Лабораторная работа 3

Исследование численных методов оптимизации

Реализовать программно метод градиентного спуска. Реализация должна предполагать останов при достижении заданного количества шагов, останов по величине ε, регулировать величину шага, задание начальной точки

Провести исследование влияния параметров метода на результат (количество итераций, величина параметров, точность, задание начальной точки). Для этой цели могут быть использованы приведенные задачи и предложенные вами

Результаты отразить в отчете

Для проверки

Функции и рекомендованные параметры

$$f(x) = x_1^3 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4 \to \min, \quad x^0 = (0,0)^T.$$

Ответ: точное решение $x^* = (1/2, -5/4)^T$.

$$f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to \min, \quad x^0 = (0,0)^T.$$

Ответ: точное решение $x^* = (1,1)^T$.

Для исследований

1.

из начальных точек $x^0 = (0,3)^T$ и $x^0 = (3,0)^T$ решить задачу:

$$f(x) = (x_2^2 + x_1^2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2 \to \min.$$

2.

$$f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \to \min \qquad x^0 = (0,0)^T; \varepsilon_1 = 0{,}1; \varepsilon_2 = 0{,}1.$$

3.

$$f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min \qquad x^0 = (8,9)^T; \varepsilon_1 = 0{,}1; \varepsilon_2 = 0{,}1.$$

4.

$$f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min \quad t = 0{,}1 \quad \text{из точки} \quad x^0 = (8,9)^T, \quad \varepsilon_1 = 0{,}1;$$

5.

$$f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$

с постоянным шагом $t = 0{,}1$ из точки $x^0 = (8{,}9)^T$, $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}1$; $M = 10$.

Алгоритм

Шаг 1. Задать x^0, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, предельное число итераций M. Найти градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x) = \left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f\left(x^k\right)$.

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\| < \varepsilon_1$:

а) если критерий выполнен, то $x^* = x^k$;
б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $k \geq M$:

а) если неравенство выполнено, то $x^* = x^k$;
б) если нет, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить величину шага t_k^* из условия

$$\varphi(t_k) = f\left(x^k - t_k \nabla f\left(x^k\right)\right) \to \min_{t_k}.$$

Шаг 7. Вычислить $x^{k+1} = x^k - t_k^* \nabla f\left(x^k\right)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условий

$$\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon_2, \qquad \left|f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right)\right| < \varepsilon_2:$$

а) если оба условия выполнены при текущем значении k и $k = k - 1$, то расчет окончен, $x^* = x^{k+1}$;

б) если хотя бы одно из условий не выполнено, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.