D6: ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Казанцев В.Б.

14.X.2024

Contents

1 Линейные динамические системы на плоскости **1**

2 Характеристические показатели **2**

3 Классификация состояний равновесия **3**
3.1 Действительные корни одного знака . . . 3
3.1.1 Устойчивый узел ($\lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0$) . . . 3
3.1.2 Неустойчивый узел ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$) . . . 4
3.2 Действительные корни разных знаков . . . 5
3.2.1 Седло ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$) . . . 5
3.3 Мнимые корни . . . 6
3.3.1 Устойчивый фокус (комплексные собственные значения с отрицательной вещественной частью) . . . 6
3.3.2 Неустойчивый фокус (комплексные собственные значения с отрицательной вещественной частью) . . . 7
3.3.3 Центр (Чисто мнимые собственные значения) . . . 7

4 Состояния равновесия нелинейных систем. Метод линеаризации **8**
4.1 Классификация грубых состояний равновесия на плоскости . . . 8

5 Заключение и выводы **9**

1 Линейные динамические системы на плоскости

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ a, b, c, d - \text{параметры} \end{cases} \tag{1}$$

У линейных динамических систем:

- Можно аналитически получить общее решение
- Состояние равновесия определяет тип разбиения фазовой плоскости на траектории
- Линейные динамические системы возникают при линеаризации нелинейных систем в окрестностях состояния равновесия
- Линейные динамические системы описывают устойчивость систем автоматического управления
- Линейные динамические системы можно записать в матричном виде:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Невырожденный случай: $detA \neq 0$

$$\text{СР:} \begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + dx_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 0\right) \tag{3}$$

2 Характеристические показатели

Пусть: $x_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2$

Подставим в предыдущую систему получим:

$\begin{cases} (a-\lambda)_1 + b_2 = 0 \\ c_1 + (d-\lambda)_2 = 0 \end{cases}$

Это система однородных линейных уравнений. Согласно теоремам линейной алгебры, линейная система ОЛУ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю.

В данном случае, мы рассматриваем линейную динамическую систему на плоскости, описанную матрицей коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Чтобы найти собственные значения λ, необходимо решить характеристическое уравнение, которое определяется условием, при котором система имеет нетривиальное решение.

Для того чтобы система:

$$\begin{cases} (a-\lambda)c_1 + bc_2 = 0 \\ cc_1 + (d-\lambda)c_2 = 0 \end{cases}$$

имела нетривиальное решение, детерминант матрицы этой системы должен быть равен нулю:

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Это даёт характеристическое уравнение:

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

или в развернутом виде:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

- Решая это уравнение, находим собственные значения λ_1 и λ_2, которые определяют характер фазовых траекторий на плоскости. Эти значения помогают определить, является ли равновесное состояние устойчивым (если оба λ имеют отрицательную действительную часть) или неустойчивым, а также тип равновесия (узел, фокус, центр и т.д.).

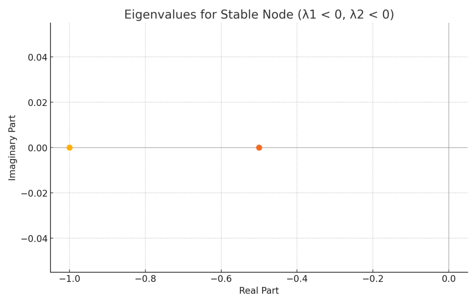
- Так как система однородных уравнений имеет нетривиальное решение только тогда, когда определитель её матрицы равен нулю, это позволяет найти λ и построить общее решение. В данном случае, если детерминант матрицы системы $\det A = ad - bc \neq 0$, то равновесная точка $(x_1^0 = 0, x_2^0 = 0)$ является единственным решением системы СР, а динамика вокруг неё определяется собственными значениями λ_1 и λ_2.

3 Классификация состояний равновесия

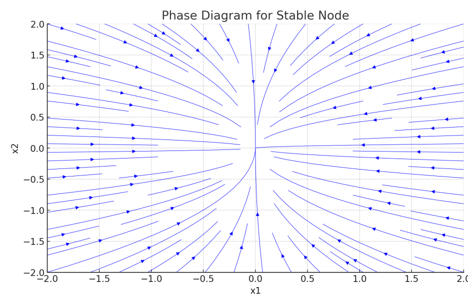
3.1 Действительные корни одного знака

3.1.1 Устойчивый узел ($\lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0$)

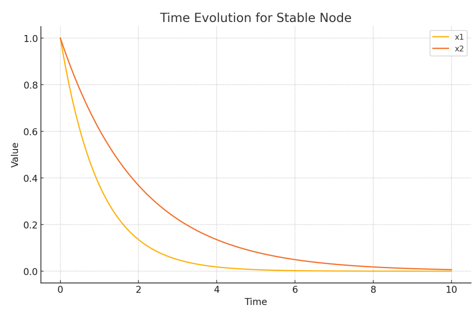
- **Условие**: Оба собственных значения являются действительными и отрицательными.
- **Поведение**: Система сходится к точке равновесия из любого начального состояния. Все траектории движутся прямо к началу координат в фазовой плоскости без колебаний.
- **Интерпретация**: Это указывает на глобально стабильное равновесие, где равновесие является аттрактором.



(a) Устойчивый узел: Расположение собственных значений на числовой плоскости



(b) Устойчивый узел: Фазовая плоскость

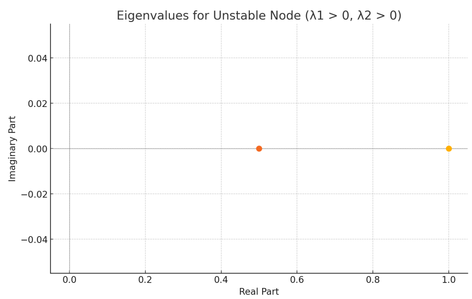


(c) Устойчивый узел: Временная реализация

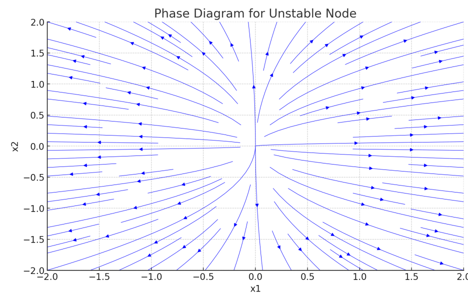
Figure 1: Визуализация устойчивого узла

3.1.2 Неустойчивый узел ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$)

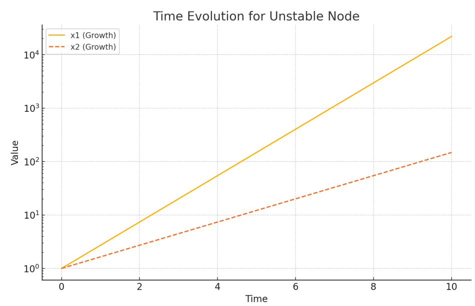
- **Условие**: Оба собственного значения вещественные и положительные.
- **Поведение**: Все траектории расходятся от точки равновесия, удаляясь радиально от начала координат на фазовой плоскости.
- **Интерпретация**: Равновесие является репеллером, что делает его неустойчивым узлом, где соседние траектории отталкиваются.



(a) Неустойчивый узел: Расположение собственных значений на числовой плоскости



(b) Неустойчивый узел: Фазовая плоскость



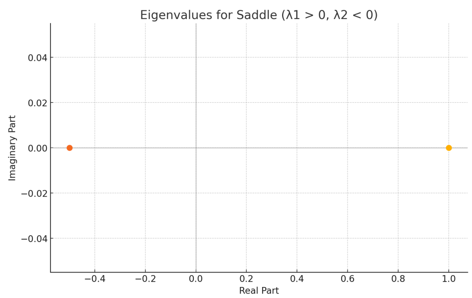
(c) Неустойчивый узел: Временная реализация

Figure 2: Визуализация неустойчивого узла

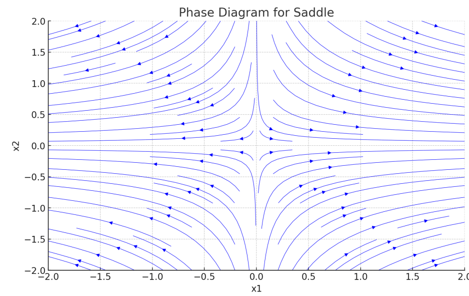
3.2 Действительные корни разных знаков

3.2.1 Седло ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$)

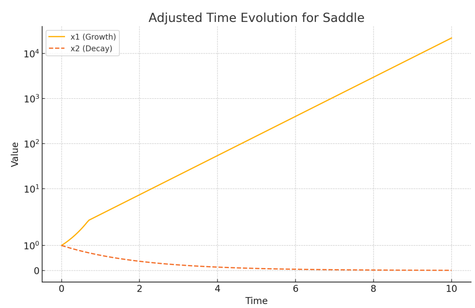
- **Условие**:Одно собственное значение положительно, а другое отрицательно
- **Поведение**: Некоторые траектории приближаются к точке равновесия вдоль стабильного собственного вектора, в то время как другие расходятся вдоль неустойчивого собственного вектора. Это образует "седловину" в фазовой плоскости.
- **Интерпретация**: Система нестабильна из-за наличия неустойчивого направления; любое отклонение приведет к отклонению системы в направлении положительного собственного значения.



(a) Седло: Расположение собственных значений на числовой плоскости



(b) Седло: Фазовая плоскость



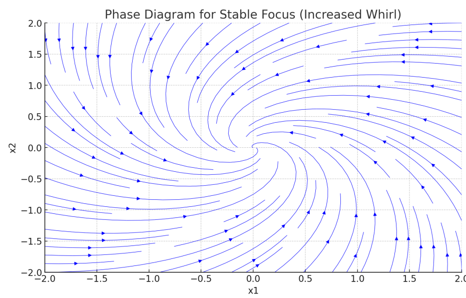
(c) Седло: Временная реализация

Figure 3: Визуализация Седла

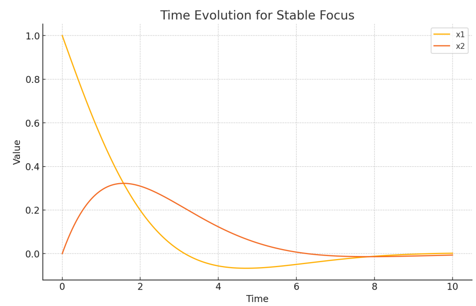
3.3 Мнимые корни

3.3.1 Устойчивый фокус (комплексные собственные значения с отрицательной вещественной частью)

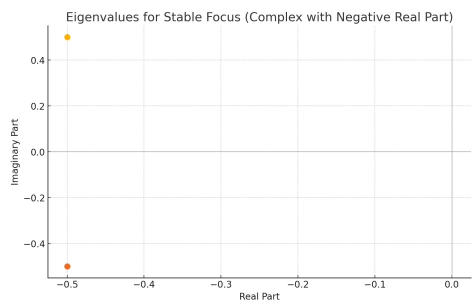
- **Условие**:Комплексные сопряженные собственные значения с отрицательными вещественными частями
- **Поведение**: Траектории закручиваются внутрь к точке равновесия, указывая на затухающие колебания, которые в конечном итоге сходятся к началу координат.
- **Интерпретация**: Это соответствует устойчивому колебательному поведению, при котором система стабилизируется в точке равновесия после нескольких колебаний.



(a) Устойчивый фокус: Расположение собственных значений на числовой плоскости



(b) Устойчивый фокус: Фазовая плоскость

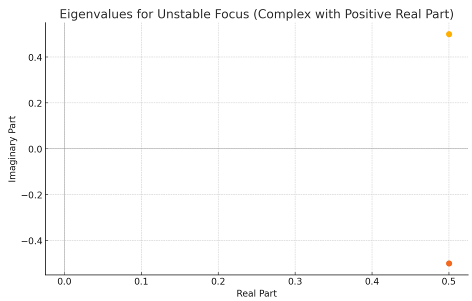


(c) Устойчивый фокус: Временная реализация

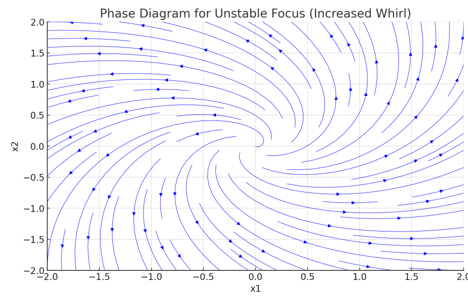
Figure 4: Визуализация Устойчивого фокуса

3.3.2 Неустойчивый фокус (комплексные собственные значения с отрицательной вещественной частью)

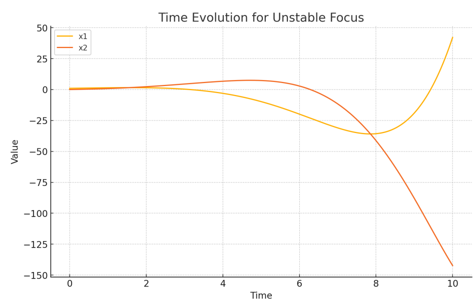
- **Условие**:Комплексные сопряженные собственные значения с положительными вещественными частями.
- **Поведение**: Траектории закручиваются наружу от точки равновесия, указывая на усиливающиеся колебания по мере их удаления от начала координат.
- **Интерпретация**: Это приводит к неустойчивой системе, где амплитуда колебаний увеличивается со временем, что приводит к расхождению.



(a) Неустойчивый фокус: Расположение собственных значений на числовой плоскости



(b) Неустойчивый фокус: Фазовая плоскость

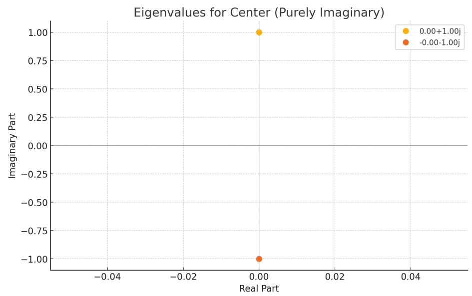


(c) Неустойчивый фокус: Временная реализация

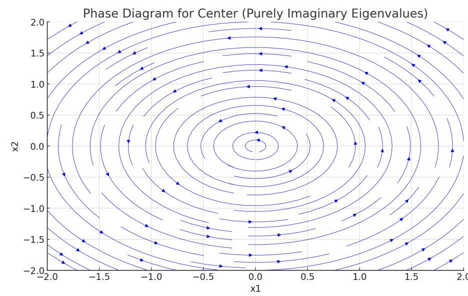
Figure 5: Визуализация Неустойчивого фокуса

3.3.3 Центр (Чисто мнимые собственные значения)

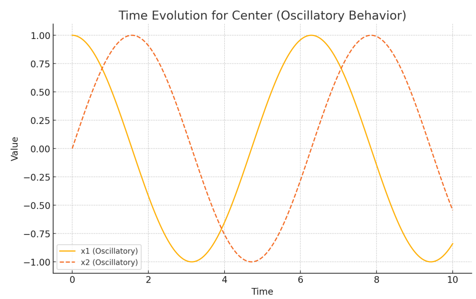
- **Условие**:Собственные значения являются комплексными числами с нулевой вещественной частью (чисто мнимые).
- **Поведение**: Все траектории в фазовой плоскости формируют замкнутые орбиты вокруг точки равновесия. Движение происходит по круговым или эллиптическим траекториям, что соответствует нейтральной устойчивости.
- **Интерпретация**: Система не сходится к точке равновесия и не расходится, а остается на орбите вокруг неё. Это означает нейтральное колебательное поведение, без затухания и роста амплитуды.



(a) Центр: Расположение собственных значений на числовой плоскости



(b) Центр: Фазовая плоскость



(c) Центр: Временная реализация

Figure 6: Визуализация Центра

4 Состояния равновесия нелинейных систем. Метод линеаризации

4.1 Классификация грубых состояний равновесия на плоскости

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \tag{6.12}$$

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f, g \in \mathbb{C}^2$$

$$\mu - \text{вектор параметра}$$

Состояния равновесия:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1, x_2) = 0 \\ g(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \tag{6.13}$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1 = x_{1i}^0, \quad x_2 = x_{2i}^0), \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1i}^0 + \xi(t) \\ x_2(t) = x_{2i}^0 + \eta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = f(x_{1i}^0 + \xi(t), x_{2i}^0 + \eta(t)) \\ \frac{d\eta}{dt} = g(x_{1i}^0 + \xi(t), x_{2i}^0 + \eta(t)) \end{cases}$$

$$|\xi(t)|, |\eta(t)| \ll 1$$

Разложим нелинейные f и g в ряд Тейлора и ограничимся только линейными членами по ξ и η, получаем

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \tag{6.14}$$

$$\xi(t) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Big|_{(x_1^0, x_2^0)}^{\eta(t)} \tag{4}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} \tag{5}$$

$$\xi(t) + \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Big|_{(x_1^0, x_2^0)}^{\eta(t)} \tag{6}$$

Важно отметить, что все частные производные в формуле (6.14) вычислены в точке равновесия x_{1i}^0, x_{2i}^0 и представляют собой некоторые числа, обозначим эти числа a, b, c, d, согласно формуле (6.15):

$$a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\Big|_{(x_{1i}^0, x_{2i}^0)}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\Big|_{(x_{1i}^0, x_{2i}^0)} \tag{6.15}$$

$$c = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2)\Big|_{(x_{1i}^0, x_{2i}^0)}, \quad d = \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2)\Big|_{(x_{1i}^0, x_{2i}^0)} \tag{7}$$

Тогда

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi(t) + b\eta(t) \tag{6.16}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi(t) + d\eta(t) \tag{8}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \tag{9}$$

Исключение: с условием метода линеаризации $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0 \;\Rightarrow$ условие грубости СР нелинейных систем.

В случае, если реальная часть $\lambda_{1,2}0$, применять разложение в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными слагаемыми по ξ и η,, не корректно. Нужно использовать слагаемые более высокого порядка этого ряда.

С точки зрения комплексной плоскости, λ условий (6.16) означает, что корни характеристического уравнения должны располагаться на мнимой оси.

5 Заключение и выводы

- Характеристические показатели определяют структуру разбиения фазовой плоскости на траектории.
- В случае действительных показателей движения на фазовой плоскости описывают апериодические (экспоненциальные процессы.
- Комплексно-сопряженные корни определяют осцилляторный характер движений на фазовой плоскости.
- В нелинейных системах грубых состояний равновесия всего 5, условие грубости — реальная часть показателей должна быть отлична от нуля.
- Центр — негрубое состояние равновесия, реализуется в линейных и консервативных (негрубых) динамических системах.