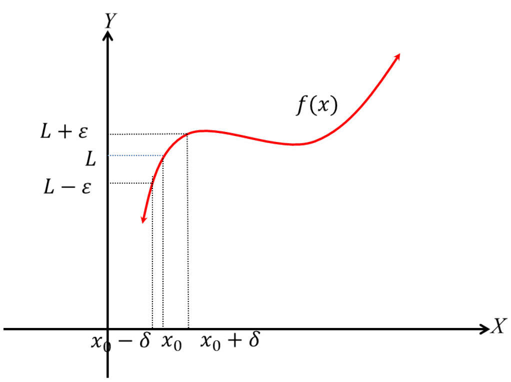
II. Límite de funciones y continuidad

Prof. Misael Solorza Guzmán

15 de marzo de 2023

II.1 Límite de manera gráfica, numérica y técnica.

***Definición* 1.** *Se llama **límite de una función** $f(x)$ al valor L, si para todo x entorno a x_0 con excepción $x = x_0$, tienden siempre a la imagen de $f(x)$; esto es,*



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

de donde

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 <\mid x - x_0 \mid < \delta$$

$$\Rightarrow \quad \mid f(x) - L \mid < \epsilon.$$

***Ejemplo* 1.** *Demuestre que* $\lim_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$, *usando la definición de límite.*

Solución. Con la definición de límite,

$$\lim_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$$

de las cuales

$$x_0 = -2, \quad f(x) = 7 - 2x \quad \text{y} \quad L = 11$$

por consiguiente

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 <\mid x - (-2) \mid < \delta \quad \Rightarrow \quad \mid (7 - 2x) - 11 \mid < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | 7-2x-11 |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | -2x-4 |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | (-2)(x+2) |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | -2 || x+2 |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad 2 | x+2 |< \epsilon$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{\epsilon}{2} \text{ satisfface la definición de límite.} \quad \textbf{q.e.d.}$$

Comprobación.

$$| x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | x+2 |< \tfrac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 | x+2 |< \epsilon \Rightarrow \quad | -2x-4 |< \epsilon$$

$$\therefore \quad | (7-2x)-11 |< \epsilon.$$

Ejemplo 2. *Demuestre que* $\lim\limits_{x \to 5} (-4) = -4$*, usando la definición de límite.*

Solución. Con la definición de límite,

$$\lim_{x \to 5} (-4) = -4$$

de las cuales

$$x_0 = 5, \quad f(x) = -4 \text{ y } L = -4$$

por consiguiente

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 <| x-5 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | -4-(-4) |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x-5 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | -4+4 |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x-5 |< \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < \epsilon$$

$$\therefore \quad \epsilon > 0 \text{ satisface la definición de límite y en paricular } \delta = \epsilon \quad \textbf{q.e.d.}$$

Comprobación. Como

$$0 <| x-5 |< \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < \delta \text{ o } 0 < \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad | 4-4 |< \epsilon \Rightarrow \quad | -4+4 |< \epsilon$$

$$\therefore \quad | -4-(-4) |< \epsilon.$$