I. Funciones algebraicas y trascendentes

Prof. Misael Solorza Guzmán

9 de marzo de 2023

I.1.3 Operaciones de Funcines. Dadas $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones , se tienen:

a) Suma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$D\{f+g\}(x) = D\{f(x)\} \wedge D\{g(x)\}$$

b) Resta

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$D\{f-g\}(x) = D\{f(x)\} \wedge D\{g(x)\}$$

c) Producto

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$D\{f \cdot g\}(x) = D\{f(x)\} \wedge D\{g(x)\}$$

d) Cociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{con} \quad g(x) \neq 0$$
$$D\left\{\frac{f}{g}(x)\right\} = D\{f(x)\} \wedge D\{g(x)\}, \quad \text{y} \quad D\{g(x)\} \neq 0$$

Ejemplo* 1.** *De $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x-4}$, determine:* ***a) $f+g$; ***b)*** $f-g$; ***c)*** $f \cdot g$ *y* ***d)*** $\dfrac{f}{g}$.

Solución. De $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x-4}$, se tienen:

$$D\{f(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} = [-1,\ \infty)$$
$$\text{y} \quad D\{g(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\} = [4,\ \infty)$$

luego

a) $(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$, y $D\{f+g\}(x) = [-1,\ \infty) \wedge [4,\ \infty) = [4,\ \infty)$

b) $(f-g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$, y $D\{f-g\}(x) = [-1,\ \infty) \wedge [4,\ \infty) = [4,\ \infty)$

c) $(f\cdot g)(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-4} = \sqrt{x^2-3x-4}$, y $D\{f\cdot g\}(x) = [-1,\ \infty) \wedge [4,\ \infty) = [4,\ \infty)$

d) $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$, como $g(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D\{g(x)\} = (4,\ \infty)$
$\therefore \quad D\left\{(\frac{f}{g})(x)\right\} = [-1,\ \infty) \wedge (4,\ \infty) = (4,\ \infty)$

Definición* 1.** *Se define la* ***Composición de funciones *de $f(x)$ y $g(x)$ a la operación de la forma*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

de las cuales

$$D\{(f \circ g)(x)\} = D\{f(x)\} \wedge {}_gD\{f(x)\}$$

donde

$${}_gD\{f(x)\} \equiv D\{g(x)\} \text{ pertenece al } D\{f(x)\}$$

Ejemplo* 2.** *De $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x-3$, determine:* ***a) $(f \circ g)(x)$ *y* ***b)*** $(g \circ f)(x)$ *y sus respectivos dominios.*

Solución. De $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x-3$, se tienen:

$$D\{f(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0,\ \infty)$$
$$\text{y} \quad D\{g(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = (-\infty,\ +\infty)$$

luego

a) $(f \circ g)(x) = f(2x-3) = \sqrt{2x-3}$, y
$D\{(f \circ g)(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-3 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\right\} = \left[\frac{3}{2},\ +\infty\right)$

b) $(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3,$ y

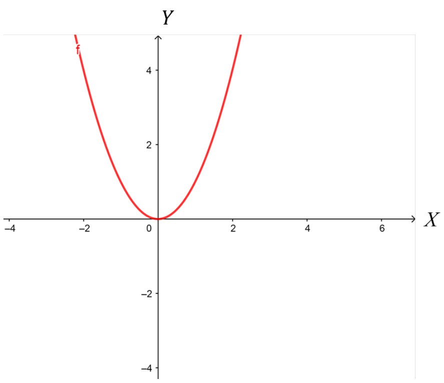
$D\{(g \circ f)(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \ +\infty)\,.$

Definición 2. *Se denomina* ***función par****, a la función cuya gráfica es simétrica respecto al eje Y; o bien, si*

$$f(-x) = f(x)$$

Ejemplo 3. *Verifica si $f(x) = x^2$ es par.*

Solución. Bosquejando a $f(x) = x^2$, se tiene:



La imagen de la gráfica presenta una ***SIMETRÍA AL EJE Y***; por tanto

$$f(x) = x^2 \text{ es } \boldsymbol{PAR}.$$

Analíticamente, con $x = -x \quad \Rightarrow \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \quad \therefore \quad f(x) = x^2$ es ***PAR***.

Definición 3. *Se denomina* ***función Impar****, a la función cuya gráfica es simétrica respecto al origen; o bien, si*

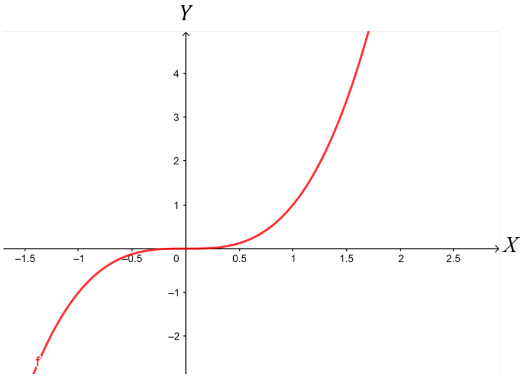
$$f(-x) = -f(x)$$

Ejemplo 4. *Verifica si $f(x) = x^3$ es impar.*

Solución. Bosquejando a $f(x) = x^3$, se tiene:

Nota. Una función puede ser ***NO PAR NI IMPAR***.

Ejemplo 5. *Verifica si $f(x) = x^3$ es impar.*



La imagen de la gráfica presenta una ***SIMETRÍA AL ORIGEN***; por tanto

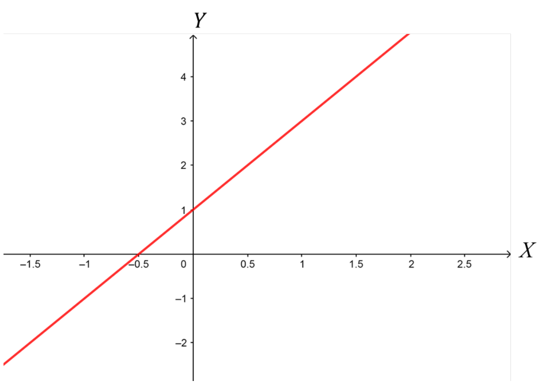
$$f(x) = x^3 \text{ es } \textbf{\textit{IMPAR}}.$$

Analíticamente, con $x = -x \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \quad \therefore \quad f(x) = x^3$ es ***IMPAR***.

De $f(x) = 2x + 1$, por intersección en los ejes:

En el eje Y; $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 2(0) + 1 = 1 \Rightarrow (0,\ 1)$,

en el eje X; $y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2},\ 0)$. La imagen de la gráfica no pasa por el origen, ni tampoco es simétrico al eje $f(x)$.



$\therefore \quad f(x) = 2x + 1$ ***NO ES PAR, NI IMPAR***.

Analíticamente, con $x = -x \Rightarrow f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 = -(2x - 1)$ y $-(2x - 1) \neq f(x)$ y también $-(2x - 1) \neq -f(x)$

$\therefore \quad f(x) = 2x + 1$ ***NO ES PAR, NI IMPAR***.

Solución. Bosquejando a $f(x) = x^3$, se tiene:

Definición 4. *Una función $f(x)$ se denomina* **función Inversa** *$f^{-1}(x)$, si la función $f(x)$ es uno a uno en $(x,\ y)$; esto es,*

$$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = f^{-1}(y).$$

Teorema 1. *Si $f(x)$ es una función uno a uno y tiene $f^{-1}(x)$ como su inversa, entonces $f^{-1}(x)$ es un función uno a uno y tiene a $f(x)$ como su inversa; se verifica,*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall \quad x \in D\{f(x)\}.$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall \quad x \in D\left\{f^{-1}(x)\right\}.$$

***Ejemplo* 6.** *Determine $f^{-1}(x)$ de $f(x) = 4x - 3$.*

Solución. Con $f(x) = 4x - 3$ y la definición de la función inversa, $x = f^{-1}(y)$ y $y = 4x - 3$, así

$$y = 4x - 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y+3}{4}$$

$$\text{En consecuencia} \quad f^{-1}(y) = \frac{y+3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}.$$

Verificación

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(4x-3) \\ &= \frac{(4x-3)+3}{4} \\ &= \frac{4x}{4} \\ &= x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f(\frac{x+3}{4}) \\ &= 4(\frac{x+3}{4}) - 3 \\ &= (x+3) - 3 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4} \quad \text{de} \quad f(x) = 4x - 3.$$

En los ejercicios 7 a 18, determine si la función tiene inversa. Si la inversa existe, haga lo siguiente: (i) determínela y establezca su dominio y contradominio; (ii) trace las gráficas de la función y de su inversa en el mismo rectángulo de inspección. Si la función no tiene inversa, apoye gráficamente este hecho verificando que una recta horizontal intersecta la gráfica en más de un punto.

7. **(a)** $f(x) = 5x - 7$ **(b)** $g(x) = 1 - x^2$

8. **(a)** $f(x) = 3x + 6$ **(b)** $g(x) = x^5$

9. **(a)** $f(x) = (4 - x)^3$ **(b)** $h(x) = \sqrt{2x - 6}$

10. **(a)** $F(x) = 3(x^2 + 1)$ **(b)** $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

11. **(a)** $F(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ **(b)** $f(x) = (x + 2)^4$

12. **(a)** $f(x) = |x| + x$ **(b)** $g(x) = 3\sqrt[3]{x} + 1$