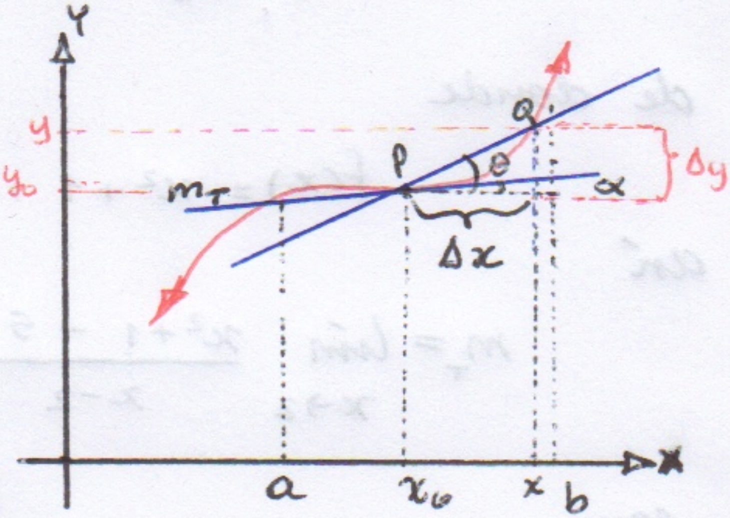
3.1 Derivada

Def. Se dice **Derivada** a la pendiente que representa la recta tangente en la curva de $f(x)$ cuando $x \to x_0$, esto es

$$m_T = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

si el límite existe.

Ecuación de la recta por Punto - Pendiente



$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$m = m_T = \tan \alpha = f'(x_0)$$

además:

1. Si una recta es PERPENDICULAR a la recta tangente en la curva, entonces

$$m_T \, m_N = -1$$

$m_T \equiv$ Pendiente de la recta tangente

$m_N \equiv$ Pendiente de la recta perpendicular (Normal)

2. Si una recta es PARALELA a la recta tangente en la curva, entonces

$$m_T = m_P$$

$m_P \equiv$ Pendiente de la recta paralela.

Ejemplo. Determine la recta normal que tiene la recta tangente en el punto $(2,5)$ de la parabola $y=x^2+1$. Muestre la geometría del resultado.

Solución

Usando la definición de la derivada, se tiene:

$$m_T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

de donde

$$f(x) = x^2+1 \ , \quad x_0 = 2 \quad y \quad f(2) = 5$$

así

$$m_T = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+1-5}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 4$$

con

$$m_N m_T = -1 \quad y \quad m_T = 4 \Rightarrow m_N = \frac{-1}{m_T} = -\frac{1}{4}$$

y de la ecuación punto-pendiente de la recta

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} \quad \text{para } P(2,5),\ x_0 = 2 \ y \ y_0 = 5$$

entonces, la recta tangente

$$m_T = 4 = \frac{y-5}{x-2} \Rightarrow 4(x-2) = y-5 \Rightarrow \underline{4x-y-3=0}$$

y la recta normal

$$m_N = -\frac{1}{4} = \frac{y-5}{x-2} \Rightarrow -\frac{1}{4}(x-2) = y-5 \Rightarrow x-2 = -4y+20$$

$$\underline{x+4y-22=0}$$

3.1.2 Derivada - Velocidad

Si $f(x)$ es una función de movimiento lineal, entonces

$$s = f(t)$$

$s \equiv$ Posición de una Partícula en el movimiento lineal en unidades (metro o pies)

$t \equiv$ Tiempo en la posición de la partícula del movimiento lineal en unidades de segundos.

Desplazamiento. Es el cambio de posición de la partícula

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

y

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Velocidad Promedio. Es una razón de cambio de posición de la partícula con respecto al cambio del tiempo

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Distancia Es la magnitud del cambio de posición de la partícula

$$d = |\Delta s| = |s_2 - s_1| = \sqrt{s_2^2 + s_1^2}$$

Rapidez promedio

$$|\bar{v}| = \frac{\text{Distancia del recorrido total}}{\text{tiempo total}}$$

Velocidad Instantánea. Es el límite de la velocidad promedio cuando el tiempo tiende a un punto determenado.

$$v = \lim_{t \to t_1} \bar{v} = \lim_{t \to t_1} \frac{s - s_1}{t - t_1} = f'(t)$$

Rapidez. Es la magnitud de la velocidad instantánea

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Ejemplo. Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación $s = 8 - t^2$, donde s metros es la distancia dirigida a partir del origen a los t segundos. Determine la velocidad instantánea $v(t)$ metros por segundos a los $t = 5$ segundos.

Solución.

De la definición de velocidad instantánea

$$v = \lim_{t \to t_1} \frac{s - s_1}{t - t_1}$$

$s = 8 - t^2 \Rightarrow s(5) = s_1 = 8 - 5^2 = -17$, $t_1 = 5\,s$

luego

$$v = \lim_{t \to 5} \frac{8 - t^2 + 17}{t - 5} = \lim_{t \to 5} \frac{25 - t^2}{t - 5} = \lim_{t \to 5} \frac{-(t+5)\cancel{(t-5)}}{\cancel{t-5}} = -10$$

$\therefore$

$$v = -10 \, \frac{m}{s}$$

3.1.1. Introducción de la derivada: Razón de Variación

Razón promedio de variación

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

Razón de variación Instantánea

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Nota. La razón de variación puede estudiar cualquier fenómeno tecnológico, social, etc.

Economía

Variación promedio = Costo promedio

Variación marginal = Costo marginal

$C(x) \equiv$ Función de costo total

$R(x) \equiv$ Función de ingreso total.

Ejemplo 1. Sea $V(x)$ centímetros cúbicos del volumen de un cubo cuyas aristas mide x centímetros, medidas con cuatro dígitos significativos. En una calculadora obtenga la tasa promedio de variación de $V(x)$ con respecto a x conforme x varía de (a) 3.000 a 3.200; (b) 3.000 a 3.100; (c) 3.000 a 3.010; (d) 3.000 a 3.001; (e) ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando $x = 3.000$?

Solución.

Como $f(x)$ es una función del volumen de un cubo, así

$$V(x) = x^3$$

la tasa promedio de variación volumétrica

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x_1+\Delta x) - V(x_1)}{\Delta x} \quad \text{con} \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

a) $x_1 = 3.000$ a $x_2 = 3.200 \Rightarrow \Delta x = 3.200 - 3.000 = 0.200$;

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(3.000+0.200) - V(3.000)}{0.2000} = \frac{(3.200)^3 - (3.000)^3}{0.200} = 28,04$$

b) $x_1 = 3.000$ a $x_2 = 3.100 \Rightarrow \Delta x = 3.100 - 3.000 = 0.100$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(3.100) - V(3.000)}{0.100} = \frac{(3.100)^3 - (3.000)^3}{0.100} = 27.91$$

c) $x_1 = 3.000$ a $x_2 = 3.010 \Rightarrow \Delta x = 0.010$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{(3.010)^3 - (3.000)^3}{0.010} = 27.09$$

d) $x_1 = 3.000$ a $x_2 = 3.001 \Rightarrow \Delta x = 0.001$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{(3.001)^3 - (3.000)^3}{0.001} = 27.01$$

e) $$V'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x\Delta^2 x + \Delta x^3 - \cancel{x^3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(3x^2 - 3x\Delta x + \Delta^2 x)}{\cancel{\Delta x}} = 3x$$

con $x = 3.000 \quad \therefore \quad V(x) = 27\ u^3$

Resuelve lo que se pide en derivada: pendiente, velocidad y razón de cambio:

45. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$ que sea paralela a la recta $8x - y + 3 = 0$.

46. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 4$ que sea paralela a la recta $3x + y = 4$.

47. Encuentre una ecuación de la recta normal a la curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que sea paralela a la recta $x - y = 0$.

48. Obtenga una ecuación de cada recta normal a la curva $y = x^3 - 3x$ que sea paralela a la recta $2x + 18y - 9 = 0$.

49. Demuestre que no existe una recta que pase por el punto $(1, 5)$ que sea tangente a la curva $y = 4x^2$.

50. Demuestre que no existe una recta que pase por el punto $(1, 2)$ que sea tangente a la curva $y = 4 - x^2$.

51. Si g es continua en a y $f(x) = (x - a)\, g(x)$, determine $f'(a)$. *Sugerencia:* utilice la fórmula (7).

52. Si g es continua en a y $f(x) = (x^2 - a^2)\, g(x)$, determine $f'(a)$. *Sugerencia:* utilice la fórmula (7).

cuando $w = 5.000$?

3. La ley de Stefan establece que un cuerpo emite energía radiante de acuerdo con la fórmula $R = kT^4$, donde R es la medida de la tasa de emisión de energía radiante por unidad cuadrada de área, T es la medida de la temperatura Kelvin de la superficie, y k es una constante. Determine (a) la tasa promedio de variación de R con respecto a T cuando T se incrementa de 200 a 300; (b) la tasa instantánea de variación de R con respecto a T cuando $T = 200$.

4. Suponga que un cilindro circular recto tiene una altura constante de 10.00 pulg. Sea V pulgadas cúbicas el volumen del cilindro circular recto, y r pulgadas el radio de su base. Determine la tasa promedio de variación de V con respecto a r cuando r varía de (a) de 5.00 a 5.40; (b) de 5.00 a 5.10; (c) de 5.00 a 5.01. (d) Determine la tasa instantánea de variación de V con respecto a r cuando $r = 5.00$.

5. Sea r pulgadas el radio de un plato metálico circular de área $A(r)$ pulgadas cuadradas y circunferencia de $C(r)$ pul-

En los ejercicios 1 a 8, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación indicada, donde s metros es la distancia dirigida a partir del origen a los t segundos. Determine la velocidad instantánea $v(t)$ metros por segundo a los t segundos, después calcule $v(t_1)$ para el valor particular de t_1.

1. $s = 3t^2 + 1;\ t_1 = 3$

2. $s = 8 - t^2;\ t_1 = 5$

3. $s = \dfrac{1}{4t};\ t_1 = \dfrac{1}{2}$

4. $s = \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = -2$

5. $s = 2t^3 - t^2 + 5;\ t_1 = -1$

6. $s = 4t^3 + 2t - 1;\ t_1 = \dfrac{1}{2}$

7. $s = \dfrac{2t}{4 + t};\ t_1 = 0$

8. $s = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = 2$

8. La *ley de Boyle* para la expansión de un gas es $PV = C$, donde P unidades de fuerza por unidad cuadrada de área es la presión, V unidades cúbicas es el volumen del gas y C es una constante. (a) Muestre que V decrece a un tasa proporcional al inverso del cuadrado de P. (b) Determine la tasa instantánea de variación de V con respecto a P cuando $P = 4$ y $V = 8$.

9. La temperatura de una persona es $f(t)$ grados Fahrenheit t días después de adquirir una enfermedad que dura 10 días, donde

$$f(t) = 98.6 + 1.2t - 0.12t^2 \qquad 0 \le t \le 10$$

(a) Determine la tasa de variación de $f(t)$ con respecto a t cuando $0 < t < 10$. ¿Cuál es la temperatura de la persona y la tasa de variación de la temperatura cuando la persona ha estado enferma por (b) 3 días, y (c) 8 días? (d) Trace la gráfica de f, estime cuando la temperatura es un máximo así como la temperatura máxima.