3.1.2. Derivada en un punto y en diferentes intervalos.

Diferenciación Operación mediante el cual se obtiene la derivada.

Diferenciable Operación de derivada en cada punto del dominio de la función. $f'(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ con $x_1 \in D\{f(x)\}$.

Ejemplo 1. Determinar si $f(x) = \sqrt{x}$ es diferenciable en $[0, \infty)$.

Solución.

Usando la definición de la derivada

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Con $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_1 = 0$ entonces

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{0+\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\sqrt{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty$$

Como $f(x) = \sqrt{x}$ y $D\{f(x)\} = [0, \infty)$ y $f'(0)$ No existe

$\therefore$ $f(x) = \sqrt{x}$ No es diferenciable en 0.

Teorema de funciones diferenciables. Una función $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ si y sólo si $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

de los cuales

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{derivada lateral derecha}$$

y

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{derivada lateral izquierda}$$

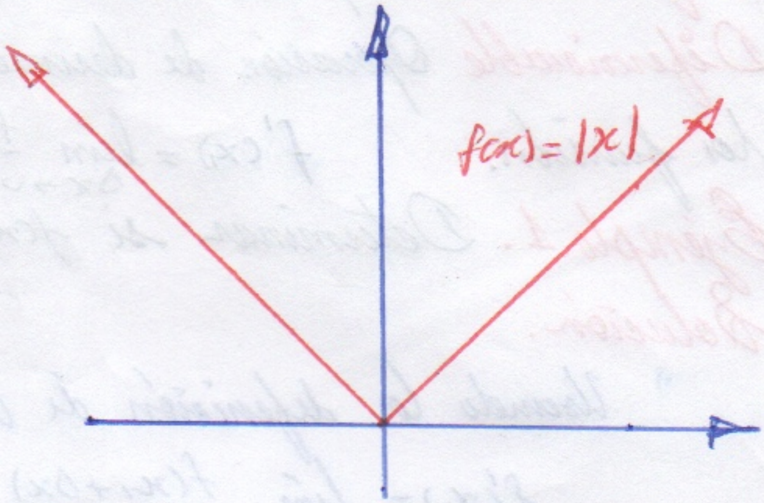
si existe el límite.

Ejemplo 2. Dada la función $f(x)=|x|$ ~~en x=0~~ verifique si es derivable en $x=0$.

Solución

Como

$$f(x)=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$$



usando derivadas laterales en $x=0$, se tiene

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

y

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-1)=\underline{\underline{-1}}$$

como $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ por el teorema de la función derivable $f'(0)$ No existe y $f(x)=|x|$ no es derivable en $x=0$.

Ejercicios 2.2 impares 1 - 47 Leithold

Nota. La derivada de una función se denota por

$$f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ y',\ \frac{d}{dx}\{f(x)\}\ ó\ D_x[y]$$

de donde

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

EJERCICIOS 2.2

En los ejercicios 1 a 20, haga lo siguiente: (a) dibuje la gráfica de la función; (b) determine si f es continua en x_1; (c) calcule $f'_-(x_1)$ y $f'_+(x_1)$ si existen; (d) determine si f es diferenciable en x_1.

1. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ -x - 6 & \text{si } -4 < x \end{cases} \qquad x_1 = -4$

2. $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 7 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \qquad x_1 = 2$

3. $f(x) = |x - 3| \qquad x_1 = 3$

4. $f(x) = 1 + |x + 2| \qquad x_1 = -2$

5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases} \qquad x_1 = 0$

6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases} \qquad x_1 = 0$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases} \qquad x_1 = 0$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \qquad x_1 = 2$

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & \text{si } x < 1 \\ (1 - x)^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \qquad x_1 = 1$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ -1 - 2x & \text{si } -1 \leq x \end{cases} \qquad x_1 = -1$

11. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 8x - 11 & \text{si } 2 < x \end{cases} \qquad x_1 = 2$

12. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ 6x - 18 & \text{si } 3 \leq x \end{cases} \qquad x_1 = 3$

13. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \qquad x_1 = -1$

14. $f(x) = (x - 2)^{-2} \qquad x_1 = 2$

15. $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{si } x \leq 3 \\ -4 - x^2 & \text{si } 3 < x \end{cases} \qquad x_1 = 3$

16. $f(x) = \begin{cases} -x^{2/3} & \text{si } x \leq 0 \\ x^{2/3} & \text{si } 0 < x \end{cases} \qquad x_1 = 0$

17. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases} \qquad x_1 = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \qquad x_1 = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 & \text{si } 2 < x \end{cases} \qquad x_1 = 2$

20. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \end{cases} \qquad x_1 = 1$