Особые случаи

То, что в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна не означает, разумеется, что в этой точке у нее обязательно существует производная. Функция может быть непрерывной, а производной может и не существовать. Что же там может быть?

1. Односторонние производные

Назовем

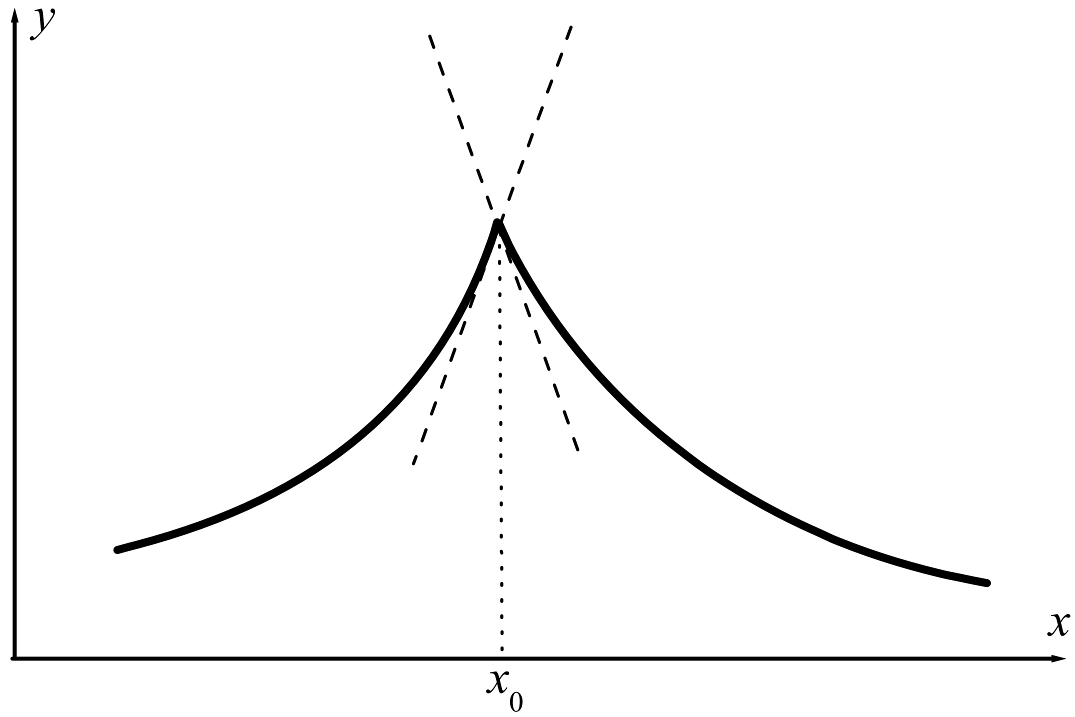
$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

производной от функции $f(x)$ в точке x_0 ***слева***, а

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

производной в той же точке ***справа***.

Разумеется, если $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$, то это означает, что в точке x_0 существует $f'(x_0)$. Но могут быть случаи, когда $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$ существуют, но не равны друг другу. В этом случае не существует и $f'(x_0)$. График функции $f(x)$ имеет в точке x_0 в этом случае «излом», и в этой точке к графику можно провести две касательные

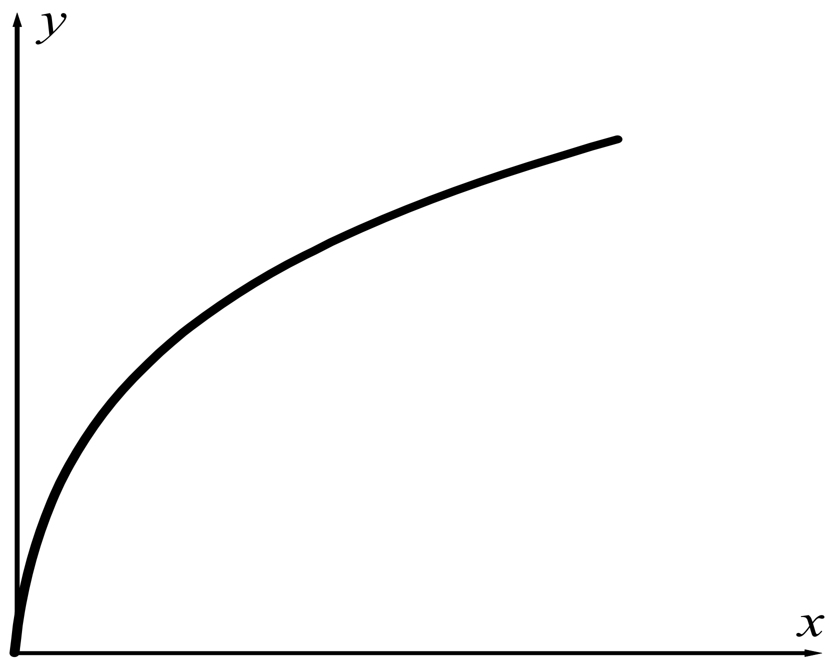


2. Бесконечная производная

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}$ определенную для $x \geq 0$ и потребуем найти $f'(0)$. Имеем

$$f'(0)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=+\infty$$

и производная равна $+\infty$. Касательная в этой точке параллельна оси OY.



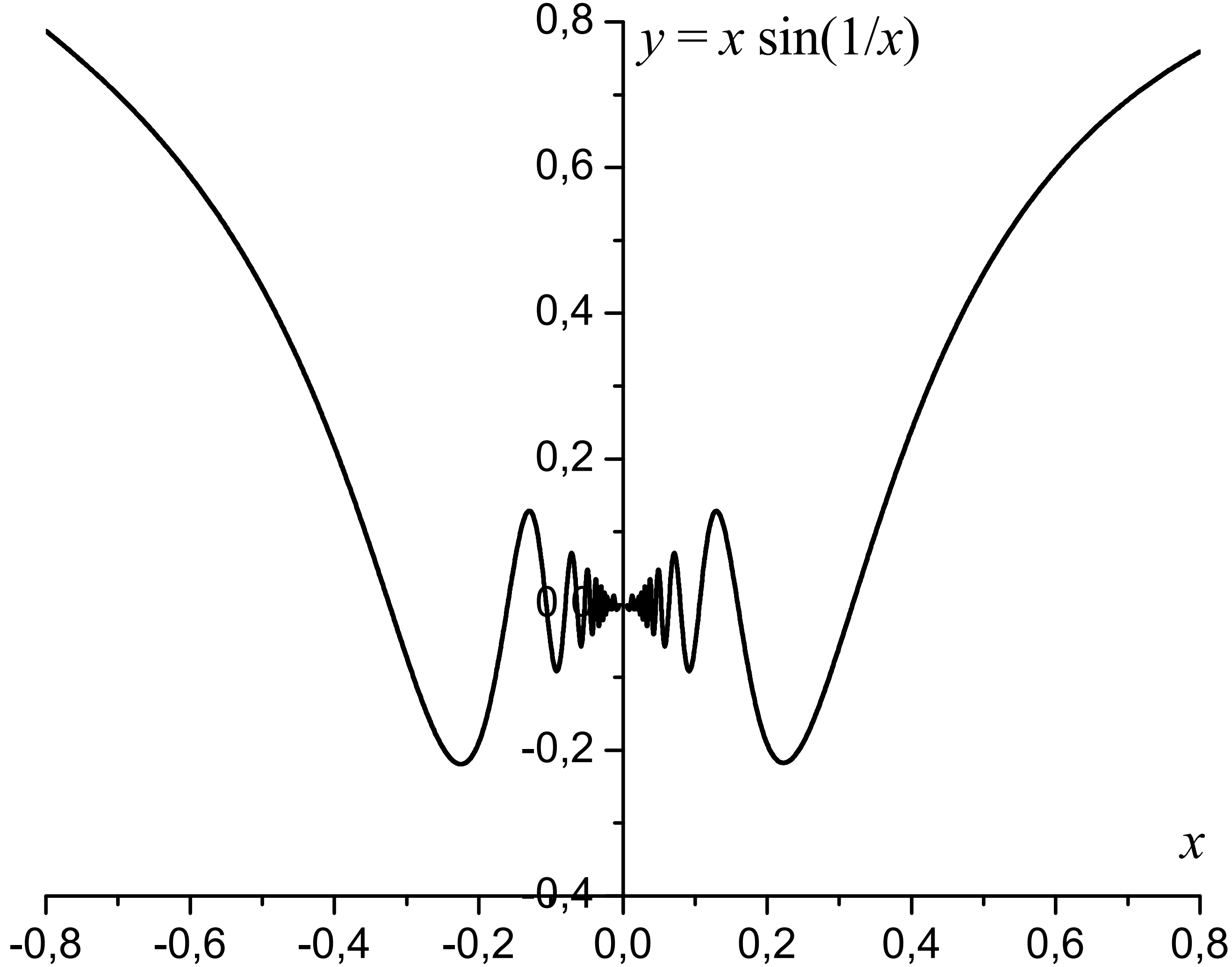
3. Несуществование производной

Наконец, может быть ситуация, когда $\lim$, фигурирующий в определении производной, не существует.

Рассмотрим для примера, $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Так как $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$, то $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Поэтому, полагая $f(0)=0$, получим

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right),$$

и этот предел просто не существует.



y = x sin(1/x)
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
-0,4
x
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8

Теорема Ферма

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $\left[a, b\right]$ и в некоторой внутренней точке x_0 этого промежутка достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует производная, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

Пусть, для определенности, в точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения.

По условию теоремы эта точка внутренняя, то есть $a < x_0 < b$, и поэтому к этой точке можно подойти и слева и справа.

Пусть мы подходим к x_0 слева. Тогда

$f(x) < f(x_0)$ (так как $f(x_0)$ – наибольшее значение);

$f(x) - f(x_0) < 0$;

$x < x_0$ (так как мы подходим слева);

$x - x_0 < 0$;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Делая предельный переход $x \to x_0 - 0$, получим

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \ge 0.$$

Пусть мы подходим к точке x_0 справа. Тогда

$f(x) < f(x_0)$ (так как $f(x_0)$ – наибольшее значение);

$f(x) - f(x_0) < 0$;

$x > x_0$ (так как мы подходим справа);

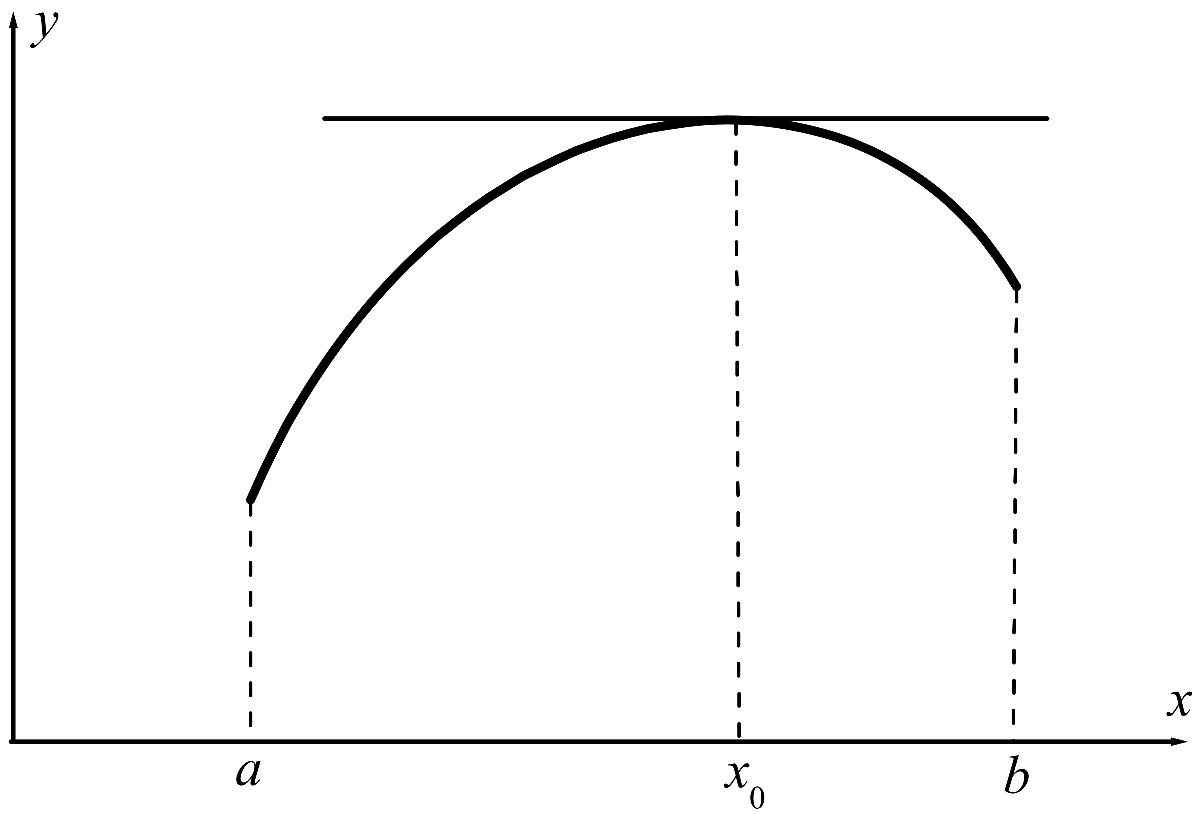
$x - x_0 > 0$;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

Делая предельный переход $x \to x_0 + 0$, получим

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

Совместить два полученных неравенства можно только в одном случае: $f'(x_0) = 0$.

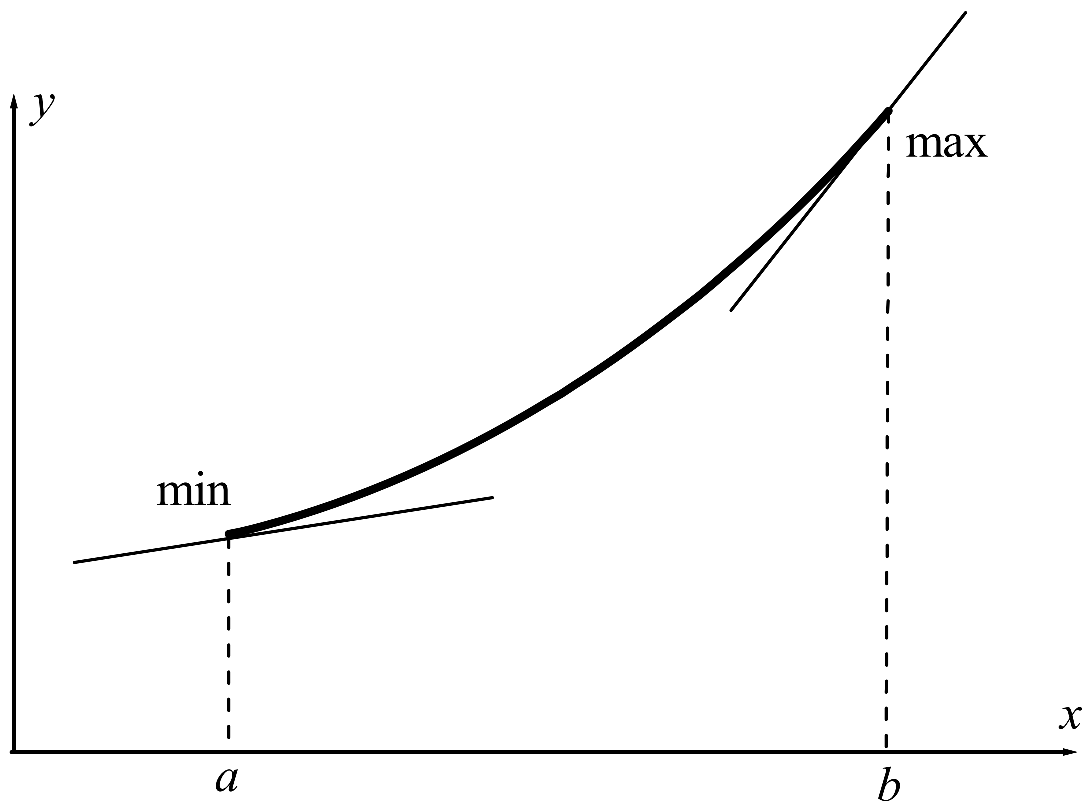


Геометрический смысл доказанной теоремы: в точке наибольшего или наименьшего значения функции касательная к графику функции параллельна оси *OX*.

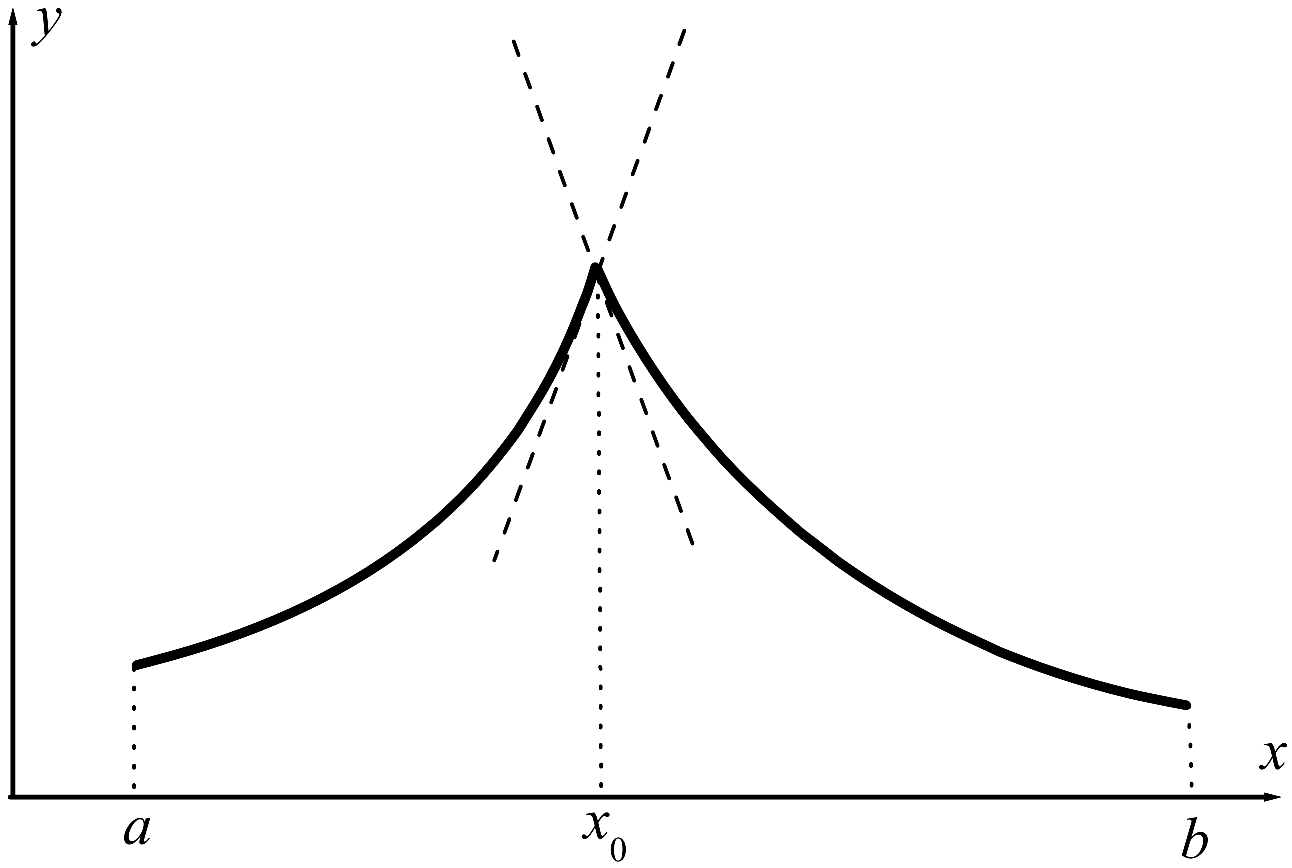
Существенность ограничений

В теореме Ферма по сути дела два ограничения: а) точка x_0 расположена внутри отрезка $\left[a,b\right]$ и б) $\exists f'(x_0)$.

а) «внутренность» точки x_0



б) существование производной.



В точке x_0 существуют только односторонние производные.

Теорема Ролля.

Пусть функция $f(x)$

а) определена и непрерывна на $[a,b]$;

б) $\forall x \in [a,b]\ \exists f'(x)$;

в) $f(a) = f(b)$

Тогда существует точка $c \in [a,b]$ в которой $f'(c) = 0$.

<u>Первая теорема Вейерштрасса</u>.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке, то есть существуют такие числа m и M, что $\forall x \in [a, b]$ $m \le f(x) \le M$.

<u>Вторая теорема Вейерштрасса</u>.

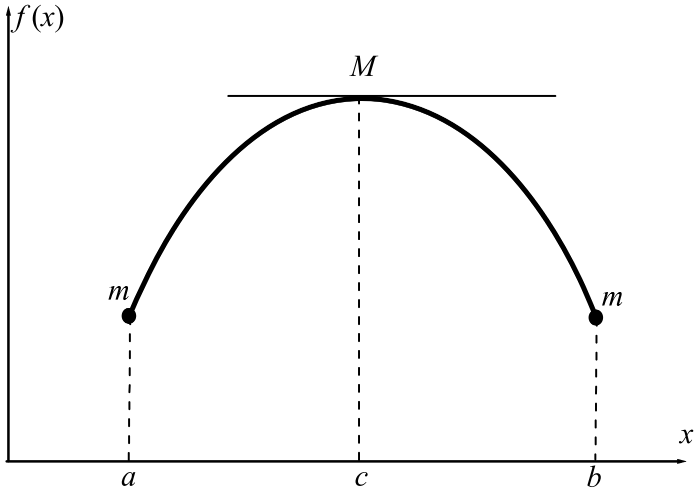
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$. Тогда существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то есть инфимум и супремум $f(x)$ <u>достигаются</u> на $[a, b]$.

Доказательство:

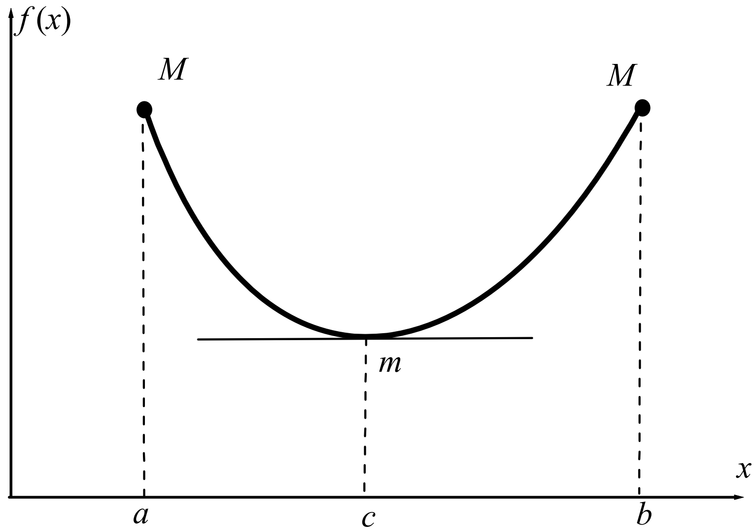
1. Так как $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$, то, по первой теореме Вейерштрасса, она ограничена на $[a,b]$, то есть существуют конечные $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

2. Если $m = M$, то $f(x)$ есть константа, то есть $f(x) = m = M$ и поэтому $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$. В качестве точки c можно взять любую точку из $[a,b]$.

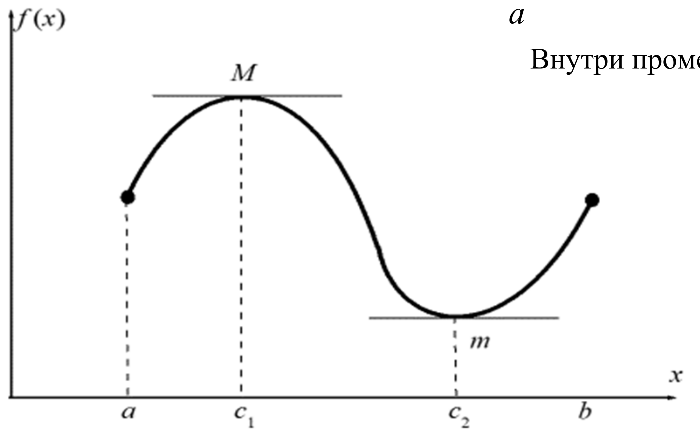
3. Если $m < M$, то, в силу условия $f(a) = f(b)$ и второй теоремы Вейерштрасса, хотя бы одно из значений m или M достигается во внутренней точке промежутка $[a, b]$. По теореме Ферма, в этой точке (их может быть и несколько) производная равна нулю.



Внутри промежутка достигается sup



Внутри промежутка достигается inf



Внутри промежутка достигаются и sup и inf.

ФОРМУЛА КОШИ

Теорема. Пусть функции $f(x)$ **и** $g(x)$

а) определены и непрерывны на $[a,b]$**;**

б) $\forall x \in [a,b]$ $\exists f'(x)$ **и** $g'(x)$**;**

в) $\forall x \in [a,b]$ $g'(x) \neq 0$**.**

Тогда существует точка $c \in [a,b]$ **такая, что**

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Отметим, что $g(a) \neq g(b)$, иначе, по теореме Ролля, существовала бы точка $x_0 \in [a,b]$, где $g'(x_0) = 0$, что противоречит ограничению «в».

Рассмотрим функцию

$$F(x)=\left[f(x)-f(a)\right]-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right].$$

Для этой функции выполняются условия Ролля:

а) определена и непрерывна на $\left[a,b\right]$, так как $g(a)\neq g(b)$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $\left[a,b\right]$;

б) $\exists \quad F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$.

в) $F(a)=F(b)=0$.

Поэтому $\exists \quad c\in\left[a,b\right] \quad F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$,

Тогда $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Формула Лагранжа

Рассмотрим частный случай, когда $g(x) = x$. Тогда формула Коши приобретает вид

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

где $c \in [a, b]$. Эта формула и называется формулой Лагранжа.

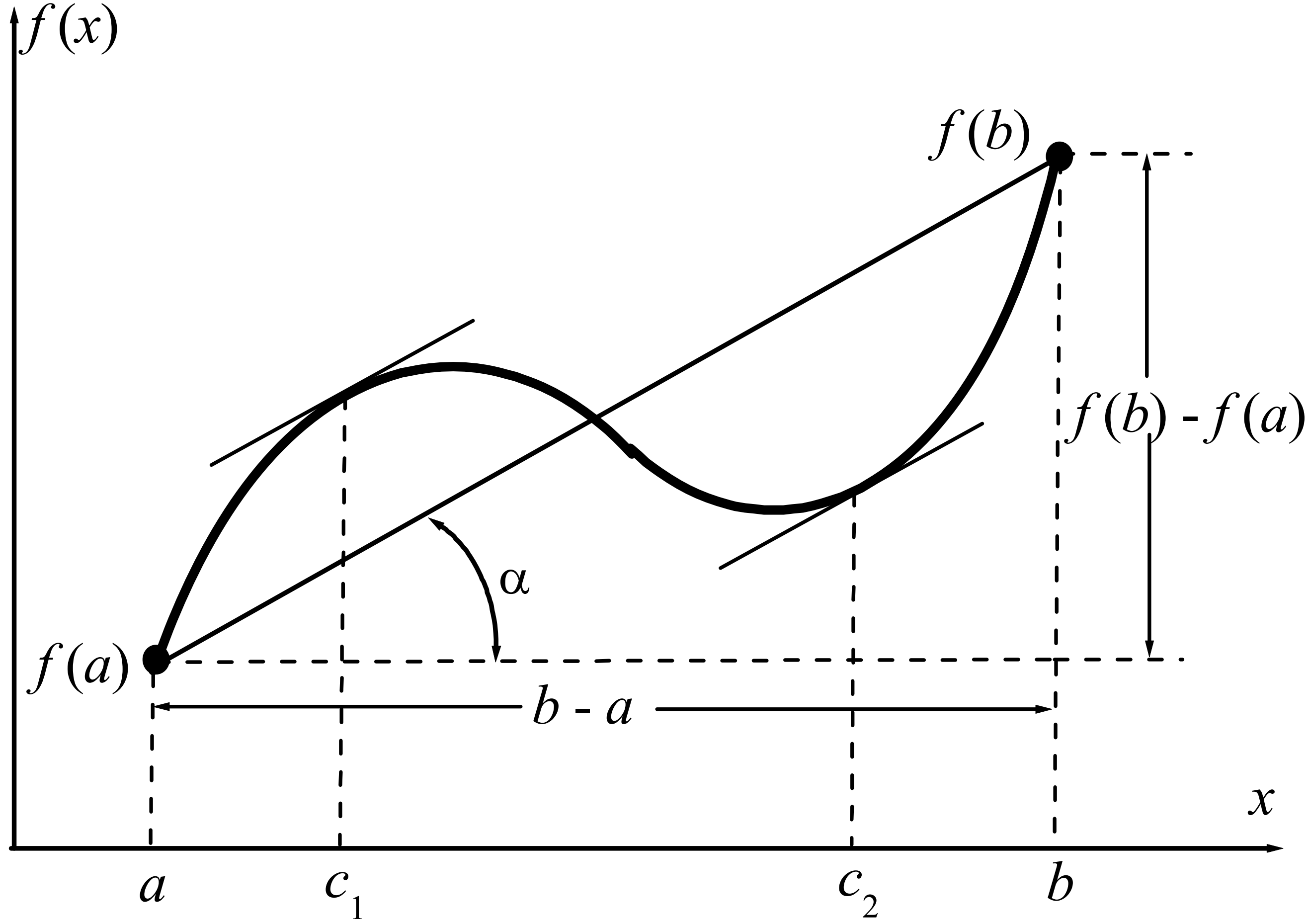
Геометрическая интерпретация

Существует точка $c \in [a, b]$

в которой касательная параллельна секущей, соединяющей точки

$(a, f(a))$ и $(b, f(b))$

Геометрическая интерпретация формулы Лагранжа



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\mathrm{tg}\alpha \qquad f'(c)=\mathrm{tg}\alpha$$

Дифференциал

Величина $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ называется приращением функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение можно представить в виде

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Определение 2. Линейная часть приращения функции, то есть $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ и обозначается $df(x)$

$$df(x) = A \cdot \Delta x.$$

https://www.youtube.com/watch?v=EkVTJyX2TY8

Геометрический смысл дифференциала