Derivadas de funciones implícitas

Derivadas de orden superior. Si una función $f(x)$ es diferenciable n veces, entonces forma funciones diferenciables n-ésimos; esto es,

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},\; f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right), \cdots,\; f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Ejemplo 1. Obtener todas las derivadas de $8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$.

Solución.

Sea $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$, así:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 8\frac{dx^4}{dx} + 5\frac{dx^3}{dx} - \frac{dx^2}{dx} + \frac{d(7)}{dx}$$
$$= 32x^3 + 15x^2 - 2x$$
$$f''(x) = \frac{d\,f'(x)}{dx} = 32\frac{dx^3}{dx} + 15\frac{dx^2}{dx} - 2\frac{dx}{dx}$$
$$= 96x^2 + 30x - 2$$
$$f'''(x) = \frac{d\,f''(x)}{dx} = 96\frac{dx^2}{dx} + 30\frac{dx}{dx} - \frac{d(2)}{dx}$$
$$= 192x + 30$$
$$f^{iv}(x) = \frac{d\,f'''(x)}{dx} = 192\frac{dx}{dx} = 192$$
$$f^{v}(x) = \frac{d\,f^{iv}(x)}{dx} = \frac{d(192)}{dx} = 0$$

$\therefore\; f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$ es derivada de $5°$ orden.

Técnica de derivación con funciones implícitas. Sea $F(x,\ y) = 0$ una función implícita donde $y = f(x)$, la derivada se obtine diferenciando ambos miembros de la igualdad respetando las diferentes reglas y técnicas; finalmente se factoriza y se despeja $y' = \frac{dy}{dx}$.

Ejemplo 2. Derivar $5xy^4 - 8x^3 = 9y^2 - 4xy$.

Solución. Usando la técnica de derivación con funciones implícitas, se tienen

$$D_x(5xy^4 - 8x^3 = 9y^2 - 4xy)$$

$$\begin{aligned} D_x(5xy^4 - 8x^3 &= 9y^2 - 4xy) \\ D_x(5xy^4) - D_x(8x^3) &= D_x(9y^2) - D_x(4xy) \\ y^4(5) + 4y^3y'(5x) - 24x^2 &= 18yy' - (y(4) + 4xy') \\ (20xy^3 + 4x - 18y)y' &= 24x^2 - 4y - 5y^4 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$y' = \frac{24x^2 - 4y - 5y^4}{20xy^3 + 4x - 18y}.$$

Técnica de derivación con propiedades logaritmicas. Con $y = f(x)$ y simplificando propiedades logaritmicas junto con las reglas y técnica de derivación, se obtiene $y' = \frac{dy}{dx}$.

Ejemplo 3. Derivar $f(x) = x^{x^2}$.

Solución. Usando la técnica de derivación con propiedades logaritmicas, se tienen

$$y = x^{x^2}$$

aplicando logaritmos ambos lados de la igualdad y propiedades, se reduce

$$\ln\, y = \ln\, x^{x^2} = x^2 \ln\, x$$

luego derivando

$$\begin{aligned} D_x(\ln\, y &= x^2 \ln\, x) \\ \frac{1}{y}y' &= x(\frac{1}{x}) + \ln\, x \end{aligned}$$

por lo tanto

$$y' = x^{x^2}[1 + \ln\, x].$$

En los ejercicios 37 y 38, determine todas las derivadas de la función

37. $f(x) = 6x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 9$

38. $f(x) = 2x^7 - x^5 + 5x^3 - 8x + 4$

39. Calcule $D_t^3\left(\frac{1}{6t^3}\right)$

40. Determine $\frac{d^4}{dx^4}\left(x^5 - \frac{1}{15x^5}\right)$

En los ejercicios 17 a 32, determine $\frac{dy}{dx}$ *por medio de diferenciación implícita.*

17. $x^2 + y^2 = 16$ **18.** $4x^2 - 9y^2 = 1$

19. $x^3 + y^3 = 8xy$ **20.** $x^2 + y^2 = 7xy$

21. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ **22.** $\frac{3}{x} - \frac{3}{y} = 2x$

23. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ **24.** $2x^3y + 3xy^3 = 5$

25. $x^2y^2 = x^2 + y^2$ **26.** $(2x + 3)^4 = 3y^4$

27. $y = \cos(x - y)$ **28.** $x = \operatorname{sen}(x + y)$

29. $\sec^2 x + \csc^2 y = 4$ **30.** $\cot xy + xy = 0$

31. $x \operatorname{sen} y + y \cos x = 1$ **32.** $\cos(x + y) = y \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 31 a 36, calcule $\frac{dy}{dx}$ *mediante diferenciación implícita.*

31. $\ln xy + x + y = 2$ **32.** $\ln \frac{x}{y} + xy = 1$

33. $x = \ln(x + y + 1)$ **34.** $\ln(x + y) - \ln(x - y) = 4$

35. $x + \ln x^2y + 3y^2 = 2x^2 - 1$

36. $x \ln y + y \ln x = xy$

En los ejercicios 1 a 20, calcule la derivada de la función.

13. $f(t) = \sec 3^{t^2}$ **14.** $f(x) = x^{\ln x}; x > 0$

15. $f(x) = x^{\sqrt{x}}; x > 0$ **16.** $f(x) = x^{x^2}; x > 0$

17. $g(z) = z^{\cos z}; z > 0$ **18.** $f(x) = x^{e^x}; x > 0$

19. $h(x) = (\operatorname{sen} x)^{\tan x}; \operatorname{sen} x > 0$

20. $g(t) = (\cos t)^t; \cos t > 0$

36. La recta tangente a la curva $16x^4 + y^4 = 32$ en el punto $(1, 2)$.

37. ¿En qué punto de la curva $xy = (1 - x - y)^2$ la recta tangente es paralela al eje x?

38. Dos rectas que pasan por el punto $(-1, 3)$, son tangentes a la curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$. Encuentre una ecuación de cada una de las rectas.

En los ejercicios 39 a 42, haga lo siguiente: (a) Encuentre dos funciones definidas por la ecuación; (b) dibuje las gráficas de cada una de las funciones obtenidas en el inciso (a); (c) dibuje la gráfica de la ecuación; (d) calcule la derivada de cada una de las funciones obtenidas en el inciso (a) y determine los dominios de las derivadas; (e) obtenga $\frac{dy}{dx}$ *mediante diferenciación implícita de la ecuación dada, y verifique que el resultado así obtenido es acorde con los resultados del inciso (d); (f) encuentre una ecuación de cada recta tangente en el valor indicado de* x_1.

39. $y^2 = 4x - 8;\ x_1 = 3$

40. $y^2 - x^2 = 16;\ x_1 = -3$

41. $x^2 - y^2 = 9;\ x_1 = -5$

42. $x^2 + y^2 = 25;\ x_1 = 4$

43. Dado que $x^2 + y^2 = 1$, demuestre que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3}$.

44. Sea $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$, pruebe que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$.

45. Si $x^3 + y^3 = 1$, muestre que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{y^5}$.

46. Sea $x^2 + 25y^2 = 100$, demuestre que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{25y^3}$.

47. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = \sqrt{4t^2 + 3}$, con $t \geq 0$. Determine el valor de t para el cual la medida de la velocidad es **(a)** 0; **(b)** 1; **(c)** 2.

48. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = \sqrt{5 + t^2}$, con $t \geq 0$. Determine el valor de t para el cual la medida de la velocidad es **(a)** 0; **(b)** 1.

49. Suponga que se produce un líquido mediante un proceso químico y que la función de costo total C está dada por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$, donde $C(x)$ dólares es el costo total