Método de Integración

7 de junio de 2023

I.2. Método de Integración por Partes

Es un método que permite descomponer los factores de una integración en dos factores, a saber, u y dv. Así

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Estrategia de integración:

Se elige los factores u y dv, identificando el siguiente ordenamiento:

I: Función trigonométrica inversa
L: Función Logaritmica
A: Función Algebraica
T: Función trigonométrica
E: Función Exponencial

Ejemplos

1. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx.$

   Solución.
   Se identifican en el integrando x^2 una función algebraica y $\operatorname{sen} x$ una función trigonométrica, usando la estrategia y la fórmula de integración por partes, se tienen:

$$\begin{aligned} u &= x^2 \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} x\,dx \\ du &= 2x\,dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

   así la integral, nos queda

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + \int x \cos x\,dx \tag{1}$$

   nuevamente se usa la regla en el segundo término, donde

$$\begin{aligned} u &= x \quad \text{y} \quad dv = \cos x\,dx \\ du &= dx \quad \text{y} \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

   luego

$$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int x \operatorname{sen} x\,dx \tag{2}$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C \tag{3}$$

   finalmente, sustituyendo (3) en (1), por lo tanto

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

2. $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx.$

Solución.

Se identifican en el integrando $\ln(x^2+1)$ una función logaritmica y se toma 1 una función algebraica, usando la estrategia y la fórmula de integración por partes, se tienen:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x^2+1) \quad \text{y} \quad dv = dx \\ du &= \frac{2x}{x^2+1}\,dx \quad \text{y} \quad v = x \end{aligned}$$

así la integral, nos queda

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+1)\,dx &= x\ln(x^2+1) - \int x\frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx \\ &= x\ln(x^2+1) - 2\int (1-\frac{1}{x^2+1})\,dx \\ &= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C.$$

3. $\displaystyle\int \csc^3 x\,dx.$

Solución.

Se descompone el integrando por $\csc x$ una función trigonométrica y $\csc^2 x$ una función directa de antiderivada, usando la estrategia y la fórmula de integración por partes, se tienen:

$$\begin{aligned} u &= \csc x \quad \text{y} \quad dv = \csc^2 x\,dx \\ du &= -\csc x\cot x\,dx \quad \text{y} \quad v = -\cot x \end{aligned}$$

así la integral, nos queda

$$\begin{aligned} \int \csc^3 x\,dx &= -\csc x\cot x - \int \csc x\cot^2 x\,dx \\ &= -\csc x\cot x - \int \csc x(\csc^2 x - 1)\,dx \\ &= -\csc x\cot x - \int \csc^3 x\,dx + \int \csc x\,dx \end{aligned}$$

pasando el segundo término a la izquierda de la igualdad y haciendo algebra, se resumen en

$$\begin{aligned} \int \csc^3 x\,dx &= -\frac{1}{2}\csc x\cot x + \frac{1}{2}\int \csc x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\csc x\cot x - \frac{1}{2}\ln(\csc x + \cot x) + C \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int \csc^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\csc x\cot x - \frac{1}{2}\ln(\csc x + \cot x) + C.$$