23,43%.

Пример 6. В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 в магазины M_1, M_2 и M_3, причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин M_1 стоит 50 ден. ед., в магазин M_2 - 70, а в M_3 - 130 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Молокозавод	Магазин		
	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

Решение. Обозначим через **A** матрицу, данную нам в условии, а через B - матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е.,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}20 & 35 & 10\\ 15 & 27 & 8\end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}50 & 70 & 130\end{pmatrix},$$

Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид:

$$\mathbf{AB}^T=\begin{pmatrix}20 & 35 & 10\\ 15 & 27 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\ 70\\ 130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\cdot 50+35\cdot 70+10\cdot 130\\ 15\cdot 50+27\cdot 70+81\cdot 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4750\\ 3680\end{pmatrix}.$$

Итак, первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. ед., второй - 3680 ден.ед.

Пример 7. Швейное предприятие производит зимние пальто, демисезонные пальто и плащи. Плановый выпуск за декаду характеризуется матрицей (вектором) X = (10, 15, 23). Используются ткани четырех типов T_1, T_2, T_3, T_4. В таблице приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Матрица (вектор) C = (40, 35, 24, 16) задает стоимость метра ткани каждого типа, а матрица (вектор) P = (5, 3, 2, 2) - стоимость перевозки метра ткани каждого вида.

Изделие	**Расход ткани**			
	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**
Зимнее пальто	**5**	**1**	**0**	**3**
Демисезонное пальто	**3**	**2**	**0**	**2**
Плащ	**0**	**0**	**4**	**3**

1. Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана?
2. Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида.
3. Определить стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана.

4. Подсчитать стоимость всей ткани с учетом ее транспортировки.

Решение. Обозначим через **A** матрицу, данную нам в условии и содержащую информацию о нормах расхода ткани (в метрах) каждого типа на каждое изделие, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, тогда для нахождения количества метров ткани, необходимой для выполнения плана, нужно вектор **X** умножить на матрицу **A**:

$$\vec{\mathbf{X}} \times \mathbf{A} = (10, 15, 23) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (10 \cdot 5 + 15 \cdot 3, 10 \cdot 1 + 15 \cdot 2, 23 \cdot 4, 10 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 23 \cdot 3) =$$

$$= (95, 40, 92, 129)$$

Стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида, найдем, перемножив матрицу **A** и вектор $\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{C}^{T}=\begin{pmatrix}5&1&0&3\\3&2&0&2\\0&0&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\35\\24\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 40+1\cdot 35+0\cdot 24+3\cdot 16\\3\cdot 40+2\cdot 35+0\cdot 24+2\cdot 16\\0\cdot 40+0\cdot 35+4\cdot 24+3\cdot 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}283\\222\\144\end{pmatrix}$$

Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, определится по формуле:

$$\vec{\mathbf{X}}\mathbf{A}\vec{\mathbf{C}}^{T}=\left(10,\,15,\,23\right)\begin{pmatrix}283\\222\\144\end{pmatrix}=10\cdot 283+15\cdot 222+23\cdot 144=9472$$

Наконец, с учетом транспортных расходов вся сумма будет равна стоимости ткани, т. е. 9472 ден. ед., плюс величина

$$\mathbf{XAP}^T = \left(95,\ 40,\ 92,\ 129\right)\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\2\\2\end{pmatrix} = 95\cdot 5 + 40\cdot 3 + 92\cdot 2 + 129\cdot 2 = 1037$$

Итак,

$$\mathbf{X\,A\,C}^T + \mathbf{X\,A\,P}^T = 9472 + 1037 = 10509 \text{ (ден.ед.)}$$

Блочные матрицы

Пусть дана прямоугольная матрица $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. При помощи горизонтальных и вертикальных линий рассечем ее на прямоугольные блоки размерности $\left(m_\alpha \times n_\beta\right)$, $\alpha = \overline{1, s}$, $\beta = \overline{1, t}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{A}_{11}}^{n_1} & \overbrace{\mathbf{A}_{12}}^{n_2} & \dots & \overbrace{\mathbf{A}_{1t}}^{n_t} \Big\} m_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2t} \Big\} m_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \dots & \mathbf{A}_{st} \Big\} m_s \end{bmatrix}, \text{ где } \sum_{\alpha=1}^{s} m_\alpha = m \;,.\; \sum_{\beta=1}^{t} n_\beta = n \;.$$

Применение блочных матриц позволяет уменьшить трудоемкость вычислений в случае, когда матрица содержит нулевые блоки.

Будем говорить, что данная матрица разбита на $s \cdot t$ блоков $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ размером $(\alpha \times \beta)$, $\alpha = \overline{1, s}$, $\beta = \overline{1, t}$, или что она представлена в виде ***блочной матрицы***.

Будем сокращенно писать $\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_{\alpha\beta}\right], \alpha = \overline{1, s}, \;\; \beta = \overline{1, t}$.

Действия над блочными матрицами производятся по тем же формальным правилам, как и в случае, когда вместо блоков имеем числовые элементы.

Сложение: если даны две блочные матрицы одинаковой размерности и одинакового способа разбиения на блоки:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_{\alpha\beta}\right], \quad \alpha = \overline{1, s}, \;\; \beta = \overline{1, t},$$

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}_{\alpha\beta}\right], \quad \alpha = \overline{1, s}, \;\; \beta = \overline{1, t},$$

то $$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left[\mathbf{A}_{\alpha\beta} \pm \mathbf{B}_{\alpha\beta}\right], \;\; \alpha = \overline{1, s}, \;\; \beta = \overline{1, t}.$$

Умножение: известно, что при умножении прямоугольных матриц **A** и **B** длина строк в первом сомножителе **A** должна совпадать с высотой столбцов второго сомножителя **B**. Для возможности «блочного» умножения этих матриц необходимо, чтобы все горизонтальные размеры в первом сомножителе совпадали с вертикальными размерами во втором сомножителе:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{A}_{11}}^{n_1} & \overbrace{\mathbf{A}_{12}}^{n_2} & \dots & \overbrace{\mathbf{A}_{1t}}^{n_t}\Big\}m_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2t}\}m_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \dots & \mathbf{A}_{st}\}m_s \end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{B}_{11}}^{p_1} & \overbrace{\mathbf{B}_{12}}^{p_2} & \dots & \overbrace{\mathbf{B}_{1u}}^{p_u}\Big\}n_1 \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \dots & \mathbf{B}_{2u}\}n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B}_{t1} & \mathbf{B}_{t2} & \dots & \mathbf{B}_{tu}\}n_t \end{bmatrix}.$$

Тогда легко проверить, что

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}=\left[\mathbf{C}_{\alpha\beta}\right],\ \text{где}\ \mathbf{C}_{\alpha\beta}=\sum_{\delta=1}^{t}\mathbf{A}_{\alpha\delta}\mathbf{B}_{\delta\beta},\ \left(\alpha=\overline{1,s},\ \ \beta=\overline{1,u}\right).$$