I. Funciones algebraicas y trascendentes

Prof. Misael Solorza Guzmán

2 de marzo de 2023

I.1.2 Funciones algebraicas.

Definición **1.** Se llama *función* a un conjunto de pares ordenados de una ecuación en donde no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer valor; se denota por

$$f = \{(x,\, y) | \quad y = f(x) \quad \} \tag{1}$$

donde y representa la variable dependiente de la función y x la variable independiente. Se representa en dos formas:

Función Explícita. Es cuando la función tiene bien definida la variable dependiente; esto es,

$$y = f(x).$$

Función Implícita. Es cuando la función represente un formulismo algebraico o no tiene bien definida la variable dependiente.

Ejemplo **1.** Dado el conjunto $f = \left\{ \ (x, y) \mid \ y = 1 - x \ \right\}$, determine si es una función.

Solución. Del conjunto, se tiene

$$y = 1 - x \qquad \text{forma una función explícita, ya que} \quad y = f(x).$$

Además

$$y = 1 - x \qquad \text{representa pares ordenados } \ (x,\, y) \ \text{ con valores diferentes de } x.$$

Por lo tanto

$$f(x) = 1 - x \qquad \text{es una función.}$$

Ejemplo **2.** Dado el conjunto $f = \left\{ \ (x, y) \mid \ x^2 + y^2 = 1 \ \right\}$, determine si es una función.

Solución. Del conjunto, se tiene

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{forma una función Implícita y expresa una ecuación algebraica.}$$

del cual

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Representa dos pares ordenados diferentes $(x,\ y)$ con el mismo valor de x. Por lo tanto

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{NO es una función.}$$

Observación. Una función implícita No necesariamente representa una función; en consecuencia tener función *Multiforme.*

De $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, como $y = f(x)$, entonces se tiene una función multiforme; esto es,

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Definición **2.** *Se define* ***Dominio de una función*** *($D\{f\}$), al conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ de todos los valores de x que hacen verdadero los valores de $y = f(x)$.*

Ejemplo **3.** *Del conjunto*

$$\left\{ \ (x, y) \mid \ y = \sqrt{x - 2} \ \right\}$$

Determine si es una función y si lo es obten $D\{f(x)\}$.

Solución. Del conjunto, se tiene

$$y = \sqrt{x - 2} \qquad \text{forma una función explícita, ya que} \quad y = f(x).$$

Además

$$y = \sqrt{x - 2} \qquad \text{representa pares ordenados} \ \ (x,\ y) \ \ \text{con valores diferentes de } x.$$

luego

$$f(x) = \sqrt{x - 2} \qquad \text{es una función.}$$

Ahora, tomando valores admisibles $x \in \mathbb{R}$ de $f(x) = \sqrt{x-2}$, se tiene que

$$x - 2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 2 \qquad \text{o} \qquad [2,\ \infty)$$

por lo tanto

$$D\{f(x)\} = \Big\{\ x \in \mathbb{R} \mid\ x \geq 2\ \Big\} = [2,\ \infty)$$

Definición **3.** *Se le llama* ***Contradominio de una función*** *($I\{f\}$), al conjunto que representa a todos los resultados de $y = f(x) \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $x \in D\{f(x)\}$.*

Ejemplo **4.** *Determine el dominio y el contradominio de*

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$

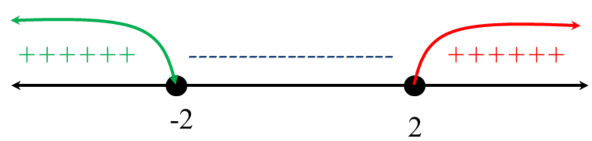
Solución. De la definición de función,

$$y = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

El dominio $D\{f(x)\}$ con valores admisibles de $x \in \mathbb{R}$, se cumple si y solo si (ssi)

$$4 - x^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 4 \leq 0 \qquad (x+2)(x-2) \leq 0$$

en la cuales forman puntos críticos $x = -2,\ 2$, nos da



$$\therefore \qquad D\{f(x)\} = \Big\{\ x \in \mathbb{R} \mid\ -2 \leq x \leq 2\ \Big\} = [-2,\ 2]$$

Ahora el contradominio $I\{f(x)\}$ son $y \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $x \in D\{f(x)\}$, así

$$-2 \leq x \leq 2 \ \ \wedge \ \ y = \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 \geq 0$$

luego

$$0 \leq x \leq 2 \ \ \Rightarrow \ \ 0 \leq x^2 \leq 4$$

multiplicando por (-1), nos da

$$-4 \leq -x^2 \leq 0 \ \ \Rightarrow \ \ 0 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

$$0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq \sqrt{4} \ \ \Rightarrow \ \ 0 \leq y \leq 2$$

$$\therefore \qquad I\{f(x)\} = \Big\{\ y \in \mathbb{R} \mid\ 0 \leq y \leq 2\ \Big\} = [0,\ 2]\,.$$

EJERCICIOS 1.1

En los ejercicios 1 a 4, determine si el conjunto es una función. Si es una función determine su dominio.

1. **(a)** $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 4}\}$

(b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$

(c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$

(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

2. **(a)** $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 1}\}$

(b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$

(c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$

(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

3. **(a)** $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ **(b)** $\{(x, y) \mid x = y^2\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = x^3\}$ **(d)** $\{(x, y) \mid x = y^3\}$

4. **(a)** $\{(x, y) \mid y = (x - 1)^2 + 2\}$

(b) $\{(x, y) \mid x = (y - 2)^2 + 1\}$

(c) $\{(x, y) \mid y = (x + 2)^3 - 1\}$

(d) $\{(x, y) \mid x = (y + 1)^3 - 2\}$

5. Dada $f(x) = 2x - 1$, determine
(a) $f(3)$; **(b)** $f(-2)$; **(c)** $f(0)$; **(d)** $f(a + 1)$; **(e)** $f(x + 1)$; **(f)** $f(2x)$; **(g)** $2\ f(x)$; **(h)** $f(x + h)$; **(i)** $f(x) + f(h)$;

(j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$

6. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x}$, calcule **(a)** $f(1)$; **(b)** $f(-3)$; **(c)** $f(6)$;

(d) $f(\frac{1}{3})$; **(e)** $f\left(\dfrac{3}{a}\right)$; **(f)** $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$; **(g)** $\dfrac{f(3)}{f(x)}$; **(h)** $f(x - 3)$;

(i) $f(x) - f(3)$; **(j)** $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$

7. Dada $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, determine **(a)** $f(-2)$; **(b)** $f(-1)$; **(c)** $f(0)$; **(d)** $f(3)$; **(e)** $f(h + 1)$; **(f)** $f(2x^2)$; **(g)** $f(x^2 - 3)$; **(h)** $f(x + h)$; **(i)** $f(x) + f(h)$;

(j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$

8. Dada $g(x) = 3x^2 - 4$, calcule **(a)** $g(-4)$; **(b)** $g(\frac{1}{2})$; **(c)** $g(x^2)$; **(d)** $g(3x^2 - 4)$; **(e)** $g(x - h)$; **(f)** $g(x) - g(h)$;

(g) $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}, h \neq 0.$

9. Dada $F(x) = \sqrt{x + 9}$, encuentre **(a)** $F(x + 9)$; **(b)** $F(x^2 - 9)$; **(c)** $F(x^4 - 9)$; **(d)** $F(x^2 + 6x)$;

(e) $F(x^4 - 6x^2)$;**(f)** $\dfrac{F(x + h) - F(x)}{h}, h \neq 0.$

10. Dada $G(x) = \sqrt{4 - x}$, determine **a)** $G(4 - x)$; ((**b**) $G(4 - x^2)$; **(c)** $G(4 - x^4)$; **(d)** $G(4x - x^2)$;

(e) $G(-x^4 - 4x^2)$; **(f)** $\dfrac{G(x + h) - G(x)}{h}, h \neq 0.$