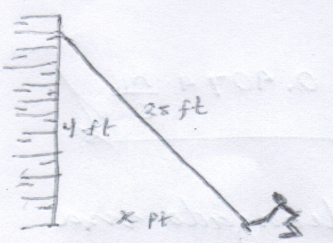
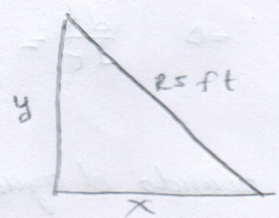
3.3. Razones de cambio relacionadas

Representa modelo matemático, que emplican tasas de variación relacionadas, cuyas variables tienen una relación específica para valores de t, una medida de tiempo.

Ejemplo 1. Una escalera de 25 ft de longitud está apoyada contra una pared vertical como se muestra en la figura. La base de la escalera se jala horizontalmente alejándola de la pared a $3\ \frac{ft}{s}$. Suponga que se desea determinar qué tan rapido se desliza hacia abajo a la parte superior de la escalera sobre la pared cuando su base se encuentra a 15 ft de la pared.



De forma esquemática, se tiene:



$$x^2 + y^2 = 25^2$$

$$y^2 = 625 - x^2$$

$$\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{d\,625}{dt} - \frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \quad \text{cuando } x = 15\text{ ft}$$

$$y = \sqrt{625 - 15} = 20\text{ ft}$$

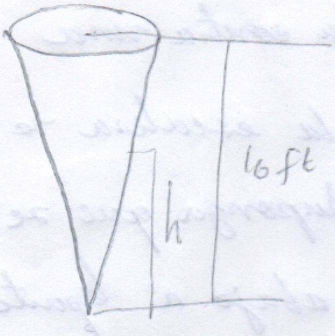
con $\frac{dx}{dt} = 3\ \frac{ft}{s}$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{15}{20}\,3\,\frac{ft}{s} = -\frac{9}{4}\,\frac{ft}{s}$$ ~~base de la escalera con la pared~~

La parte superior de la escalera se desliza a $\frac{9}{4}\ \frac{ft}{s}$ hacia abajo cuando la base está a 15 ft de la pared.

Ejemplo 2. Cierta cantidad de agua fluye a una tasa de $2\ \frac{m^3}{min}$ hacia el interior de un depósito cuya forma es de un cono invertido de 16 m de altura y 4 m de radio. ¿Qué tan rápido sube el nivel de agua cuando ésta ha alcanzado 5m de profundidad?

Con un modelo esquemático, se tiene:



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \frac{dV}{dt}=2\frac{m^3}{min}$$

razon del radio y la altura:

$$\frac{r}{h}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4} \Rightarrow r=\frac{1}{4}h$$

así

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h\right)^2 h=\frac{1}{48}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{1}{48}\pi\frac{dh^3}{dh}\frac{dh}{dt}$$

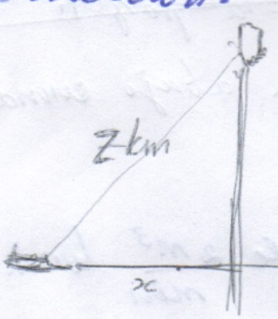
$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{16}\pi h^2\frac{dh}{dt}$ Cuando $\frac{dV}{dt}=2\frac{m^3}{min} \Rightarrow h=5m$

entonces

$$2\frac{m^3}{min}=\frac{1}{16}\pi(5)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{32}{25\pi}\simeq 0.4074\,\frac{m}{s}$$

El nivel del agua sube $0.4074\,\frac{m}{s}$ cuando el agua ha alcanzado una profundidad de 5 m.

Ejemplo 3. Dos automóviles, uno va hacia el este a una tasa de $90\frac{km}{h}$ y el otro hacia al sur a $60\frac{km}{h}$, se dirigen hacia la intersección de dos carreteras. ¿A qué tasa ~~de aproximación~~ se están aproximando uno al otro en el instante en que el primer automóvil está a 0.2km de la intersección y el segundo se encuentra a 0.15km de dicha intersección?



$Z^2=x^2+y^2$ con $x=0.2km$ y $y=0.15km$

$z^2=(0.2)^2+(0.15)^2 \Rightarrow z=0.25\,km$

luego

$$\frac{dz^2}{dz}\frac{dz}{dt}=\frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

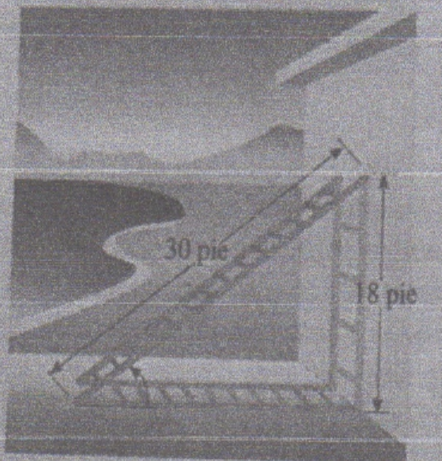
$$2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$

$\frac{dx}{dt}=-90\frac{km}{h}$ y $\frac{dy}{dt}=-60\frac{km}{t}$ porque x, y disminuyen

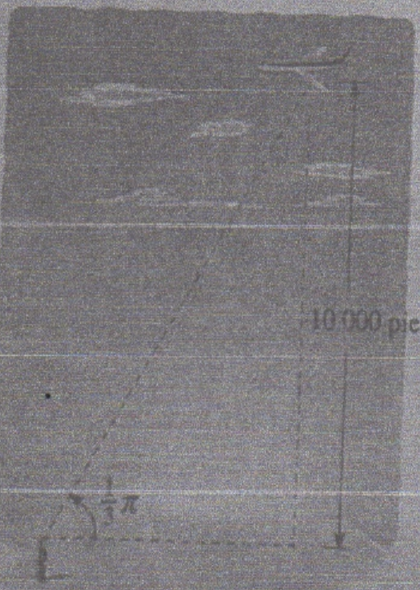
$x=0.2k$ y $y=0.15km$

39. Una escalera de 20 pie de longitud está recargada sobre un terraplén inclinado a 60° con respecto a la horizontal. Si la base de la escalera se mueve horizontalmente hacia el terraplén a una tasa de 1 pie/s, qué tan rápido se desliza la parte superior de la escalera cuando la base está a 4 pies del terraplén.

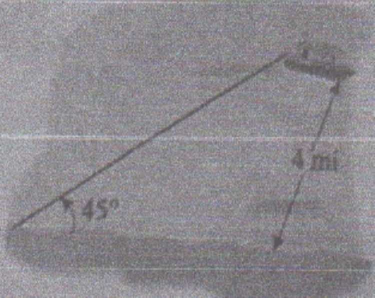
40. Una escalera de 30 pie de longitud está apoyada contra una pared, de modo que su extremo superior se desliza hacia abajo a una tasa de $\frac{1}{2}$ pie/s, ¿cuál es la tasa de variación de la medida del ángulo agudo formado por la escalera con el piso cuando el extremo superior está a 18 pie sobre el piso?



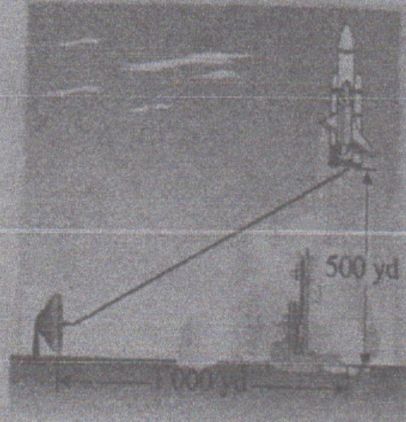
41. Un avión que vuela con rapidez constante a una altura de 10 000 pie sobre una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado, el observador nota que el ángulo de elevación del avión es de $\frac{1}{3}\pi$ rad y aumenta a una tasa de $\frac{1}{60}$ rad/s. Determine la rapidez del avión.



42. Un bote está ubicado a 4 millas de la costa y tiene un radar transmisor que gira 32 veces por minuto. ¿Qué tan rápido se desplaza la onda emitida por el radar a lo largo de la costa cuando dicha onda forma un ángulo de 45° con la costa.



43. Después de la explosión de despegue, un transbordador espacial se eleva verticalmente y un radar, ubicado a 1 000 yd de la rampa de lanzamiento, sigue al transbordador. ¿Qué tan rápido gira el radar 10 segundos después de la explosión de despegue si en ese instante la velocidad del transbordador es de 100 yd/s encontrándose éste a 500 yd del suelo?



44. Se vierte agua en un depósito que tiene forma de cono invertido a una tasa de 8 pie^3/min. El cono tiene una altura de 20 pie y un diámetro de 10 pie en la parte superior. Si hay una fuga en la parte inferior del depósito y el nivel del agua sube a una tasa de 1 pulg/min cuando el agua tiene una profundidad de 16 pies, ¿qué tan rápido escapa el agua del depósito?

45. Muestre que si el volumen de un globo decrece a una tasa proporcional al área de su superficie, el radio del globo se contrae a una tasa constante.