INTEGRACIÓN DE FUNCIONES

Prof. Misael Solorza Guzmán

1 de junio de 2023

Integración 1. Se dice, **Antiderivada o primitiva** de $f(x)$ a una función $F(x)$ en un intervalo I, si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Teorema de la representación de antiderivada o primitiva. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en un intervalo I y $C \in \mathbb{R}$, entonces $G(x) = F(x) + C$ forma una función antiderivada $f(x)$ para toda x en I.

Demostración. Tomando $G(x) = F(x) + C$ y derivando se tiene,

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0$$

por la definición de antiderivada

$$G'(x) = f(x)$$

Nota. Una antiderivada general se le llama *integral indefinida*, $G(x) = F(x) + C$ representa **la familia de todas las antiderivadas de** $f(x)$ y la constante C recibe el nombre de **constante de integración**, cuya expresión es

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

donde

$$F'(x) = f(x)$$

y

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Teorema de antiderivada general. Si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas para toda x en el mismo intervalo I, entonces se cumple:

1. $\int dx = x + C$

2. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$

3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Teorema de Integrales indefinidas. Si $G(x) = F(x) + C$ es una integral indefinida de $f(x)$ para toda x en I, entonces se cumple:

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

4. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} u + C$

5. $\displaystyle\int \tan x\, dx = -\ln |\cos x| + C$

6. $\displaystyle\int \cot x\, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$

7. $\displaystyle\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

8. $\displaystyle\int \csc x\, dx = \ln |\csc x - \cot u| + C$

9. $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

10. $\displaystyle\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

11. $\displaystyle\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

12. $\displaystyle\int \csc x \cot x\, dx = \csc x + C$

13. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

14. $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$

15. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + C$

16. $\displaystyle\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + C$

17. $\displaystyle\int \tanh x\, dx = \ln \cosh x + C$

18. $\displaystyle\int \coth x\, dx = \ln |\operatorname{senh} x| + C$

19. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\, dx = \arctan(\operatorname{senh}, x) + C$

20. $\displaystyle\int \operatorname{csch} x\, dx = -\operatorname{arccot}(\cosh x) + C$

21. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tan x + C$

22. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 x\, dx = \coth x + C$

23. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = -\operatorname{sech} x + C$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C \text{ o } -\operatorname{arc\,cos} \tfrac{x}{a}$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctan}\,\frac{x}{a} + C$ o $-\frac{1}{a}\,\text{arccot}\,\frac{x}{a}$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}\right| + C$

Ejemplo 1. Encontrar $\displaystyle\int x(x+a)(x+b)dx$.

Solución. Descomponiendo los parentesis en el integrado, se tienen

$$\begin{aligned}
\int x(x+a)(x+b)dx &= \int x[x^2+(a+b)x+ab]dx \\
&= \int [x^3+(a+b)x^2+abx]dx \\
&= \int x^3dx + \int (a+b)x^2dx + \int abxdx \\
&= \int x^3dx + (a+b)\int x^2dx + ab\int xdx \\
&= \frac{x^4}{4} + (a+b)\frac{x^3}{3} + ab\frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int x(x+a)(x+b)dx = \frac{x^4}{4} + (a+b)\frac{x^3}{3} + ab\frac{x^2}{2} + C.$$

Ejemplo 2. Encontrar $\displaystyle\int \tan^2\, xdx$.

Solución. Usando identidades trigonométricas, se tiene

$$\begin{aligned}
\int \tan^2\, xdx &= \int (\sec^2\, x - 1)dx \\
&= \int \sec^3\, xdx - \int dx \\
&= \tan\, x - x + C
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int \tan^2\, xdx = \tan\, x - x + C.$$

Ejemplo 3. Encontrar $\displaystyle\int e^{\ln\, x^2}\, xdx$.

Solución. A saber que

$$e^{\ln x^2} = x^2$$

de aquí

$$\int e^{\ln x^2}\, x dx = \int x^2 x dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

por lo tanto

$$\int e^{\ln x^2}\, x dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

I.2. Método de Cambio de Variable (Integración por Sustitución)
Método que elige reescribir por completo la integral en término de la sustitución de las variables u y du o cualquier otras convenientes. Es decir

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C.$$

Ejemplos

1. $\int \sqrt{3x-1}dx.$

   Solución.
   Se usa la variable

$$\begin{aligned} u = 3x - 1 \quad &\Longrightarrow \quad du = 3dx \\ &\Longrightarrow \quad dx = \frac{du}{3} \end{aligned}$$

   la integral toma la forma

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3x-1}dx &= \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{3}(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}) + C \end{aligned}$$

   Se sustituye el valor de $u = 3x - 1$, se tiene

$$\int \sqrt{3x-1}dx = \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

2. $\int \frac{4t+6}{2t+1}dt$.

Solución.
Se descompone la función

$$\frac{4t+6}{2t+1} \implies \frac{4t+6}{2t+1} = 2 + \frac{4}{2t+1}$$

entonces la integral se queda como

$$\int \frac{4t+6}{2t+1}dt = 2\int dt + 4\int \frac{dt}{2t+1}$$

de los culaes, el primer término es inmediata y el segundo término se usa $u = 2t+1$, $du = 2dt$ y $dx = \frac{du}{2}$, entonces la integral toma la forma

$$\begin{aligned}\int \frac{4t+6}{2t+1}dt &= 2\int dt + 4\int \frac{du}{2u}\\ &= 2t + 4\frac{\ln u}{2} + C\\ &= 2t + 2\ln u + C\end{aligned}$$

Se sustituye el valor de $u = 2t+1$, se tiene

$$\int \frac{4t+6}{2t+1}dt = 2(t + \ln(2t+1)) + C$$

3. $\int e^{\tan w}\sec^2 w dw$.

Solución.
Se usa la variable

$$u = \tan w \implies du = \sec^2 w dw$$

la integral toma la forma

$$\begin{aligned}\int e^{\tan w}\sec^2 w dw &= \int e^u du\\ &= e^u + C\end{aligned}$$

Se sustituye el valor de $u = \tan w$, se tiene

$$\int e^{\tan w} \sec^2 w dw = e^{\tan w} + C$$

4. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$.

Solución.
Se usa la variable

$$u = \operatorname{sen} x \implies du = \cos x dx$$

la integral toma la forma

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx &= \int \frac{du}{u^2} \\
&= \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C \\
&= -\frac{1}{u} + C
\end{aligned}$$

Se sustituye el valor de $u = \operatorname{sen} x$, se tiene

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + C$$

Ejercicios. Resolver las siguientes integrales indefinidas o antiderivación según los casos que se presenten.

1. $\int (2 + 3x^2 - 8x^3) dx$
2. $\int \cos\ x(2 + \operatorname{sen}\ x)^5 dx$
3. $\int \sqrt{x}(x+1) dx$
4. $\int \frac{4 \operatorname{sen}\ x}{(1 + \cos\ x)^2} dx$
5. $\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}} \frac{dx}{x^2}$
6. $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5 \right) dx$
7. $\int 2 \operatorname{sen}\ x \sqrt[3]{1 + \cos\ x} dx$
8. $\int \left(3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} \right) dx$
9. $\int \sqrt{\frac{1}{t} - 1} \frac{dt}{t^2}$

10. $\int \frac{adx}{a-x}$

11. $\int \frac{x^2+4x-4}{\sqrt{x}}dx$

12. $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx$

13. $\int \frac{y^4+2y^2-1}{\sqrt{y}}dy$

14. $\int \frac{3t^2+3}{t-1}dt$

15. $\int \left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

16. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$

17. $\int \frac{27t^3-1}{\sqrt[3]{t}}dt$

18. $\int (\tan\,2x+\cot\,2x)^2\,dx$

19. $\int \frac{\sec^2\,3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

20. $\int \frac{w^4+x^2+1}{x-1}dx$

21. $\int (a+\frac{b}{a-x})^2dx$

22. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$

23. $\int 7^{x^2}x\,dx$

24. $\int \text{sen}\,(\ln x)\frac{dx}{x}$

25. $\int \cos^2\,xdx$

26. $\int \frac{adx}{a-x}$

27. $\int \frac{dx}{\text{sen}\,\frac{x}{a}}$

28. $\int \frac{xdx}{\cos^2\,x^2}$

29. $\int \frac{dx}{\tan\,\frac{x}{5}}$

30. $\int \frac{\cos\,wx}{\text{sen}^5\,wx}dx$

31. $\int (\frac{1}{\text{sen}\,\sqrt{2}\,x}-1)^2dx$

32. $\int \frac{dx}{\cos\,x\,\text{sen}\,x}$

33. $\int \tan^3\,x\,\sec^2\,xdx$

34. $\int \frac{\text{sen}\,3x}{3+\cos\,3x}dx$

35. $\int (\cos\,ax+\text{sen}\,ax)^2dx$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

37. $\int \frac{dx}{x\ln^2\,x}$

38. $\int a^{\text{sen}\,x}\cos\,xdx$

39. $\int \frac{xdx}{\text{sen}\,x^2}$

40. $\int \frac{e^s}{\sqrt{e^{2s}-2}}ds$

41. $\int \frac{dt}{e^t+1}$

42. $\int e^{x+e^x}dx$

43. $\int \frac{\text{sen}^3\,x}{\sqrt{\cos\,x}}dx$

44. $\int \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}dt$

45. $\int \sqrt{\frac{\ln\,(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2+1}}dx$