Module : Analyse 1
Chapitre 1 : Nombres réels et suites
Première Année Du Cycle Universitaire

Réalisé Par : Youssef MIGROUNE
Prof de maths au lycée

YouTube / MIGROUNE Math

Instagram / MIGROUNE Math
TikTok / MIGROUNE Math
Facebook / Migroune Math

1 - Nombres réels

a Borne supérieure et borne inférieure

Définitions

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on dit que :

1. x est un majorant de A si, et seulement si, pour tout $a \in A$; $x \geqslant a$
2. x est le plus grand élément de A si, et seulement si, $x \in A$ et pour tout $a \in A$; $x \geqslant a$
3. x est un minorant de A si, et seulement si, pour tout $a \in A$; $x \leqslant a$
4. x est le plus petit élément de A si, et seulement si, $x \in A$ et pour tout $a \in A$; $x \leqslant a$
5. x est la borne supérieure de A (noté : $sup(A)$) si, et seulement si, x est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A
6. x est la borne inférieure de A (noté : $inf(A)$) si, et seulement si, x est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A

Remarques :

- $sup(A)$ et $inf(A)$ n'appartiennent pas nécessairement à A
- Si la borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble existe alors, elle est unique

Caractérisation

$$x = sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A; x \geqslant a \\ \Big(\forall \epsilon > 0\Big)\Big(\exists b \in A\Big); x - \epsilon < b \end{cases}$$

$$x = inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A; x \leqslant a \\ \Big(\forall \epsilon > 0\Big)\Big(\exists b \in A\Big); b < x + \epsilon \end{cases}$$

Théorème

1. Toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, admet la borne supérieure
2. Toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et minorée, admet la borne inférieure

Une partie non vide à la fois majorée et minorée est dite bornée

b Intervalles de $\mathbb{R}$

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si :
$$a \in I \text{ et } b \in I \text{ et } a \leqslant x \leqslant b \text{ alors } x \in I$$
- Un intervalle ouvert est de la forme :
$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a < x < b\}$$
- Un intervalle fermé ou segment est de la forme :
$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a \leqslant x \leqslant b\}$$
- L'intervalle $]x_0 - h; x_0 + h[$ où $h > 0$ est dit intervalle ouvert de centre x_0
- Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ si, et seulement s'il existe $h > 0$ tel que : $]x_0 - h; x_0 + h[\subset V$ c-à-d qu'il contient un intervalle ouvert de centre x_0

Définition : $\mathbb{R}$ est archimédien

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \left(\forall y \in \mathbb{R}\right) \left(\exists n \in \mathbb{N}\right) ; \; nx > y$$

Conséquence : $\left(\forall \epsilon > 0\right) \left(\exists n \in \mathbb{N}^*\right) ; \; \dfrac{1}{n} < \epsilon$

C Fonction partie entière

Définition

Soit x un nombre réel

La partie entière de x est le plus grand entier relatif k qui est inférieur où égal à x. On la note : $E(x)$ ou $[x]$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{E(x) = k \Leftrightarrow k \leqslant x < k+1}$$

Proposition + Démonstration

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leqslant x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $E(x+n) = E(x) + n$

a Définitions + Suite extraite

Définitions

On appelle suite numérique toute fonction U de $\mathbb{N}$ (ou une partie $\mathtt{I}$ de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'image d'un entier n de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathtt{I}$) par la suite U est notée U_n
Le nombre U_n s'appelle le terme général de la suite U ; c'est aussi le terme de rang n de la suite U

Suite extraite

On appelle suite extraite (ou sous suite) de (U_n) toute suite (V_n) définie par $V_n = U_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Avec $\varphi(0) < \varphi(1) < ... < \varphi(n) < ...$

b Suite majorée - suite minorée - suite bornée

Soit n_0 un entier naturel. On pose $\mathrm{I} = \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant n_0\}$ et on considère la suite numérique $(U_n)_{n \geqslant n_0}$

Définitions : Suite majorée - suite minorée - suite bornée

- On dit que la suite $(U_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in \mathrm{I})\,;\; U_n \leqslant M$
- On dit que la suite $(U_n)_{n \geqslant n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in \mathrm{I})\,;\; m \leqslant U_n$
- On dit que la suite $(U_n)_{n \geqslant n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée

C Monotonie d'une suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. On pose $\mathtt{I} = \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant n_0\}$ et on considère la suite numérique $(U_n)_{n \geqslant n_0}$

Définition

- On dit que la suite $(U_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante si :
  $\left(\forall (n, m) \in \mathtt{I}^2\right) ; \left(m > n \Rightarrow U_m \geqslant U_n\right)$
- On dit que la suite $(U_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante si :
  $\left(\forall (n, m) \in \mathtt{I}^2\right) ; \left(m > n \Rightarrow U_m \leqslant U_n\right)$

Remarques :

1. Si la suite $(U_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante alors : $\left(\forall n \in \mathtt{I}\right) ; U_n \geqslant U_{n_0}$
2. Si la suite $(U_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante alors : $\left(\forall n \in \mathtt{I}\right) ; U_n \leqslant U_{n_0}$
3. On définit de même une suite strictement croissante et strictement décroissante. Il suffit de remplacer dans la définition précédente, les symboles : $\leqslant$ et $\geqslant$ par les symboles : $<$ et $>$

Proposition

1. La suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante si,et seulement si :
$(\forall n \in \mathrm{I})\,;\ U_{n+1} - U_n \geqslant 0$
2. La suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante si,et seulement si :
$(\forall n \in \mathrm{I})\,;\ U_{n+1} - U_n > 0$
3. La suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante si,et seulement si :
$(\forall n \in \mathrm{I})\,;\ U_{n+1} - U_n \leqslant 0$
4. La suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement décroissante si,et seulement si :
$(\forall n \in \mathrm{I})\,;\ U_{n+1} - U_n < 0$
5. La suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante si,et seulement si :
$(\forall n \in \mathrm{I})\,;\ U_{n+1} = U_n$
6. La suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est monotone si,et seulement si, elle est croissante ou décroissante

d Convergence d'une suite numérique

Définition

Une suite (U_n) est dite convergente si, et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Big(\forall \epsilon > 0\Big)\Big(\exists N \in \mathbb{N}\Big);\Big(\forall n \geqslant N \Rightarrow |U_n - \ell| < \epsilon\Big)$$

On dit alors que ℓ est la limite de (U_n) , $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Remarque (U_n) est convergente de limite ℓ si, et seulement si tout intervalle ouvert $\mathrm{I}_\epsilon =]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ contient tous les termes de la suite (U_n) à partir d'un certain rang N

Proposition + Démonstration

Si la suite (U_n) est convergente , alors sa limite est unique

Proposition

Si la suite (U_n) est convergente , alors toute suite extraite de (U_n) est convergente et a la même la limite que (U_n)

Remarque : Une suite divergente peut admettre une suite extraite convergente

La suite (U_n) définie par $U_n = (-1)^n$ est divergente, ses deux suites extraites U_{2n} et U_{2n+1} sont convergentes

Proposition + Démonstration

Toute suite convergente est bornée

Remarque : Une suite bornée n'est pas toujours convergente

Exemple : $U_n = (-1)^n$

Théorème + Démonstration

Toute suite (réelle) monotone croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente

Proposition + Démonstration

Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes, alors :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(U_n+V_n\Big)=\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(U_n\Big)+\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(V_n\Big)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\lambda U_n\Big)=\lambda.\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(U_n\Big)\ ;\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(U_nV_n\Big)=\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(U_n\Big).\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(V_n\Big)$
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{U_n}\right)=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n}$
5. Si $U_n\leqslant V_n$ pour tout $n\geqslant n_0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(U_n\Big)\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(V_n\Big)$
6. Si (U_n) et (V_n) convergent vers la limite ℓ et si on a $U_n\leqslant W_n\leqslant V_n$ pour tout $n\geqslant n_0$, alors la suite (W_n) est convergente vers ℓ

e Suites divergentes

- Une suite (U_n) est dite divergente si elle n'est pas convergente
- (U_n) divergente $\Leftrightarrow \Big(\forall \ell \in \mathbb{R}\Big)\ \Big(\exists \epsilon > 0\Big)\ \Big(\forall N \in \mathbb{N}\Big)\ \Big(\exists n > p\Big)$; $|U_n - \ell| \geqslant \epsilon$
- (U_n) est diverge vers $+\infty$ $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty\right)$ si, et seulement si : $\Big(\forall A > 0\Big)\ \Big(\exists N \in \mathbb{N}\Big)$; $\Big(\forall n \geqslant N \Rightarrow U_n > A\Big)$
- (U_n) est diverge vers $-\infty$ $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty\right)$ si, et seulement si : $\Big(\forall A > 0\Big)\ \Big(\exists N \in \mathbb{N}\Big)$; $\Big(\forall n \geqslant N \Rightarrow U_n < -A\Big)$

Proposition + Démonstration

1. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
2. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Suites de Cauchy

Définition

On appelle suite de Cauchy toute (U_n) vérifiant le critère de Cauchy suivant :

$$\left(\forall \epsilon > 0\right) \left(\exists N \in \mathbb{N}\right); \left(\forall p \geqslant N \text{ et } \forall q \geqslant N \Rightarrow |U_p - U_q| < \epsilon\right)$$

Théorème + Démonstration

Une suite réelle (U_n) est convergente si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy

g Suites adjacentes

Définition

Deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si, et seulement si :

- (U_n) est croissante
- (V_n) est décroissante
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \Big(U_n - V_n \Big) = 0$

Cette définition implique que : $U_n \leqslant V_n$ pour tout $n \geqslant n_0$

Théorème + Démonstration

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite

Exercice 1

Soit A un partie non vide de $\mathbb{R}$
Montre que si A admet un plus grand élément M (resp. un plus petit élément m), alors M (resp. m) est la borne supérieure (resp. borne inférieure) de A

Exercice 2

Soit B une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$
Montrer que pour toute partie A no vide telle que $A \subset B$ on a :

$$inf(B) \leqslant inf(A) \leqslant sup(A) \leqslant sup(B)$$

Exercice 3

On considère l'ensemble $A = \left\{ U_n = \dfrac{2n-1}{2n+1} / n \in \mathbb{N} \right\}$

Montrer que A est bornée . Déterminer sa borne supérieure et sa borne inférieure et dire si elles appartiennent à A

Exercice 4

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. $sup(A+B) = sup(A) + sup(B)$
2. $inf(A+B) = inf(A) + inf(B)$
3. $sup(-A) = -inf(A)$

$A + B = \{a + b / a \in A \text{ et } b \in B\}$ et $-A = \{-x / x \in A\}$

Exercice 5

On désigne par $E(x)$ la partie entière d'un réel x

1. Montrer que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : x\leqslant y \Rightarrow E(x)\leqslant E(y)$
2. Montrer que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : E(x)+E(y)\leqslant E(x+y)\leqslant E(x)+E(y)+1$
3. Montrer que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : E(x)+E(y)+E(x+y)\leqslant E(2x)+E(2y)$
4. a. Montrer que si $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^* : nE(x)\leqslant E(nx)\leqslant nE(x)+n-1$

   b. En déduire que si $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^* : E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$
5. a. Montrer que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$:
   $E(x)-E(y)-1\leqslant E(x-y)\leqslant E(x)-E(y)$

   b. Démontrer que pour tout $x\notin\mathbb{Z} : E(-x)=-E(x)-1$
6. a. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R} : E(2x)=E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)$

   b. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)=E(x)-E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

Exercice 6

Calculer les limites des suites définies par :

1. $U_n = \Pi_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$

2. $V_n = \Pi_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$

3. $W_n = \Sigma_{k=1}^{n-1} log\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$

Exercice 7

Montrer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(n!\right)^2}{\left(2n\right)!}=0$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(n!\right)^2}{\left(n^2\right)!}=0$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}+\dfrac{1}{\sqrt{3n}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}\right)=2$

Exercice 8

Étudier la nature des suites définies dans $\mathbb{N}^*$ par :

1. $U_n = 1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.2^2} + ... + \dfrac{1}{n.2^n}$
2. $V_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$

   On pourra d'abord montrer que : $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$

Exercice 9

Déterminer la nature et la limite éventuelle des deux suites définies dans $\mathbb{N}$ par :

a. $U_n = \left(-1\right)^{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

b. $V_n = \sqrt{12 + V_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $V_0 = 1$

Exercice 10

1. Montrer que toute suite croissante non majorée (resp. décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$)
2. On considères les deux suites (U_n) et (V_n) définies par :

$U_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1.2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2.3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{(n-1).n}}$ pour $n \geqslant 2$

avec $U_1 = 1$ et $V_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

   a. Montrer que $U_n \geqslant V_n\,;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
   b. Montrer que la suite (V_n) est divergente en utilisant la critère de Cauchy
   c. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Exercice 11

On considère la suite de terme général : $V_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ où $U_n = \dfrac{1}{n(n+2)(n+4)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tel que : $U_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n+4}$
2. Calculer V_n en fonction de n. En déduire sa limite

Exercice 12

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 1 + \dfrac{6}{U_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que :
   - a Si $U_n > 3$ alors $U_{n+2} > 3$ et si $U_n < 3$ alors $U_{n+2} < 3$
   - b Si $U_n > 3$ alors $U_{n+2} < U_n$ et si $U_n < 3$ alors $U_{n+2} > U_n$
2. En étudiant les deux suites extraites (U_{2p}) et (U_{2p+1}) montrer que la suite (U_n) est convergente vers la limite commune à (U_{2p}) et (U_{2p+1})

Exercice 13

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = \dfrac{U_{n-1}}{3} + \dfrac{2}{U_{n-1}} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $1 < U_n < 3$ et $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{U_n.U_{n-1}} < \dfrac{1}{2}$
2. Montre que $|U_{n+1} - U_n| < \dfrac{2}{3}\,|U_n - U_{n-1}|$ et en déduire que :
   $|U_{n+1} - U_n| < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |U_1 - U_0|$
3. Démontrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 13

Montrer que la suite (réelle) (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{1+U_n}{3+U_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (resp. $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{5+U_n}$) , est convergente et calculer sa limite

Exercice 14

Montrer que les suites définies par :

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \text{ et } V_n = U_n + \frac{1}{n}$$

sont convergentes et ont la même limite

Exercice 15

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n \geqslant \sqrt{n}$
2. Préciser la limite de la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$

Exercice 16

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2}$

1. Étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$
2.
   a. Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 2$

   $$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \text{ et que } \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   b. En déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $2 - \frac{1}{n} < U_n < 2$

   c. Montrer que $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente

Exercice 17

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante
2. Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $U_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$
3. En déduire que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente

Exercice 18

Soit (U_n) une suite croissante et majorée

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $V_n = \frac{U_1 + U_2 + ... + U_n}{n}$

Montrer que la suite (V_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente

Exercice 19

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

1. Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $U_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + U_n$
2. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante
3. Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Exercice 20

On considères les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 2a \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où a est un réel strictement positif

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < V_n$
2. Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante
3. Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes

Exercice : Généralités sur les suites récurrentes $U_{n+1} = f(U_n)$

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ continue sur I
On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 \in \mathrm{I}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$; $U_n \in \mathrm{I}$
2. On suppose dans cette question que f est croissante sur I
   - a Démontrer que (U_n) est monotone ($U_0 \geqslant U_1$ ou $U_1 \geqslant U_0$)
   - b On suppose que I est un segment, $\mathrm{I} = [a; b]$. Démontrer que (U_n) est convergente et déterminer une équation satisfaite par sa limite ℓ
3. On suppose dans cette question que f est décroissante sur I . On pose : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$. Démontrer que les suites (V_n) et (W_n) sont monotones et qu'elles ont des sens de variations contraires

Remarque

Cas particulier des fonction homographiques : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

- Si $x = f(x)$ a une unique solution γ on prouve que la suite définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - \gamma}$ est arithmétique
- Si $x = f(x)$ a deux solutions α et β alors la suite définie par $V_n = \dfrac{U_n - \alpha}{U_n - \beta}$ est géométrique

On peut alors déterminer V_n, puis U_n en fonction de n, et en déduire la convergence (limite) de (U_n)