Método de Integración

19 de junio de 2023

I.4. Método de Integración por Funciones Racionales

Son integrales en donde sus integrandos presentan en la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx, \quad \text{con} \quad Q(x) \neq 0.$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ pueden ser funciones algebraicas, funciones trascendentes y/o funciones irracionales, entonces desarrollan los siguientes casos:

1. ***Caso*** $P(x)$ ***y*** $Q(x)$ ***son funciones algebraica, racional y polinómica.***

   a) $P(x)$ ***y*** $Q(x)$ ***son Funciones racional y polinomica***; las cuales $\mathrm{Grad}\{P(x)\} < \mathrm{Grad}\{Q(x)\}$ y $Q(x)$ presenta factores lineales y NO se repiten, entonces

   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

   Ejemplos

   1) Encontrar

   $$\int \frac{dx}{x^2-9}$$

   Solución.
   El integrando forman funciones racional y polinómica, de las cuales $P(x) = 1$ y $Q(x)$ se compone de factores lineales y se no repiten, esto es $Q(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$, luego

   $$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} \quad \text{de donde} \quad A = -\frac{1}{6} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{6}$$

   por consiguiente

   $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-9} &= -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{6}\ln|x-3| + \frac{1}{6}\ln|x+3| + C \\ &= \frac{1}{6}(-\ln|x-3| + \ln|x+3|) + C\end{aligned}$$

   por lo tanto, usando propiedades logaritmicas, nos queda

   $$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln|\frac{x+3}{x-3}| + C.$$

   b) $P(x)$ ***y*** $Q(x)$ ***son Funciones racional y polinomica***; las cuales $\mathrm{Grad}\{P(x)\} < \mathrm{Grad}\{Q(x)\}$ y $Q(x)$ presenta factores lineales y algunos se repite, entonces

   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}} + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Ejemplos

1) Encontrar
$$\int_1^4 \frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x}\,dx.$$

Solución.
El integrando forman funciones racional y polinómica, de las cuales $P(x) = 2x^2+13x+18$ y $Q(x) = x^3+6x^2+9x = x(x^2+6x+9) = x(x+3)^2$ se deducen con factores lineales y uno se repite, esto es

$$\frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)} = \frac{A(x+3)^2+Bx+Cx(x+3)}{x(x+3)^2}$$

de donde
$$2x^2+13x+18 = A(x+3)^2+Bx+Cx(x+3)$$

De la igualdad, sea
$$x=0;\quad \text{entonces}\quad 18 = 9A \quad \text{y} \quad A = 2$$
$$x=-3;\quad \text{entonces}\quad -3 = -3B \quad \text{y} \quad B = 1$$
$$x=-2;\quad \text{entonces}\quad 0 = A-2B-2C = 2-2-2C \quad \text{y} \quad C = 0$$

lo que la integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x}\,dx = \int_1^4 \frac{2}{x}\,dx + \int_1^4 \frac{dx}{(x+3)^2} &= 2\ln\, x]_1^4 - \frac{1}{x+3}]_1^4 \\ &= 2(\ln\,4 - \ln\,1) - (\frac{1}{7} - \frac{1}{4}) \\ &= 4\ln\,2 + \frac{3}{28} \approx 2{,}88\end{aligned}$$

por lo tanto
$$\int_1^4 \frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x}\,dx \approx 2{,}88$$

c) Si el integrando forman funciones racional y polinómica, las cuales $\text{Grad}\{P(x)\} < \text{Grad}\{Q(x)\}$ y $Q(x)$ contiene factores de segundo grado, pero ninguno se repite, entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

Ejemplo
Calcular la antiderivada de
$$\int \frac{4dx}{x^3+4x}$$

Solución.
La función racional del integrando forman funciones racional y polinómica, de las cuales

$P(x) = 4$ y $Q(x)$ se deducen con factores lineal, segundo grados y se no repiten, esto es $Q(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, luego

$$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} = \frac{A(x^2+4) + (Bx + C)x}{x(x^2+4)}$$

de donde

$$4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$

De la igualdad, sea

$$x = 0; \quad \text{entonces} \quad 4 = 4A \quad \text{y} \quad A = 1$$

$$\text{En término de } \ x^2 \ \text{ y } \ A = 1; \quad \text{entonces} \quad A + B = 0 \quad \text{y} \quad B = -1$$

$$\text{En término de } \ x \ \text{ lineal}; \quad \text{entonces} \quad C = 0$$

lo que la integral se convierte en

$$\begin{aligned} \int \frac{4dx}{x^3 + 4x} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+4} \\ &= \ln x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4) + C \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int \frac{4dx}{x^3 + 4x} = \ln x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4) + C.$$

2. ***Caso $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones trascendentes y racional con términos trigonométricas.***

$P(x)$ y $Q(x)$ son funciones trigonométricas de senos y cosenos en la función racional, las cuales se consideran las siguientes sustituciones:

$$\text{sen } x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{con} \quad z = \tan \frac{x}{2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

Ejemplo

Calcular la antiderivada de

$$\int \frac{dx}{\text{sen } x + \tan x}$$

Solución.

Considerando las siguientes sustituciones, se tienen

$$z = \tan \frac{x}{2}, \quad \text{sen } x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{con} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

lo que la integral se convierte en

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \tan x} &= \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \\
&= \int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{2z}{1-z^2}} \\
&= \int \frac{(1-z^2)}{2z} dz = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int z\, dx = \frac{1}{2}\ln \mid z \mid -\frac{1}{4}z^2 + C \\
&= \frac{1}{2}\ln \mid \tan \frac{x}{2} \mid -\frac{1}{4}\tan^2 \frac{x}{2} + C
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \tan x} = \frac{1}{2}\ln \mid \tan \frac{x}{2} \mid -\frac{1}{4}\tan^2 \frac{x}{2} + C.$$

3. ***Caso $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones algebraica, racional e irracional.***

$P(x)$ y $Q(x)$ son funciones racional e irracional; las cuales se simplifican haciendo la siguiente sustitución

$$x = z^n$$

donde n es el mínimo común denominador en los denominadores de los exponentes de términos irracionales.

Ejemplo

Calcular la integral definida

$$\int_{16}^{18} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}}$$

Solución.

La función racinal del integrando forman funciones racional e irracional, de las cuales $x = z^4 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[4]{x}$ donde $4 = \text{m.c.d}\{2,\ 4\}$ de los radicandos en los téminos irracionales, luego $dx = 4z^3 dz$, además cuando $x = 16 \quad \Rightarrow \quad z = 2$ y $x = 18 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[4]{18}$

lo que la integral se convierte en

$$
\begin{aligned}
\int_{16}^{18} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}} &= \int_{2}^{\sqrt[4]{18}} \frac{4z^3 dz}{z^2 - z^3} = 4\int_{2}^{\sqrt[4]{18}} \frac{z^3 dz}{z^2(1-z)} \\
&= -4\int_{2}^{\sqrt[4]{18}} \frac{z dz}{z-1} = -4\int_{2}^{\sqrt[4]{18}} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) dz \\
&= -4\left[z + \ln(z-1)\right]_2^{\sqrt[4]{18}} = -4\left[\sqrt[4]{18} - 2 + \ln(\sqrt[4]{18} - 1)\right] \\
&\approx -0{,}4713
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$\int_{16}^{18} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}} \approx -0{,}4713.$$

Ejemplo

Calcular la antiderivada de
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x}}$$

Solución.

La función racinal del integrando forman factores racional e irracional, de las cuales
$$z=\sqrt{1+4x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{z^2-1}{4} \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{2}zdz$$
así
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x}}=\int \frac{\frac{zdz}{2}}{\frac{z^2-1}{4}z}=\int \frac{dx}{z^2-1}$$
y
$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}=\frac{A(z+1)+B(z-1)}{z^2-1}$$
De las cuales,
$$z=1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad z=-1 \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{2}$$
luego
$$\int \frac{dx}{z^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z-1}-\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z+1}=-\frac{1}{2}\ln|z+1|-\frac{1}{2}\ln|z-1|+C$$
por lo tanto, con $z=\sqrt{1+4x}$, nos queda
$$\int \frac{dx}{z^2-1}=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{1+4x}+1}{\sqrt{1+4x}-1}}+C$$