Corrección del tercer examen parcial

González Cárdenas Ángel Aquilez

1. Usando un método adecuado, calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \ln e^{\frac{1-sen^2 x}{2}} dx$

Respuesta: De las propiedades de los logaritmos tenemos que para $\log_a a^x = x$, entonces

$$\int \ln e^{\frac{1-sen^2 x}{2}} dx = \int \frac{1-sen^2 x}{2} dx$$

Y como $1 - \operatorname{sen}^2 x = cos^2 x$, reescribiendo

$$= \int \frac{cos^2 x}{2} dx = \frac{1}{2} \int cos^2 x dx$$

Y por la propiedad $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$, tenemos

$$= \int [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)] dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x) dx$$

De modo que

$$\int \ln e^{\frac{1-sen^2 x}{2}} dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen(2x)] + C = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}sen(2x) + C$$

b) $\int \frac{\arctan \frac{t}{2}}{4+t^2} dt$

Respuesta: Haciendo

$$u = \arctan \frac{t}{2} \implies du = \frac{\frac{dt}{2}}{1+\frac{t^2}{4}} = \frac{dt}{2(1+\frac{t^2}{4})} = \frac{dt}{2+\frac{1}{2}t^2}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{2}$ tenemos

$$\frac{du}{2} = \frac{dt}{4+t^2}$$

Por lo que

$$\int \frac{\arctan \frac{t}{2}}{4+t^2} dt = \frac{1}{2}\int u du = \frac{u^2}{4} + C$$

Y regresando la sustitución tenemos que el resultado nos da

$$= \frac{1}{4} \arctan \frac{t}{2} + C$$

2. Obtenga las siguientes integrales indefinidas según el método más conveniente:

a) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^3 x} dx$

Respuesta: Haciendo $u = \operatorname{sen} x \implies du = \cos x dx$, tenemos

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^3 x} dx = \int \frac{1}{u + u^3} du$$

Utilizando el método de funciones racionales, descomponemos la expresión como

$$\frac{1}{u + u^3} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 1}$$

De donde

$$1 = A(u^2 + 1) + (Bu + C)u = Au^2 + Bu^2 + Cu + A$$

Para $u^2 = 0 \implies A + B = 0$
Para $u = 0 \implies C = 0$,
y para los términos constantes tenemos $1 = A$, de modo que

$$A + B = 0 \implies A = -B = -1$$

Por lo tanto, reescribiendo el cambio de variable tenemos que

$$\int \frac{1}{u + u^3} du = \int \frac{du}{u} - \int \frac{udu}{u^2 + 1}$$

Para el segundo miembro tenemos que

$$v = u^2 + 1 \implies dv = 2udu, \frac{1}{2} dv = udu$$

Por lo tanto

$$= \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} = \ln \mid u \mid - \frac{1}{2} \ln \mid v \mid + C$$

De modo que

$$= \ln \mid u \mid - \ln \mid u^2 + 1 \mid + C = \ln \mid \operatorname{sen} x \mid - \frac{1}{2} \ln \mid \operatorname{sen}^2 x + 1 \mid + C$$

b) $\int \frac{e^{-x}}{(e^{-2x} + 1)^{\frac{3}{2}}} dx$

Respuesta: Como

$$\int \frac{e^{-x}}{(e^{-2x} + 1)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{dx}{e^x (e^{-2x} + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

hacemos $u = e^x \implies du = e^x dx$, $\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{e^x}$, de modo que

$$= \int \frac{1}{(\frac{1}{u^2} + 1)^{\frac{3}{2}} u^2} du$$

Luego, haciendo $v = \frac{1}{u} \implies dv = -\frac{1}{u^2}du$, y utilizando el método de sustitución trigonométrica hacemos

$$v = \tan\theta \implies dv = \sec^2\theta d\theta$$

Y de la propiedad trigonométrica

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \implies \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

De modo que

$$= -\int \frac{1}{(v^2+1)^{\frac{3}{2}}}dv = -\int \frac{1}{(\tan^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}\sec^2\theta d\theta = -\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{(\sec^2\theta)\frac{3}{2}} = -\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}d\theta$$

Lo que resulta en

$$= -\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = -\int \frac{d\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} = -\int \cos\theta d\theta = -\operatorname{sen}\theta + C$$

Y de la sustitución trigonométrica tenemos que $\theta = \arctan v$, y $\tan\theta = \frac{v}{1}$, así

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v}{\sqrt{v^2+1}}$$

De modo que

$$= -\operatorname{sen}\theta + C = -\frac{v}{\sqrt{v^2+1}} = -\frac{\frac{1}{u}}{\frac{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}}{1}} + C = -\frac{1}{u\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}}$$

Por lo que finalmente

$$= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}} + C$$

3. Resuelve las siguientes integrales definidas según el método más conveniente:

a) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}{1+\cos\frac{1}{2}t}dt$

Respuesta: De la integral indefinida $\int \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}{1+\cos\frac{1}{2}t}dt$, hacemos $u = \frac{1}{2}t \implies du = \frac{1}{2}dt$, $2du = dt$, de modo que

$$= 2\int \frac{\operatorname{sen}u}{1+\cos u}du$$

Luego, haciendo $v = \cos u + 1 \implies dv = -\operatorname{sen}udu$, de modo que

$$= -2\int \frac{dv}{v} = -2\ln \mid v \mid + C = -2\ln \mid \cos u + 1 \mid + C = -2\ln \mid \cos\frac{1}{2}t + 1 \mid + C$$

Como $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, para la integral original tenemos que

$$\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}{1+\cos\frac{1}{2}t}dt = [-2\ln \mid \cos\frac{\pi}{2} + 1 \mid] + [2\ln \mid \cos\frac{\pi}{2} + 1 \mid] \approx 0.81$$

b) $\int_0^{16} \sqrt{4-\sqrt{x}}dx$

Respuesta: De la integral indefinida $\int \sqrt{4-\sqrt{x}}dx$, haciendo $u = \sqrt{x} \implies du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, $udu = \frac{dx}{2}$, de modo que

$$= 2\int \sqrt{4-u}udu$$

Luego, haciendo $v = 4-u \implies dv = -du$, por lo cual

$$= 2\int (v-4)\sqrt{v}dv = 2\int [v^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{v}]dv = 2\int v^{\frac{3}{2}}dv - 8\int \sqrt{v}dv = \frac{4}{5}v^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{5}v^{\frac{3}{2}} + C$$

Por lo tanto, tenemos que

$$= \frac{4}{5}(4-\sqrt{x})^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}(4-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C$$

Finalmente, de la integral original tenemos el resultado

$$\int_0^{16} \sqrt{4-\sqrt{x}}dx = [\frac{4}{5}(4-\sqrt{16})^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}(4-\sqrt{16})^{\frac{3}{2}}] - [\frac{4}{5}(4-\sqrt{0})^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}(4-\sqrt{0})^{\frac{3}{2}}]$$
$$\approx -17.06$$