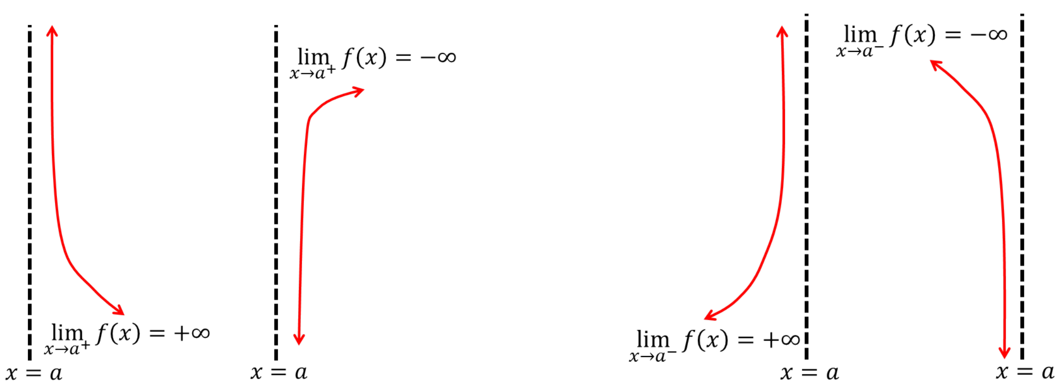
II. Límite de funciones y continuidad

Prof. Misael Solorza Guzmán

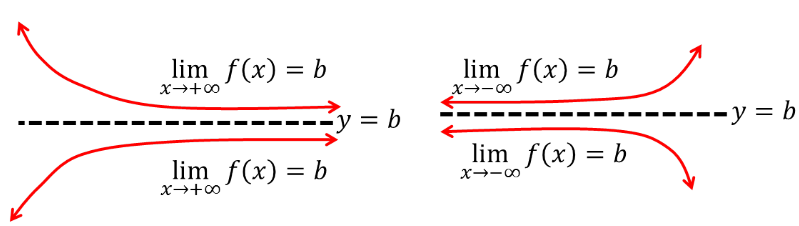
22 de marzo de 2023

II.Asíntotas de una función.

Definición* 1.** *Se denomina* ***Asíntota Vertical (A.V) *a la recta $x = a$ en la gráfica de la función $f(x)$, si al menos uno de los siguientes enunciados son verdaderos:*



Definición* 2.** *Se denomina* ***Asíntota Horizontal (A.H) *a la recta $y = a$ en la gráfica de la función $f(x)$, si al menos uno de los siguientes enunciados son verdaderos:*



Definición* 3.** *Se denomina* ***Asíntota Oblícua (A.O) *a la recta $y = mx + b$ en la gráfica de la función $f(x)$, con*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

Observación. Si una función tiene asíntota Oblícua entonces no tendrá asíntota Horizonta; y viceversa.

***Ejemplo* 1.** *Obtenga las asíntotas de la función* $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ *y bosqueje su gráfica.*

Solución. Para la asíntota vertical, se tiene

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x-1} \quad \text{y} \quad x-1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq 1$$

por consiguiente

$$\boldsymbol{x=1} \;\; \textbf{A.V.}$$

se analiza el desarrollo de $f(x)$ con límites laterales en la $x=1$ A.V.; esto es,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3}{x-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

así

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}} \quad \textbf{se desarrolla positivamente}$$

y

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+3}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}} \quad \textbf{se desarrolla negativamente}$$

Por otra lado, para la A.H., como el $Grad\{x^2+3\} > Grad\{x-1\}$ de $f(x)$, entoces sólo tendrá A.O.; es decir,

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\mathbf{1}$$

y

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3}{x-1}-(1)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x-1}=\mathbf{1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=x+1} \quad \textbf{A.O.}$$

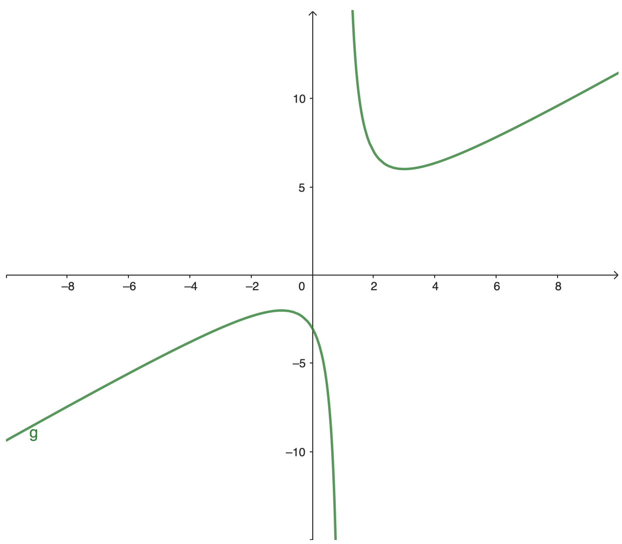
Ahora para bosquejar la gráfica de $f(x)$, se determina la intersección en los ejes; por ello

$$\text{Para el eje } Y: \quad x=0\Rightarrow \quad y=\frac{0^2+3}{0-1}=-3 \quad \Rightarrow \quad (0,\ -3)$$

y

$$\text{Para el eje } X: \quad y=0\Rightarrow \quad 0=\frac{x^2+3}{x-1} \quad \Rightarrow \quad x^2+3=0 \quad \Rightarrow x=\sqrt{-3}\ \notin\mathbb{R}$$

y NO intersecta al eje X. Por lo tanto, la grafica nos queda:


10
5
−5
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
g