Límites de funciones Exponenciales y Logarítmicas

De las funciones exponenciales y logarítmicas, se cumplen:

1. $\lim_{x\to c} a^x = a^c$, con $c\in\mathbb{R}$ ssi $a>1$ y $\lim_{x\to -\infty} a^x = 0$

2. $\lim_{x\to -\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} a^x = 0$ ssi $0<a<1$

3. $\lim_{x\to \infty} \log_a x = \infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ con $a>1$

4. $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$ con $0<a<1$

5. $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 6. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ 8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} = 1$.

Ejemplo. Determinar $\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln\left(-\frac{x}{\ln x}\right)} = \lim_{x\to 1} e^{-\left(\frac{\ln x}{\ln x}\right)} = \lim_{x\to 1} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Ejemplo Obtener el $\lim_{x\to 2} 3^{\frac{2}{2-x}}$.

Solución.

De forma directa:

$$\lim_{x\to 2} 3^{\frac{2}{2-x}} = 3^{\frac{2}{0}} \text{ y } \frac{2}{0}\notin\mathbb{R}.$$

Con límites laterales, se tiene:

1. $\lim_{x\to 2^+} 3^{\frac{2}{2-x}}$, así $x\to 2^+ \Rightarrow x>2 \Rightarrow 2-x<0 \Rightarrow 2-x\to 0^-$ (DE-CRECE con valores negativos) y $\frac{2}{2-x}\to -\infty$

$$\therefore \lim_{x\to 2^+} 3^{\frac{2}{2-x}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0$$

2. $\lim\limits_{x \to 2^-} 3^{\frac{2}{2-x}}$, así $x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow 2-x \to 0^+$ (CRECE $\frac{2}{2-x} \to +\infty$ con valores positivos).

$$\therefore \lim_{x \to 2^-} 3^{\frac{2}{2-x}} = 3^{+\infty} = +\infty$$

luego por el teorema de existencia de límite, como

$$\lim_{x \to 2^+} 3^{\frac{2}{2-x}} \neq \lim_{x \to 2^-} 3^{\frac{2}{2-x}}$$

$\therefore$

$$\lim_{x \to 2} 3^{\frac{2}{2-x}} \text{ NO EXISTE.}$$

Ejemplo. Determinar $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x+1}{\ln(2x+3)}$.

Solución. De forma directa:

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x-1}{\ln(2x+3)} = \frac{-3}{0} \notin \mathbb{R}$$

con límites laterales, se tiene:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x+1}{\ln(2x+3)}$

con $x \to -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow 2x > -2 \Rightarrow 2x+3 > 1 \Rightarrow \ln(2x+3) > \ln 1 \Rightarrow$

$\ln(2x+3) > 0 \Rightarrow \ln(2x+3) \to 0^+$ (CRECE con valores positivos)

$$\therefore \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{4x+1}{\ln(2x+3)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

2. $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{4x+1}{\ln(2x+3)}$

con $x \to -1^- \Rightarrow x < -1^- \Rightarrow 2x < -2$ ó $\ln(2x+3) < \ln(1) \Rightarrow \ln(2x+3) < 0$

$\Rightarrow \ln(2x+3) \to 0^-$ (Decrece con valores negativos)

$\therefore$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{4x+1}{\ln(2x+3)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

luego por el teorema de existencia de límite, como:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{4x+1}{\ln(2x+3)} \neq \lim_{x\to -1^-}\frac{4x+1}{\ln(2x+3)}$$

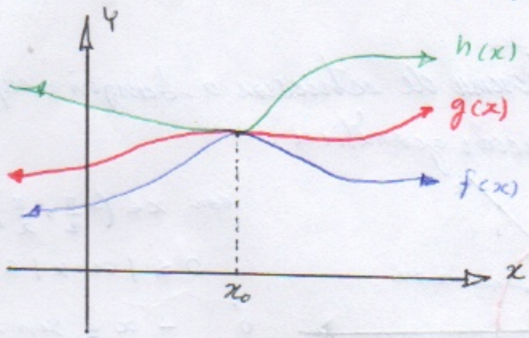
$\therefore$

$$\lim_{x\to -1}\frac{4x+1}{\ln(2x+3)} \text{ NO EXISTE}$$

1. Límite de funciones trigonométricas

Teorema de estricción Si f, g y h son funciones definidas en el intervalo abierto (a,b) y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x\in(a,b)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$ con $x \neq x_0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.

Demostración



De la definición de límite, $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \cap 0<|x-x_0|<\delta$
$\Rightarrow |g(x)-L|<\varepsilon$ (1)

pero $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$

luego

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_1>0 \cap 0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ ó $L-\varepsilon \leq f(x) \leq L+\varepsilon$. (2)

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_2>0 \cap 0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |h(x)-L|<\varepsilon$ ó $L-\varepsilon \leq h(x) \leq L+\varepsilon$ (3)

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ con $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2 \Rightarrow 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow L-\varepsilon < f(x)$ (4) y $h(x) < L+\varepsilon$ (5)

pero $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ de (4) y (5) se tiene que

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L+\varepsilon$ ó

$L-\varepsilon \leq g(x) \leq L+\varepsilon \Rightarrow |g(x)-L|<\varepsilon$

$\therefore$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

q. e. d.

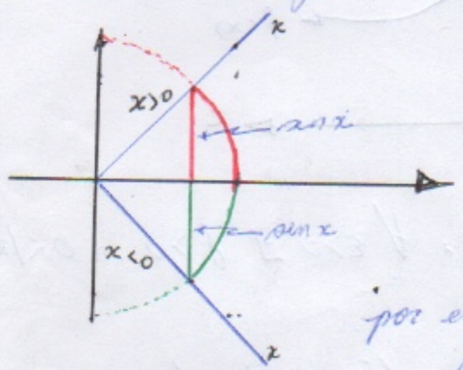
Límite del seno:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Demostración

1. Usando el Teorema de estricción o Sanghi o emparedado, se tiene la siguiente construcción geométrica



con $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple

$$0 \leq |\operatorname{sen} x| < |x|$$

ó $\quad -x \leq \operatorname{sen} x \leq x$

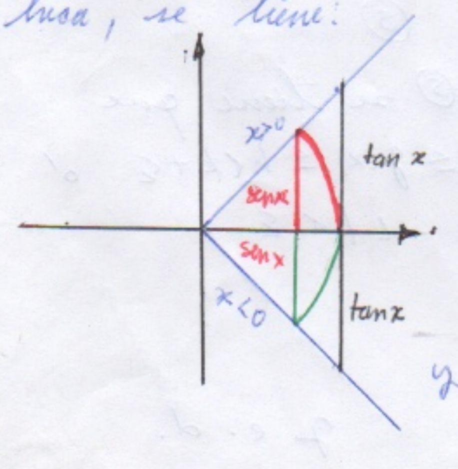
ó $\quad \lim\limits_{x\to 0} (-x) \leq \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x \leq \lim\limits_{x\to 0} x$

por el teorema de estricción

$$\lim_{x\to 0} (-x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad$ q.e.d.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Usando la siguiente construcción geométrica, se tiene:



Con $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple que

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x$$

ó $\quad 1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$

pero $\quad 1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} \quad$ ó $\quad \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$

y

$\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x} \quad$ ó $\quad \cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

así

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \cos x \leq \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq \lim_{x\to 0} 1$$

pero

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \quad \phi \quad \lim_{x\to 0} (1-\cos x) = 0, \text{ luego}$$

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x) = \lim_{x\to 0} 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 2\left(\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2 = 0 \quad \therefore \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

así por el teorema de estalición

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{q. e. d.}$$

límite del coseno

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Demostración

Se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0}\cos x}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

q. e. d.

Ejemplo Obtener el límite de:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

Solución

Como $x \to 0 \Rightarrow$ Usaremos $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, así

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \cdot \frac{3}{3}}{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} \cdot \frac{5}{5}} = \frac{3}{5} \frac{\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u}}{\lim_{v \to 0} \frac{\operatorname{sen} v}{v}} = \frac{3}{5} \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{3}{5}$$

b) $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$

Solución

Sabemos que $\cos t$ está acotado entre $[-1, 1]$, así

$-1 \leq \cos t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos t \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, luego

$0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ si $x \neq 0$

es necesario analizar límites laterales, esto es con $x > 0$ y $x < 0$.

Caso $x > 0$, así $x \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ ó

$0 \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$ ó $\lim_{x \to 0^+} 0 \leq \lim_{x \to 0^+} x \cos \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0^+} x$

pero

$$\lim_{x \to 0^+} 0 = 0 = \lim_{x \to 0^+} x$$

por el teorema de restricción

$$\lim_{x \to 0^+} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

Caso $x < 0$, así $0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ ó $x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq 0$

ó

$$\lim_{x \to 0^-} x \leq \lim_{x \to 0^-} x \cos \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0^-} 0$$

pero

$$\lim_{x \to 0^-} x = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

por el teorema de restricción

$$\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$