Capítulo 9 Funciones Complejas

Sección 9.1 Limites, continuidad, derivadas

Problemas Sección 9.1

En cada problema del 1 al 16, encuentre u y v de manera que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, determine todos los puntos(si los hay)en donde las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, y determine todos los puntos en donde la función es diferenciable. Se pueden suponer todos los resultados familiares de la continuidad de funciones reales de dos variables.

1. $f(z) = z - i$
   Solución.
   $f(z) = x + iy - i$
   $f(z) = x + i(y - 1)$
   $u = x \qquad v = y - 1$
   Condiciones de Cauchy-Riemann.
   $u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$
   $u_x = 1 = v_y$
   $u_y = 0 = -v_x$
   Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen $\forall z \epsilon \mathbb{C}$
   Al cumplirse las condiciones de C-R la función es diferenciable en todo punto.

2. $f(z) = |z|$
   Solución.
   $f(z) = |x + iy|$
   $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   $u = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad v = 0$
   Condiciones de Cauchy-Riemann.
   $u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$
   $u_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) \neq 0 = v_y$
   $u_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2y) \neq 0 = -v_x$
   Las condiciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto
   Al no cumplirse las condiciones de C-R la función no es diferenciable en ningún punto.

3. $f(z) = i|z|^2$ Solución.
   $f(z) = i(\sqrt{x^2 + y^2})^2$
   $f(z) = i(x^2 + y^2)$
   $u = 0 \qquad v = x^2 + y^2$
   Condiciones de Cauchy-Riemann.
   $u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$
   $u_x = 0 \neq 2y = v_y$
   $u_y = 0 \neq -2x = -v_x$
   Las condiciones de Cauchy-Riemann solo se satisfacen si x=0 , y=0

Al no cumplirse las condiciones de C-R $\forall z \epsilon \mathbb{C}$ y no ser analítica, la función no es diferenciable en ningún punto.

4. $f(z) = \frac{z}{Re(z)}$
   Solución.
   $f(z) = \frac{x+iy}{x}$
   $u = 1 \qquad v = \frac{y}{x}$
   Condiciones de Cauchy-Riemann.
   $u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$
   $u_x = 0 \neq \frac{1}{x} = v_y$
   $u_y = 0 \neq \frac{y}{x^2} = -v_x$
   Las condiciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto.
   Al no cumplirse las condiciones de C-R la función no es diferenciable en ningún punto.

5. $f(z) = \overline{z}^2$
   Solución.
   $f(z) = (x - iy)^2$
   $f(z) = x^2 - 2ixy - y^2$
   $u = x^2 - y^2 \qquad v = -2xy$
   Condiciones de Cauchy-Riemann.
   $u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$
   $u_x = 2x \neq -2x = v_y$
   $u_y = -2y \neq 2y = -v_x$
   Las condiciones de Cauchy-Riemann solo se satisfacen si x=0, y=0.
   Al no cumplirse las condiciones de C-R $\forall z \epsilon \mathbb{C}$ y no ser analítica, la función no es diferenciable en ningún punto.

6. $f(z) = -4z + \frac{1}{z}$
   Solución.
   $f(z) = -4(x + iy) + \frac{1}{x+iy}(\frac{x-iy}{x-iy})$
   $f(z) = -4x - 4iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$
   $u = -4x + \frac{x}{x^2+y^2} \qquad v = -4y - \frac{y}{x^2y^2}$
   Condiciones de Cauchy-Riemann.
   $u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$
   $u_x = -4 + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -4 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -4 - \frac{x^2+y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = v_y$
   $u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$
   Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen $\forall z \epsilon \mathbb{C} - \{0\}$
   Al cumplirse las condiciones de C-R $\forall z \epsilon \mathbb{C} - \{0\}$, la función es diferenciable $\forall z \epsilon \mathbb{C} - \{0\}$.

7. $f(z) = Re(z) - Im(z)$ Solución
   $f(z) = x - y$
   $u = x - y \qquad v = 0$
   Condiciones de Cauchy-Riemann.
   $u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$

$u_x = 1 \neq 0 = v_y$
$u_y = -1 \neq 0 = -v_x$
Las condiciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto.
Al no cumplirse las condiciones de C-R en ningún punto, la función no es diferenciable en ningún punto.

8. $f(z) = Im(\frac{2z}{z+1})$
Solución

$\frac{2z}{z+1} = \frac{2(x+iy)}{x+iy+1} = \frac{2x+2iy}{(x+1)+iy}(\frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy}) = \frac{(2x+2iy)((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{2x(x+1)-2ixy+2iy(x+1)+2y^2}{(x+1)^2+y^2}$
$f(z) = Im(\frac{2x(x+1)-2ixy+2iy(x+1)+2y^2}{(x+1)^2+y^2})$
$f(z) = \frac{-2xy+2xy+2y}{(x+1)^2+y^2}$
$f(z) = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$
$u = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2} \qquad v = 0$
Condiciones de Cauchy-Riemann.
$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$

$u_x = \frac{-2y(2)(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{-4xy-4y}{((x+1)^2+y^2)^2} \neq 0 = v_y$

$u_y = \frac{(2)((x+1)^2+y^2)-(2y)(2y)}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+4x+2+2y^2-4y^2}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+4x-2y^2+2}{((x+1)^2+y^2)^2} \neq 0 = -v_x$

Las condiciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto.
Al no cumplirse las condiciones de C-R la función no es diferenciable en ningún punto.

Sección 9.2 Series de potencias

Problemas Sección 9.2

En cada uno de los problemas, determine el radio de convergencia y el disco abierto de convergencia de la serie de potencias.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(z+3i)^n$
Solución
Por el criterio del cociente.

$\lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}(z+3i)^{n+1}}{\frac{n+1}{2^n}(z+3i)^n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{2^n(n+2)}{2^{n+1}(n+1)}(z+3i)| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n+2}{2(n+1)}(z+3i)| = \frac{1}{2}|z+3i|$

Para que la serie sea convergente.
$\frac{1}{2}|z+3i| < 1$
De esta manera. $|z+3i| < 2$
Por lo tanto el disco abierto de convergencia es $|z+3i| < 2$ y el R=2.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}(z-1+3i)^n$
   Solución
   $\frac{n^n}{(n+1)^n}(z-1+3i)^n = (\frac{n}{n+1})^n(z-1+3i)^n = ((\frac{n}{n+1})(z-1+3i))^n$

   Por el criterio de la raíz.

   $\text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|((\frac{n}{n+1})(z-1+3i))^n|} = \text{lím}_{n\to\infty}|\frac{n}{n+1}(z-1+3i)| = |z-1+3i|$
   Para que la serie sea convergente.
   $|z-1+3i| < 1$ Por lo tanto el disco abierto de convergencia es $|z-1+3i| < 1$ y el R=1.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+1}}(z+8i)^n$ Solución
   Por el criterio del cociente.

   $\text{lím}_{n\to\infty}|\frac{\frac{i^{n+1}}{2^{n+2}}(z+8i)^{n+1}}{\frac{i^n}{2^{n+1}}(z+8i)^n}| = \text{lím}_{n\to\infty}|\frac{i^{n+1}(2^{n+1})}{i^n 2^{n+2}}(z+8i)| = \text{lím}_{n\to\infty}|\frac{i}{2}(z+8i)| = \frac{|i|}{|2|}|z+8i| = \frac{1}{2}|z+8i|$

   Para que la serie sea convergente.
   $\frac{1}{2}|z+8i| < 1$
   De esta manera. $|z+8i| < 2$
   Por lo tanto el disco abierto de convergencia es $|z+8i| < 2$ y el R=2.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}(z+6+2i)^n$ Solución
   Por el criterio del cociente.

   $\text{lím}_{n\to\infty}|\frac{\frac{(n+1)^2}{2(n+1)+1}(z+6+2i)^{n+1}}{\frac{n^2}{2n+1}(z+6+2i)^n}| = \text{lím}_{n\to\infty}|\frac{(2n+1)(n^2+2n+1)}{(n^2)(2n+3)}(z+6+2i)| =$
   $\text{lím}_{n\to\infty}|\frac{2n^3+5n^2+4n+1}{2n^3+3n^2}(z+6+2i)| = |z+6+2i|$

   Para que la serie sea convergente.
   $|z+6+2i| < 1$
   Por lo tanto el disco abierto de convergencia es $|z+6+2i| < 1$ y el R=1.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1}(z+4)^n$ Solución
   Por el criterio del cociente.

   $\text{lím}_{n\to\infty}|\frac{\frac{e^{i(n+1)}}{2(n+1)+1}(z+4)^{n+1}}{\frac{e^{in}}{2n+1}(z+4)^n}| = \text{lím}_{n\to\infty}|\frac{(e^{in+i})(2n+1)}{(e^{in})(2n+3)}(z+4)| =$
   $\text{lím}_{n\to\infty}|\frac{e^i(2n+1)}{2n+3}(z+4)| = |z+4|$

   Para que la serie sea convergente.
   $|z+4| < 1$

Por lo tanto el disco abierto de convergencia es $|z+4| < 1$ y el R=1.

6. ¿Es posible que $\sum c_n(z-2i)^n$ converja en 0 y diverja en i?
Solución
No, debido a que i esta mas cerca de 2i que 0, por lo que si converge en 0 entonces debe de converger en i.

7. Suponga $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia R y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* z^n$ tiene radio de convergencia R^*. ¿Qué se puede decir acerca del radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(c_n + c_n^*)z^n$?
Solución.
El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(c_n + c_n^*)z^n$ es al menos tan grande como R o al menos tan grande como R^*.

8. Considere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, donde $c_n = 2$ si n es par y $c_n = 1$ si n es impar. Pruebe que el radio de convergencia de esta serie de potencias es 1, pero que este número no se puede calcular usando el criterio de la razón.(Esto significa simplemente que no siempre se puede usar este criterio para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias.)
Solución
Por el Criterio de la razon tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 2$ si n es par y que $\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{1}{2}$ si n es impar, por lo tanto el limite no existe.
Sin embargo por el criterio de la raíz tenemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = |C_n|^0 = 1$, de manera que el radio de convergencia es 1 por el criterio de la raíz n-ésima.

Sección 9.3 Las funciones exponencial y trigonométricas.

Problemas Sección 9.3

En cada problema del 1 al 10, escriba la función en la forma $a + ib$.

1. e^i
   Solución.
   $e^i = \cos(1) + i\sin(1)$

2. $\cos(3+2i)$
   Solución.
   $\cos(3+2i) = \cos(3)\cosh(2) - i\sin(3)\sinh(2)$

3. e^{5+2i}
   Solución
   $e^{5+2i} = e^5 e^{2i} = e^5(\cos(2) + i\sin(2)) = e^5\cos(2) + ie^5\sin(2)$

4. $\sin^2(1+i)$
   Solución.
   $\sin^2(1+i) = \dfrac{1-\cos(2+2i)}{2} = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2)\cosh(2) + i\sin(2)\sinh(2))$
   $\sin^2(1+i) = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2)\cosh(2)) + i\dfrac{1}{2}(\sin(2)\sinh(2)))$

5. $e^{\pi\frac{i}{2}}$
   Solución.
   $e^{\pi\frac{i}{2}} = \cos(\dfrac{\pi}{2}) + i\sin(\dfrac{\pi}{2}) = i$

6. Encuentre $u(x,y)$ & $v(x,y)$ tales que $e^{z^2} = u(x,y) + iv(x,y)$. Pruebe que u & v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para todo complejo z
   Solución.
   $e^{z^2} = e^{x^2+i2xy-y^2} = e^{x^2-y^2+i2xy} = \underbrace{e^{x^2-y^2}\cos(2xy)}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^{x^2-y^2}\sin(2xy)}_{v(x,y)}$
   $u_x = -e^{x^2-y^2}\sin(2xy)2y + \cos(2xy)e^{x^2-y^2}2x$
   $v_y = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)2x - e^{x^2-y^2}\sin(2xy)2y$

7. Encuentre $u(x,y)$ & $v(x,y)$ tales que $\tan(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
   Solución
   $$\begin{aligned}\tan(z) = \tan(x+iy) &= \tfrac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)}\\ &= \tfrac{\sin(x)\cosh(y)+i\sinh(y)\cos(x)}{\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)}\\ &= \tfrac{(\sin(x)\cosh(y)+i\sinh(y)\cos(x))(\cos(x)\cosh(y)+i\sin(x)\sinh(y))}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)}\\ &= \tfrac{\sin(x)\cosh^2(y)\cos(x)+i\sin^2(x)\sinh(y)\cosh(y)+i\cos^2(x)\sinh(y)\cosh(y)-\sin(x)\cos(x)\sinh^2(y)}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(x)\cos(x)(\cosh^2(y) - \text{senh}^2(y)) + i\sinh(y)\cosh(y)(\sin^2(x)+\cos^2(x))}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)}$$
$$= \frac{\sin(x)\cos(x) + i\sinh(y)\cosh(y)}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)}$$
$$= \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)} + i\frac{\sinh(y)\cosh(y)}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)}$$

$$u(x,y) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)}$$
$$v(x,y) = \frac{\sinh(y)\cosh(y)}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)}$$

8. Pruebe que $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ para todo complejo z

Solución

$$\begin{aligned}
\sin^2(z) + \cos^2(z) &= (\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i})^2 + (\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2})^2 \\
&= \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{-4} + \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} \\
&= \frac{-(e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}) + (e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz})}{4} \\
&= \frac{-(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz})}{4} \\
&= \frac{2+2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

9. Defina las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbĺico complejas por $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ Pruebe que ambas de estas funciones pueden escribirse en términos de las funciones trigonométricas.

Solución.

Tenemos que $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ y $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Ahora $z = zi$.

$$\begin{aligned}
\sin(zi) &= \frac{e^{i(zi)} - e^{-i(zi)}}{2i} \\
&= \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} \\
&= -i\frac{e^{-z} - e^{z}}{2} \\
&= i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \\
&= i\sinh(z)
\end{aligned}$$

Ahora para $\cos(z)$

$$\begin{aligned}
\cos(zi) &= \frac{e^{i(zi)} + e^{-i(zi)}}{2} \\
&= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$= \cosh(z)$$

10. Determine todos los números complejos tales que $\sinh(z) = 0$
    Solución
    $\sinh(z) = 0 = -i\sin(zi)$
    $\sin(zi) = 0$
    $zi = n\pi$ Son los valores en los que el seno es igual a 0
    $z = -in\pi \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

11. Encuentre todas las soluciones de $e^z = 2i$
    Solución
    $log(e^z) = z = \log(2i) = \ln(2) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

12. Encuentre todas las soluciones de $e^z = -2$
    Solución
    $log(e^z) = z = \log(-2) = \ln(2) + i(\pi + 2\pi n), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

Sección 9.4 El logaritmo complejo.

Problemas Sección 9.4

En cada problema,determine todos los valores de $\log(z)$ y también el valor de $\text{Log}(z)$ definido en la discusión.

1. $-4i$
   Solucioń
   $\log(-4i) = \ln(4) + i(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)$
   $\text{Log}(-4i) = \ln(4) + i\frac{3\pi}{2}$

2. -5
   Solución
   $\log(-5) = \ln(5) + i(\pi + 2n\pi)$
   $\text{Log}(-5) = \ln(5) + i\pi$

3. $-9 + 2i$
   Solución
   $\log(-9 + 2i) = \frac{\ln(85)}{2} + i(2\pi - \arctan(\frac{2}{9}) + 2n\pi)$
   $\text{Log}(-9 + 2i) = \frac{\ln(85)}{2} + i(2\pi - \arctan(\frac{2}{9}))$

4. Sean z & w números complejos distintos de cero. Pruebe que cada valor de $\log(\frac{z}{w})$ es igual al valor de $\log(z)$ menos un valor de $\log(w)$
   Solución.

   Sea $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(arg(z)-arg(w))}$.

   $$\begin{aligned}\log(\tfrac{z}{w}) &= \log(\tfrac{|z|}{|w|}e^{i(arg(z)-arg(w))}) \\ &= \ln(\tfrac{|z|}{|w|}) + i(arg(z) - arg(w)) + 2\pi ni \\ &= \ln(|z|) - \ln(|w|) - iarg(w) + 2\pi ni \\ &= \ln(|z|) + iarg(z) + 2\pi ni - \ln(|w|) - iarg(w) \\ &= \log(z) - Log(w)\end{aligned}$$

   Log(w) es valor de $\log(w)$
   De esta manera tenemos que
   $\log(\frac{z}{w}) = \log(z) - log(w)$