

Capítulo 9 Funciones Complejas

Sección 9.1 Limites, continuidad, derivadas

Problemas Sección 9.1

En cada problema del 1 al 16, encuentre u y v de manera que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, determine todos los puntos (si los hay) en donde las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, y determine todos los puntos en donde la función es diferenciable. Se pueden suponer todos los resultados familiares de la continuidad de funciones reales de dos variables.

1. $f(z) = z - i$

Solución.

$$f(z) = x + iy - i$$

$$f(z) = x + i(y - 1)$$

$$u = x \quad v = y - 1$$

Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = 1 = v_y$$

$$u_y = 0 = -v_x$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen $\forall z \in \mathbb{C}$

Al cumplirse las condiciones de C-R la función es diferenciable en todo punto.

2. $f(z) = |z|$

Solución.

$$f(z) = |x + iy|$$

$$f(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad v = 0$$

Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) \neq 0 = v_y$$

$$u_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2y) \neq 0 = -v_x$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto

Al no cumplirse las condiciones de C-R la función no es diferenciable en ningún punto.

3. $f(z) = i|z|^2$ Solución.

$$f(z) = i(\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$f(z) = i(x^2 + y^2)$$

$$u = 0 \quad v = x^2 + y^2$$

Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = 0 \neq 2y = v_y$$

$$u_y = 0 \neq -2x = -v_x$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann solo se satisfacen si $x=0$, $y=0$

Al no cumplirse las condiciones de C-R $\forall z \in \mathbb{C}$ y no ser analítica, la función no es diferenciable en ningún punto.

4. $f(z) = \frac{z}{\operatorname{Re}(z)}$

Solución.

$$f(z) = \frac{x+iy}{x}$$

$$u = 1 \quad v = \frac{y}{x}$$

Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = 0 \neq \frac{1}{x} = v_y$$

$$u_y = 0 \neq \frac{y}{x^2} = -v_x$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto.

Al no cumplirse las condiciones de C-R la función no es diferenciable en ningún punto.

5. $f(z) = \bar{z}^2$

Solución.

$$f(z) = (x - iy)^2$$

$$f(z) = x^2 - 2ixy - y^2$$

$$u = x^2 - y^2 \quad v = -2xy$$

Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = 2x \neq -2x = v_y$$

$$u_y = -2y \neq 2y = -v_x$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann solo se satisfacen si $x=0$, $y=0$.

Al no cumplirse las condiciones de C-R $\forall z \in \mathbb{C}$ y no ser analítica, la función no es diferenciable en ningún punto.

6. $f(z) = -4z + \frac{1}{z}$

Solución.

$$f(z) = -4(x + iy) + \frac{1}{x+iy} \left(\frac{x-iy}{x-iy} \right)$$

$$f(z) = -4x - 4iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

$$u = -4x + \frac{x}{x^2+y^2} \quad v = -4y - \frac{y}{x^2+y^2}$$

Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = -4 + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -4 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -4 - \frac{x^2+y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = v_y$$

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

Al cumplirse las condiciones de C-R $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$, la función es diferenciable $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

7. $f(z) = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)$ Solución

$$f(z) = x - y$$

$$u = x - y \quad v = 0$$

Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = 1 \neq 0 = v_y$$

$$u_y = -1 \neq 0 = -v_x$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto.

Al no cumplirse las condiciones de C-R en ningún punto, la función no es diferenciable en ningún punto.

8. $f(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{2z}{z+1}\right)$

Solución

$$\frac{2z}{z+1} = \frac{2(x+iy)}{x+iy+1} = \frac{2x+2iy}{(x+1)+iy} \cdot \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{(2x+2iy)((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{2x(x+1)-2ixy+2iy(x+1)+2y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$f(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{2x(x+1)-2ixy+2iy(x+1)+2y^2}{(x+1)^2+y^2}\right)$$

$$f(z) = \frac{-2xy+2xy+2y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$u = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2} \quad v = 0$$

Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = \frac{-2y(2)(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{-4xy-4y}{((x+1)^2+y^2)^2} \neq 0 = v_y$$

$$u_y = \frac{(2)((x+1)^2+y^2)-(2y)(2y)}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+4x+2+2y^2-4y^2}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+4x-2y^2+2}{((x+1)^2+y^2)^2} \neq 0 = -v_x$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto.

Al no cumplirse las condiciones de C-R la función no es diferenciable en ningún punto.

Sección 9.2 Series de potencias

Problemas Sección 9.2

En cada uno de los problemas, determine el radio de convergencia y el disco abierto de convergencia de la serie de potencias.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (z+3i)^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} (z-1+3i)^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+1}} (z+8i)^n$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}} (z+6+2i)^n$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2^{n+1}} (z+4)^n$

6. ¿Es posible que $\sum c_n(z - 2i)^n$ converja en 0 y diverja en i ?
7. Suponga $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia R y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* z^n$ tiene radio de convergencia R^* .
 ¿Qué se puede decir acerca del radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n + c_n^*) z^n$?
8. Considere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, donde $c_n = 2$ si n es par y $c_n = 1$ si n es impar. Pruebe que el radio de convergencia de esta serie de potencias es 1, pero que este número no se puede calcular usando el criterio de la razón. (Esto significa simplemente que no siempre se puede usar este criterio para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias.)