Лабораторная работа 2

Симплексный метод решения задач линейного программирования.

Цель: научиться аналитически решеть задачу линейного программирования; сопоставлять полученные графическое а аналитическое решения.

Алгоритм решения задачи симплексным методом

Шаг 1. Найти начальное базисное решение

Записать исходную задачу в канонической форме. За начальные базисные переменные берутся те m переменных, при которых коэффициенты в уравнениях ограничений образуют единичную матрицу. Этого можно добиться, осуществляя преобразования Гаусса-Жордана. Вторым способом нахождения базисного решения является переход к М-задаче.

Выделить базисные и свободные (все остальные, кроме базисных) переменные.

Найти начальное базисное решение, полагая свободные переменные равными нулю.

Шаг 2. Заполнить таблицу 2.1.

Таблица 2.1

			c_1	c_2	…	$-M$	c_j
c_{iB}	*БП*	*БР*	x_1	x_2	…	x_{n+m}	$БР/\overline{a_{ir}}$
			$\overline{a_{11}}$	$\overline{a_{12}}$		0	
			…	…			
			$\overline{a_{m1}}$	$\overline{a_{m2}}$		1	
			z_1	z_2		z_{n+m}	z_j
			Δ_1	Δ_2		Δ_{n+m}	Δ_j

БП – столбец базисных переменных;

БР – столбец базисного решения;

c_j – строка коэффициентов целевой функции;

c_{iB} – столбец коэффициентов целевой функции, соответствующих базисным перменным;

$\overline{a_{ij}}$ – коэффициенты системы ограничений задачи ЛП после выполнения преобразований, предусмотренных *Шагом 1*.

Шаг 3. Вычислить относительные оценки.

$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{iB}\bar{a}_{ij} = c_j - z_j \,,\, z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{iB}\bar{a}_{ij}\,,\; j = 1, \dots, m+n$

записать их в таблицу.

Шаг 4. Проанализировать относительные оценки (задача была записана в канонической форме, следовательно, предполагается поиск максимума):

a) если все оценки Δ_j неположительны, то расчет закончен. Найденное базисное решение является оптимальным;

b) если есть положительные оценки, то следует найти максимальную среди них и проанализировать коэффициенты столбца таблицы, которому соответствует максимальная положительная оценка. Если этот столбец содержит хотя бы один положительный коэффициент, то номер столбца обозначается через r, а переменная, соответствующая ему, вводится в число базисных. Если среди коэффициентов этого столбца нет ни одного положительного, то это означает, что множество допустимых решений задачи не ограничено, а функция *f(x)* не ограничена сверху и задача решения не имеет.

Столбец, соответствующий выбранной оценке, называется разрешающим.

Шаг 5. Поделить элементы столбца базисных решений (БР) на соответствующие элементы разрешающего столбца и среди полученных частных выбрать наименьшее. Строка, соответствующая выбранному отношению, называется разрешающей.

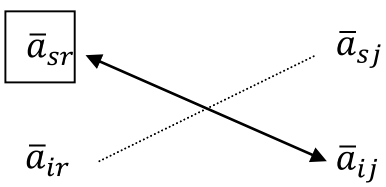
Из числа базисных выводится переменная, соответствующая разрешающей строке, а на ее место вводится переменная, соответствующая базисному столбцу.

Таким образом, новая переменная x_r вводится на место переменной x_s в, удаляемой из базиса.

Элемент, лежащий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим ($\bar{a}_{sr}$).

Шаг 6. Вычислить новое базисное решение, выполнив перерасчет таблицы:
каждый элемент разрешающей строки существующей таблицы делится на разрешающий элемент и записывается в новую таблицу;
все остальные элементы находятся по правилу прямоугольника:

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{sj} \cdot \bar{a}_{ir}}{\bar{a}_{sr}}$$



Перейти *к шагу 3.*

Переход к М-задаче

В том случае, если в уравнениях ограничений канонической задачи нет базисных переменных, то для того, чтобы применить симплексный метод, нужно сделать переход к М-задаче. В каждое из m уравнений вводится искусственная переменная со знаком «+», которая становится базисной. К целевой функции добавляется сумма искусственных переменных, умноженная на «-М». В результате получаем задачу в расширенной форме:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j-M\sum_{i=1}^{m}x_{n+p+i}\rightarrow max,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_{n+i}+\underline{x_{n+p+i}}=b_i\,,\qquad i=1,\dots,m;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i\,,\;\; i=m+1,\dots,p;$$

$$x_1\geq 0,\dots,x_{n+p+m}\geq 0.$$

Если решается задача поиска минимума целевой функции, то при переходе к *M*-задаче перед числом *M* ставится знак «+».

Задание на лабораторную работу

1. Решить задачу линейного программирования, соответствующую варианту симплексным методом. проиллюстрировать решение графически(если можно).

При решении задачи могут быть использованы любые пакеты прикладных программ, но при этом в отчете должны быть представлены:

- базисное решение,
- симплексные таблицы,
- оптимальное решение,
- графическая иллюстрация,
- ответы на контрольные вопросы

Сопоставить свое решение с тем, что предлагает Excel

Варианты заданий.

1. $f(x) = x_1 + x_2 - x_3 \;\; \to extr$

$x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

2. $f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to extr$

$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$

$x_1 + x_2 - x_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

3. $f(x) = 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to extr$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

$x_1 + 3x_3 + x_4 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

4. $f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \to extr$

$x_1 + x_3 - 3x_4 = 3$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 7$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

5. $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \to extr$

$x_1 + 3x_3 + x_4 = 10$

$x_1 + x_3 - 2x_3 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

6. $f(x) = -3x_1 + 2x_2 \to extr,$

$$-2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

7. $f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow extr,$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 16$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8. $f(x) = x_1 - 3x_2 \rightarrow extr$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 3$$
$$-5x_1 - 4x_2 \leq -9$$
$$2x_1 + x_2 \leq -5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9. $f(x) = -3x_1 + 12x_2 \rightarrow extr$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$
$$x_1 - x_2 \geq 2$$
$$3x_1 - 5x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10. $f(x) = 10x_1 + x_2 \rightarrow extr$

$$2x_1 + 11x_2 \leq 33$$
$$x_1 + x_2 = 7$$
$$4x_1 - 5x_2 \geq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Контрольные вопросы

1. Приведите общую постановку задачи и каноническую. Каким образом можно перейти от общей постановки задачи к канонической?
2. Какие переменные называются базисными, а какие свободными? Какие способы нахождения начального базисного решения существуют?
3. На основании каких признаков можно сделать вывод о:
4. количестве решений задачи линейного программирования;
5. совместна или нет система ограничений.
6. Чем отличается решение задачи о поиске минимума от решения задачи о поиске максимума?