Continuidad de una función y Teorema del valor medio.

Continuidad de una función. Una función $f(x)$ es CONTINUA en el número x_0 si y solo si satisface las tres condiciones siguientes:

1. $f(x_0)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

de lo contrario $f(x)$ es Discontinua y puede ser:

Discontinuidad removible ó eliminable si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y $f(x)$ se completa con $F(x)$ continua en x_0; y

Discontinuidad esencial ó Discontinuidad si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ NO EXISTE.

Ejemplo. De

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

determine si es discontinua removible o esencial.

Solución.

Con $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{x - 2}$ y $D\{f(x)\} = \mathbb{R}^+ - \{2\}$.

$\Rightarrow x = 2$ y $f(x)$ NO EXISTE. Luego

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x - 2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ es Discontinuidad Removible o eliminable.

y

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2} & \text{si } x \neq 2 \text{ y } x \in \mathbb{R}^+ \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2}}{4} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Verificación.

De la definición de continuidad de una función, se tiene:

1. $F(2) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. $\lim\limits_{x\to 2} F(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

3. $\lim\limits_{x\to 2} F(x) = F(2) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore$ $F(x)$ es Continua.

Ejemplo: De

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

determinar si es discontinuidad removible o esencial en $x_0 = 0$.

Solución.

Con $f(x) = \frac{1}{x}$ y $D\{f(x)\} = \mathbb{R} - \{0\}$.

$\Rightarrow x = 0$ y $f(x)$ NO EXISTE.

Luego: ~~[illegible]~~

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, con $x\to 0^+ \Rightarrow x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^+$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, con $x\to 0^- \Rightarrow x<0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^-$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

2.3. Continuidad de funciones

Def. Se dice una función $f(x)$ es Continua en un punto x_0 si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) La existencia de $f(x)$

ii) La existencia de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

de lo contrario es discontinua.

Ejemplo Analizar la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$ d) $f(x) = \operatorname{Sen} x$.

Solución.

a) $D\{f(x)\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ con $f(x) \in \mathbb{R}$ $\therefore$ forma una discontinuidad inevitable y no hay modo de que $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es discontinua Inevitable o Esencial.

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 \Rightarrow D\{f(x)\} = \mathbb{R} - \{1\} \therefore f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

es Discontinua Evitable o Removible se crea una nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{con } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$ $\quad f(x)$ es Continua en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$

ya que:

i) $f(0) = 0+1 = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ se termina con

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1 \quad y$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 1$$

por el teorema de existencia de límite $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$\therefore$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(1) = 1$ y $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x^2+1, & 0 < x \end{cases}$ es CONTINUA.

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $D\{f(x)\} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ $\therefore$ $f(x)$ es CONTINUA en $(-\infty, \infty)$.

Ejercicios. ~~[illegible]~~ Sec 1.8 1-24 (Múltiplos de 3) y 41-44.

Nota. 1. Las funciones elementales son CONTINUAS en su dominio.

2. Las funciones f y g continuas en $x = x_0$, entonces

a) $cf(x)$ es continua en $x = x_0$

b) $f \pm g$ es Continua en $x = x_0$

c) fg es Continua en $x = x_0$

d) $\frac{f}{g}$ es continua en $x = x_0$ con $g(x_0) \neq 0$

e) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $x = x_0$.

Ejemplo. Determine el intervalo o intervalos donde es CONTINUA a

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

por el teorema de existencia de límites, como:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$\therefore$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ NO EXISTE y $f(x) = \frac{1}{x}$ ES DISCONTINUA O DISCONTINUA GENERAL.

Ejemplo. Demuestre que $f(x) = \tan x$ es continua en su dominio.

Solución.

Con $f(x) = \tan x$ y $D\{f(x)\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

$\nexists\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ y $f(x) = \tan x$ NO EXISTE. Luego

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ y } \cos x \neq 0.$$

$\therefore$

$f(x) = \tan x$ es CONTINUA $\forall\ D\{f(x)\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema del valor medio   Classroom.google.com/c/[illegible]

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número c en $[a,b]$ tal que

$$f(c) = k.$$

Ejemplo. Determine si se cumple el teorema del valor medio para $f(x) = 2+x-x^2$ el intervalo cerrado $[0,3]$ y $k=1$.

Solución.

Por el teorema del valor medio, existe $c \in [0,3]$, tal que

$$f(c) = 1$$

así

$$2 + c - c^2 = 1 \Rightarrow c^2 - c - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{con} \quad c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in [0,3]$$

$\therefore$ $f(x) = 2 + x - x^2$ es CONTINUA Y CUMPLE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO