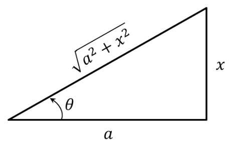
Método de Integración

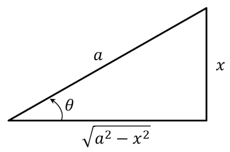
8 de junio de 2023

I.3. Método de Integración por Sustitución Trigonométrica

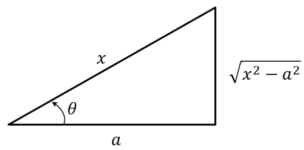
Método se desarrolla con integrales cuyos integrandos son funciones que continen expresiones de la forma: $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ y $\sqrt{x^2-a^2}$; de la cuales se arregla como sigue:

1. $\sqrt{a^2+x^2}$ 

$x = a\tan\theta$

2. $\sqrt{a^2-x^2}$ 

$x = a\,\text{sen}\,\theta$

3. $\sqrt{x^2-a^2}$ 

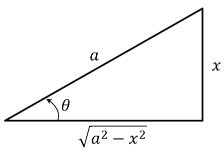
$x = a\sec\theta$

Ejemplos

1. Encontrar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx$.

   Solución.

   La expresión del integrando es de la forma

   $\sqrt{25-x^2}$ caso 2 

   de aquí $a^2 = 25 \Rightarrow\; a = 5, \quad x = 5\,\text{sen}\,\theta \;\Rightarrow\; dx = 5\cos\theta\,d\theta$

   y además

$$\sqrt{25-x^2} = 5\cos\theta$$

   Así la integral original se simplifica como sigue

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{(5\cos\theta)}{5\,\text{sen}\,\theta}\,5\cos\theta\,d\theta = \int \frac{(5\cos\theta)(5\cos\theta)\,d\theta}{5\,\text{sen}\,\theta} = 5\int \frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\text{sen}\,\theta}\\ &= 5\int \frac{(1-\text{sen}^2\,\theta)}{\text{sen}\,\theta}\,d\theta = 5\left[\int \csc\theta\,d\theta - \int \text{sen}\,\theta\,d\theta\right]\\ &= 5\ln|\csc\theta - \cot\theta| + 5\cos\theta + C\end{aligned}$$

Luego con los argumentos de la figura, se tienen:

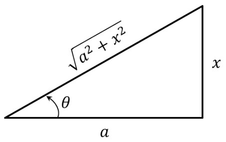
$$\csc\,\theta = \frac{5}{x}, \quad \cot\,\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} \quad \text{y} \quad \cos\,\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx &= 5\ln\left|\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \sqrt{25-x^2} + C \\ &= 5\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \sqrt{25-x^2} + C\end{aligned}$$

2. Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
Solución.
La expresión del integrando es de la forma y además

$\sqrt{2+x^2}$ caso 1



de aquí $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}\tan\,\theta \;\Rightarrow\; dx = \sqrt{2}\sec^2\,\theta\,d\theta$

$$\sqrt{2+x^2} = \sqrt{2}\sec\,\theta$$

luego cambiar la integral original como sigue

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(2+x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\,\theta\,d\theta}{(\sqrt{2+x^2})^3} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\,\theta\,d\theta}{(\sqrt{2}\sec\,\theta)^3} = \frac{1}{2}\int \cos\,\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta + C\end{aligned}$$

De aquí, usando notación de la figura

$$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{(2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{2\sqrt{2+x^2}} + C$$

3. Encontrar $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}}$.
Solución.
La integral original se puede reescribir como sigue

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}} = \int_2^3 \frac{x^3dx}{x^4\sqrt{x^4-4}}$$

luego se hace el siguiente cambio de variable

$$\text{sea}\;\; u^2 = x^4 - 4 \quad\Rightarrow\quad x^4 = u^2 + 4, \qquad 2u\,du = 4x^3\,dx \quad\Rightarrow\quad x^3\,dx = \frac{1}{2}u\,du$$

además para los cambios de límetes del integrando, con

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad u^2 = 2^4 - 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{12}$$

$$\text{y} \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad u^2 = 3^4 - 4 = 77 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{77}$$

de aquí

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x^3 dx}{x^4\sqrt{x^4-4}} &= \int_{\sqrt{12}}^{\sqrt{77}} \frac{\frac{1}{2}u\,du}{(u^2+4)u} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{12}}^{\sqrt{77}} \frac{du}{u^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\arctan\frac{u}{2}\Big|_{\sqrt{12}}^{\sqrt{77}} = \frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{77}}{2} - \frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{12}}{2} \approx 0{,}07488
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}} = 0{,}07488$$