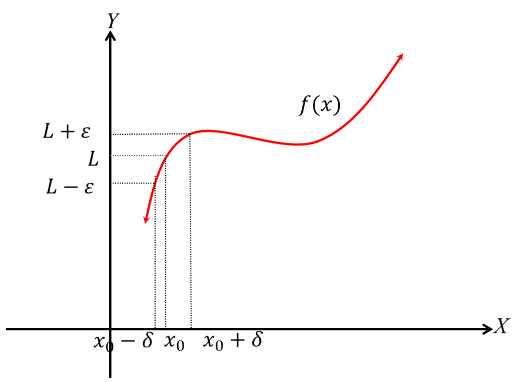
II. Límite de funciones y continuidad

Prof. Misael Solorza Guzmán

22 de marzo de 2023

II.1 Límite de manera gráfica, numérica y técnica.

Definición* 1.** *Se llama* ***límite de una función $f(x)$ *al valor* L, *si para todo* x *entorno a* x_0 *con excepción* $x = x_0$, *tienden siempre a la imagen de* $f(x)$; *esto es,*



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

de donde

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 <\mid x - x_0 \mid< \delta$$

$$\Rightarrow \quad \mid f(x) - L \mid< \epsilon.$$

***Ejemplo* 1.** *Demuestre que* $\lim_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$, *usando la definición de límite.*

Solución. Con la definición de límite,

$$\lim_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$$

de las cuales

$$x_0 = -2, \quad f(x) = 7 - 2x \quad \text{y} \quad L = 11$$

por consiguiente

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 <\mid x - (-2) \mid< \delta \quad \Rightarrow \quad \mid (7 - 2x) - 11 \mid< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | 7-2x-11 |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | -2x-4 |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | (-2)(x+2) |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | -2 || x+2 |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad 2 | x+2 |< \epsilon$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{\epsilon}{2} \ \text{ satisfface la definición de límite.} \quad \textbf{q.e.d.}$$

Comprobación.

$$| x+2 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | x+2 |< \tfrac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 | x+2 |< \epsilon \Rightarrow \quad | -2x-4 |< \epsilon$$

$$\therefore \quad | (7-2x)-11 |< \epsilon.$$

Ejemplo 2. *Demuestre que* $\lim\limits_{x\to 5}(-4) = -4$*, usando la definición de límite.*

Solución. Con la definición de límite,

$$\lim_{x\to 5}(-4) = -4$$

de las cuales

$$x_0 = 5, \quad f(x) = -4 \ \text{ y } \ L = -4$$

por consiguiente

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 <| x-5 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | -4-(-4) |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x-5 |< \delta \quad \Rightarrow \quad | -4+4 |< \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad | x-5 |< \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < \epsilon$$

$$\therefore \quad \epsilon > 0 \ \text{ satisface la definición de límite y en paricular } \delta = \epsilon \quad \textbf{q.e.d.}$$

Comprobación. Como

$$0 <| x-5 |< \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < \delta \ \text{ o } \ 0 < \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad | 4-4 |< \epsilon \Rightarrow \quad | -4+4 |< \epsilon$$

$$\therefore \quad | -4-(-4) |< \epsilon.$$

Técnica de Límite . Sea k una constante y los límites $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, se cumplen los siguientes casos:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A+B$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A-B$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)=AB$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x))=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=Ak$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B};\quad B\neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n=A^n$
7. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[n]{A}$

Tarea. Demuestre cada una (1-7), de las técnicas de límites.

***Ejemplo* 3.** *Determine el límite de*

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}}.$$

Solución. Usasndo técnica de límite, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}} &= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x+4\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+1\right)}}\\ &= \sqrt{\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2+3\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)+\lim\limits_{x\to 2} 4}{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^3+\lim\limits_{x\to 2} 1}}\\ &= \sqrt{\frac{2^2+3(2)+4}{2^3+1}}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}}=\frac{\sqrt{14}}{3}}$$

Observación .

1. Si $f(x)$ es una función algebraica (polinómica, racional o irracional) y x_0 está en el dominio de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

***Ejemplo* 4.** *Determine el límite de*

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}}.$$

Solución. Usando la obsevación 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, se tiene:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}} = \sqrt{\frac{2^2+3(2)+4}{2^3+1}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}} = \frac{\sqrt{14}}{3}}$$

2. Si $f(x_0) = \frac{a}{0} \notin \mathbb{R}, \quad \forall \quad a \in \mathbb{R}$ en la observación 1., entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ recurre al algebra preliminares para simplificar por factorización o estrategias y finalizar con las técnicas de límites, si existe.

***Ejemplo* 5.** *Determine el límite de*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^2-9}{x}.$$

Solución. Usando la obsevación 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^2-9}{x} = \frac{(3+0)^2-9}{0} = \frac{0}{0} \notin \mathbb{R}$$

por consiguiente, se procede analizar con la observación2., nos da:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^2-9}{x} = \frac{(3+0)^2-9}{0} = \frac{9+6x+x^2-9}{x} = \frac{6x+x^2}{x} = 6$$

el límite existe

$$\therefore \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^2-9}{x} = 6}$$

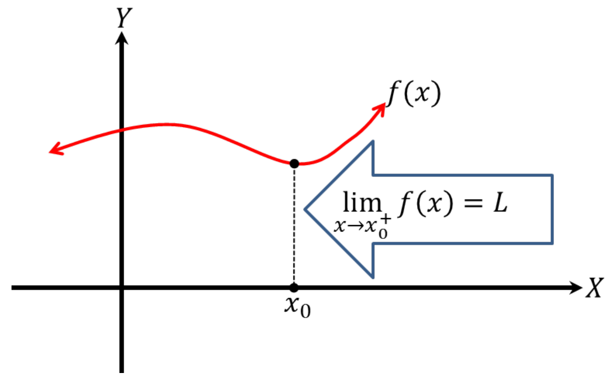
Definición 2. *Se llama* ***límite leteral derecho*** *al límite de $f(x)$ conforme x se acerca a x_0 por la derecha de L; se denota como sigue*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

de donde

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < x - x_0 < \delta$$

$$\Rightarrow \quad | f(x) - L | < \epsilon.$$



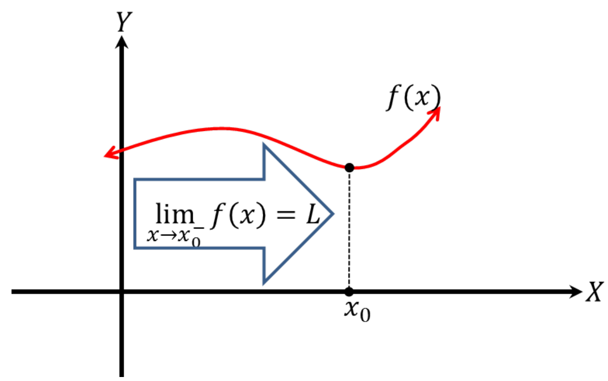
Definición 3. *Se llama* ***límite leteral Izquierdo*** *al límite de $f(x)$ conforme x se acerca a x_0 por la izquierda de L; se denota como sigue*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

de donde

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < x - x_0 < \delta$$

$$\Rightarrow \quad | f(x) - L | < \epsilon.$$



Teorema 1. Teorema de existencia de límite*. El $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a L, si y sólo si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.*

Demostración.

$$\text{Sea} \quad \delta = \min(\delta_1,\ \delta_2) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad | f(x) - L | < \epsilon \ \text{ con } \ 0 < | x - x_0 | < \delta, \ \text{es decir}$$

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_1 > 0 \quad \text{tal que} \quad | f(x) - L | < \epsilon \ \text{ con } \ 0 < | x - x_0 | < \delta \ \text{ y con}$$

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_2 > 0 \quad \text{tal que} \quad | f(x) - L | < \epsilon \ \text{ con } \ 0 < -(x - x_0) < \delta$$

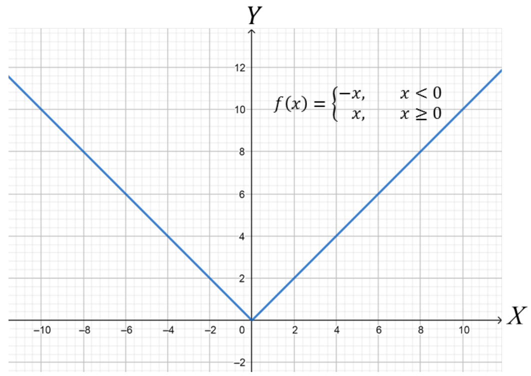
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

***Ejemplo* 6.** *Grafica la función $f(x) = \mid x \mid$ determina $\lim_{x\to 0} f(x)$ si existe.*

Solución. Como

$$f(x) = \mid x \mid = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$$



aplicando límites laterales, se tienen

$$\lim_{x\to 0^+} \mid x \mid = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} \mid x \mid = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

por el teorema de existencia de límite

$$\lim_{x\to 0^+} \mid x \mid = \lim_{x\to 0^-} \mid x \mid = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \mid x \mid = 0}$$

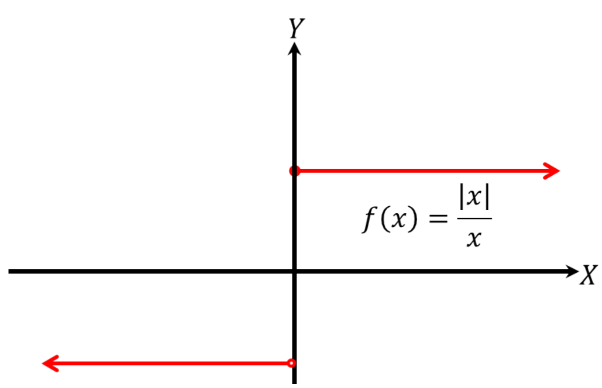
***Ejemplo* 7.** *Grafica la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ determina $\lim_{x\to 0} f(x)$ si existe.*

Solución. Como

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$$

entonces

$$f(x) = \frac{\mid x \mid}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$$



aplicando límites laterales, se tienen

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\, x\,|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\, x\,|}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

por el teorema de existencia de límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\, x\,|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|\, x\,|}{x}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{|\, x\,|}{x}} \quad \textbf{NO EXISTE}$$

Definición 4. *Se llama* ***función que crece sin límite (límite*** $+\infty$***)*** *al límite de* $f(x)$ *que contiene a un valor de* x_0*en un intervalo abierto, excepto a* x_0 *mismo; esto es*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\forall \quad N > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 <|\, x - x_0\,|< \delta \quad f(x) > N.$$

Ejemplo 8. *Determinar*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2}$$

si existe.

Solución. Usando observación 1. de técnica de límite, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{0} \notin \mathbb{R}$$

la indeterminación no se sabe si crece o decrece sin límite, por consiguiente se analiza por límites laterales, así

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{(0^+)^2} = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{(0^-)^2} = +\infty$$

como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

cumple la condición del teorema de existencia de límite,

$$\therefore \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty}$$

***Definición* 5.** *Se llama **función que decrece sin límite (límite** $-\infty$**)** al límite de $f(x)$ que contiene a un valor de $x_0$en un intervalo abierto, excepto a x_0 mismo; esto es*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\forall \quad N < 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 <\mid x - x_0 \mid< \delta \quad f(x) < N.$$

***Ejemplo* 9.** *Determinar*

$$\lim_{x\to 0} -\frac{3}{x^2}$$

si existe.

Solución. Usando observación 1. de técnica de límite, se tiene

$$\lim_{x\to 0}(-\frac{3}{x^2}) = -\frac{3}{0} \notin \mathbb{R}$$

la indeterminación no se sabe si crece o decrece sin límite, por consiguiente se analiza por límites laterales, así

$$\lim_{x\to 0^+}(-\frac{3}{x^2}) = -\frac{3}{(0^+)^2} = -\infty$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{(0^-)^2} = -\infty$$

como

$$\lim_{x\to 0^+}(-\frac{3}{x^2}) = \lim_{x\to 0^-}(-\frac{3}{x^2}) = -\infty$$

cumple la condición del teorema de existencia de límite,

$$\therefore \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0}(-\frac{3}{x^2}) = -\infty}$$

***Ejemplo* 10.** *Determinar*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}$$

si existe.

Solución. Usando observación 1. de técnica de límite, se tiene

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}=\frac{2-2}{2-\sqrt{4(2)-(2)^2}}=\frac{0}{0}\notin\mathbb{R}$$

la indeterminación no se sabe si crece o decrece sin límite, por consiguiente se analiza por límites laterales, así

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2+\sqrt{4x-x^2}}{x-2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

y

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2+\sqrt{4x-x^2}}{x-2}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

como

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}\neq\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}$$

con la condición del teorema de existencia de límite,

$$\therefore\quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}}\quad \textbf{No existe.}$$

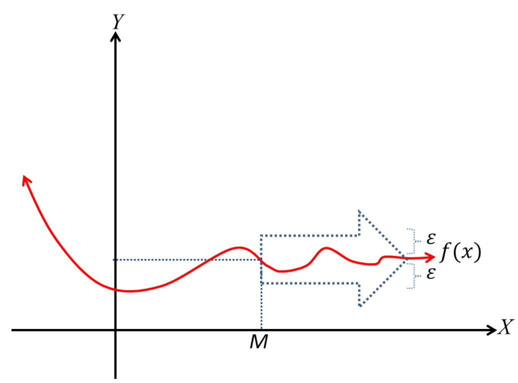
Definición 6. *Se llama **límite en el infinito** al valor L de $f(x)$ cuando x CRECE o DECRECE sin límite; se denotan como sigue*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$$

de donde

$$\forall\quad \epsilon>0\quad\exists\quad M>0\quad\text{tal que}$$

$$\mid f(x)-L\mid<\epsilon\quad\text{con}\quad x>M$$



o

Ejemplo 11. *Determine el límite en el infinito de*

$$\frac{2x^2+4x-6}{3x^2+2x-16}$$

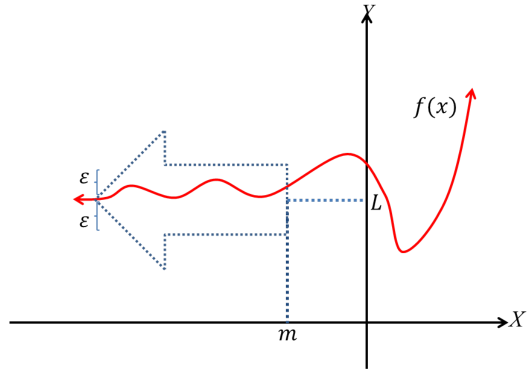
en cada caso.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

de donde

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad m < 0 \quad \text{tal que}$$

$$|\ f(x) - L\ | < \epsilon \quad \text{con} \quad x < m$$



Solución. Usando observación 1. y técnica de límite, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+4x-6}{3x^2+2x-16} = \frac{\infty}{\infty} \notin \mathbb{R}$$

por consiguiente, se procede analizar con la observación 2., nos da:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+4x-6}{3x^2+2x-16} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2})}{x^2(3+\frac{2}{x}-\frac{16}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{16}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{16}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+4x-6}{3x^2+2x-16} = \frac{2}{3}}$$

***Ejemplo* 12.** *Determine el límite en el infinito de*

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$$

en cada caso.

Solución. Usando observación 1. y técnica de límite, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\infty}{\infty} \notin \mathbb{R}$$

por consiguiente, se procede analizar con la observación 2., nos da:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(3-\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(3-\frac{2}{x})}{|\ x\ |\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y cuando $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad |\ x\ | = -x$, así

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3-\frac{2}{x})}{(-x)\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$