I.1.2 Desigualdades de los números reales.

22 de febrero de 2023

Definición **1. Números Reales;** *conjunto de números que se complementa con dos operaciones llamadas ADICCIÓN y MULTIPLICACIÓN. Se denota matemáticamente con la letra $\mathbb{R}$.*

Por consiguiente, sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{array}{rl} a+b & \text{Suma} \\ a \cdot b \quad \text{ó} \quad ab & \text{Producto} \end{array}$$

Cumplen con las siguientes propiedades:

1. **Ley Clausurativa.**

$$\begin{array}{rll} a+b & \text{para} & \text{Adición} \\ a \cdot b & \text{para} & \text{Multiplicación} \end{array}$$

2. **Ley Conmunicativa.**

$$\begin{array}{rll} a+b=b+a & \text{para} & \text{Adición} \\ ab=ba & \text{para} & \text{Multiplicación} \end{array}$$

3. **Ley del Elemento Neutro.**

$$\begin{array}{rll} a+0=0+a=a & \text{para} & \text{Adición} \\ a(1)=(1)a=a & \text{para} & \text{Multiplicación} \end{array}$$

4. **Ley Asociativa.**

$$\begin{array}{rll} a+(b+c)=(a+b)+c & \text{para} & \text{Adición} \\ a(bc)=(ab)c & \text{para} & \text{Multiplicación} \end{array}$$

5. **Ley Distributiva**

$$a*(b+c)=a*b+a*c$$

6. **Ley Simétrico o Recíproco.**

$$\begin{array}{rl} \forall \quad a \in \mathbb{R} \quad \exists \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad x+a=a+x=0 \quad \Rightarrow \quad x=-a & \text{de la Adición} \\ \forall \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad a \neq 0 \quad \exists \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad ax=xa=1 \quad \Rightarrow \quad x=a^{-1} & \text{de la Multiplicación} \end{array}$$

7. **Define la operación de Sustracción**

$$a+(-b)=a-b \quad \textbf{Diferencia}$$

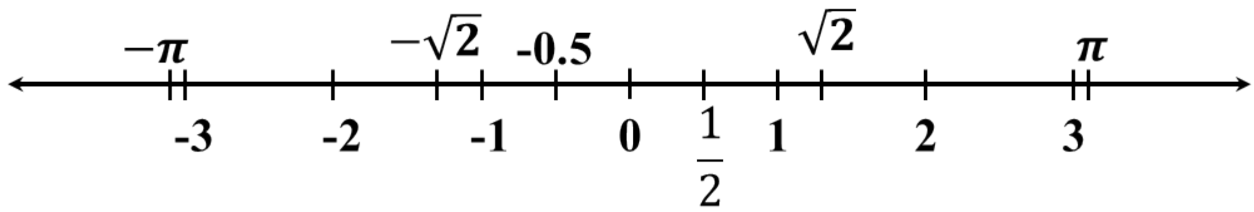
8. **Define la operación de división**

$$a \div b = a * b^{-1} \quad \text{con} \quad b \neq 0 \quad \textbf{Cociente}$$

Representación de los números reales

$$\text{Números Reales } (\mathbb{R}) \begin{cases} \text{Números Racionales } (\mathbb{Q}) \left\{ \frac{p}{q} \quad \text{con } q \neq 0 \text{ y} \right. \\ \\ p,\ q \in \mathbb{Z} \text{ Números Enteros} \begin{cases} \text{Enteros Positivos } (\mathbb{Z}^{+}) \\ \text{Cero } = 0 \\ \text{Enteros Negativos } (\mathbb{Z}^{-}) \end{cases} \\ \\ \text{Números Irracionales } (\mathbb{I}) \left\{ -e,\ \ldots,\ -\sqrt{2},\ \ldots,\ \sqrt{2},\ \ldots . \right. \end{cases}$$

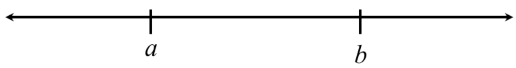
Representacón Geométrica de $\mathbb{R}$



Definición **2.** *Se denomina* ***Desigualdades****; expresiones en las que aparece un signo de desigualdad y pueden ser:*

$$\begin{array}{ll} '' < '' & \text{Menor qué} \\ '' > '' & \text{Mayor qué} \\ '' \leq '' & \text{Menor o igual qué} \\ '' \geq '' & \text{Mayor o igual qué} \end{array}$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se define $a < b$ ó $b > a$ si $b - a$ es un número POSITIVO, o bien a está a la izquierda de b en la recta numérica; esto es,



Ejemplo **1.** $-7 < -2$ *y* $5 > 3$.

Solución. Para $-7 < -2$, se tiene

$$-7 < -2, \text{ de la cual } -2 - (-7) = -2 + 7 = 7 - 2 = 5 \text{ es positivo.}$$

y para $5 > 3$, se tiene

$$5 > 3, \text{ de la cual } 5 - 3 = 2 \text{ es positivo.}$$

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Sean $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1.1 Si $a < b$ entonces $a + c < b + c \quad \forall \quad c \in \mathbb{R}$.

1.2 Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$

1.3 Si $a < b$ ó $a = b$ ó $a > b$ *Ley de Tricotomía.*

1.4 Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ *Ley de Transitiva.*

1.5 Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

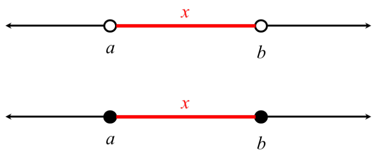
1.6 Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Definición **3.** *Se entiende a **Inecuaciones**, como las desigualdades en las cuales aparecen números y letras con operaciones usuales. Las letras son las variables o incógnitas en la notacón.*

Dados $a,\ b,\ x \in \mathbb{R}$, donde $a.\ b$ son *números reales* y x una *variable real*, se define *INTERVALOS* como las siguientes inecuaciones:

$$(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



Ejemplo **2.** *Determine el conjunto de solución de la inecuación de* $x \geq \dfrac{1}{x}$.

Solución. Usando las propiedades de operación de desigualdades, se tinen:

$$x \geq \frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad x - \frac{1}{x} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2-1}{x} \geq 0$$

de donde se analizará

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0$$

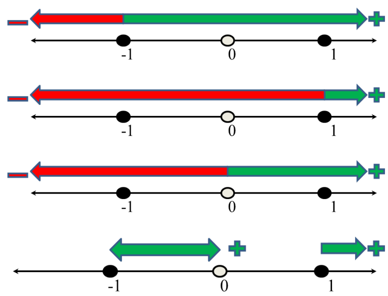
por método gráfico, nos queda

$x + 1 = 0 \quad x = -1$

$x - 1 = 0 \quad x = 1$

$x = 0$

$\frac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0$



por lo tanto, la solución de $x \geq \dfrac{1}{x}$ es

$$[-1,\ 0) \cup [1,\ +\infty)$$

PROPIEDADES DE INECUACIONES IRRACIONALES

Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumplen las siguientes propiedades:

2.1 $\sqrt[2n]{x} + \sqrt[2n]{y} \geq 0$ si y solo si $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

2.2 $\sqrt{x} < y$ si y solo si $x \geq 0$ y $y > 0$ y $x \leq y^2$.

2.3 Para todo $y < 0$, $\sqrt{x} \geq y$ si y solo si $x \geq 0$ y $x > y^2$.

2.4 Para todo $y > 0$, $\sqrt{x} > y$ si y solo si $x \geq 0$ y $x > y^2$.

Ejemplo 2. Halle el conjunto solución de la inecuación de $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} < 4$.

Solución. Usando las propiedades de inecuaciones irracionales 2.4 y enconsecuencia 2.1, se tinen:

$$\begin{gathered} x+2 \geq 0 \;\; \text{y} \;\; x \geq 0 \\ x \geq -2 \quad \wedge \quad x \geq 0 \\ [-2,\ \infty) \quad \wedge \quad [0,\ \infty) \end{gathered}$$

en consecuencia

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0,\ \infty)$$

además

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x})^2 &< 4^2 \\ x + 2 + 2\sqrt{x}\sqrt{x+2} + x &< 16 \\ \sqrt{x}\sqrt{x+2} &< 7 - x \\ x^2 + 2x &< 49 - 14x + x^2 \\ 16x &< 49 \end{aligned}$$

de donde

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{49}{16}\} = (-\infty,\ \frac{49}{16})$$

por lo tanto, la solución de $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} < 4$ es

$$\boldsymbol{S_T = S_1 \wedge S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x < \frac{49}{16}\} = [0,\ \frac{49}{16})}$$

Definición **4.** *Se conoce como* ***Valor Absoluto*** *a un número real sin tener en cuenta su signo, o bien se dice también Módulo.*

En denotación matemática, considera $a \in \mathbb{R}$, tal que:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

y en el caso de una inecuación

$$|ax+b| = \begin{cases} ax+b & si \quad ax+b \geq 0 \\ -(ax+b) & si \quad ax+b < 0 \end{cases}$$

Interpretación Geométrica

IG1. $|a|$ representa la *Distancia* de a a 0.

IG2. $|a-c|$ representa la *Distancia* de a a c.

Caracterización del Valor Absoluto

CVA1. $|a| = \text{Máx}\{a, \ -a\}$.

CVA2. $|a| = \sqrt[n]{a^n}$ si n es *Par*.

Propiedades del valor absoluto

Teorema **1.** Para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple $|x| \geq 0$.

Demostración. Usando la definición del valor absoluto, se tiene:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Caso 1. $x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = x$ en consecuencia $|x| \geq 0$.
Caso 1. $x < 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = -x$ con $x < 0 \quad \Rightarrow \quad -x > 0$ en consecuencia $|x| \geq 0$.
Por lo tanto se cumple $|x| \geq 0$ **q.e.d.**

Teorema **2.** Sea $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}^+$ entonces $|x| < k \Longleftrightarrow -k < x < k$.

Demostración. Tomando en cuenta la particular caracterización de un valor absoluto, se tiene

$$|x| < k \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2} < k \quad \Longleftrightarrow \quad (\sqrt{x^2})^2 < k^2$$

esto es,

$$x^2 < k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - k^2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-k)(x+k) < 0$$

se analiza esta última desigualdad en los siguientes casos;

Caso 1. $x - k > 0$ y $x + k < 0$

$$\text{para} \quad x - k > 0 \quad \text{entonces} \quad x > k \quad \text{ó} \quad S_1 = (k, \ \infty)$$

$$\text{y para} \quad x - k < 0 \quad \text{entonces} \quad x < -k \quad \text{ó} \quad S_2 = (-\infty, \ -k)$$

por lo tanto

$$S_1 = S_1 \cap S_2 = (-\infty, \ -k) \cap (k, \ \infty) = \varnothing$$

Caso 2. $x - k < 0$ y $x + k > 0$

$$\text{para} \quad x - k < 0 \quad \text{entonces} \quad x < k \quad \text{ó} \quad S_1 = (-\infty, \ k)$$

$$\text{y para} \quad x + k > 0 \quad \text{entonces} \quad x > -k \quad \text{ó} \quad S_2 = (-k, \ \infty)$$

por lo tanto

$$S_2 = S_1 \cap S_2 = (-\infty, \ k) \cap (-k, \ \infty) = (-k, \ k)$$

La solución de la desigualdad $|x| < k$ es

$$S = S_1 \cup S_2 = \varnothing \cup (-k, \ k) = (-k, \ k)$$

esto es,

$$|x| < k \quad \Longleftrightarrow \quad -k < x < k \ \text{ q.e.d.}$$

Ejercicio 1.

Teorema **3.** Sea $x \in \mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}^+$ entonces $|x| > k \Longleftrightarrow x > k$ ó $x < -k$.

Teorema **4.** Si $x,\ y \in \mathbb{R}$ entonces se verifica que $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Desiguladad del triángulo).

Teorema **5.** Si $x,\ y \in \mathbb{R}$ entonces se verifica que $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Teorema **6.** Sí $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $|x \cdot y| = |x||y|$.

Teorema **7.** Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$ entonces $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

Teorema **8.** Para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $|x|^2 = x^2$.

1. Determine el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

b) $x(1-x) > 1$

c) $x^2 - x + 4 < 10$

d) $x - 1 < x^2 + 3x < 3x + 4$

e) $\frac{1}{x-1} + 2x \leq 0$

f) $\frac{2x-3}{x^2-1} \geq 0$

g) $\frac{2x^2 - 3x - 20}{x+3} < 0$

h) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{1-x} > 0$

i) $\frac{1}{x^2+x} > \frac{1}{x^2-x} > \frac{1}{x^2-1}$

2. Con $a,\ b \in \mathbb{R}$, demuestre que si $0 < a < b$ entonces $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

3. Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \leq 0$

b) $\sqrt[5]{x-2}\sqrt{x-2} \leq 0$

c) $\sqrt{\sqrt{x-20} - \sqrt{1-x}} \geq 2$

d) $\sqrt{\sqrt{x+10} - \sqrt{3-x}} > -5$

e) $\sqrt{x^2 - 3x + 12} > 4$

f) $\frac{|2x-1| - x}{x-5} < 2$

g) $|7x-2| < |4x+3||3x-5|$

h) $\sqrt{(2x-3)^2} < 11$

i) $|5x-8| + |16-10x| \leq |15x-24|$

j) $|2x+10| + |3x+15| \geq 10$.