제 1강 함수의 극한과 연속성

함수의 극한 1

(1) a를 포함한 개구간(a는 제외 가능)에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 a와 다른 값을 취하면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$가 일정한 값 L에 가까워지면 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 표현한다.

(2) a를 포함한 개구간(a는 제외 가능)에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 a와 다른 값을 취하면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

로 표현한다.

(3) a를 포함한 개구간(a는 제외 가능)에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 a와 다른 값을 취하면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 한없이 작아지면 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

로 표현한다.

(4) x가 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$가 일정한 값 L에 가까워지면 L을 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한이라 하고

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

로 표현한다.

(5) x가 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$가 일정한 값 L에 가까워지면 L을 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한이라 하고

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

로 표현한다.

(6) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = L$이다. 또한 그 역도 성립한다.

(7) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$와 $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$의 경우도 유사하게 정의할 수 있다.

▶ $x \to a, x \to a^{+}$ 또는 $x \to a^{-}$일 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지거나 한없이 작아지는 경우 $x=a$를 $f(x)$의 수직점근선(vertical asymptote)이라 한다.

함수의 극한 2

(1) 개구간 (a, ∞)에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 한없이 커질 때 $f(x)$가 일정한 값 L에 가까워지면 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

로 표현한다.

(2) 개구간 $(-\infty, a)$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 한없이 작아질 때 $f(x)$가 일정한 값 L에 가까워지면 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

로 표현한다.

(3) 개구간 (a, ∞)에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

로 표현한다.

(4) 개구간 (a, ∞)에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 한없이 작아지면 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

로 표현한다.

(5) 개구간 $(-\infty, a)$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 한없이 작아질 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

로 표현한다.

(6) 개구간 $(-\infty, a)$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 x가 한없이 작아질 때 $f(x)$의 값이 한없이 작아지면 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

로 표현한다.

▶ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ 또는 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$인 경우 직선 $y=L$을 함수 $f(x)$의 수평점근선(horizontal asymptote)이라 한다.

정의

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

▶ e는 2와 3 사이에 있는 무리수로 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 만족시킨다.

▶ 밑수가 e인 로그를 자연로그라 하고 $\log_e$ 대신 $\ln$으로 표시한다.

정리

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha, \lim_{x\to a}g(x)=\beta$일 때 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x\to a}cf(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq 0$)

예제 다음 함수의 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 2}(x^2+x-4)$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

(4) $\lim_{x\to 3}-\frac{1}{(x-3)^2}$

(5) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{|x-3|}$

(6) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{|x-3|}$

(7) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$

(8) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$

(9) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x^2-6x+5}$

(10) $\lim_{x\to -\infty}e^x$

(11) $\lim_{x\to\infty}\ln x$

(12) $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-x+2}{x-1}$

예제 (13) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-x+2}{x-1}$ (14) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln(-x)$

풀이 (1) $$\begin{aligned}\lim_{x\to2}(x^2+x-4)&=\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}(-4)\\&=\left(\lim_{x\to2}x\right)^2+2-4\\&=2\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}(x-3)\\&=-1\end{aligned}$$

(3) x가 0과 다른 값을 취하면서 0에 한없이 가까워질 때 분모가 0에 한없이 가까워지고 $x^2>0$이므로 $\frac{1}{x^2}$은 양의 무한대로 발산한다.

(4) x가 3과 다른 값을 취하면서 3에 한없이 가까워질 때 분모가 0에 한없이 가까워지고 $(x-3)^2>0$이므로 $-\frac{1}{(x-3)^2}$은 음의 무한대로 발산한다.

(5) x가 3보다 작은 값을 취하면서 3에 한없이 가까워질 때 $x-3<0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-x-6}{|x-3|}&=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-x-6}{3-x}\\&=\lim_{x\to3^-}-(x+2)\\&=-5\end{aligned}$$

이다.

(6) x가 3보다 큰 값을 취하면서 3에 한없이 가까워질 때 $x-3>0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-x-6}{|x-3|}&=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}\\&=\lim_{x\to3^+}(x+2)\\&=5\end{aligned}$$

이다.

(7) x가 0보다 큰 값을 취하면서 0에 한없이 가까워질 때 분모가 0에 한없이 가까워지고 $x>0$이므로 $\frac{1}{x}$은 양의 무한대로 발산한다.

(8) x가 0보다 작은 값을 취하면서 0에 한없이 가까워질 때 분모가 0에 한없이 가까워지고 $x<0$이므로 $\frac{1}{x}$은 음의 무한대로 발산한다.

풀이

(9) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}$

$=3$

(10) $t=-x$라 두면

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{t\to\infty}e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0$$

이다.

(11) $y=\ln x$의 그래프를 살펴보면 $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$이다.

(12) $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-x+2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(x-1)(x+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}-(x+2)$

$=-\infty$

(13) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-x+2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x-1)(x+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to-\infty}-(x+2)$

$=\infty$

(14) $t=-x$라 두면

$$\lim_{x\to-\infty}\ln(-x)=\lim_{t\to\infty}(\ln t)=\infty$$

이다.

유제

다음 함수의 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to1}(3x^3-4x+8)$

(2) $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^3}$

(4) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)^2}$

(5) $\lim_{x\to0^-}f(x)$, $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x^3+2x & (x>0)\end{cases}$

(6) $\lim_{x\to0^+}f(x)$, $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x^3+2x & (x>0)\end{cases}$

(7) $\lim_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}$

(8) $\lim_{x\to3^-}\frac{1}{x-3}$

유제

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{3x^2+6x-9}$ (10) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln(-3x-6)$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-4}{x+1}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-x+1}{2x-1}$ (14) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln(-3x-6)$

정리

(1) 만약 a를 포함한 개구간(a는 제외가능)에서 $f(x)\le g(x)$이고 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$와 $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 존재할 때 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$이다.

(2) (샌드위치 정리) $f(x)\le g(x)\le h(x)$이고 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=L$이다.

예제

$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$이 됨을 보이시오.

증명

0이 아닌 모든 x에 대하여 $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$이므로 $-x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$이다.

또한 $\displaystyle\lim_{x\to 0}-x^2=0=\lim_{x\to 0}x^2$이다.

따라서 샌드위치 정리에 의해 $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$이다.

유제

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{x^5+x^4}\sin\frac{\pi}{x}=0$이 됨을 보이시오.

함수의 연속성 (Continuity)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립하면 함수 $f(x)$는 a에서 연속이라 정의한다.

(2) $f(x)$는 연속함수라 한다.

▶ 다항함수, 유리함수, 무리함수, 삼각함수, 역삼각함수, 지수함수, 로그함수,

쌍곡선함수, 역쌍곡선함수는 정의역 안의 모든 값에 대하여 연속이다.

예제 다음 함수가 연속함수인지 판단하시오.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x\neq 0 \\ 1 & \text{if } x=0 \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x\neq 2 \\ 1 & \text{if } x=2 \end{cases}$

풀이 (1) $x=2$일 때 $f(x)$의 분모가 0이므로 $f(2)$의 값이 존재하지 않는다. 따라서 $x=2$에서 함수 $f(x)$는 불연속이다. $x\neq 2$에서 $f(x)=x+1$이므로 함수 $f(x)$는 $x\neq 2$인 모든 값에 대하여 연속이다.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty\neq 1=f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

하지만 $x\neq 0$인 모든 값에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$은 연속이다.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=3\neq 1=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

하지만 $x\neq 2$에서 $f(x)=x+1$이므로 함수 $f(x)$는 $x\neq 2$인 모든 값에 대하여 연속이다.

유제 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} & \text{if } x\neq 2 \\ a & \text{if } x=2 \end{cases}$가 연속함수가 되도록 하는 a의 값을 구하시오.

정리 (연속함수의 기본 성질)

두 함수 f와 g가 a에서 연속이고 c가 상수이면 다음의 함수는 모두 a에서 연속이다.

(1) $f+g$ (2) $f-g$ (3) cf

(4) fg (5) $\dfrac{f}{g}$ (단, $g(a)\neq 0$)

정리

함수 f가 b에서 연속이고 $\lim_{x\to a} g(x)=b$이면

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b)$$

이다. 즉,

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

이다.

▶ 위의 정리에서 함수 $g(x)$가 a에서 연속이면 $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(g(a))$이므로 $(f\circ g)(x)$는 a에서 연속이다.

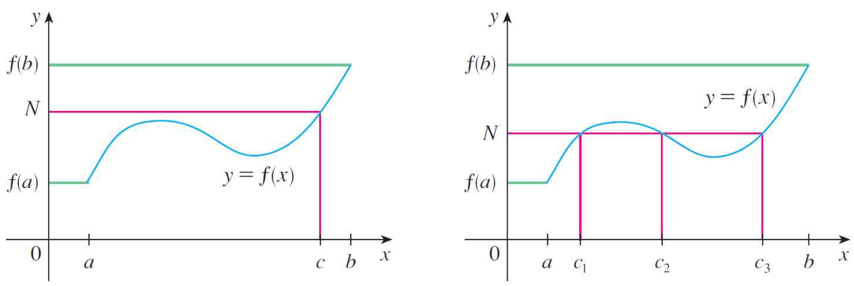
예제 함수 $y=\sin(x^2)$의 연속성을 판단하시오.

풀이 $f(x)=\sin x, g(x)=x^2$이라 하면 $\sin(x^2)=(f\circ g)(x)$이다.
함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모든 실수에 대하여 연속이므로
$\sin(x^2)$도 모든 실수에 대하여 연속이다.

유제 함수 $y=\sin(\cos(\sin(x^2+1)))$의 연속성을 판단하시오.

중간값 정리 (Intermediate value theorem)

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 N에 대하여 $f(c)=N$인 c가 개구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재한다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

예제

삼차방정식

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

은 1과 2 사이에 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

증명

$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$라 두면 $f(x)$는 폐구간 $[1, 2]$에서 연속이다. 또한 $f(0) = -2 < 0$이고 $f(1) = 12 > 0$이므로 중간값 정리에 의하여 $f(c) = 0$인 실수 c가 개구간 $(0, 1)$ 사이에서 적어도 하나 존재한다.

유제

방정식

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

은 0과 1 사이에 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

연습문제

1. $\lim_{x\to3} f(x)=3, \lim_{x\to3} g(x)=2, \lim_{x\to3} h(x)=0$ 이라 하자. 다음 함수의 극한값이 존재하면 극한값을 구하고, 극한값이 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오.

(1) $\lim_{x\to3}(3f(x)+5g(x))$ (2) $\lim_{x\to3}\sqrt{f(x)-g(x)}$

(3) $\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (4) $\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)}{h(x)}$

2. 다음 등식이 성립하도록 상수 a, b 의 값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx-2}{x+1}=3$ (2) $\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x-2}=\dfrac{1}{2}$

3. 함수 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}$ 에 대하여 $\lim_{x\to-1} f(x)=-1$ 과 $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$ 가 성립할 때 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

4. 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{if } x\neq2\\ ax^2-bx+3 & \text{if } 2\le x<3\\ 2x-a+b & \text{if } x\ge3\end{cases}$ 가 모든 실수값에 대하여 연속이 되도록 상수 a, b 의 값을 구하시오.

5. 방정식

$$\sin x = x^2 - x$$

는 1과 2 사이에 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

경북대학교 - 수학 리마인드

제 2강 여러 가지 함수의 미분법

도함수 (derivative)

함수

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

를 $f(x)$의 도함수라 한다.

▶ $f(x)$의 도함수를 $f'(x)$ 또는 $\dfrac{dy}{dx}$로 표현한다.

▶ $f'(a)$는 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 순간변화율을 뜻하며 기하학적으로 $(a, f(a))$에서 곡선 $f(x)$의 접선의 기울기와 같다.

미분가능인 함수 (differentiable function)

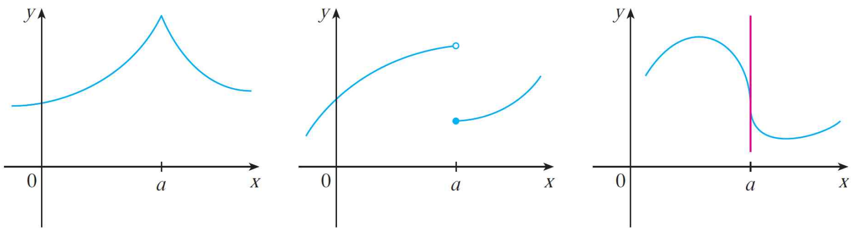
$f'(a)$의 값이 존재할 때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능이라 한다.
또한 정의역에 포함되는 모든 a에 대하여 $f'(a)$가 존재할 때 함수 $f(x)$는 미분가능이라 한다.

정리

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능이면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

▶ 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분불가능이다. 따라서 위의 정리의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

▶ 다음의 세 가지 형태의 함수는 미분불가능이다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

정리 (도함수의 성질)

상수 c와 미분가능인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

(1) $(cf(x))' = cf'(x)$

(2) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

(3) $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

(4) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(5) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

정리

$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (단, n은 실수)

예제 (1) $f(x)=x^3+3\sqrt{x}+5$일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y=x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{3}{5}}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

풀이 (1) $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)'+(3\sqrt{x})'+(5)' \\ &= 3x^2+\frac{3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

이다.

(2) $$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^{\frac{5}{3}})'-(x^{\frac{3}{5}})' \\ &= \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

유제 (1) $f(x)=x^2+5\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}$ 일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y=3x^{\frac{2}{3}}+(\sqrt{2}-1)x^{\sqrt{2}+1}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

정리 (삼각함수의 도함수)

(1) $\dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

(2) $\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

(3) $\dfrac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$

(4) $\dfrac{d}{dx}(\cot x)=-\mathrm{cosec}^2 x$

(5) $\dfrac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$

(6) $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x)=-\mathrm{cosec}\, x\cot x$

▶ 삼각함수의 도함수를 구하기 위해 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$과 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=1$을 이용한다.

예제

(1) $f(x)=\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$의 값을 구하시오.

풀이

(1) $$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(\sec x)'(1+\tan x)-\sec x(1+\tan x)'}{(1+\tan x)^2}\\ &=\frac{\sec x(\tan x-1)}{(1+\tan x)^2}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}x\cot x&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}\\ &=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)\\ &=1\end{aligned}$$

유제

(1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x+\tan x}$의 값을 구하시오.

정리 (역삼각함수의 도함수)

(1) $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(4) $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$

(5) $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(6) $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1}x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

예제

(1) $f(x)=x\tan^{-1}x$ 일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y=\sin^{-1}x\cos^{-1}x$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

풀이

(1) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}(x)\tan^{-1}x+x\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$=\tan^{-1}x+\dfrac{x}{1+x^2}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\cos^{-1}x+\sin^{-1}x\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$

$=\dfrac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{\cos^{-1}x-\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

유제

(1) $f(x)=(x^2+1)\tan^{-1}x$ 일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y=\dfrac{\sin^{-1}x}{\cos^{-1}x}$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

정리 (지수함수의 도함수)

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

▶ $a = e$일 때 $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ 이다.

예제

(1) $f(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y = 2^x + 3^x$일 때 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

풀이

(1) $f'(x) = 2^x \ln 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2}$
$= \left(2^x - \frac{1}{2^x}\right)\ln 2$

(2) $\frac{dy}{dx} = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$

유제

(1) $f(x) = (3^x + 3^{-x})^2$일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y = e^{2x} + 5^{2x}$일 때 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

정리 (로그함수의 도함수)

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

▶ $a = e$일 때 $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ 이다.

예제

(1) $f(x) = \sqrt{x}\log_2 x$일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y = \ln\sqrt[5]{x} + x\log_{10} x$일 때 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

풀이 (1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\log_2 x+\frac{1}{x}\ln 2$

(2) $y=\frac{1}{5}\ln x+x\log_{10}x$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5x}+\log_{10}x+\frac{1}{\ln 10}$$

이다.

유제 (1) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ 일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y=\ln\sqrt[5]{x^3}+x^2\log_{10}3x$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

정의

다음의 6가지 함수를 쌍곡선함수(hyperbolic function)이라 한다.

(1) $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

(2) $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(3) $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$

(4) $\coth x=\frac{1}{\tanh x}$

(5) $\mathrm{sech}\,x=\frac{1}{\cosh x}$

(6) $\mathrm{cosech}\,x=\frac{1}{\sinh x}$

정리 (쌍곡선함수의 도함수)

(1) $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

(2) $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

(3) $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \mathrm{sech}^2 x$

(4) $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\mathrm{cosech}^2 x$

(5) $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sech}\, x) = -\mathrm{sech}\, x \tanh x$

(6) $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{cosech}\, x) = -\mathrm{cosech}\, x \coth x$

예제

(1) $f(x) = \sinh x \cosh x$일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y = \sinh x + \cosh x - e^x$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

풀이

(1) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$이므로 $\sinh x \cosh x = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$ 이다. 따라서 $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - (-2)e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$이다.

(2) $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$, $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$이고 $\sinh x + \cosh = e^x$이므로 $f'(x) = e^x - e^x = 0$ 이다.

유제

(1) $f(x) = \mathrm{sech}\, x\, \mathrm{cosech}\, x$ 일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y = \mathrm{sech}\, x + \mathrm{cosech}\, x$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

정리 (역쌍곡선함수의 도함수)

(1) $\dfrac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(3) $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1}x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

(4) $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1}x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

(5) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(6) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosech}^{-1}x)=-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

예제

(1) $f(x)=\sinh^{-1}x\cosh^{-1}x$ 일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y=\dfrac{\tanh^{-1}x}{x}$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

풀이

(1) $f'(x)=(\sinh^{-1}x)'\cosh^{-1}x+\sinh^{-1}x(\cosh^{-1}x)'$

$$=\frac{\cosh^{-1}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\sinh^{-1}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x)x-\tanh^{-1}x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$=\frac{x-(1-x^2)\tanh^{-1}x}{x^2(1-x^2)}$$

유제

(1) $f(x)=\dfrac{\sinh^{-1}x}{\cosh^{-1}x}$ 일 때 $f'(x)$를 구하시오.

(2) $y=\dfrac{\coth^{-1}x}{x}$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

연습문제

1. 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 네 조건

$$f(0)=3,\ f(1)=2,\ f'(0)=4,\ f'(1)=3$$

을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

2. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$이고 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3$이며 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x)\sin x$일 때, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오.

3. $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$임을 증명하시오.

4. $f(x)=e^x\cos x$의 그래프의 수평점근선과 수직점근선을 구하시오.

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh x}{e^x}+\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{e^x}$를 구하시오,

제 3강 연쇄법칙

연쇄법칙 (Chain rule)

함수 g가 x에서 미분가능하고 함수 f가 $g(x)$에서 미분가능하면
합성함수 $F=f\circ g$도 x에서 미분가능하고 F의 도함수는

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

이다. 즉, $y=f(u)$와 $u=g(x)$가 미분가능한 함수이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

이다.

예제 주어진 함수 $F(x)$에 대하여 $F'(x)$를 구하시오.

(1) $F(x)=\sqrt{x^2+1}$ (2) $F(x)=(x^3-1)^{10}$

(3) $F(x)=\sin(x^2)$ (4) $F(x)=\sin^2 x$

풀이 (1) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$이라 두면 $F(x)=(f\circ g)(x)$이다.

또한 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이고 $g'(x)=2x$이므로 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

이다.

(2) $f(x)=x^{10}$, $g(x)=x^3-1$이라 두면 $F(x)=(f\circ g)(x)$이다.

또한 $f'(x)=10x^9$이고 $g'(x)=3x^2$이므로 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned} F'(x) &= 10(x^3-1)^9\cdot 3x^2 \\ &= 30x^2(x^3-1)^9 \end{aligned}$$

이다.

풀이 (3) $f(x)=\sin x, g(x)=x^2$이라 두면 $F(x)=(f\circ g)(x)$이다.
또한 $f'(x)=\cos x$이고 $g'(x)=2x$이므로 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos(x^2)\cdot 2x \\ &= 2x\cos(x^2) \end{aligned}$$

이다.

(4) $f(x)=x^2, g(x)=\sin x$라 두면 $F(x)=(f\circ g)(x)$이다.
또한 $f'(x)=2x$이고 $g'(x)=\cos x$이므로 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\sin x\cdot\cos x \\ &= 2\sin x\cos x \end{aligned}$$

이다.

유제 주어진 함수 $F(x)$에 대하여 $F'(x)$를 구하시오.

(1) $F(x)=\sqrt[3]{\sin^4 x+1}$　　(2) $F(x)=(x^2+2x+8)^7$

(3) $F(x)=\cos(x^5)$　　(4) $F(x)=\tan^3 x$

예제 주어진 함수 y에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$　　(2) $y=e^{\sin x}$　　(3) $y=\sin(\cos x)$

풀이 (1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$, $u=x^2+x+1$이라 두면 $\dfrac{dy}{du}=-\dfrac{1}{2\sqrt{u^3}}$이고 $\dfrac{du}{dx}=2x+1$이므로
연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2\sqrt{u^3}}\cdot(2x+1) \\ &= -\frac{2x+1}{2\sqrt{(x^2+x+1)^3}} \end{aligned}$$

이다.

(2) $y=e^u$, $u=\sin x$라 두면 $\dfrac{dy}{du}=e^u$이고 $\dfrac{du}{dx}=\cos x$이므로
연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^u\cdot\cos x \\ &= e^{\sin x}\cos x \end{aligned}$$

이다.

풀이

(3) $y=\sin u, u=\cos x$ 라 두면 $\dfrac{dy}{du}=\cos u$ 이고 $\dfrac{du}{dx}=-\sin x$ 이므로 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\cos u\cdot(-\sin x)\\&=-\sin x\cos(\cos x)\end{aligned}$$

이다.

유제

주어진 함수 y에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos^3 x+1}}$ (2) $y=e^{x^2+1}$ (3) $y=\cos(\sin(x^2))$

연습문제

1. 다음 함수의 도함수를 구하시오.

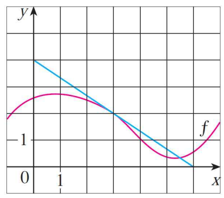
(1) $F(x)=\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^5$　　(2) $F(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(3) $y=\cos\left(\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}}$

(5) $y=a^x$ (단 $a>0, a\neq 1$)

2. 점 $(0,1)$에서 곡선 $y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 의 접선의 방정식을 구하시오.

3. 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽과 같이 주어져 있고 $g(x)=\sqrt{f(x)}$ 일 때, $g'(3)$의 값을 구하시오.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

4. $h(x)=\sqrt{5+4f(x)}$ 이고 $f(3)=5, f'(3)=2$ 일 때, $h'(1)$의 값을 구하시오.

5. $r(x)=f(g(h(x)))$ 이고 $h(2)=1, g(1)=3, f'(3)=2, g'(1)=5, h'(2)=10$ 일 때, $r'(2)$의 값을 구하시오.

제 4강 음함수의 미분법

양함수와 음함수 (explicit function and implicit function)

(1) $y=f(x)$의 꼴로 표현된 x의 함수 y를 양함수라 한다.

(2) $f(x,y)=0$의 꼴로 표현된 함수를 음함수라 한다.

예제 (1) $y=x+1, y=\sin x, y=e^x+\ln x$는 양함수이다.

(2) $x^2+y^2=1, x^3+y^3=6xy$는 음함수이다.

예제 (1) 원의 방정식 $x^2+y^2=36$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

(2) $x^3+y^3=6xy$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

(3) $\sin(x+y)=y^2\cos x$에 대하여 y'을 구하시오.

풀이 (1) $x^2+y^2=36$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(36)$$

이고 $\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2)=\dfrac{d}{dx}(x^2)+\dfrac{d}{dx}(y^2)$이므로

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

이 성립한다. 따라서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$이다.

(2) $x^3+y^3=6xy$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^3+y^3)=\frac{d}{dx}(6xy)$$

이고 $\dfrac{d}{dx}(x^3+y^3)=\dfrac{d}{dx}(x^3)+\dfrac{d}{dx}(y^3)$, $\dfrac{d}{dx}(6xy)=\dfrac{d}{dx}(6x)y+6x\dfrac{dy}{dx}$이므로

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6y+6x\frac{dy}{dx}$$

가 성립한다. 따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-2y}{2x-y^2}$이다.

풀이 (3) $\sin(x+y)=y^2\cos x$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y))=\frac{d}{dx}(y^2\cos x)$$

가 된다. 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) &= \cos(x+y)\cdot\frac{d}{dx}(x+y)\\ &= \cos(x+y)\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\\ &= \cos(x+y)+\cos(x+y)\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

이고 우변을 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y^2\cos x) &= \frac{d}{dx}(y^2)\cdot\cos x+y^2\frac{d}{dx}(\cos x)\\ &= 2y\cos x\frac{dy}{dx}-y^2\sin x\end{aligned}$$

이므로

$$\cos(x+y)+\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=2y\cos x\frac{dy}{dx}-y^2\sin x$$

가 성립한다. 따라서 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos(x+y)+y^2\sin x}{2y\cos x-\cos(x+y)}$ 이다.

유제 (1) 타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}=1$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

(2) $y^2=x^3-x+1$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

(3) $\tan(x+y)=y\cos x$에 대하여 y'을 구하시오.

역함수의 미분법

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$가 존재하고 $f'(x)\neq 0$이면 $x=f^{-1}(y)$도 미분가능하고

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

이 성립한다.

예제

(1) 구간 $[0,\infty)$에서 정의된 함수 $y=x^2+2x+3$에 대하여 $\frac{dx}{dy}$를 구하시오.

(2) 함수 $y=\sin^{-1}x$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

풀이

(1) 함수 $y=x^2+2x+3$은 구간 $[0,\infty)$에서 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 또한 $\frac{dy}{dx}=2x+2$이므로 구간 $[0,\infty)$에서 $\frac{dy}{dx}\neq 0$이다.
따라서 역함수의 미분법에 의하여

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2x+2}$$

이다.

(2) $y=\sin^{-1}x$로부터 $\sin y=x$가 성립하고 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dy}(\sin y)=\frac{dx}{dy}$$

이므로 $\frac{dx}{dy}=\cos y$가 성립한다. y의 범위는 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $\cos y>0$이다.
$\sin^2 y+\cos^2 y=1$이므로 $\cos y=\sqrt{1-x^2}$이다. 따라서 역함수의 미분법에 의하여

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

이다.

유제

(1) 구간 $[0,\infty)$에서 정의된 함수 $y=\sqrt{x^4+e^x+1}$에 대하여 $\frac{dx}{dy}$를 구하시오.

(2) 함수 $y=\tan^{-1}x$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

연습문제

1. 주어진 함수에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

(1) $\sqrt{x+y}=x^4+y^4$

(2) $1+x=\sin(xy^2)$

(3) $y=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(4) $e^{\frac{x}{y}}=x-y$

(5) $y=\cos^{-1}(\sin^{-1}x)$

(6) $e^y\sin x=x+xy$

2. (1) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2$이고 $f(x)+x^2(f(x))^3=10$일 때 $f'(1)$의 값을 구하시오.

(2) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)+x\sin f(x)=x^2$일 때 $f'(0)$의 값을 구하시오.

3. 역함수의 미분법을 사용하여 $y=\log_a f(x)$의 도함수가 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$가 됨을 보이시오.

제 5강 최대 · 최소 정리와 평균값 정리

정의

함수 $f(x)$의 정의역을 D라 하고 c를 D에 포함되는 값이라 하자.

(1) D에 포함되는 모든 x에 대하여 $f(c) \geq f(x)$일 때 $f(c)$를 $f(x)$의 최댓값(absolute maximum)이라 한다.

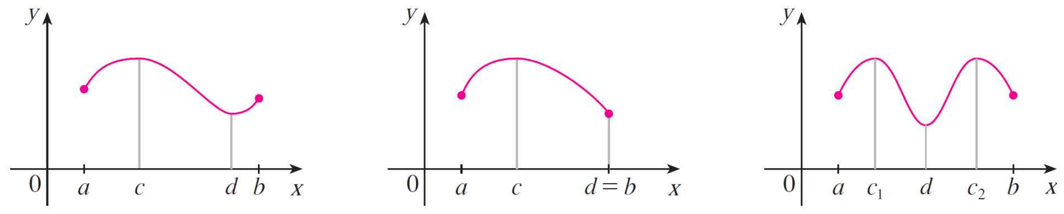
(2) D에 포함되는 모든 x에 대하여 $f(c) \leq f(x)$일 때 $f(c)$를 $f(x)$의 최솟값(absolute minimum)이라 한다.

(3) c의 근방에 있는 모든 x에 대하여 $f(c) \geq f(x)$일 때 $f(c)$를 $f(x)$의 극댓값(local maximum)이라 한다.

(4) c의 근방에 있는 모든 x에 대하여 $f(c) \leq f(x)$일 때 $f(c)$를 $f(x)$의 극솟값(local minimum)이라 한다.

최대 · 최소 정리 (The extreme value theorem)

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이면 $f(x)$는 폐구간 $[a,b]$에서 항상 최댓값과 최솟값을 가진다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

페르마의 정리 (Fermat’s theorem)

함수 $f(x)$가 $x=c$에서 극댓값 또는 극솟값을 가지고 $f'(c)$가 존재하면 $f'(c)=0$이다.

참고 (폐구간에서 연속함수의 최댓값과 최솟값을 찾는 방법)

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속일 때 폐구간 $[a,b]$에서 최댓값과 최솟값을 찾는 방법은 다음과 같다.

과정 1. $f'(c)=0$ 또는 $f'(c)$가 존재하지 않는 c의 값을 찾은 후 $f(c)$를 구한다.
($f'(c)=0$ 또는 $f'(c)$가 존재하지 않는 c를 임계수(critical number)라 한다.)

과정 2. $f(a)$와 $f(b)$의 값을 구한다.

과정 3. 위의 과정에서 얻은 값 중 가장 큰 값이 최댓값이고 가장 작은 값이 최솟값이다.

예제 폐구간 $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이 과정 1. $f'(x)=3x^2-6x$이므로 $f'(c)=0$인 c의 값은 0 또는 2이다.
또한 $f(0)=1$이고 $f(2)=-3$이다.

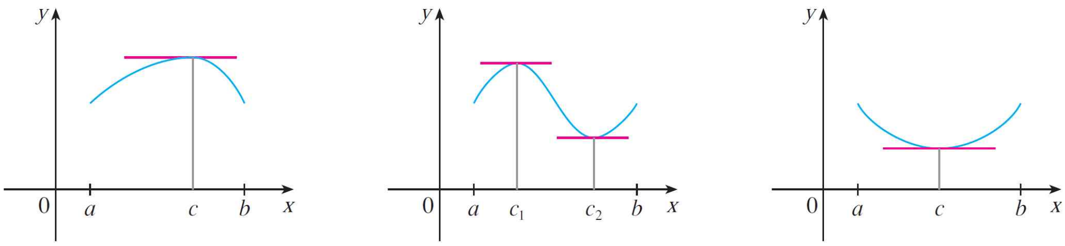
과정 2. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$이고 $f(4)=17$이다.

과정 3. 과정 1과 과정 2에서 얻은 값을 비교하면 최댓값은 17이고 최솟값은 -3이다.

유제 폐구간 $[-2,3]$에서 함수 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

롤의 정리 (Rolle's theorem)

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능이며 $f(a)=f(b)$가 성립하면 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 개구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재한다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

예제 삼차방정식

$$x^3+x-1=0$$

은 오직 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

증명 $f(x)=x^3+x-1$이라 하면 $f(0)=-1$이고 $f(1)=1$이다. $f(x)$는 폐구간 $[0,1]$에서 연속함수이므로 중간값 정리에 의해 $f(c)=0$을 만족하는 c가 개구간 $(0,1)$ 안에 존재한다.
$f(a)=0=f(b)$를 만족하는 서로 다른 실수 a,b가 존재한다고 가정하자. 만약 $a<b$라면 $f(x)$는 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능이므로 롤의 정리에 의해 $f'(d)=0$을 만족하는 d가 개구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재한다. 하지만 $f'(x)=3x^2+1$이므로 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 따라서 c는 $f(x)=0$의 유일한 실근이다.

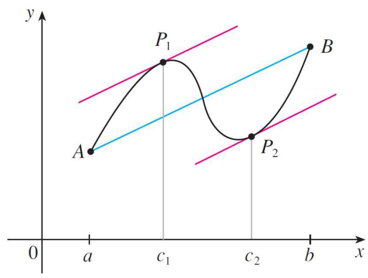
유제 함수 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$에 대하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 개구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재함을 보이시오. (단, $a<b$)

평균값 정리 (Mean value theorem)

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능이면

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

를 만족하는 c가 개구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재한다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

예제 함수 $f(x)=x^3-x$가 폐구간 $[0,2]$에서 평균값 정리의 가정을 만족함을 보이고 평균값 정리를 만족하는 c의 값을 구하시오.

풀이 함수 $f(x)=x^3-x$는 다항함수이므로 폐구간 $[0,2]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능이다. 따라서 $f(x)$는 평균값 정리의 가정을 만족한다. $f'(x)=3x^2-1$이고 $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$이므로 $3c^2-1=3$이다. c는 폐구간 $[0,2]$에 포함되므로 $c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

예제 $0<a<b$일 때 $1-\dfrac{a}{b}\le \ln\dfrac{b}{a}\le \dfrac{b}{a}-1$이 성립함을 보이시오.

증명 $f(x)=\ln x$라 두면 $f(x)$는 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능이다. 따라서 $f(x)$는 폐구간 $[a,b]$에서 평균값 정리를 만족한다. 그러므로 $f'(c)=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$를 만족하는 c가 개구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재한다. 이때, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이고 $f'(x)$는 $x>0$에서 감소함수이므로 $\dfrac{1}{b}\le\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}\le\dfrac{1}{a}$이 성립한다. 따라서 $1-\dfrac{a}{b}\le \ln\dfrac{b}{a}\le \dfrac{b}{a}-1$이 성립한다.

유제

(1) 실수 $a>0$에 대하여 $\frac{\sin a}{a}=\cos b$를 만족하는 b가 개구간 $(0,a)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

(2) 함수 $f(x)$가 실수 전체에서 미분가능이라 하자. 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$이고 $f(0)=3$일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

연습문제

1. 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $f(x)=x^3-3x+1,\quad [0,3]$

(2) $2x^3-3x^2-12x+1,\quad [-2,3]$

(3) $f(x)=2\cos x+\sin 2x,\quad \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

(4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2},\quad \left[\dfrac{1}{2},4\right]$

2. 방정식

$$2x+\cos x=0$$

는 오직 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

3. 사차방정식

$$x^4+4x-8=0$$

은 오직 두 개의 실근을 가짐을 보이시오.

4. 서로 다른 실수 a와 b에 대하여

$$|\sin a-\sin b| \le |a-b|$$

가 성립함을 보이시오.

5. 모든 실수 x에 대하여 $2\le f'(x)\le 5$일 때

$$14\le f(10)-f(3)\le 35$$

가 성립함을 보이시오.

제 6강 L'Hôspital의 정리

로피탈의 정리 (L'Hôspital's rule)

a를 포함하는 개구간(a는 제외될 수 있음)에서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 미분가능이고 $g'(x) \neq 0$이라 하자.

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$이면 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 이다.

(2) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$이고 $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$이면 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 이다.

(3) $x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$인 경우에도 위의 2가지 사실이 성립한다.

예제 다음 극한값을 계산하시오.

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

(3) $\lim_{x \to \pi^-} \frac{\sin x}{1+\cos x}$

(4) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

(5) $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\sec x - \tan x)$

(6) $\lim_{x \to 0^+} (1+\sin 4x)^{\cot x}$

풀이 (1) $\lim_{x \to 1}(x-1) = 0 = \lim_{x \to 1} \ln x$이므로 로피탈의 정리에 의해

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

이다.

풀이 (2) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty = \lim_{x\to\infty} x^2$ 이므로 로피탈의 정리에 의해

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$$

이다. 또한 $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty = \lim_{x\to\infty} 2x$ 이므로 로피탈의 정리에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}\\ &= \infty\end{aligned}$$

이다.

(3) $\lim_{x\to\pi^-}\sin x = 0 = \lim_{x\to\pi^-}(1+\cos x)$이므로 로피탈의 정리에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1+\cos x} &= \lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{-\sin x}\\ &= \infty\end{aligned}$$

이다.

(4) $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ 이고 $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$ 이므로 로피탈의 정리에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

이다.

(5) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\cos x = 0 = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(1-\sin x)$이므로 로피탈의 정리에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\sec x - \tan x) &= \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{1-\sin x}{\cos x}\\ &= \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{-\cos x}{-\sin x}\\ &= 0\end{aligned}$$

이다.

풀이

(6) $y=(1+\sin 4x)^{\cot x}$ 이라 두면 $x>0$ 근방에서 $y>0$ 이다.
양변에 로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln y &= \cot x \ln(1+\sin 4x)\\ &= \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x}\end{aligned}$$

가 된다. $\lim_{x\to 0^+}\ln(1+\sin 4x)=0=\lim_{x\to 0^+}\tan x$ 이므로 로피탈의 정리에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\ln y &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\sec^2 x}\\ &= 4\end{aligned}$$

이다. $y=\ln x$ 가 연속함수이므로 $\ln\lim_{x\to 0^+} y=4$ 가 된다. 따라서

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x}=e^4$$

이다.

유제

다음 극한값을 계산하시오.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ (4) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

(5) $\lim_{x\to 0^+}x^{\sqrt{x}}$

연습문제

1. 다음 극한값을 계산하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 10x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to \pi^+}\frac{\cos x\ln(x-\pi)}{\ln(e^x-e^\pi)}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\ln x+x-1}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3e^{-x^2}$

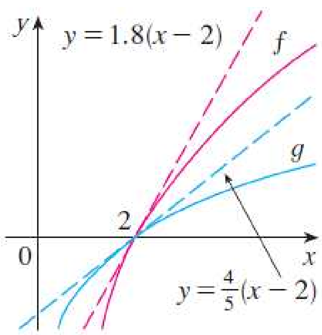
(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\tan 2x)^x$

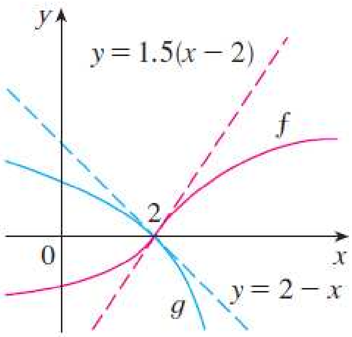
(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

2. 주어진 함수 f와 g에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값을 구하시오.

(1)



(2)



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

3. 모든 자연수 n에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$$

가 성립함을 보이시오.

경북대학교 - 수학 리마인드

제 7강 함수의 그래프 그리기

함수의 증가와 감소

(1) 함수 $f(x)$가 주어진 구간 안의 임의의 $x_1 < x_2$에 대하여 $f(x_1) < f(x_2)$일 때
$f(x)$는 주어진 구간에서 증가함수라 한다. 주어진 구간에서 $f'(x) > 0$이면
함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 증가한다.

(2) 함수 $f(x)$가 주어진 구간 안의 임의의 $x_1 < x_2$에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$일 때
$f(x)$는 주어진 구간에서 감소함수라 한다. 주어진 구간에서 $f'(x) < 0$이면
함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 감소한다.

(3) 함수 $f(x)$가 주어진 구간 안의 임의의 $x_1 < x_2$에 대하여 $f(x_1) = f(x_2)$일 때
$f(x)$는 주어진 구간에서 상수함수라 한다. 주어진 구간에서 $f'(x) = 0$이면
함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 상수함수이다.

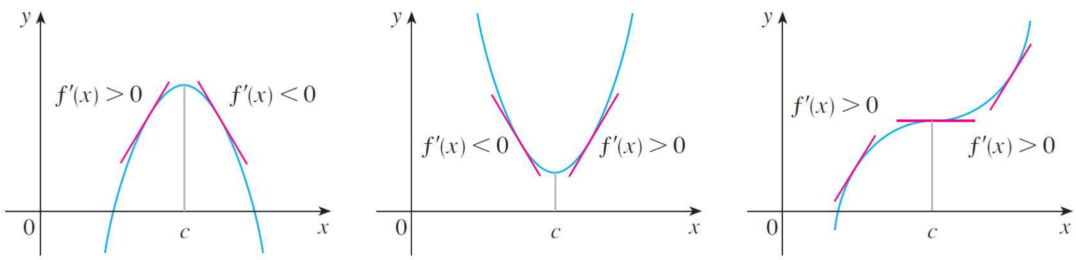
일계도함수 판정법 (The first derivative test)

연속함수 $f(x)$의 임계수 c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $f'(x)$의 부호가 c의 전후에서 양에서 음으로 바뀌면 $f(c)$는 극댓값이다.

(2) $f'(x)$의 부호가 c의 전후에서 음에서 양으로 바뀌면 $f(c)$는 극솟값이다.

(3) $f'(x)$의 부호가 c의 전후에서 바뀌지 않으면 $f(c)$는 극댓값도 아니고
극솟값도 아니다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

함수의 오목과 볼록

(1) 함수 $f(x)$의 그래프가 주어진 구간 안의 임의의 x에서 그은 접선보다 위에 있을 때 $f(x)$는 아래로 볼록하다(또는 위로 오목하다)고 한다. 주어진 구간에서 $f''(x) > 0$이면 $f(x)$는 아래로 볼록하다.

(2) 함수 $f(x)$의 그래프가 주어진 구간 안의 임의의 x에서 그은 접선보다 아래에 있을 때 $f(x)$는 위로 볼록하다(또는 아래로 오목하다)고 한다. 주어진 구간에서 $f''(x) < 0$이면 $f(x)$는 위로 볼록하다.

(3) 함수 $f(x)$의 볼록한 모양이 바뀌는 점을 변곡점(inflection point)이라 한다. 즉, $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록한 상태에서 위로 볼록한 상태로 변하거나 위로 볼록한 상태에서 아래로 볼록한 상태로 바뀌는 점을 뜻한다.

예제 함수 $f(x) = x^4 - 4x^3$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x)$가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 찾으시오.

(2) $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하시오.

(3) $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록한 구간과 위로 볼록한 구간을 찾으시오.

(4) $f(x)$의 변곡점을 구하시오.

풀이 (1) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$이므로 $f'(x) = 0$을 만족하는 x의 값은 0과 3이다.
$x < 0$ 또는 $0 < x < 3$일 때 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다.
또한 $x > 3$일 때 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

(2) (1)의 풀이에 의해 극솟값은 $f(3) = -27$이고 극댓값은 존재하지 않는다.

(3) $f''(x) = 12x^2 - 24x$이므로 $f''(x) = 0$을 만족하는 x의 값은 0과 2이다.
$x < 0$ 또는 $x > 2$일 때 $f''(x) > 0$이므로 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고
$0 < x < 2$일 때 $f''(x) < 0$이므로 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.

(4) (3)의 풀이에 의해 변곡점은 $(0, 0)$과 $(2, -16)$이다.

유제 함수 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x)$가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 찾으시오.

(2) $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하시오.

(3) $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록한 구간과 위로 볼록한 구간을 찾으시오.

(4) $f(x)$의 변곡점을 구하시오.

함수의 그래프 그리기

(1) 정의역
(2) 절편: x절편, y절편
(3) 대칭성: 원점 대칭 (기함수), y축 대칭 (우함수), 주기함수
(4) 점근선: 수평 점근선, 수직 점근선
(5) 함수의 증가와 감소: $f'(x)$를 통해 판단하고 극값을 구한다.
(6) 함수의 오목과 볼록: $f''(x)$를 통해 판단하고 변곡점을 구한다.
(7) 앞의 6가지 조건을 이용하여 함수의 그래프를 그린다.

예제 곡선 $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$의 그래프를 그리시오.

풀이 (1) 정의역은 $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq\pm 1\}$이다.

(2) x절편과 y절편은 모두 0이다.

(3) $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$이므로 $y=2$는 수평점근선이다.

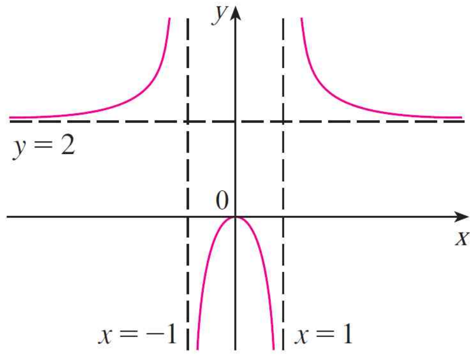
또한 $x=\pm 1$일 때 분모가 0이 되므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2}{x^2-1}=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2}{x^2-1}=\infty$이다. 따라서 $x=1$과 $x=-1$은 수직점근선이다.

(5) $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$이다. $x<-1$ 또는 $-1<x<0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이고, $0<x<1$ 또는 $x>1$일 때 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다. 또한 $f'(x)$의 부호가 $x=0$ 전후에서 양에서 음으로 변하므로 일계도함수 판정법에 의하여 $f(0)=0$은 극댓값이다.

(6) $f''(x)=\dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$이다. $x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)>0$이므로 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고, $-1<x<1$일 때 $f''(x)<0$이므로 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.

	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	X	$+$	0	$-$	X	$-$
$f''(x)$	$+$	X	$-$	$-$	$-$	X	$+$
$f(x)$	⤴	X	↱	0	⤵	X	↳

풀이 (7) 앞의 6가지 정보를 종합하면 $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$의 그래프는 다음과 같다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

예제 곡선 $y=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$의 그래프를 그리시오.

풀이 (1) 모든 x에 대하여 $2+\sin x \neq 0$이므로 정의역은 $\mathbb{R}$이다.

(2) x절편은 $\cos x=0$인 x의 값이므로 $x=\dfrac{2n+1}{2}\pi$ (n은 정수)이다.

또한 y절편은 $\dfrac{1}{2}$이다.

(3) 임의의 x에 대하여 $f(x+2\pi)=f(x)$이므로 $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수이다. 따라서 구간 $[0,2\pi]$의 경우만 고려하면 충분하다.

(4) 점근선은 존재하지 않는다.

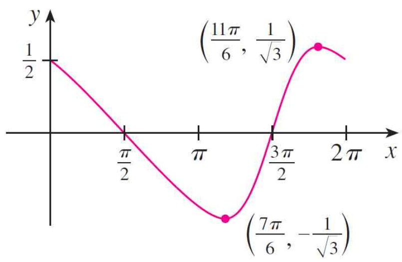
(5) $f'(x)=-\dfrac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}$이다. $\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{11}{6}\pi$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이고, $0<x<\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{11}{6}\pi<x<2\pi$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다. 또한 $f'(x)$의 부호가 $x=\dfrac{7}{6}\pi$의 전후에서 음에서 양으로 변하므로 일계도함수 판정법에 의해 $f\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$은 극솟값이고, $f'(x)$의 부호가 $x=\dfrac{11}{6}\pi$의 전후에서 양에서 음으로 변하므로 일계도함수 판정법에 의해 $f\left(\dfrac{11}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$은 극댓값이다.

풀이

(6) $f''(x)=\dfrac{2\cos x(\sin x-1)}{(2+\sin x)^3}$ 이다. $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$일 때 $f''(x)>0$이므로 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$일 때 $f''(x)<0$이므로 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다. 또한 변곡점은 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$과 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,0\right)$이다.

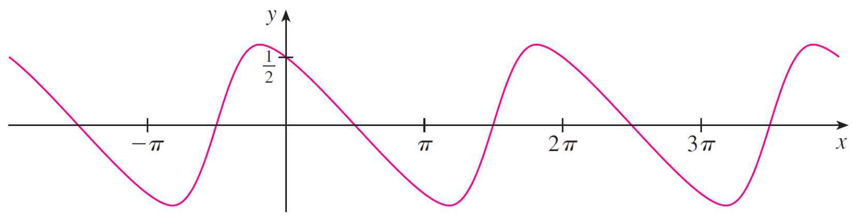
	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	↗	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	↘	$\frac{1}{2}$

(7) 앞의 6가지 정보를 종합하면 구간 $[0,2\pi]$에서 $y=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$의 그래프는 다음과 같다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

따라서 함수 $y=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$의 그래프는 다음과 같다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

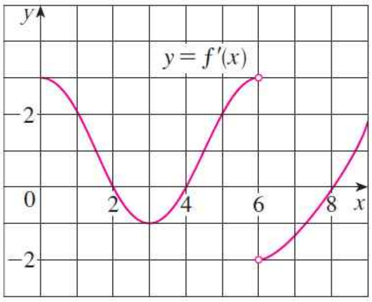
유제

다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ (2) $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

연습문제

1. 오른쪽은 어떤 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의
그래프이다. 다음 물음에 답하시오.
(1) $f(x)$가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 찾으시오.
(2) $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 갖게 하는 x의 값을 찾으시오.
(3) $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록한 구간과
위로 볼록한 구간을 찾으시오
(4) $f(x)$의 변곡점의 x좌표를 찾으시오.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

2. $f(3)=2, f'(3)=\frac{1}{2}$이고 모든 x에 대하여 $f'(x)>0, f''(x)<0$을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.
(1) 곡선 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 추측하시오.
(2) 방정식 $f(x)=0$의 해의 개수를 구하시오.
(3) $f'(2)=\frac{1}{3}$이 가능한지 그 여부를 판단하시오.

3. 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\frac{x}{x^2-9}$

(2) $f(x)=xe^x$

(3) $y=x\sqrt{2-x^2}$

(4) $y=(1-x)e^x$

(5) $y=\frac{\ln x}{x^2}$

(6) $y=\ln(\sin x)$

(7) $y=x\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

(8) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

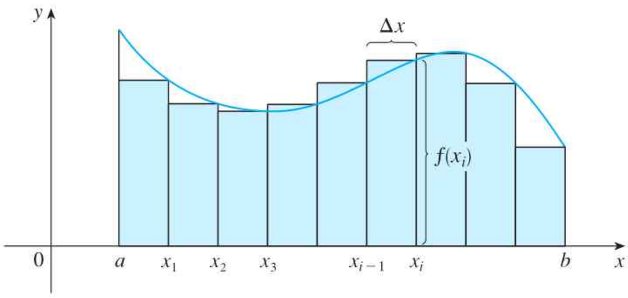
제 8강 면적과 거리

면적 (Area)

양의 값을 가지는 연속함수 f의 그래프 아래쪽 영역의 면적 A는 다음과 같이 근사 사각형 면적의 합의 극한

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

가 된다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

거리 (Distance)

거리는 속력과 시간의 곱으로 구할 수 있다.
시간 t에 따른 속력 v의 그래프가 주어져 있는 경우, 거리는 그래프 아래쪽 영역의 면적이 된다.

예제 $x=0$에서 $x=1$까지 주어진 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽 영역의 면적을 구하시오.

(1) $f(x)=x+2$ (2) $f(x)=x^2+1$

풀이 (1) 폭이 $\frac{1}{n}$이고 높이가 각 점 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$에서 $f(x)=x+2$의 함숫값인 사각형들의 면적의 합을 R_n이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+2\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}+2\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}+2\right)+\cdots \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}+2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)+\frac{1}{n}(2+2+2+\cdots+2) \\ &= \frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)+2 \end{aligned}$$

이다. 한편, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로,

$$R_n=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2=\frac{n+1}{2n}+2$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 영역의 넓이 A는

$$A=\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}+2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+2\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

이다.

풀이 (2) 폭이 $\frac{1}{n}$이고 높이가 각 점 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$에서 $f(x)=x^2+1$의 함숫값인 사각형들의 면적의 합을 R_n이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{2^2}{n^2}+1\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{3^2}{n^2}+1\right)+\cdots \frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2}+1\right) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+\frac{1}{n}(1+1+1+\cdots+1) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+1 \end{aligned}$$

이다. 한편, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로,

$$R_n=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+1=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 영역의 넓이 A는

$$\begin{aligned} A=\lim_{n\to\infty}R_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)+1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+1\right)=\frac{2}{6}+1=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

이다.

유제 $x=1$에서 $x=3$까지 주어진 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽 영역의 면적을 구하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} 2x & (1 \le x < 2) \\ 6-x & (2 \le x \le 3) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x^2 & (1 \le x < 2) \\ 2x & (2 \le x \le 3) \end{cases}$

예제 시간 t에 따른 속력 v의 함수가 $v(t)=3-t^2$ (단, $0 \le t \le 1$)일 때, $t=0$부터 $t=1$까지 이동한 거리를 구하시오.

풀이 폭이 $\frac{1}{n}$이고 높이가 각 점 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$에서 $v(t)=3-t^2$의 함숫값인 사각형들의 면적의 합을 R_n이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(3-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\left(3-\frac{2^2}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\left(3-\frac{3^2}{n^2}\right)+\cdots \frac{1}{n}\left(3-\frac{n^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n}(3+3+3+\cdots+3)-\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) \\ &= 3-\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) \end{aligned}$$

이다. 한편, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로,

$$R_n=3-\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=3-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 이동 거리 d는

$$\begin{aligned} d=\lim_{n\to\infty}R_n &= \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)=3-\frac{2}{6}=\frac{8}{3} \end{aligned}$$

이다.

유제 시간 t에 따른 속력 v의 함수가 $v(t)=\begin{cases} 1+3t^2 & (0 \le t < 1) \\ 7-3t & (1 \le t \le 2) \end{cases}$일 때, $t=0$부터 $t=2$까지 이동한 거리를 구하시오.

연습문제

1. $x=-1$에서 $x=1$까지 주어진 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽 영역의 면적을 구하시오.

(1) $f(x)=8-5x$ (2) $f(x)=x^2+2$

2. 식 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$을 이용하여, $x=0$에서 $x=1$까지 $y=x^3+1$의 그래프 아래쪽 영역의 면적을 구하시오.

3. $x=1$에서 $x=3$까지 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$의 그래프 아래쪽 영역의 면적을 극한에 관한 식으로 표현하시오. (극한값을 구할 필요는 없음)

4. 시간 t에 따른 속력 v의 함수가 $v(t)=\begin{cases} 2t^3+1 & (0\le t<1) \\ 3 & (1\le t\le 4)\end{cases}$일 때, $t=0$부터 $t=4$까지 이동한 거리를 구하시오.

제 9강 정적분의 정의와 기본성질

정적분 (Definite Integral)

구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 f가 있다. 구간 $[a, b]$를 폭이 각각 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$가 되도록 n등분하여 a부터 b까지의 각 분할점을 $x_0(=a), x_1, x_2, \cdots, x_n(=b)$라 하자. 각 부분구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 내에서 임의의 표본점(sample point) x_i^*를 고려하자. 이때, $[a, b]$에서 f의 **정적분**은

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

이다. 단, 이 정적분은 우변의 극한값이 존재하고 표본점 선택에 상관없이 극한값이 모두 같을 때 정의된다. 이 경우, 함수 f는 $[a, b]$에서 **적분가능하다**고 한다.

정적분의 기본성질

1. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ (단, c는 상수)
3. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
4. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (단, c는 상수)
5. $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
6. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
7. 만약 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geqq 0$이면, $\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$이다.
8. 만약 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geqq g(x)$이면, $\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$이다.

예제 정적분 $\int_0^2 (x^2-4x)\,dx$ 의 값을 구하시오.

풀이 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면 폭은 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2}{n}$이고 각 분할점은

$x_i = \dfrac{2i}{n}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이다. 한편, $f(x)=x^2-4x$라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x^2-4x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left\{\left(\frac{2i}{n}\right)^2-4\left(\frac{2i}{n}\right)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{4}{n^2}i^2-\frac{8}{n}i\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{16}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-8\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{8}{3}-8=-\frac{16}{3}\end{aligned}$$

을 얻는다.

유제 식 $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$을 이용하여, 정적분 $\int_0^3 (x^3-6x)\,dx$ 의 값을 구하시오.

예제 어떤 함수 f에 대하여 $\int_0^{10} f(x)dx = 17$, $\int_0^8 f(x)dx = 12$일 때, 정적분 $\int_8^{10} f(x)dx$의 값을 구하시오.

풀이 정적분의 기본성질에 의해,

$$\int_0^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx$$

이다. 한편, $\int_0^{10} f(x)dx = 17$, $\int_0^8 f(x)dx = 12$이므로,

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

이다.

유제 정적분의 기본성질을 이용하여, 만약 구간 $[a, b]$에서 $m \leqq f(x) \leqq M$이면, $m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq M(b-a)$임을 보이시오.

연습문제

1. 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{1}^{4}(x^2-4x+2)dx$ (2) $\int_{-2}^{0}(x^2+x)dx$

2. $f(x)=\begin{cases} 3 & (x<3) \\ x & (x \geqq 3) \end{cases}$일 때, 정적분 $\int_{0}^{5}f(x)dx$의 값을 구하시오.

3. 어떤 함수 f에 대하여 $\int_{2}^{8}f(x)dx=7$, $\int_{2}^{4}f(x)dx=5$일 때,

정적분 $\int_{4}^{8}f(x)dx$의 값을 구하시오.

4. 어떤 함수 f, g에 대하여 $\int_{0}^{9}f(x)dx=27$, $\int_{0}^{9}g(x)dx=16$일 때,

정적분 $\int_{0}^{9}\{2f(x)+3g(x)\}dx$의 값을 구하시오.

경북대학교 - 수학 리마인드

제 10강 미분적분학의 기본정리

미분적분학의 기본정리 1 (The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1)

만약 함수 f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면, 함수

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqq x \leqq b$$

는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며, $g'(x) = f(x)$가 성립한다.

미분적분학의 기본정리 2 (The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2)

만약 함수 f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

이다. 여기서 F는 함수 f의 부정적분, 즉, $F' = f$인 함수이다.

예제 함수 $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$의 도함수를 구하시오.

풀이 함수 $f(t) = \sqrt{1+t^2}$은 연속함수이다. 따라서, 미분적분학의 기본정리 1에 의해

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

이다.

유제 $\dfrac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sin t\,dt$를 구하시오.

예제 정적분 $\int_1^3 e^x\,dx$의 값을 구하시오.

풀이 함수 $f(x)=e^x$는 연속함수이다. 또한, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$로부터, 함수 f의 부정적분은 $F(x)=e^x$임을 알 수 있다. 따라서, 미분적분학의 기본정리 2에 의해

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3)-F(1)=e^3-e$$

이다.

(참고로, 함수 f의 부정적분으로 e^x+C(단, C는 상수)를 이용해도 되지만, 가장 간단한 $F(x)=e^x$를 이용하였다.)

유제 정적분 $\int_3^6 \frac{dx}{x}$의 값을 구하시오.

연습문제

1. 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $g(x)=\int_0^x \sqrt{t+t^3}\,dt$　　(2) $g(x)=\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$

2. 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $h(x)=\int_0^{e^x} \ln t\,dt$　　(2) $h(x)=\int_0^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz$

3. 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-1}^{1} x^{100}\,dx$　　(2) $\int_1^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

(3) $\int_0^3 (2\sin x - e^x)\,dx$　　(4) $\int_1^3 \frac{y^3-2y^2-y}{y^2}\,dy$

4. $x=0$에서 $x=1$까지 포물선 $y=x^2$의 아래쪽 영역의 면적을 구하시오.

제 11강 부정적분

부정적분 (Indefinite Integral)

함수 $f(x)$에 대하여, 미분을 하여 $f(x)$가 되는 함수를 $f(x)$의 **부정적분**(또는 **원시함수**)이라 한다. 즉,

$$F'(x) = f(x)$$

인 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 한다. 이를

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

로 쓴다.

한편, 미분을 하여 $f(x)$가 되는 함수들 모두를 부정적분이라고 하므로, 부정적분에는 $+C$(단, C는 상수)가 붙는다.

예제 부정적분 $\int (10x^4 - 2\cos x)\,dx$를 구하시오.

풀이 부정적분 $\int (10x^4 - 2\cos x)\,dx$를 구하기 위해, 어떤 함수를 미분하면 $10x^4 - 2\cos x$가 되는지 살펴보자. 우선, x^5을 미분하면 $5x^4$가 되고, $\sin x$를 미분하면 $\cos x$가 된다는 것을 알 수 있다. 따라서, $2x^5$을 미분하면 $10x^4$가 되고, $-2\sin x$를 미분하면 $-2\cos x$가 된다. 그러므로

$$\int (10x^4 - 2\cos x)\,dx = 2x^5 - 2\sin x + C$$

이다.

유제 부정적분 $\int \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 dx$를 구하시오.

예제 부정적분 $\int \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$를 구하시오.

풀이 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = x^3$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$, $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{x^2+1}$이므로,

$$\begin{aligned}\int \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx &= 2\int x^3 dx - 6\int x dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan x + C \\ &= \frac{x^4}{2} - 3x^2 + 3\tan x + C\end{aligned}$$

이다.

유제 부정적분 $\int (x^e + e^x)dx$를 구하시오.

연습문제

1. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \left(\cos x + \frac{1}{2}x\right)dx$ (2) $\int (2x-3)(4x^2+1)\,dx$

2. 미분을 통하여, 다음 식이 맞는지 확인하시오.

(1) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

(2) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

3. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 2^x(1+5^x)\,dx$ (2) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$

4. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int (\sin x + \sinh x)\,dx$ (2) $\int \sec x(\sec x + \tan x)\,dx$

제 12강 치환적분

치환적분 (Integration by substitution)

만약 미분가능한 함수 $u=g(x)$의 치역이 구간 I이고, 함수 f가 구간 I에서 연속이면,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

이다.

정적분의 치환적분

만약 g'이 구간 $[a, b]$에서 연속이고, f가 $u=g(x)$의 치역 위에서 연속이면,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

이다.

예제 부정적분 $\int x^3\cos(x^4+2)dx$를 구하시오.

풀이 $u=x^4+2$로 두자. 양변을 미분하면 $du=4x^3dx$를 얻는다.

따라서, $x^3dx=\frac{1}{4}du$이고, 치환적분을 이용하면

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4+2)dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \frac{1}{4}\sin u + C \\ &= \frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C\end{aligned}$$

이다.

유제 부정적분 $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$를 구하시오.

예제 정적분 $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ 의 값을 구하시오.

풀이 $u=3-5x$라 두자. 양변을 미분하면 $du=-5dx$이므로, $dx=-\frac{1}{5}du$이다.

한편, $x=1$일 때 $u=-2$이고, $x=2$일 때 $u=-7$이다. 따라서, 정적분의 치환적분을 이용하면

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}=-\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}$$
$$=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{14}$$

이다.

유제 정적분 $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ 의 값을 구하시오.

연습문제

1. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \sqrt{1+x^2}\, x^5\, dx$ (2) $\int \tan x\, dx$

2. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\, dx$ (2) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

3. 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^1 (3t-1)^{50}\, dt$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(\sin x)\, dx$

4. a, b가 양의 실수인 경우, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$$

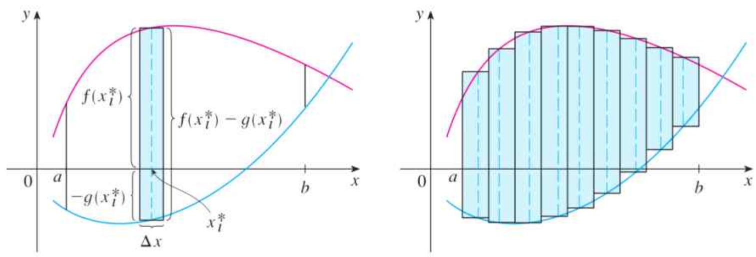
제 13강 적분의 활용: 넓이와 부피

두 곡선 사이의 영역의 넓이

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$의 모든 x에 대해 $f(x) \geq g(x)$가 성립한다고 하자. 이때, 두 곡선 $y=f(x)$ 및 $y=g(x)$와 직선 $x=a$ 및 $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이 A는

$$A = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

이다.



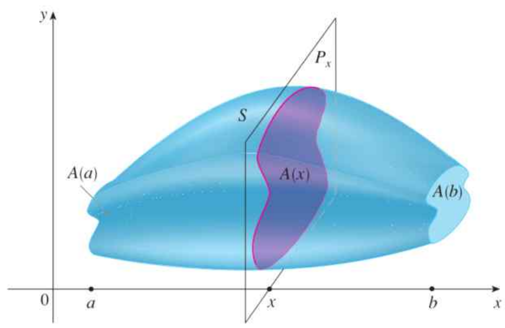
(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

입체도형의 부피

$x=a$와 $x=b$사이에 입체도형 S가 있다고 하자. x축에 수직이고 점 x를 지나는 평면 P_x와 입체도형 S가 만나는 횡단면의 넓이를 $A(x)$라고 하고, $A(x)$는 연속함수라고 하자. 그러면 입체도형 S의 부피 V는

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

이다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

예제

두 곡선 $y=e^x$ 및 $y=x$와 직선 $x=0$ 및 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

풀이

$e^x \geqq x$이므로, 위쪽 곡선은 $y=e^x$이고 아래쪽 곡선은 $y=x$이다.
따라서, 구하고자 하는 영역의 넓이 A는

$$A=\int_0^1 (e^x - x)\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$$

이다.

유제

두 포물선 $y=x^2$과 $y=2x-x^2$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

예제

곡선 $y=\sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$의 아래쪽 영역을 x축을 기준으로 회전시켜 얻은 입체도형의 부피를 구하시오.

풀이

x축에 수직이고 점 x를 지나는 평면 P_x와 입체도형 S가 만나는 횡단면의 넓이를 $A(x)$라고 하자. 그러면 횡단면은 반지름이 $\sqrt{x}$인 원이므로, 횡단면의 넓이는 $A(x)=\pi(\sqrt{x})^2=\pi x$이다. 이는 연속함수이고, 따라서 구하고자 하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \left[\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

이다.

유제

반지름이 r인 구의 부피는 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$이 됨을 보이시오.

연습문제

1. 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 및 $y=\frac{1}{x^2}$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

2. 두 곡선 $y=\cos \pi x$와 $y=4x^2-1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

3. 곡선 $y=\sqrt[3]{x}$ $(0 \leqq x \leqq 8)$의 아래쪽 영역을 x축을 기준으로 회전시켜 얻은 입체도형의 부피를 구하시오.

4. 곡선 $y=x$와 $y=x^2$으로 둘러싸인 영역을 x축을 기준으로 회전시켜 얻은 입체도형의 부피를 구하시오.

경북대학교 - 수학 리마인드

제 14강 다양한 적분법: 부분적분

부분적분 (Integration by parts)

미분가능한 두 함수 f, g에 대해,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

가 성립한다. 또한,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

가 성립한다.

예제 $\int x\sin x\,dx$를 구하시오.

풀이 부분적분을 하기 위해 $f(x)=x$ 및 $g'(x)=\sin x$라 두자.
그러면 $f'(x)=1$ 및 $g(x)=-\cos x$를 얻는다. (여기서 $g(x)$는 $g'(x)$의 어떠한 부정적분을 선택하여도 되므로, 가장 간단한 것을 선택하였다.)
따라서, 부분적분을 이용하면

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

이다.

유제 $\int e^x \sin x\,dx$를 구하시오.

예제 정적분 $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$ 의 값을 구하시오.

풀이 부분적분을 하기 위해 $f(x)=\tan^{-1}x$ 및 $g'(x)=1$이라 두자.

그러면 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 및 $g(x)=x$이므로, 부분적분을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx &= [x\tan^{-1}x]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\\ &=\tan^{-1}1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\\ &=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

이다. 한편, 정적분 $\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}dx$의 값을 계산하기 위해 $t=1+x^2$이라 두면 $dt=2x\,dx$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$임을 알 수 있다. 치환적분을 이용하면

$$\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}[\ln t]_1^2=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 2$$

이고, 따라서

$$\int_0^1\tan^{-1}x\,dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$

이다.

유제 n이 2이상의 자연수일 때,

$$\int \sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$$

가 성립함을 보이시오.

연습문제

1. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \ln x\, dx$　　　　(2) $\int x^2 e^x\, dx$

2. 식 $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ 가 성립함을 보이시오.

3. 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_1^2 w^2 \ln w\, dw$　　　　(2) $\int_0^{2\pi} t^2 \sin 2t\, dt$

4. (1) n이 2이상의 자연수일 때,

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

가 성립함을 보이시오.

(2) 이를 이용하여 $\int \cos^2 x\, dx$ 및 $\int \cos^4 x\, dx$를 구하시오.

제 15강 다양한 적분법: 치환적분

삼각치환 (Trigonometric substitution)

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ 꼴이 있는 경우는 치환 $x=a\sin\theta,\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$

   및 항등식 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$를 활용한다.

2. $\sqrt{a^2+x^2}$ 꼴이 있는 경우는 치환 $x=a\tan\theta,\ -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

   및 항등식 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$를 활용한다.

3. $\sqrt{x^2-a^2}$ 꼴이 있는 경우는 치환 $x=a\sec\theta,\ 0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ or $\pi\leq\theta<\dfrac{3\pi}{2}$

   및 항등식 $\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$를 활용한다.

예제 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$를 구하시오.

풀이 $x=3\sin\theta$라 두자. (단, $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$)

양변을 미분하면 $dx=3\cos\theta d\theta$이고,

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}=\sqrt{9\cos^2\theta}=3|\cos\theta|=3\cos\theta$$

이다. (여기서 $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$이므로, $\cos\theta\geq0$을 이용하였다.)

따라서, 역치환적분을 이용하면

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx&=\int\frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}3\cos\theta d\theta=\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta\\&=\int\cot^2\theta d\theta=\int(\csc^2\theta-1)d\theta\\&=-\cot\theta-\theta+C\end{aligned}$$

이다. 변수를 x로 다시 변환해주기 위해, $\cot\theta$ 및 θ를 x로 표현해보자.

$\sin\theta = \dfrac{x}{3}$이므로 빗변의 길이가 3이고 높이가 x인 직각삼각형을 생각하면 이 직각삼각형 밑변의 길이는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{9-x^2}$이고, 따라서 $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$임을 알 수 있다. 또한, $\sin\theta = \dfrac{x}{3}$으로부터 $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$임을 알 수 있다. 이로부터

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

이다.

유제 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

예제 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$를 구하시오.

풀이 우선 $3-2x-x^2$을 완전제곱꼴의 형태가 나오도록 정리하면,

$$3-2x-x^2 = 3-(x^2+2x) = 3+1-(x^2+2x+1) = 4-(x+1)^2$$

이다. $u = x+1$이라 두면, $du = dx$이고 $x = u-1$이므로,

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}du$$

이다. 이제 $u = 2\sin\theta$로 두면, $du = 2\cos\theta\, d\theta$이고, $\sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}du \\ &= \int \frac{2\sin\theta-1}{2\cos\theta}2\cos\theta\, d\theta \\ &= \int (2\sin\theta-1)\,d\theta \\ &= -2\cos\theta-\theta+C \\ &= -\sqrt{4-u^2}-\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)+C \\ &= -\sqrt{3-2x-x^2}-\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C\end{aligned}$$

이다.

유제 $\displaystyle\int x^2\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$를 구하시오.

연습문제

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$ 를 구하시오.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 를 구하시오. (단, $a>0$이다)

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$ 를 구하시오.

4. 정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\left(\sqrt{4x^2+9}\right)^3}\,dx$ 의 값을 구하시오.

제 16강 다양한 적분법: 유리함수의 적분법

유리함수의 적분법

유리함수 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$를 고려하자. (여기서 $P(x)$와 $Q(x)$는 다항식이다)

1. 만약 다항식 $P(x)$의 차수가 다항식 $Q(x)$의 차수보다 크거나 같으면, 다항식 $P(x)$를 다항식 $Q(x)$로 나누어 다음과 같이 분해한다:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

여기서 $S(x)$와 $R(x)$는 모두 다항식이며, 다항식 $R(x)$의 차수는 다항식 $Q(x)$의 차수보다 작도록 분해한다.

2. 만약 $Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx+b_k)$꼴이고, 각 인수(factor)들이 중복되지 않는 경우, 적당한 상수 A_1, A_2, $\cdots$, A_k가 존재하여

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

로 분해할 수 있고, 분해 후 각각 적분한다.

3. 만약 다항식 $Q(x)$의 첫 번째 인수(factor)가 $(a_1x+b_1)^r$ 꼴인 경우는, 위 식의 첫 번째 항 $\dfrac{A_1}{a_1x+b_1}$ 대신

$$\frac{A_{1,1}}{a_1x+b_1} + \frac{A_{1,2}}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,r}}{(a_1x+b_1)^r}$$

을 이용하여 분해한 후 각각 적분한다.

4. 만약 다항식 $Q(x)$의 인수 중 판별식이 0보다 작은 이차식 ax^2+bx+c, 즉, $b^2-4ac<0$인 이차식이 포함되어 있는 경우는, $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$를 분해할 때

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

형태의 항이 나오도록 분해한 후 각각 적분한다.

예제 $\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$를 구하시오.

풀이 우선, 유리함수 $\frac{x^3+x}{x-1}$를 분해하자. 분자의 차수가 분모의 차수보다 크기 때문에, x^3+x를 $x-1$로 나눠주면 $x^3+x=(x^2+x+2)(x-1)+2$이다. 즉,

$$\frac{x^3+x}{x-1}=x^2+x+2+\frac{2}{x-1}$$

이므로,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x}{x-1}dx &= \int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

이다.

유제 $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$를 구하시오. (단, $a\neq 0$이다)

예제 $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$를 구하시오.

풀이 유리함수 $\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$를 분해하기 위해 먼저 분모 x^3+4x를 인수분해하면,

$x^3+4x=x(x^2+4)$임을 알 수 있다. 따라서,

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

꼴로 쓸 수 있다. 상수 A, B, C를 찾기 위해 위 식의 양변에 $x(x^2+4)$를 곱하면,

$$\begin{aligned} 2x^2-x+4 &= A(x^2+4)+(Bx+C)x \\ &= (A+B)x^2+Cx+4A \end{aligned}$$

이다. 양변의 계수를 각각 비교하면, $A+B=2$, $C=-1$, $4A=4$ 이고 이로부터 $A=1$, $B=1$, $C=-1$임을 알 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx+\int \frac{x}{x^2+4}dx-\int \frac{1}{x^2+4}dx \\ &= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+K \end{aligned}$$

이다. (단 K는 상수)

유제 $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx$를 구하시오.

연습문제

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$를 구하시오.

2. $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$를 구하시오.

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$를 구하시오. (도움: $u=\sqrt[6]{x}$을 이용하시오)

4. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx$를 구하시오.

경북대학교 - 수학 리마인드

제 17강 적분의 추가적인 활용: 곡선의 길이

곡선의 길이 (Arc length)

만약 함수 f의 도함수 f'이 구간 $[a, b]$에서 연속이면, 곡선 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$의 길이는

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$$

이다. 이를 라이프니츠 표기법으로 표현하면

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

이다.

곡선의 길이 함수 (Arc length function)

만약 어떤 매끄러운 곡선 C가 방정식 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ 꼴로 표현된다고 하자.

시작점 $P_0(a, f(a))$부터 곡선 C를 따라 점 $Q(x, f(x))$까지의 거리를 $s(x)$라고 하자.

그러면 곡선의 길이 함수 $s(x)$는

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}\, dt$$

이다.

예제 점 $(1, 1)$부터 점 $(4, 8)$까지 곡선 $y^2 = x^3$의 길이를 구하시오.

풀이 곡선 $y^2 = x^3$에서 점 $(1, 1)$부터 점 $(4, 8)$까지의 부분은 $y > 0$을 만족함을 알 수 있다. 따라서, 곡선의 방정식 $y^2 = x^3$로부터 $y = x^{\frac{3}{2}}$를 얻을 수 있다.

이로부터

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

이고, 그러므로 구하고자 하는 곡선의 길이는

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

이다. $u = 1 + \frac{9}{4}x$로 치환하면, 양변을 미분하여 $du = \frac{9}{4}dx$를 얻는다. 또한,

$x = 1$일 때 $u = \frac{13}{4}$이고, $x = 4$일 때 $u = 10$이다. 따라서, 구하고자 하는 곡선의 길이를 계산하면

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx \\ &= \int_{\frac{13}{4}}^{10} \sqrt{u}\, \frac{4}{9}du \\ &= \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{13}{4}}^{10} = \frac{8}{27}\left\{10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \end{aligned}$$

이다.

유제 곡선 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ $(1 \leqq x \leqq 2)$의 길이를 구하시오.

예제 시작점을 $P_0(1, 1)$로 하는 곡선 $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$의 길이 함수를 구하시오.

풀이 $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$라 두자. 그러면 $f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$이므로,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2} &= \sqrt{1+4x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}} \\ &= \sqrt{4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}} \\ &= \sqrt{\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2} = 2x+\frac{1}{8x}\end{aligned}$$

이다. 따라서, 주어진 곡선의 길이 함수는

$$\begin{aligned}s(x) &= \int_1^x \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt \\ &= \int_1^x \left(2t+\frac{1}{8t}\right)dt \\ &= \left[t^2+\frac{1}{8}\ln t\right]_1^x = x^2+\frac{1}{8}\ln x - 1\end{aligned}$$

이다.

유제 시작점을 $P_0(1, 2)$로 하는 곡선 $y = 2x^{\frac{3}{2}}$의 길이 함수를 구하시오.

연습문제

1. 곡선 $y = \ln(\cos x)$ $(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3})$의 길이를 구하시오.

2. 방정식 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$로 주어진 곡선을 그리고, 그 곡선의 길이를 구하시오.

3. 시작점을 $P_0(0, 1)$로 하는 곡선 $y = \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$의 길이 함수를 구하시오.

4. 함수 $f(x) = \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$에 대해, 임의의 구간에서 곡선 $y = f(x)$의 길이는 $f(x)$의 그래프 아래쪽 영역의 면적의 값과 같음을 보이시오.

제 18강 적분의 추가적인 활용: 회전체의 표면적의 넓이

회전체의 표면적의 넓이

양의 값을 가지고 도함수가 연속인 함수 f에 대해, 곡선 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$를
x축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이는

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이다. 이를 라이프니츠 표기법으로 표현하면

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

이다.

만약 곡선이 $x=g(y)$ $(c \leqq y \leqq d)$로 표현될 때, 이 곡선을 y축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이는

$$S=\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+\{g'(y)\}^2}\,dy$$

이다. 이를 라이프니츠 표기법으로 표현하면

$$S=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

이다.

예제 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$을 x축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이를 구하시오.

풀이 $y=\sqrt{4-x^2}$ 로부터, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$을 얻는다. 따라서, 구하고자 하는 회전체의 표면적의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4}\, dx = 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi \cdot 2 = 8\pi \end{aligned}$$

이다.

유제 곡선 $y=\sqrt{5-x}$ $(3 \leqq x \leqq 5)$를 x축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이를 구하시오.

예제 점 $(1, 1)$부터 점 $(2, 4)$까지 포물선 $y=x^2$을 y축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이를 구하시오.

풀이 $x=\sqrt{y}$이므로, $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$을 얻는다. 따라서, 구하고자 하는 회전체의 표면적의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \\ &= 2\pi\int_1^4 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy \\ &= 2\pi\int_1^4 \sqrt{y+\frac{1}{4}}\,dy \\ &= \pi\int_1^4 \sqrt{4y+1}\,dy \end{aligned}$$

이다. $u=4y+1$로 치환하면, 양변을 미분하여 $du=4dy$를 얻는다. 또한, $y=1$일 때 $u=5$이고, $y=4$일 때 $u=17$이다. 따라서, 구하고자 하는 회전체의 표면적의 넓이를 계산하면

$$\begin{aligned} S &= \pi\int_1^4 \sqrt{4y+1}\,dy \\ &= \frac{\pi}{4}\int_5^{17} \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_5^{17} = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

이다.

유제 $a>0$일 때, 곡선 $x=\sqrt{a^2-y^2}$ $\left(0\leq y\leq \dfrac{a}{2}\right)$을 y축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이를 구하시오.

연습문제

1. 곡선 $y^2 = x+1$ $(0 \leqq x \leqq 3)$을 x축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이를 구하시오.

2. 곡선 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ $(0 \leqq y \leqq 1)$을 y축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이를 구하시오.

3. $a > b$인 양의 상수 a, b에 대해, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$을 x축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이 및 y축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이를 각각 구하시오.

4. 임의의 구간에서 곡선 $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$를 x축을 기준으로 회전시킨 회전체의 표면적의 넓이는 그 회전체로 둘러싸인 부피의 값과 같음을 보이시오.

제 19강 매개변수 방정식과 곡선

매개변수 방정식 (Parametric equations)

만약 x와 y가 매개변수(parameter) t에 관한 함수로 표현될 때 식

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

를 **매개변수 방정식**이라고 한다.

t가 변하면 좌표평면에서 점 $(x, y) = (f(t), g(t))$는 변하게 되고, 이러한 점들이 이루는 곡선을 **매개변수 곡선**(parametric curve)이라고 한다.

매개변수 곡선의 기울기 · 면적 · 길이

1. 매개변수 곡선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \left(\text{단, } \frac{dx}{dt} \neq 0\text{일 때}\right)$$

이다.

2. 매개변수의 범위가 $\alpha \leqq t \leqq \beta$일 때, 매개변수 곡선의 그래프 아래쪽 영역의 면적은

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\, dt \quad \left(\text{또는 } \int_{\beta}^{\alpha} g(t) f'(t)\, dt\right)$$

이다.

3. 매개변수의 범위가 $\alpha \leqq t \leqq \beta$일 때, 매개변수 곡선의 길이는

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

이다.

예제

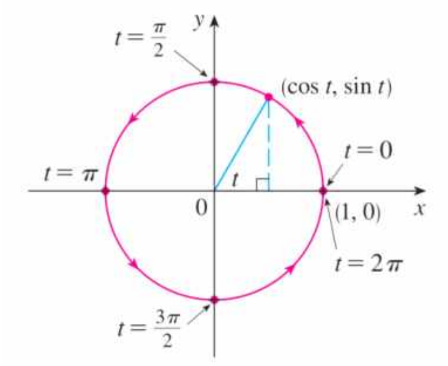
매개변수 방정식

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

는 어떤 곡선을 표현하는가?

풀이

$0 \leqq t \leqq 2\pi$인 각각의 t에 대해 점 $(x, y) = (\cos t, \sin t)$를 나타내면,
구하고자 하는 매개변수 방정식은 아래와 같이 원을 표현함을 알 수 있다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

이를 확인하기 위해, 매개변수 t를 제거해보자. 식

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

로부터, 매개변수 곡선은 반지름이 1인 원임을 알 수 있다.
또한, $t = 0$일 때 $(1, 0)$에서 시작하여 반시계방향으로 원을 그린다는 것을 확인할 수 있다.

유제

매개변수 방정식

$$x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

는 어떤 곡선을 표현하는가?

예제

양의 상수 r에 대해, 사이클로이드(cycloid) 곡선은 매개변수 방정식

$$x=r(\theta-\sin\theta),\quad y=r(1-\cos\theta)$$

로 주어진다.

(1) $\theta=\frac{\pi}{3}$인 점에서 사이클로이드 곡선의 기울기를 구하시오.

(2) $0\leqq\theta\leqq 2\pi$일 때, 사이클로이드 곡선의 그래프 아래쪽 영역의 면적을
 구하시오.

(3) $0\leqq\theta\leqq 2\pi$일 때, 사이클로이드 곡선의 길이를 구하시오.

풀이

(1) 사이클로이드 곡선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{r\sin\theta}{r(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

이다. 따라서, $\theta=\frac{\pi}{3}$인 점에서 사이클로이드 곡선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

이다.

(2) 구하고자 하는 영역의 면적은

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{2\pi}r(1-\cos\theta)r(1-\cos\theta)\,d\theta\\&=r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta=r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta\\&=r^2\int_0^{2\pi}\left\{1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right\}d\theta\\&=r^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\\&=r^2\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi\right)=3\pi r^2\end{aligned}$$

이다.

풀이 (3) 각각의 미분

$$\frac{dx}{d\theta}=r(1-\cos\theta),\quad \frac{dy}{d\theta}=r\sin\theta$$

로부터, 구하고자 하는 길이는

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta \end{aligned}$$

이다. 이 적분값을 계산하기 위해 삼각함수의 반각공식 $1-\cos\theta=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$를 이용하면, $\sqrt{2(1-\cos\theta)}=\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\left|2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} L = r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta &= 2r\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \\ &= 2r\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=2r(2+2)=8r \end{aligned}$$

이다.

연습문제

1. 중심이 (a, b)이고 반지름이 r인 원의 매개변수 방정식을 구하시오.

2. 매개변수 방정식

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t$$

로 주어진 곡선에 대해, $t = \pi$인 점에서의 곡선의 기울기를 구하시오.

3. 매개변수 방정식

$$x = t^3 + 1, \quad y = 2t - t^2$$

으로 주어진 곡선 및 x축으로 둘러싸인 영역의 면적을 구하시오.

4. 매개변수 방정식

$$x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3 \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

으로 주어진 곡선의 길이를 구하시오.

제 20강 극좌표상의 넓이와 길이

극좌표 (Polar coordinates)

극좌표란 좌표평면 위의 점을 원점으로부터의 거리 r과 x축의 양의 방향과 이루는 각도 θ로 나타내는 방법이다. 이를 식으로 표현하면

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

이고, 이를 역으로 표현하면

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

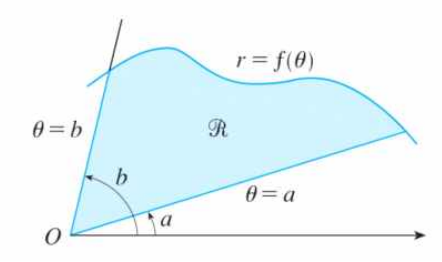
이다.

극좌표상의 넓이 · 길이

극좌표상에서 $r = f(\theta)$로 주어진 곡선에 대해, 이 곡선과 반직선들 $\theta = a$, $\theta = b$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$A = \int_a^b \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 d\theta$$

이다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

한편, 극좌표상에서 곡선 $r = f(\theta)$ $(a \leqq \theta \leqq b)$의 길이는

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

이다.

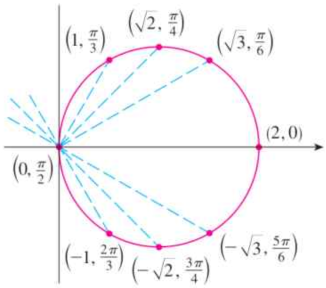
예제

극좌표계로 표현된 곡선 $r=2\cos\theta$의 그래프를 그리고, 이 곡선의 방정식을 직교좌표계로 표현하시오.

풀이

각각의 θ에 대해 원점으로부터의 거리 r을 계산하여 그래프를 그리면 다음과 같다.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

이 곡선의 방정식을 직교좌표계로 표현해보자.

우선 $x=r\cos\theta$로부터 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$임을 알 수 있다. 따라서, 극좌표계로 표현된 곡선의 방정식으로부터 $r=2\cos\theta=\dfrac{2x}{r}$이고, $2x=r^2=x^2+y^2$이 된다.

즉, $x^2+y^2-2x=0$이므로, 이를 완전제곱식 형태로 표현하면,

$$(x-1)^2+y^2=1$$

이다. 이로부터 구하고자 하는 곡선은 중심이 $(1, 0)$이고 반지름이 1인 원임을 알 수 있다.

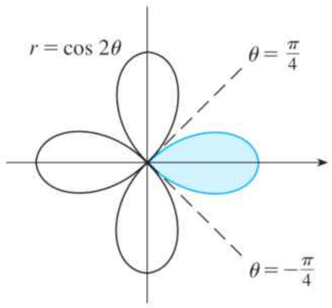
유제

극좌표계로 표현된 곡선 $r=\cos 2\theta$의 그래프를 그리시오.

예제 극좌표계로 표현된 곡선 $r=\cos 2\theta$에 대해, 곡선으로 둘러싸인 네 개의 영역 중 하나의 영역의 넓이를 구하시오.

풀이

극좌표계로 표현된 곡선 $r=\cos 2\theta$은 아래 그림과 같으므로, 곡선으로 둘러싸인 네 개의 영역 중 하나의 영역의 넓이를 구하기 위해서는 $\theta=-\frac{\pi}{4}$부터 $\theta=\frac{\pi}{4}$까지 고려하면 된다.



(그림출처: Stewart's Calculus 8th edition)

따라서, 구하고자 하는 영역의 넓이는

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

이다.

유제 극좌표계로 표현된 곡선 $r=2(1+\sin\theta)$의 그래프를 그리고, 주어진 곡선의 길이를 구하시오.

연습문제

1. 극좌표계로 표현된 곡선 $r=1+\sin\theta$의 그래프를 그리시오.

2. 극좌표계로 표현된 곡선 $r=2\cos 2\theta$가 곡선 $r=\frac{1}{2}$과 만나는 점을 모두 찾으시오.

3. 극좌표계로 표현된 곡선 $r=2+\sin 4\theta$의 그래프를 그리고, 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

4. 극좌표계로 표현된 곡선 $r=\theta^2$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$의 길이를 구하시오.

제 21강 수열과 급수

수열(Sequence)

수열이란 자연수 집합을 정의역으로 가지는 함수를 의미한다. 보다 쉽게 이야기 하자면 수열은 수들의 순서가 있는 나열이라고 생각할 수 있다.
수열은 일반적으로 다음과 같이 나타낸다.

$$\{a_n\},\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

수열의 극한(Limit of a sequence)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 n을 충분히 크게 할 때 a_n이 한없이 L에 가까워지면 L을 그 **수열의 극한**이라고 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

이때, 만일 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$이 존재하면 우리는 그 수열이 **수렴한다**(converges)라고 하고 그렇지 않으면 **발산한다**(diverges)라고 한다.
수열 $\{a_n\}$이 **극한값**(limit) L로 수렴한다는 것은 다음과 같이 정의한다.

임의의 양수 ε에 대하여, $n > N$일 때 $\lvert a_n - L \rvert < \varepsilon$을 성립하게 하는 자연수 N이 존재한다.

수열의 극한에 관한 주요 성질들

수렴하는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$와 상수 α에 대하여

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ (단, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$)

(5) (샌드위치 정리) $a_n \le b_n \le c_n$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$이면, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$이다.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$이고 함수 f가 L에서 연속이면 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$이다.

예제 다음 수열의 극한값을 구하시오.

(1) $a_n = \dfrac{n^2-3n}{3n^2+n-2}$ (2) $b_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ (3) $c_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)$

풀이 (1) 분모의 다항식에서 최고차항인 $3n^2$으로 분자와 분모를 각각 나눈 다음 수열의 극한에 관한 성질을 적용한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{3n^2+n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{3n}-\frac{2}{3n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3n^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}-0}{1+0-0} = \frac{1}{3}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}=0$이고 함수 $\tan x$는 $x=0$에서 연속이므로 수열의 극한에 관한 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \tan\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\right) = \tan 0 = 0$$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $-1 \le \cos x \le 1$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2}{n}\right) \le \dfrac{1}{n}$이다. 한편, $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$ 이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2}{n}\right) = 0$이다.

유제 다음 수열의 극한값을 구하시오.

(1) $d_n = \ln(3n^3-2) - \ln(n^3+6)$ (2) $e_n = \dfrac{(2n-3)!}{(2n+2)!}$ (3) $f_n = \dfrac{n!}{n^n}$

급수(Series)

급수란 수열 $\{a_n\}$의 모든 항의 합, 즉

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

이다. 이때 $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$을 급수의 **부분합**(partial sum)이라 한다.

여기서 만약 수열 $\{s_n\}$이 수렴하고 그 극한값이 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$일 때, 우리는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 **수렴하는 급수**(convergent series)라고 하고 이때, 그 극한값 s를 **급수의 합**(the sum of the series)이라 한다. 만약 수열 $\{s_n\}$이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 **발산하는 급수**(divergent series)라고 한다.

급수의 예들

(1) 기하급수(geometric series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

기하급수는 $|r| < 1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다. 그리고 $|r| \geq 1$일 때 발산한다.

(2) 조화급수(harmonic series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

조화급수는 발산한다.

급수에 관한 주요 성질들

수렴하는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$과 상수 α에 대하여

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$은 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$이다.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$은 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$이다.

예제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 s_n이 다음과 같을 때, 그 급수의 합을 구하시오.

(1) $s_n = \dfrac{8n^2+1}{2n^2+3n-2}$ (2) $s_n = 3+(0.9)^n$

풀이 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{8n^2+1}{2n^2+3n-2} = 4$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(3+(0.9)^n\right) = 3$

예제 다음 급수의 수렴/발산을 판정하고, 수렴한다면 그 급수의 합을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 8(0.75)^{n-1}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{n}$

풀이 (1) 이것은 $a=8$, $r=0.75$인 기하급수이다. 이때, $|r|<1$이므로 이 급수는 수렴하고 그 합은 $\dfrac{8}{1-0.75} = 32$이다.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{n}$이 수렴한다고 가정하자. 그러면 급수의 성질에 의해 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{9}{n}\right)$$

가 수렴한다. 하지만 이 급수는 조화급수이고 따라서 발산하므로 이는 모순이다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{n}$는 발산한다.

유제 다음 급수의 수렴/발산을 판정하고, 수렴한다면 그 급수의 합을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{3n}}{8^{n+1}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n+1}\right)$

연습문제

1. 수열 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ 의 극한값을 구하시오.

2. 수열 $\left\{\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}, \cdots\right\}$ 의 극한값을 구하시오.

3. $0.\overline{9} = 0.99999\ldots$ 가 1임을 증명하시오.

4. 급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{6^{n+1}}$ 가 수렴하도록 하는 x값의 범위를 구하시오.

제 22강 수렴판정법: 발산판정법과 적분판정법

발산판정법(Test for Divergence)

만약 $\lim_{n\to\infty} a_n$이 0이 아니거나 존재하지 않으면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(증명)

우리는 위의 명제의 대우명제가 참임을 증명함으로써 그 명제 또한 참임을 보인다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 수렴한다고 가정하자. 그러면 정의에 의해 이 급수의 부분합에 대한 수열 $\{s_n\}$ 역시 수렴한다. 이때 그 극한값을 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$라 하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

가 되어 증명이 완성된다. □

[주의] 발산판정법의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

예) 조화급수(harmonic series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

예제 발산판정법을 이용하여 다음 급수가 발산함을 증명하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

풀이 (1) 극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{3}{3+0} = 1 \neq 0$이므로 발산판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$은 발산한다.

(2) 극한값 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$이 존재하지 않으므로 발산판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$은 발산한다.

유제 다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(-3)^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

적분판정법(The Integral Test)

함수 f가 구간 $[1, \infty)$상에서 (i) 연속이고, (ii) 함숫값이 양수이며, (iii) 감소함수라고 가정하자. $a_n = f(n)$라 할 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다는 것과 (iv) 이상적분 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$가 수렴한다는 것은 동치이다.

다시 말해,

(1) 만약 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$가 수렴하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 역시 수렴한다.

(2) 만약 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$가 발산하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 역시 발산한다.

예제 적분판정법을 이용하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{e^{n^2}}$이 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

풀이 함수 $f(x) = \dfrac{2x}{e^{x^2}}$는 구간 $[1, \infty)$상에서 연속이고, 함숫값이 양수이며, 감소함수이다. 이때, 이상적분

$$\int_1^{\infty} \frac{2x}{e^{x^2}}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{2x}{e^{x^2}}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e} - e^{-t^2}\right) = \frac{1}{e}$$

는 수렴한다. 따라서 적분판정법에 의해 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{e^{n^2}}$은 수렴한다는 것을 알 수 있다.

예제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 이 수렴하도록 하는 p의 값을 구하시오.

풀이 (1) $p < 0$일 경우

극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty \neq 0$이므로 발산판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 은 발산한다.

(2) $p = 0$일 경우

극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$이므로 발산판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 은 발산한다.

만약 $p > 0$이면 함수 $f(x) = \frac{1}{x^p}$는 구간 $[1, \infty)$상에서 연속이고, 함숫값이 양수이며, 감소함수이다.

(3) $0 < p < 1$ 일 경우

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \infty$$

는 발산한다. 따라서 적분판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 은 발산한다.

(4) $p = 1$일 경우 (즉, 조화급수(harmonic series))

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} (\ln|t| - \ln 1) = \infty$$

는 발산한다. 따라서 적분판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 은 발산한다.

(5) $p > 1$일 경우

(생략)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 은 수렴한다.

따라서, $p > 1$일 경우에만 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 은 수렴한다.

p급수 판정법(The p-series Test)

p급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 는 $p > 1$일 때 수렴하고 $p \leq 1$일 때 발산한다.

유제 다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+10}$ (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^e}$

연습문제

1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 이 $p>1$일 때 수렴함을 증명하시오.

2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n \neq 0)$은 수렴하는 급수이다. 이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 은 발산함을 증명하시오.

3. 다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$

(2) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n^5}}{n^3}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5-2^{-n}}$

제 23강 수렴판정법: 비교판정법과 교대급수 판정법

비교판정법(The Comparison Test)

주어진 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n > 0)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, (b_n > 0)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 만약 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고 모든 n에 대하여 $a_n < b_n$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

(2) 만약 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하고 모든 n에 대하여 $a_n \geq b_n$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

예제 비교판정법을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2+5n-4}$가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

풀이 모든 n에 대하여 $\frac{2}{3n^2+5n-4} \leq \frac{2}{3n^2}$이다. 그리고 p급수 판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$은 수렴한다. 따라서, 비교판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2+5n-4}$ 또한 수렴한다.

유제 다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

(1) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-2}$　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{8^n+2}$

극한비교판정법(The Limit Comparison Test)

주어진 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n > 0)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, (b_n > 0)$에 대하여 다음이 성립한다.

만약 $c = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$가 양의 실수이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 동시에 수렴하거나 또는 동시에 발산한다.

예제 극한비교판정법을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - 1}$이 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

풀이 극한비교판정법을 사용하기 위해 $a_n = \frac{2^n}{3^n - 1}$, $b_n = \frac{2^n}{3^n}$이라 두자. 그러면 $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2^n}{3^n - 1}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^n}{3^n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{3^n}} = 1 > 0$이다. 이때, 기하급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$이 수렴하므로 극한비교판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - 1}$은 수렴한다.

유제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - n + 5}{n^2 + 4n - 2}$가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

교대급수 판정법(Alternating Series Test)

교대급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad (b_n > 0)$$

에 대하여 만약 (i) 모든 n에 대하여 $b_{n+1} \le b_n$이고 (ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 교대급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 은 수렴한다.

예제 교대급수 판정법을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$이 수렴함을 증명하시오.

풀이 교대급수 판정법을 사용하기 위해 $b_n = \frac{1}{n}$이라 두자.

그러면 (i) 모든 n에 대하여 $b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = b_n$이고

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$이므로 교대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$은 수렴한다.

유제 다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n)!}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

연습문제

1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$가 수렴함을 증명하시오.

2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n \geq 0)$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 또한 수렴함을 증명하시오.

3. 다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-\sin n}{3^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{(n+2)^3-1}}$

제 24강 수렴판정법: 비율판정법과 제곱근판정법

절대수렴(Absolute Convergence)

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 이 수렴할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 **절대수렴**(absolutely convergent)한다고 한다.

만약 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 은 수렴하지 않으면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 **조건수렴**(conditionally convergent)한다고 한다.

[정리] 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 절대수렴하면 그 급수는 수렴한다.

예제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$이 조건수렴함을 증명하시오.

풀이 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$은 교대급수 판정법에 의해 수렴함을 알 수 있다. 그리고 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 p급수 판정법에 의해 발산함을 알 수 있다. 따라서, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$은 조건수렴한다.

유제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$이 절대수렴함을 증명하시오.

비율판정법(The Ratio Test)

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$이라 하자.

(i) 만약 $L<1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 절대수렴한다. (따라서, 수렴한다.)

(ii) 만약 $L>1$이거나 또는 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(iii) 만약 $L=1$이면 비율판정법은 판정불가이다. 즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴할 수도, 발산할 수도 있다.

예제 비율판정법을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$이 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

풀이

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{100}{n+1}\right| = 0 < 1$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$은 절대수렴한다.

유제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^n}{e^{n+1}}$가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

제곱근판정법(The Root Test)

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$이라 하자.

(i) 만약 $L<1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 절대수렴한다. (따라서, 수렴한다.)

(ii) 만약 $L>1$이거나 또는 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(iii) 만약 $L=1$이면 제곱근판정법은 판정불가이다. 즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴할 수도, 발산할 수도 있다.

예제 제곱근판정법을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(\ln n)^n}$이 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

풀이 $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(n+1)^n}{(\ln n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \infty$ 이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(\ln n)^n}$ 은 발산한다.

유제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2}$가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

연습문제

1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2+2n+1}$ 가 절대수렴하는지 또는 조건수렴하는지를 판정하시오.

2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ 은 모든 실수 x 에 대하여 수렴함을 증명하시오.

3. 다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-n^2+1}{4n^3+8}\right)^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n+1}}{n2^{2n}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1} n)^n$

제 25강 멱급수

멱급수(Power Series)

주어진 실수 a와 변수 x에 대하여 **중심이 a인 멱급수**는 다음과 같은 형태의 급수를 말한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots$$

여기서 상수 c_n들을 그 멱급수의 **계수**(coefficients)라 한다.

[정리]

주어진 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$에 대하여, 오직 다음의 세 가지의 경우가 성립한다.

(i) 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$은 $x=a$일 때만 수렴한다.

(ii) 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$은 모든 실수 x에 대하여 수렴한다.

(iii) 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$이 $|x-a|<R$일 때 수렴하고 $|x-a|>R$일 때 발산 하도록 하는 양의 실수 R이 존재한다. 이때 R을 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$의 **수렴반경**(radius of convergence)라 하고 그 멱급수가 수렴하도록 하는 모든 x값들의 집합(구간)을 **수렴구간**(interval of convergence)이라 한다.

[주의]

(1) 일반적으로 수렴반경은 비율판정법 또는 제곱근판정법을 이용하여 구한다.

멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$의 수렴반경은 $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$이다.

(2) 수렴구간의 양 끝점 $x=a-R$, $x=a+R$에서는 멱급수의 수렴 여부를 별도로 조사하여야 한다.

예제 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

풀이 $a_n = \frac{x^n}{n!}$이라 하자. 모든 실수 x에 대하여

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$이므로 비율판정법에 의해

멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$는 수렴한다.

따라서, 수렴반경은 $R = \infty$, 수렴구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

유제 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-2)^n$의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

예제 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

풀이

먼저 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ 의 수렴반경은 $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|} = 1$ 이다.

한편, 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ 의 중심은 $a = -1$ 이므로 수렴반경을 얻기 위해 우리는 수렴구간의 양 끝점 $x = -2$, $x = 0$ 에서의 수렴 여부를 판정한다.

(i) $x = -2$ 일 때, 멱급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 이고 이는 교대급수 판정법에 의해

수렴한다.

(ii) $x = 0$ 일 때, 멱급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 이고 이는 p급수 판정법에 의해 발산한다.

따라서, 수렴구간은 $[-2, 0)$ 이다.

유제 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$ 의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

멱급수의 미분과 적분

[정리]

주어진 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 의 수렴반경을 $R > 0$ 이라 하자. 그러면 함수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots$$

는 구간 $(a-R, a+R)$ 에서 미분가능 하다. 그리고

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)dx = C + c_0 (x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

이다. 뿐만 아니라, (i), (ii)의 수렴반경 역시 R 이다.

예제 함수 $\dfrac{1}{1+2x^2}$을 멱급수로 나타내고 그것의 수렴구간을 구하시오.

풀이 $|-2x^2| < 1$일 때, $\dfrac{1}{1+2x^2} = \dfrac{1}{1-(-2x^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2x^2)^n$이다.

이것은 기하급수이고 따라서 수렴구간은

$|-2x^2| < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < x^2 < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다.

유제 함수 $\dfrac{6}{2-x}$을 멱급수로 나타내고 그것의 수렴구간을 구하시오.

예제 멱급수의 미분을 이용하여 함수 $\dfrac{x}{(1-x)^2}$을 멱급수로 나타내고 그것의 수렴반경을 구하시오.

풀이

참고로 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$이다.

그리고 $|x| < 1$일 때, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$이므로

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

이고 수렴반경은 1이다.

유제 멱급수의 적분을 이용하여 부정적분 $\int \dfrac{x}{1-x^2}\,dx$을 멱급수로 나타내고 그것의 수렴반경을 구하시오.

연습문제

1. (1) 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

(2) 함수 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$이 방정식 $f''(x)+f(x)=0$의 해임을 증명하시오.

2. 함수 $\frac{6}{(1-2x)^2}$을 멱급수로 나타내고 그것의 수렴반경을 구하시오.

(힌트: $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{1-2x}\right)=\frac{6}{(1-2x)^2}$)

3. 다음 멱급수의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(3x+1)^n$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{n!}$

제 26강 Taylor 급수와 Maclaurin 급수

함수의 Taylor 급수와 Maclaurin 급수

함수 f가 중심이 a인 멱급수로 표현된다고 가정하자. 즉,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots, \qquad |x-a| < R.$$

이때, 계수 c_n을 함수 f를 이용하여 나타내보자.

$$f(a) = c_0,\ f'(a) = c_1,\ f''(a) = 2c_2,\ f'''(a) = 6c_3,\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = n!\,c_n$$

이므로 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

이다. 이때, 위의 방정식을 **함수 f의 중심 a에서의 Taylor 급수**라고 한다.
특히, 중심이 $a=0$일 경우

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

이를 **함수 f의 Maclaurin 급수**라고 한다.

[참고]
함수의 Taylor 급수와 Maclaurin 급수를 고려했을 때의 장점들 중 하나는 주어진 복잡한 함수를 우리가 좀 더 이해하기 쉽고 다루기 쉬운 다항함수의 형태로 대체할 수 있다는 것이다.

예제 (1) 함수 $f(x) = e^x$ 의 Maclaurin 급수와 그것의 수렴반경을 구하시오.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 의 수렴값을 구하시오.

풀이 (1) 모든 n에 대하여 $f^{(n)}(x) = e^x$ 이므로 $f^{(n)}(0) = 1$ 이다. 따라서 함수 $f(x) = e^x$ 의 Maclaurin 급수는

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

이다.

또한, 이 멱급수의 수렴반경은

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \frac{n!}{1} \right|} = \infty$$

이다.

(2) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$ 에 $x = 1$을 대입하면

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ 임을 알 수 있다.

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ 이다.

유제 함수 $f(x) = \sin x$ 의 Maclaurin 급수와 그것의 수렴반경을 구하시오.

예제 함수 $f(x)=\cos x$ 의 중심 π 에서의 Taylor 급수를 구하시오.

풀이 $f(x)=\cos x \quad f(\pi)=-1$

$f'(x)=-\sin x \quad f'(\pi)=0$

$f''(x)=-\cos x \quad f''(\pi)=1$

$f'''(x)=\sin x \quad f'''(\pi)=0$

$f^{(4)}(x)=\cos x \quad f^{(4)}(\pi)=-1$

$\vdots$

이다.

위의 규칙으로부터 함수 $f(x)=\cos x$ 의 중심 π 에서의 Taylor 급수는

$$\begin{aligned}\cos x &= -1+\frac{1}{2!}(x-\pi)^2-\frac{1}{4!}(x-\pi)^4+\frac{1}{6!}(x-\pi)^6-\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}(x-\pi)^{2n}\end{aligned}$$

이다.

유제 함수 $f(x)=\sin x$ 의 중심 $\frac{\pi}{4}$ 에서의 Taylor 급수를 구하시오.

예제 함수 $f(x)=e^x$ 의 Maclaurin 급수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 을 이용하여 다음의 물음에 답하시오.

(1) 함수 xe^{x^2} 의 Maclaurin 급수를 구하시오.

(2) 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ 을 구하시오.

풀이 (1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 이므로 $xf(x^2)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$ 이다.

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\right)-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2!}x+\cdots\right)=1\end{aligned}$$

연습문제

1. 다음 함수 $f(x)$의 Maclaurin 급수와 그것의 수렴반경을 구하시오.

(1) $f(x) = \ln(1+x)$

(2) $f(x) = \tan^{-1} x$

2. 다음 함수 $f(x)$의 중심 a에서의 Taylor 급수를 구하시오.

(1) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$

(2) $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad a = 1$

3. 함수 $f(x) = e^x$의 Maclaurin 급수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$을 이용하여 함수 $\sinh x$의 Maclaurin 급수를 구하시오.

4. 함수 $f(x) = \cos x$의 Maclaurin 급수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$을 이용하여 부정적분 $\int 2x\cos(x^2)\,dx$를 멱급수로 나타내시오.

제 27강 Taylor 다항식의 응용

Taylor 다항식

함수 f의 중심 a에서의 Taylor 급수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$의 부분합

$$\begin{aligned}T_n(x)&=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\\&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

을 **함수 f의 중심 a에서의 n차원 Taylor 다항식**이라 한다.

이때, $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$를 **Taylor 급수의 나머지**라고 한다.

예제 함수 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$의 중심 8에서의 2차원 Taylor 다항식을 구하시오.

풀이 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ 이므로

$f(8)=2$, $f'(8)=\frac{1}{12}$, $f''(8)=-\frac{1}{144}$이다.

따라서, $T_2(x)=f(8)+\frac{f'(8)}{1!}(x-8)+\frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2$

$$=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{288}(x-8)^2$$

이다.

유제 함수 $f(x)=e^x$의 중심 1에서의 3차원 Taylor 다항식을 구하시오.

Taylor 부등식

[정리]

주어진 함수 f에 대하여, $T_n(x)$은 함수 f의 중심 a에서의 n차원 Taylor 다항식이고 $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$라 두자. 만약 구간 $|x-a| < R$상에서 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$이면, 구간 $|x-a| < R$상에서 함수 f는 그것의 Taylor 급수의 합과 같다.

[Taylor 부등식]

만약 구간 $|x-a| \le d$상에서 $|f^{(n+1)}(x)| \le M$이면 함수 f의 Taylor 급수의 나머지 $R_n(x)$는 구간 $|x-a| \le d$상에서 다음의 부등식을 만족한다.

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

예제 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$의 중심 8에서의 2차원 Taylor 다항식을 $T_2(x)$라 하자. Taylor 부등식을 이용하여 x가 구간 $[6, 10]$상에 존재할 때 $T_2(x)$의 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$에 대한 근사치의 정확도를 추산하시오.

풀이 앞의 예제를 통해 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$의 중심 8에서의 2차원 Taylor 다항식은 $T_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$임을 알 수 있었다.

한편, Taylor 부등식에 의해

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

임을 알 수 있고 이때 $|f'''(x)| = \left|\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}\right| \le M$이다.

(i) 구간 $[6, 10]$상에서 함수 $\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$는 감소함수이므로

$\left|\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}\right| \le \frac{10}{27}6^{-\frac{8}{3}} < 0.00312$이고, 따라서 우리는 $M = 0.00312$로 설정할 수 있다.

(ii) 또한, 구간 $[6, 10]$상에서 $|x-8| \le 2$이다.

따라서, Taylor 부등식으로부터

$$\left|R_2(x)\right| \le \frac{0.00312}{3!}2^3 = 0.00416$$

임을 알 수 있다.

즉, 구간 $[6,10]$상에서 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$를 그것의 2차원 Taylor 다항식 $T_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$로 근사하였을 때 그 근사치의 오차는 0.00416 이하이다.

유제 함수 $f(x) = e^x$의 중심 1에서의 3차원 Taylor 다항식을 $T_3(x)$라 하자. Taylor 부등식을 이용하여 x가 구간 $[0.5, 1.5]$상에 존재할 때 $T_3(x)$의 함수 $f(x) = e^x$에 대한 근사치의 정확도를 추산하시오.

연습문제

1. 함수 $f(x) = \sin x$의 중심 $\frac{\pi}{2}$에서의 4차원 Taylor 다항식을 구하시오.

2. 함수 $f(x) = x\cos x$의 중심 0에서의 4차원 Taylor 다항식 $T_4(x)$을 구하시오.
컴퓨터를 활용하여 함수 $f(x)$와 $T_4(x)$를 각각 그린 후 점 $x = 0$ 근방에서 그 두 그래프를 서로 비교해봅시다.

3. 함수 $f(x) = x\sin x$에 대하여 다음 물음에 답하시오.
(1) 함수 $f(x)$의 중심 0에서의 4차원 Taylor 다항식 $T_4(x)$을 구하시오.
(2) Taylor 부등식을 이용하여 x가 구간 $[-2, 2]$상에 존재할 때 $T_4(x)$의
함수 $f(x)$에 대한 근사치의 정확도를 추산하시오.

제 28강 3차원 좌표와 벡터

3차원 좌표

공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그었을 때 점 O를 원점, 각각의 수직선을 x축, y축, z축이라 하고, 이들을 통틀어 **좌표축**이라고 한다. 또한 x축과 y축으로 결정되는 평면을 xy평면, y축과 z축으로 결정되는 평면을 yz평면, z축과 x축으로 결정되는 평면을 zx평면이라고 한다. 이와같이 좌표축과 좌표평면이 정해진 공간을 **좌표공간**이라고 한다.

공간에 있는 임의의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나고 yz평면, zx평면, xy평면에 각각 평행한 평면이 x축, y축, z축과 만나는 점을 차례로 A, B, C라고 하자.

이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라고 하면 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 (a,b,c)가 정해진다. 역으로 세 실수의 순서쌍 (a,b,c)가 정해지면 3차원 공간의 한 점 P가 정해진다. 즉 공간의 한 점 P와 세 실수의 순서쌍 (a,b,c)는 일대일 대응이 된다. 이 실수의 순서쌍 (a,b,c)를 점 P의 **공간좌표** 또는 **좌표**라고 하고 a, b, c를 차례대로 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표하고 한다.

점 P의 좌표가 (a,b,c)일 때 이것을 기호로

$$P(a,b,c)$$

라고 나타낸다.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리 구하는 식

좌표공간에 있는 두 점 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 사이의 거리는

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

이다.

구의 방정식

중심이 $P(x_0,y_0,z_0)$이고 반지름이 r인 구의 방정식은

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

이다.

예제

(1) 점 $P(2,1,5)$에서 yz평면, zx평면, xy평면까지의 거리를 각각 구하시오.

(2) $P_1(2,1,5)$와 $P_2(-4,3,1)$ 사이의 거리를 구하시오.

풀이

(1) 점 P에 대하여 점 P를 지나고 yz평면, zx평면, xy평면에 각각 평행한 평면이 x축, y축, z축과 만나는 점이 차례로 2, 1, 5이므로 yz평면, zx평면, xy평면까지의 거리는 각각

$$2,\ 1,\ 5$$

이다.

(2) $$\begin{aligned}|P_1P_2| &= \sqrt{(-4-2)^2+(3-1)^2+(1-5)^2} \\ &= \sqrt{36+4+16} \\ &= 2\sqrt{14}\end{aligned}$$

유제

(1) 다음에 주어진 점에서 yz평면, zx평면, xy평면까지의 거리를 각각 구하시오.

(a) $P(4,3,0)$ (b) $P(4,-2,8)$ (c) $P(-1,-4,-3)$

(2) 다음에 주어진 두 점 P_1와 P_2 사이의 거리를 구하시오.

(a) $P_1(1,1,1)$, $P_2(3,3,0)$ (b) $P_1(3,4,5)$, $P_2(6,7,8)$

(c) $P_1(0,0,0)$, $P_2(-2,5,3)$ (d) $P_1(-9,10,4)$, $P_2(-7,6,-4)$

예제

(1) 중심이 $P(-2,0,2)$이고 반지름이 $2\sqrt{2}$인 구의 방정식을 구하시오.

(2) 구 $x^2+y^2+z^2-4x+6y-10z=11$의 중심과 반지름을 구하시오.

풀이

(1) 구의 방정식은 $(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=8$이다.

(2) 구의 방정식을 변형하면

$$\begin{aligned}0 &= x^2+y^2+z^2-4x+6y-10z-11 \\ &= (x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2-49\end{aligned}$$

이므로 중심은 $(2,-3,5)$이고 반지름은 7이다.

유제

(1) 중심이 $P\left(1, -\frac{1}{2}, -3\right)$이고 반지름이 5인 구의 방정식을 구하시오.

(2) 구 $3x^2+3y^2+3z^2+2y-2z=9$의 중심과 반지름을 구하시오.

공간벡터

좌표공간에서 크기와 방향을 함께 가지는 양을 공간벡터 또는 벡터라고 한다. 한 점 $P_1(x_1, y_1, z_1)$를 시점으로 하고 한 점 $P_2(x_2, y_2, z_2)$를 종점으로 하는 벡터를

$$\overrightarrow{P_1P_2}$$

와 같이 나타낸다. 벡터 $\overrightarrow{P_1P_1}$을 영벡터라 하고, 기호로 $\vec{0}$와 같이 쓴다.

선분 P_1P_2의 길이를 이 벡터의 크기라 하고, 기호로 $|\overrightarrow{PQ}|$로 나타내며

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

값을 가진다.

예제

(1) $P_1(1, 2, 3)$과 $P_2(5, -3, -1)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$를 구하시오.

(2) (1)에 주어진 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$의 크기를 구하시오.

풀이

(1) $\overrightarrow{P_1P_2} = (5-1, -3-2, 1-3) = (4, -5, -2)$

(2) $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{4^2+(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+25+4} = 3\sqrt{5}$

유제

(1) $P_1(-1, 1, 5)$와 $P_2(2, 5, 0)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$를 구하시오.

(2) (1)에 주어진 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$의 크기를 구하시오.

공간벡터

좌표공간에 한 점을 $v=(v_1, v_2, v_3)$라고 둘 때 벡터 $\boldsymbol{v}$라는 것은 시점을 원점으로 하고 종점을 $v=(v_1, v_2, v_3)$으로 하는 벡터를 말하고 이때 벡터 $\boldsymbol{v}$를

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

라고 쓴다.

공간벡터의 연산법칙

벡터 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$와 상수 a, b에 대하여 다음과 같은 연산법칙이 성립한다.

1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
2. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
3. $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$
4. $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$
5. $0\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$
6. $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$
7. $a(b\boldsymbol{u})=(ab)\boldsymbol{u}$
8. $a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$
9. $(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$

단위벡터

크기가 1인 벡터를 단위벡터라고 부른다. 표준 단위벡터는

$$\boldsymbol{i}=\langle 1, 0, 0\rangle,\ \boldsymbol{j}=\langle 0, 1, 0\rangle,\ \boldsymbol{k}=\langle 0, 0, 1\rangle$$

이다. 따라서 벡터 $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$는 $v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$로 나타낼 수 있다.

벡터 $\boldsymbol{v}$의 방향은 단위벡터 $\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$이다.

예제 벡터 $\boldsymbol{u}=(3, -2, 1)$, $\boldsymbol{v}=(-2, 5, 4)$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $3\boldsymbol{u}$ (2) $-2\boldsymbol{v}$ (3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ (4) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ (5) $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$ (6) $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{u}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{v}$

풀이

(1) $3\boldsymbol{u}=3(3, -2, 1)=(9, -6, 3)$

(2) $-2\boldsymbol{v}=-2(-2, 5, 4)=(4, -10, -8)$

(3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(3, -2, 1)+(-2, 5, 4)=(1, 3, 5)$

(4) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=(3, -2, 1)-(-2, 5, 4)=(5, -7, -3)$

(5) $$\begin{aligned}2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}&=2(3, -2, 1)-3(-2, 5, 4)\\&=(6, -4, 2)-(-6, 15, 12)=(12, -19, -10)\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\frac{3}{5}\boldsymbol{u}+\frac{4}{5}\boldsymbol{v}&=\frac{3}{5}(3, -2, 1)+\frac{4}{5}(-2, 5, 4)\\&=\frac{1}{5}(9, -6, 3)+\frac{1}{5}(-8, 20, 16)=\frac{1}{5}(1, 14, 19)\\&=\left(\frac{1}{5}, \frac{14}{5}, \frac{19}{5}\right)\end{aligned}$$

유제

벡터 $\boldsymbol{u}=(1,1,-2)$, $\boldsymbol{v}=(2,0,3)$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $2\boldsymbol{u}$ (2) $-\boldsymbol{v}$ (3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ (4) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ (5) $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$ (6) $3\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}$

예제

다음 물음에 답하시오.

(1) 벡터 $\boldsymbol{u}=(3,-2,1)$의 방향을 구하시오.

(2) 벡터 $\boldsymbol{u}$를 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,로 나타내시오.

풀이

(1) $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{14}$이므로 방향은 $\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,-2,1)$이다.

(2) $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

유제

다음 물음에 답하시오.

(1) 벡터 $\boldsymbol{u}=(1,1,-2)$의 방향을 구하시오.

(2) 벡터 $\boldsymbol{u}$를 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,로 나타내시오.

연습문제

1. 로켓이 수평인 방향과 60°의 방향으로 1500km/h로 발사되었다. 이 로켓의 수평인 방향과 수직인 방향의 속도를 각각 구하시오.

2. 점 O, A, B, C를 꼭짓점으로 갖는 정사면체에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때 벡터 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.

3. 세 점 $A(0,1,2)$, $B(1,2,0)$, $C(2,0,1)$에 대하여 점 A, B, C가 삼각형을 이룬다는 것을 보이시오.

4. 점 $A(-1,-2,0)$, $B(4,-1,0)$, $C(5,2,0)$, $D(x,y,z)$가 평행사변형을 이룬다. 점 $x+y+z$를 구하시오.

5. 중심이 $(3,-2,1)$이고 점 $(4,2,5)$를 지나는 구의 방정식을 구하시오.

제 29강 내적과 외적

내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$와 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 사이의 각도 θ는

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)$$

로 주어진다. 이때 $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$를 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$의 내적이라고 하고 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$라고 나타낸다. 따라서

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$$

이다.

두 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$이면 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$는 수직이다.

예제 주어진 벡터에 대하여 내적을 구하시오.

(1) $\langle 1,-2,-1\rangle$, $\langle -6,3,2\rangle$

(2) $\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $-2\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

풀이 (1) $\langle 1,-2,-1\rangle\cdot\langle -6,3,2\rangle=1(-6)+(-2)3+(-1)2=-14$

(2) $(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\cdot\left(-2\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\right)=1(-2)+3(\frac{1}{3})+(-2)(-1)=3$

유제 주어진 벡터에 대하여 내적을 구하시오.

(1) $\langle 2,-2,1\rangle$, $\langle 3,0,4\rangle$ (2) $\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}-\sqrt{2}\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

예제 두 벡터 $u = 2i - 4j + \sqrt{5}k$ 와 $v = -2i + 4j - \sqrt{5}k$ 의 각도를 구하시오.

풀이

$u \cdot v$, $|u|$, $|v|$를 구해보면

$$u \cdot v = 2(-2) + (-4)(4) + \sqrt{5}(-\sqrt{5}) = -4 - 16 - 5 = -25$$

$$|u| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|v| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$$

이다. 따라서

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = -1$$

이고 $\theta = \pi$ 이다.

유제 다음에 주어진 두 벡터의 각도를 구하시오.

(1) $u = i + \sqrt{2}j - \sqrt{2}k$, $v = -i + j + k$

(2) $u = 10i + 11j - 2k$, $v = 3j + 4k$

내적의 성질

벡터 u, v, w와 상수 c에 대해 다음과 같은 식이 성립한다.

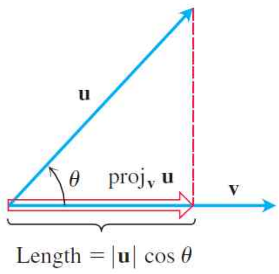
1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot u)$
3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
4. $v \cdot v = |v|^2$
5. $0 \cdot u = 0$

사영

두 벡터 u와 v에 대하여 벡터 u의 v로의 사영은

$$proj_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|}\right)\frac{v}{|v|}$$

이다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

예제 벡터 $u = 6i + 3j + 2k$ 의 $v = i - 2j - 2k$ 로 사영한 벡터를 구하시오.

풀이

$$u \cdot v = 6(1) + 3(-2) + 2(-2) = -4$$

$$|v| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3$$

이므로

$$proj_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|}\right)\frac{v}{|v|} = \frac{-4}{3}\left(\frac{i - 2j - 2k}{3}\right) = -\frac{4}{9}i + \frac{8}{9}j + \frac{8}{9}k$$

이다.

유제 벡터 u를 v로 사영한 벡터를 구하시오.

(1) $u = 5i + 2j$, $v = i - 3j$

(2) $u = i - 2j + k$, $v = 3i + 4k$

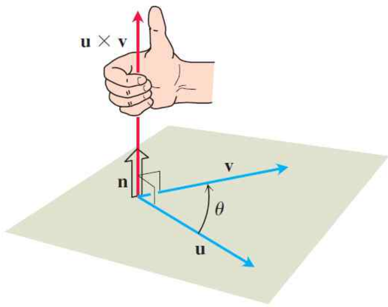
외적

평행이 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$에 동시에 수직인 단위벡터를 $\boldsymbol{n}$이라고 하고 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$의 각도를 θ라고 했을 때 외적은

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta)\boldsymbol{n}$$

이다.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$가 평행인 것은 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$인 것과 동치다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

외적의 성질

벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$와 상수 c에 대해 다음 식이 성립한다.

1. $(r\boldsymbol{u}) \times (s\boldsymbol{v}) = (rs)(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$
2. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$
   $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}$
3. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$
4. $\boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{u} = 0$
5. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

판별식을 이용한 외적의 계산

벡터 $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$에 대하여 외적은

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\boldsymbol{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - u_2v)\boldsymbol{k}$$

이다.

예제 벡터 $\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$와 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$의 외적을 구하시오.

풀이 $\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$와 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$이므로 외적은

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (3(-2) - 2(-2))\boldsymbol{i} - (6(-2) - 2(1))\boldsymbol{j} + (6(-2) - 3(1))\boldsymbol{k} \\ &= -2\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} - 15\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

이다.

유제 다음에 주어진 두 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$의 외적을 구하시오.

(1) $\boldsymbol{u} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$

(2) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$

스칼라삼중적 (Triple Scalar Product)

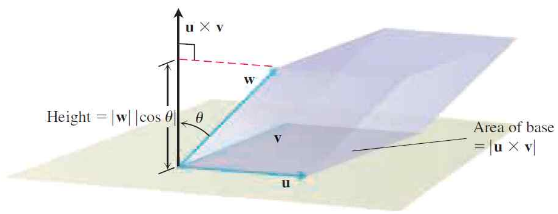
벡터 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$, $w=w_1\boldsymbol{i}+w_2\boldsymbol{j}+w_3\boldsymbol{k}$에 대하여

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$$

를 스칼라삼중적이라고 부르며 다음과 같이 계산한다.

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=w_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}-w_2\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}+w_3\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

스칼라삼중적의 절댓값 $|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|$은 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, w로 이루어진 평행육면체의 부피를 나타낸다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

예제

벡터 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w}=7\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$로 이루어진 평행육면체의 부피를 구하시오.

풀이

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}&=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}\\&=(0)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}-(7)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\\&=0-(7)(3-2)-4(4)=-23\end{aligned}$$

이므로 부피는 23이다.

유제

다음에 주어진 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$로 이루어진 평행육면체의 넓이를 구하시오.

(1) $\boldsymbol{u}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

연습문제

1. 벡터 u, v, w와 상수 c에 대해 다음 식이 성립한다는 것을 보이시오.

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot u)$
3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
4. $v \cdot v = |v|^2$
5. $\mathbf{0} \cdot u = 0$

2. 벡터 u, v, w와 상수 c에 대해 다음 식이 성립한다는 것을 보이시오.

1. $(ru) \times (sv) = (rs)(u \times v)$
2. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
   $(v + w) \times u = v \times u + w \times u$
3. $u \times v = -(v \times u)$
4. $\mathbf{0} \cdot u = 0$
5. $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$

3. 꼭짓점이 $(1, -1, -2)$, $(-2, 0, -1)$, $(0, -2, 1)$인 삼각형의 넓이를 구하시오.

4. 내적을 이용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$

(2) 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형에 대하여 θ를 변 c의 대각이라고 할 때 식 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$이 성립한다.

5. 다음을 증명하시오.

(1) 평행사변형의 두 대각선의 길이가 같다는 것과 평행사변형이 직사각형이라는 것은 동치다.

(2) 평행사변형의 두 대각선이 수직이라는 것과 평행사변형이 정사각형이라는 것은 동치다.

제 30강 공간에서의 직선과 평면의 방정식

공간에서의 직선의 방정식

좌표공간에서 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$를 지나고 벡터 $\boldsymbol{v}$에 평행한 직선 L의 방정식은

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}, \quad -\infty < t < \infty$$

로 주어진다. 여기에서 $\boldsymbol{r}$은 직선 L위의 점 $P(x, y, z)$의 위치벡터이고 $\boldsymbol{r}_0$은 $P_0(x_0, y_0, z_0)$의 위치벡터이다.

좌표공간에서 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$을 지나고 벡터 $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$에 평행한 직선 L의 매개변수 방정식은

$$x = x_0 + tv_1, \quad y = y_0 + tv_2, \quad z = z_0 + tv_3, \quad -\infty < t < \infty$$

이다.

예제

(1) 점 $(-2, 0, 4)$를 지나고 벡터 $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

(2) 두 점 $P(-3, 2, -3)$, $Q(1, -1, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

풀이

(1) 직선의 방정식은

$$x = -2 + 2t, \quad y = t, \quad z = 4 - 4t, \quad -\infty < t < \infty$$

이다.

(2) $P(-3, 2, -3)$, $Q(1, -1, 4)$를 지나는 직선의 방향은

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - (-3))\boldsymbol{i} + (-2 - 2)\boldsymbol{j} + (4 - (-3))\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$$

이고 $x_0 = P(-3, 2, -3)$이라고 하면 직선의 방정식은

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 4t, \quad z = 4 + 7t, \quad -\infty < t < \infty$$

이다.

유제

(1) 점 $P(3, -4, 5)$를 지나고 $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$에 평행인 직선의 방정식을 구하시오.

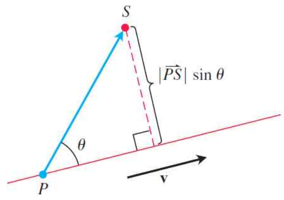
(2) 두 점 $P(1, 2, -1)$, $Q(-1, 0, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

점과 직선의 거리

좌표공간의 점 S에서 점 P를 지나고 방향이 $\boldsymbol{v}$인 직선까지 거리는

$$d = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

이다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

예제

$Q(1,1,5)$에서 직선

$$L\ :\ x = -2+2t,\ y=t,\ z=4-4t,\ -\infty < t < \infty$$

까지 거리를 구하시오.

풀이

L위의 한 점 $P(-2,0,4)$에 대하여

$$\overrightarrow{PQ} = (1-(-2))\boldsymbol{i} + (1-0)\boldsymbol{j} + (5-4)\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

이고 직선의 방향은 $\boldsymbol{v} = (2, 1, -4)$이므로

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ} \times \boldsymbol{v}| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (1(-4)-1(1))\boldsymbol{i} - (3(-4)-1(2))\boldsymbol{j} + (3(1)-1(2))\boldsymbol{k} \\ &= -5\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

이다. 따라서 거리 d는

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + 14^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{222}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{74}{7}}$$

이다.

유제

주어진 점 Q와 직선 L의 거리를 구하시오.

(1) $Q(0,0,12)$, L: $x=4t$, $y=-2t$, $z=2t$

(2) $Q(0,0,0)$, L: $x=5+3t$, $y=5+4t$, $z=-3-5t$

공간에서의 평면의 방정식

좌표공간에서 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$을 지나고 벡터 $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$에 수직인 평면의 방정식은 다음과 같다.

(1) 벡터 방정식 : $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

(2) 매개변수 방정식 : $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

예제

(1) 점 $P_0(-3, 0, 7)$을 지나고 $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$에 수직인 평면의 방정식을 구하시오.

(2) 점 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$을 지나는 평면의 방정식을 구하시오.

풀이

(1) $0 = 5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) = 5x + 2y - z + 22$

이므로 평면의 방정식은 $5x + 2y - z + 8 = 0$이다.

(2) $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 3, -1)$이므로

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

이다. 따라서 $P_0(x_0, y_0, z_0)$를 $A(0, 0, 1)$라 둘 때

$$3(x - 0) + 2(y - 0) + 6(z - 1) = 0$$

이므로 평면의 방정식은 $3x + 2y + 6z = 6$이다.

유제

(1) 점 $Q(1, -1, 3)$을 지나고 평면 $3x + y + z = 7$에 평행인 평면의 방정식을 구하시오.

(2) 세 점 $A(1, 1, -1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(-1, 6, 8)$을 지나는 평면의 방정식을 구하시오.

점과 평면의 거리

좌표공간의 점 Q에서 점 P를 지나고 $\boldsymbol{n}$에 수직인 평면까지 거리는

$$d = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \right|$$

이다.

예제 점 $Q(1,1,3)$에서 평면 $3x+2y+6z=6$까지 거리를 구하시오.

풀이 평면 위의 한 점 $P(0,0,1)$에 대하여 $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 32\boldsymbol{k}$ 이고 $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ 이므로

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \cdot \frac{3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{3+2+12}{7} = \frac{17}{7}$$

이다. 따라서 $d = \frac{17}{7}$ 이다.

유제 다음 주어진 점 Q에서 평면까지 거리를 구하시오.

(1) $Q(2,-3,4)$, $x + 2y + 2z = 13$

(2) $Q(0,1,1)$, $4y + z = -12$

연습문제

1. 직선 $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3t$ 와 xy 평면, yz 평면, zx 평면과 만나는 점을 각각 구하시오.

2. 두 평면 M_1, M_2는 직선 $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$ 에서 만난다. M_1과 M_2의 평면의 방정식을 찾으시오.

3. 두 평면 $3x - 6y - 2z = 15$, $2x + y - 2z = 5$ 사이의 각도를 구하시오.

4. 원점에서 평면 $ax + by + cz = d$ 까지 거리는 $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 임을 보이시오.

5. 점 $(1, 2, -1)$ 과 $(2, 1, 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오. 이 직선과 평면 $2x - 3y + z + 14 = 0$ 이 만나는 점을 구하시오.

제 31강 벡터함수와 공간곡선

공간곡선

좌표공간에 물체가 일정 시간 I동안 움직일 때 물체의 위치는 구간 I위에 정의된 함수들

$$x = f(t),\ \ y = g(t),\ \ z = h(t),\ \ t \in I$$

로 표현된다. 점 $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)),\ t \in I$는 곡선을 이루고 우리는 이 곡선을 자취라고 부른다. 좌표공간의 곡선은 다음과 같은 벡터형식으로 표현된다.

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{r}(t)$는 구간 I에서 정의된 벡터함수이다.

예제 다음 주어진 공간곡선의 자취를 그리시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$

풀이 (1) 벡터함수의 성분을 각각

$$x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = t$$

라고 두면

$$x^2 + y^2 = 1$$

이다. t가 증가하면 z성분이 증가하므로 z축을 타고 올라가는 헬릭스(helix) 모양을 그래프를 얻을 수 있다.

(2) 벡터함수의 성분을 각각

$$x = t\cos t,\ \ y = t\sin t,\ \ z = t$$

라고 두면

$$x^2 + y^2 = t^2$$

이다. t가 증가하면 z성분과 원의 반지름이 증가하므로 z축을 타고 올라가면서 반지름이 증가하는 모양을 그래프를 얻을 수 있다.

유제 다음에 주어진 벡터함수의 그래프를 그리시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (\sin 2t)\boldsymbol{k}$

공간곡선의 극한

구간 I에서 정의된 공간곡선을 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$라 하자. 만약 모든 $\epsilon>0$에 대하여 ϵ에 해당하는 $\delta>0$가 존재하여 $0<|t-t_0|<\delta$를 만족시키는 모든 t에 대하여 $|\boldsymbol{r}(t)-L|<\epsilon$을 만족하면 우리는 L을 t가 t_0로 갈 때 $\boldsymbol{r}$의 극한이라고 부른다. 이때 우리는

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=L$$

이라고 쓴다.

공간곡선의 연속성

구간 I에서 정의된 벡터함수 $\boldsymbol{r}(t)$가 $t_0\in I$에 대하여 $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$을 만족시키면 $\boldsymbol{r}(t)$는 $t=t_0$에서 연속이다. $\boldsymbol{r}(t)$가 모든 점 $t\in I$에서 연속이면 $\boldsymbol{r}(t)$는 I에서 연속이다.

예제 $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$에 대하여 $\lim_{t\to\pi/4}\boldsymbol{r}(t)$를 구하시오.

풀이

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pi/4}\boldsymbol{r}(t)&=\left(\lim_{t\to\pi/4}\cos t\right)\boldsymbol{i}+\left(\lim_{t\to\pi/4}\sin t\right)\boldsymbol{j}+\left(\lim_{t\to\pi/4}t\right)\boldsymbol{k}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+\frac{\pi}{4}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

유제 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{t\to\pi}\left[\left(\sin\frac{t}{2}\right)\boldsymbol{i}+\left(\cos\frac{2t}{3}\right)\boldsymbol{j}+\left(\tan\frac{5t}{4}\boldsymbol{k}\right)\right]$

(2) $\lim_{t\to1}\left[\left(\frac{t^2-1}{\ln t}\right)\boldsymbol{i}-\left(\frac{\sqrt{t}-1}{1-t}\right)\boldsymbol{j}+(\tan^{-1}t)\boldsymbol{k}\right]$

연습문제

1. xy 평면 위에 시간 t에 대하여

$$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}$$

로 움직이는 물체가 있다. 다음 물음에 답하시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t)$가 움직이는 자취를 구하시오.

(2) $|\boldsymbol{v}|$와 $|\boldsymbol{a}|$의 최댓값을 구하시오.

2. 벡터함수

$$\boldsymbol{r}(t) = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} + \cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right) + \sin t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right)$$

가 평면 $x + y - 2z = 2$에 들어있는 점 $(2, 2, 1)$을 중심으로 하고 반지름이 1인 원을 나타낸다는 것을 보이시오.

제 32강 벡터함수의 미분과 적분

공간곡선의 미분가능성

구간 I에서 정의된 벡터함수 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$는 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$가 미분가능 할 때 미분가능하다. 이때

$$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{df}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dg}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dh}{dt}\boldsymbol{k}$$

이다.

공간곡선의 미분 법칙

변수 t에 대해서 정의되고 미분가능한 벡터함수 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$와 상수벡터 $\boldsymbol{C}$ 그리고 미분가능한 스칼라 함수 f에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

1. $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{C}=0$
2. $\dfrac{d}{dt}[c\boldsymbol{u}(t)]=c\boldsymbol{u}'(t)$

   $\dfrac{d}{dt}[f(t)\boldsymbol{u}(t)]=f'(t)\boldsymbol{u}(t)+f(t)\boldsymbol{u}'(t)$
3. $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t)$
4. $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(f(t))]=f'(t)\boldsymbol{u}'(f(t))$
5. $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)$
6. $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$

공간곡선의 속도와 가속도

공간 안에 정의된 매끄러운 곡선을 따라 움직이는 물체의 위치벡터를 $\boldsymbol{r}$이라고 하자. 이때 속도벡터는

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

이다. 임의의 t에 대하여 $\boldsymbol{v}$의 방향이 운동의 방향이며 $\boldsymbol{v}$의 크기가 속력이다. 또한 가속도는

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

이다.

예제

$\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + 5\cos^2 t\,\boldsymbol{k}$일 때 속도, 속력, 가속도를 구하시오.

그리고 $t = \dfrac{7\pi}{4}$일 때 속도, 속력, 가속도를 구하시오.

풀이

속도는

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t) &= -2\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j} - 10\cos t\,\sin t\,\boldsymbol{k} \\ &= -2\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j} - 5\sin 2t\,\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

이고 속력은 $|\boldsymbol{v}(t)|$이므로

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (5\sin 2t)^2} = \sqrt{4 + 25\sin^2 2t}$$

이다. 가속도는

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t) = -2\cos t\,\boldsymbol{i} - 2\sin t\,\boldsymbol{j} - 10\cos 2t\,\boldsymbol{k}$$

이다. 따라서

$$\boldsymbol{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{7\pi}{4}\boldsymbol{i} + 2\cos\frac{7\pi}{4}\boldsymbol{j} - 5\sin\left(2 \times \frac{7\pi}{4}\right)\boldsymbol{k} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\,\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

$$\left|\boldsymbol{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{4 + 25\sin^2\left(2 \times \frac{7\pi}{4}\right)} = \sqrt{29}$$

$$\boldsymbol{a}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\boldsymbol{i} - 2\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\boldsymbol{j} - 10\cos\left(2 \times \frac{7\pi}{4}\right)\boldsymbol{k} = -\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\,\boldsymbol{j}$$

이다.

유제

다음에 주어진 공간곡선의 속도, 속력, 가속도를 구하고 $t = t_0$에서의 값들을 각각 구하시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (3t+1)\boldsymbol{i} + \sqrt{3}t\,\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k},\ t_0 = 0$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = (\ln(t^2+1))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1}t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\,\boldsymbol{k},\ t_0 = 1$

(3) $\boldsymbol{r}(t) = \sec t\,\boldsymbol{i} + \tan t\,\boldsymbol{j} + \dfrac{4}{3}t\boldsymbol{k},\ t_0 = \dfrac{\pi}{6}$

(4) $\boldsymbol{r}(t) = (1+t)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ t_0 = 1$

공간곡선의 적분

구간 I에서 정의된 벡터함수 $\boldsymbol{r}(t)$에 대하여 미분가능한 벡터함수 $\boldsymbol{R}(t)$가 모든 $t \in I$에서

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}(t) = \boldsymbol{r}(t)$$

를 만족시키면 $\boldsymbol{R}$을 $\boldsymbol{r}$의 도함수라고 부른다. 이때 t에 대한 $\boldsymbol{r}$의 부정적분 $\int \boldsymbol{r}(t)dt$ 는

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C}$$

이다. 좌표공간에서 $\boldsymbol{r}(t)$를 $f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$로 나타냈을 때 각각의 성분들이 구간 $[a, b]$에서 적분가능하면 $\boldsymbol{r}$도 적분가능하며 이때 구간 $[a, b]$에서의 정적분은

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\boldsymbol{k}$$

이다.

예제 다음을 계산하시오.

(1) $\int ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})dt$ (2) $\int_0^{\pi} ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})dt$

풀이 (1) $\int ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})dt = \left(\int (\cos t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int dt\right)\boldsymbol{j} - \left(\int 2tdt\right)\boldsymbol{k}dt$

$$= (\sin t + C_1)\boldsymbol{i} + (t + C_2)\boldsymbol{j} - (t^2 + C_3)\boldsymbol{k}$$
$$= (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}$$

여기서 $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} - C_3\boldsymbol{k}$ 이다.

(2) $\int_0^{\pi} ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})dt = \left(\int_0^{\pi} (\cos t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_0^{\pi} dt\right)\boldsymbol{j} - \left(\int_0^{\pi} 2tdt\right)\boldsymbol{k}$

$$= (\sin\pi - \sin 0)\boldsymbol{i} + (\pi - 0)\boldsymbol{j} - (\pi^2 - 0^2)\boldsymbol{k}$$
$$= \pi\boldsymbol{j} - \pi^2\boldsymbol{k}$$

유제 다음을 계산하시오.

(1) $\int_0^1 [t^3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}]dt$ (2) $\int_0^{\pi/2} [\cos t\boldsymbol{i} - \sin 2t\boldsymbol{j} + \sin^2 t\boldsymbol{k}]dt$

(3) $\int_1^{\ln 3} [te^t\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + \ln t\boldsymbol{k}]dt$ (4) $\int_0^1 [te^{t^2}\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}]dt$

연습문제

1. t를 변수로 가지는 미분가능한 벡터함수 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$에 대하여

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}$$

가 성립함을 보이시오.

2. 공간에 정의된 미분가능한 벡터함수 $\boldsymbol{r}$에 대하여 다음 식을 증명하시오.

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)=\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)$$

3. 다음 주어진 공간곡선과 점 또는 t_0에서의 접선을 구하시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t)=t^2\boldsymbol{i}+(1+t)\boldsymbol{j}+(2t-3)\boldsymbol{k}$, $(-8, 2, -1)$

(2) $\boldsymbol{r}(t)=-t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\ln t\boldsymbol{k}$, $(2, -5, -3)$

(3) $\boldsymbol{r}(t)=\ln t\boldsymbol{i}+\dfrac{t-1}{t+2}\boldsymbol{j}+t\ln t\boldsymbol{k}$, $t_0=1$

(4) $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+\sin 2\boldsymbol{k}$, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$

4. 다음 미분방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases}\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{r}(0)=10\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}\\ \left.\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=0}=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(\tan t)\boldsymbol{i}+\left(\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)\boldsymbol{j}-(\sec 2t)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{r}(0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\end{cases}$

5. 점 P는 공간에서 다음의 위치벡터

$$\boldsymbol{r}=OP=3\cos t\,\boldsymbol{i}+5\sin t\,\boldsymbol{j}+4\cos t\,\boldsymbol{k}$$

를 따라 움직인다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 P가 구 위에 있다는 것을 보이시오.

(2) 속력이 상수임을 보이시오.

(3) 가속도의 방향이 원점을 향한다는 것을 보이시오.

(4) 점 P가 원점을 지나는 평면 위에서 움직인다는 것을 보이시오.

(5) 점 P의 자취를 설명하시오.

제 33강 곡선의 길이와 곡률

공간곡선의 길이 (Arc Length Along a Space Curve)

구간 $[a,b]$에서 매끄러운 곡선 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$의 길이는

$$L=\int_a^b |v|dt=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

이다.

공간곡선의 호의 길이 매개변수 (Arc Length Parameter)

매끄러운 곡선 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$의 $t=t_0$에서 시작하는 호의 길이 매개변수함수는

$$s(t)=\int_{t_0}^t |v|dt=\int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2+(z'(\tau))^2}\,dt$$

이다. 변수 s에 대하여 $\boldsymbol{r}$의 속력은 1이다.

예제

(1) 구간 $[0,2\pi]$에서 공간곡선 $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$의 길이를 구하시오.

(2) $t=t_0$에서 시작하는 공간곡선 $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$의 호의 길이 매개변수함수를 구하고 $\boldsymbol{r}$의 호 길이 매개변수로 나타내시오.

풀이

(1) 속도 $\boldsymbol{v}(t)$는

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t)=-\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

이므로 $|\boldsymbol{v}(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1^2}=\sqrt{2}$이다. 따라서

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt=4\pi$$

이다.

(2) $s(t)=\displaystyle\int_{t_0}^t \sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}(t-t_0)$

유제

주어진 벡터함수 $\boldsymbol{r}(t)$와 구간에 대하여 호의 길이 L과 t_0에서 시작하는 호의 길이 매개변수함수 $s(t)$를 구하시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j} + \sqrt{5}t\boldsymbol{k}$; $0 \le t \le \pi$, $t_0 = 0$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = 6t^3\boldsymbol{i} - 2t^3\boldsymbol{j} - 3t^3\boldsymbol{k}$; $1 \le t \le 2$, $t_0 = 1$

매끄러운 곡선의 속력, 단위 접벡터

매끄러운 곡선 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$의 $t = t_0$에서 시작하는 호의 길이 매개변수함수를 $s(t)$라고 할 때 $\boldsymbol{r}(t)$의 속력은

$$|v(t)| = \frac{ds}{dt}$$

이다. 그리고 단위 접벡터 $\boldsymbol{T}$는

$$\boldsymbol{T} = \frac{v}{|v|}$$

이다.

예제

곡선 $\boldsymbol{r}(t) = (1 + 3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$의 단위 접벡터를 구하시오.

풀이

속도와 속력은 각각

$$v(t) = \boldsymbol{r}'(t) = -3\sin t\boldsymbol{i} + 3\cos t\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$$

$$|v(t)| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2}$$

이다. 따라서 접벡터는

$$\boldsymbol{T} = \frac{v}{|v|} = \frac{-3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\boldsymbol{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\boldsymbol{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\boldsymbol{k}$$

이다.

유제

다음 주어진 곡선의 단위 접벡터를 구하시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\boldsymbol{i} + (t\cos t - \sin t)\boldsymbol{j}$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = 5\sin t\boldsymbol{i} + 5\cos t\boldsymbol{j} + 12t\boldsymbol{k}$

곡선의 곡률

단위 접벡터 $\boldsymbol{T}$를 가지는 매끄러운 곡선의 곡률 함수는

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left|\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}\right|$$

이다.

예제 양수 a에 대하여 벡터함수 $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j}$의 곡률을 구하시오.

풀이 $\boldsymbol{r}$의 속도와 속력은 각각

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j},$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = a$$

이다. 따라서

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = -\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j},$$

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = -\cos t\boldsymbol{i} - \sin t\boldsymbol{j},$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}\right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

이고 곡률은

$$\kappa = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left|\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}\right| = \frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{a},$$

즉 원 $\boldsymbol{r}$의 반지름의 역수가 곡률이다.

유제 다음 주어진 곡선의 곡률을 구하시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\boldsymbol{i} + (t\cos t - \sin t)\boldsymbol{j}$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = 5\sin t\boldsymbol{i} + 5\cos t\boldsymbol{j} + 12t\boldsymbol{k}$

곡선의 주 단위 법벡터 (Principal Unit Normal Vector)

매끄러운 곡선위의 $\kappa \neq 0$인 점에서 주 단위 법벡터는

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$$

이다.

연습문제

1. 다음 주어진 곡선의 길이를 구하시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = 6\sin 2t\boldsymbol{i} + 6\cos 2t\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \pi$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = \cos^3 t\boldsymbol{j} + \sin^3 t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(3) $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{i} + \sqrt{2}t\boldsymbol{j} + (1-t^2)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

2. 다음 주어진 곡선의 곡률을 구하시오.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k},\ a, b \ge 0,\ a^2 + b^2 \ne 0$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = (2t+3)\boldsymbol{i} + (5-t^2)\boldsymbol{j}$

(3) $\boldsymbol{r}(t) = \ln \sec t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

(4) $\boldsymbol{r}(t) = 3\sin t\boldsymbol{i} + 3\cos t\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

3. xy평면 위의 그래프 $y = f(x)$를 매개변수 곡선 $x = x,\ y = f(x)$로 나타내었을 때 위치벡터는 $\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{i} + f(x)\boldsymbol{j}$로 쓸 수 있다. f가 두 번 미분가능한 함수일 때 이 곡선의 곡률은

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

임을 보이시오.

4. 매개변수함수가 $s = s_0$에서 $s = s_1$까지인 매끄러운 곡선 $\boldsymbol{r}$의 전체곡률(Total curvature)은

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa\, ds$$

이다. 곡선 $\boldsymbol{r}(t) = 3\cos t\boldsymbol{i} + 3\sin t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 4\pi$의 전체곡률을 구하시오.

제 34강 다변수함수의 극한과 연속성

이변수 함수의 극한

임의의 실수 $\epsilon>0$에 대하여 실수 $\delta>0$가 존재하고 다음을 만족시킬 때, L을 점 (x_0, y_0)에서 함수 $f(x,y)$의 극한이라고 한다:

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \text{인 모든 } (x,y)\text{는 } |f(x,y)-L|<\epsilon\text{이다.}$$

이때

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

라고 쓴다.

이변수 함수의 극한의 성질

실수 L, M, k에 대하여

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=M$$

일 때 다음이 성립한다.

1. 합차의 법칙 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)\pm g(x,y))=L\pm M$
2. 상수곱의 법칙 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y)=kL$
3. 곱의 법칙 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot g(x,y)=LM$
4. 나누기 법칙 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{L}{M}$ (단, $M\neq 0$)
5. 지수 법칙 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)^n=L^n$ (단, n은 양의 정수)
6. 근의 법칙 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)}=\sqrt[n]{L}$
   (단, n은 양의 정수이고 n이 짝수이면 $L>0$)

예제 다음의 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ (4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$

풀이

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{0-0\cdot 1+3}{0^2\cdot 1+5\cdot 0\cdot 1-1^3} = \frac{3}{-1} = -3$

(2) $\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0
\end{aligned}$$

(4) 먼저 (x,y)가 x축을 따라 $(0,0)$에 다가간다고 가정하자. 그러면 극한값은 $\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{4x\cdot 0^2}{x^2+0^2} = 0$이다. 반면 (x,y)가 y축을 따라 $(0,0)$에 다가간다고 가정하면 극한값은 $\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{4\cdot 0\cdot y^2}{0^2+y^2} = 0$이다. 따라서 만약 극한값이 존재한다면 극한값은 0이어야 한다.

ϵ을 임의의 실수라 하자. 우리는 다음을 만족시키는 δ를 찾아야 한다:

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{이면 } \left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon \text{이다.}$$

$y^2 \le x^2+y^2$ 이므로 $\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} \le 4|x| \le 4\sqrt{x^2+y^2}$ 이다. 따라서 δ를 $\epsilon/4$으로 두면 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$인 모든 (x,y)에 대하여

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \le 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta = \epsilon$$

임을 알 수 있다. 따라서 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$이다.

유제

다음의 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+4}$ (2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0),x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ (4) $\lim_{x\to 8} \frac{2x^2-17x+8}{8-x}$

예제 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x}$가 존재하지 않음을 보이시오.

풀이 $y=x$인 직선을 따라 (x,y)가 $(0,0)$에 가까이 가면 $\dfrac{y}{x}=1$이므로 극한값도 1이다. 하지만 $y=0$인 직선, 즉 x축을 따라 (x,y)가 $(0,0)$에 가까이 가면 $\dfrac{y}{x}=0$이므로 극한값도 0이다. 즉 (x,y)가 $(0,0)$에 가까이 가는 방법에 따라 함숫값이 접근하는 값도 달라지므로 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x}$는 존재하지 않는다.

유제 다음 극한이 존재하지 않음을 보이시오.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{xy^2-1}{y-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\tan y-y\tan x}{y-x}$

이변수 함수의 연속성

함수 $f(x,y)$가 점 (x_0, y_0)에서 다음 세 가지 성질을 만족시키면 $f(x,y)$는 점 (x_0, y_0)에서 연속이다:

1. f가 점 (x_0, y_0)에서 정의되어있다.
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$가 존재한다.
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

함수 f가 정의역의 모든 점에서 연속이면 함수 f가 연속이라고 한다.

예제

다음과 같이 정의된 함수

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

가 $(0,0)$을 제외한 모든 점에서 연속임을 보이시오.

풀이

$(0,0)$이 아닌 점 근방에서는 함수가 다항식의 분수식으로 표현되므로 나누기 법칙에 의해 극한값이 함숫값과 같다. 즉 연속이다. 따라서 점 $(0,0)$에서만 연속인지 알아보면 된다. 함수 f를 0이 아닌 상수 m에 대하여 정의된 직선 $y=mx$위에 제한시키면

$$f(x,y)|_{y=mx} = \left.\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

이다. 따라서 (x,y)가 $y=mx$를 따라 $(0,0)$에 가까워지면 극한

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, y=mx} f(x,y) = \frac{2m}{1+m^2}$$

이다. 즉 m의 값에 따라 극한값이 달라지므로 f는 $(0,0)$에서 연속이 아니다.

유제

다음과 같이 정의된 함수들이 점 $(0,0)$에서 연속인가?

(1) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+x+y^2}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$

연습문제

1. 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi/6)} \frac{x\sin y}{x^2+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2),\,x+y\neq 4} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

2. 함수 $f(x,y)=\begin{cases} 1, & y \geq x^4 \\ 1, & y \leq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$ 에 대해서 다음 극한값을 구하거나 존재하지 않음을 증명하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)$　　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

3. $(x,y)\neq(0,0)$에서 정의된 함수 $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$가 좌표평면 전체에서 연속함수가 되게 하는 함숫값 $f(0,0)$을 구하시오.

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$의 값을 구하시오.

5. 다음 함수가 좌표평면 전체에서 연속인지 아닌지 정하고 이를 증명하시오.

(1) $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$　　(2) $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$

(3) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$　　(4) $f(x,y)=\dfrac{y+\sin x}{x+\sin y}$

경북대학교 - 수학 리마인드

제 35강 편미분과 접평면

편미분 (Partial Derivative)

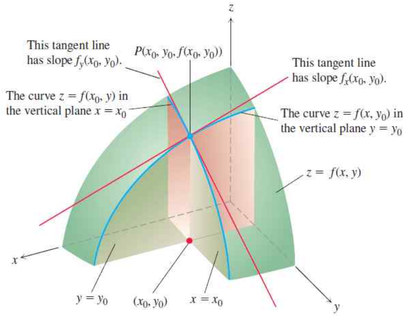
점 (x_0, y_0)에서 변수 x에 대한 함수 $f(x,y)$의 편미분은

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\, y_0)} = f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

이다. 점 (x_0, y_0)에서 변수 y에 대한 함수 $f(x,y)$의 편미분은

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,\, y_0)} = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

이다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

예제 주어진 함수 $f(x,y)$와 점 (x_0, y_0)에 대하여 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$와 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$를 구하시오.

(1) $f(x,y) = x^2 + 2xy + x - 1$, $(x_0, y_0) = (3,2)$

(2) $f(x,y) = y\sin(xy)$, $(x_0, y_0) = (1, \pi)$

풀이 (1) $f(x,y) = x^2 + 2xy + x - 1$를 x변수에 대해 미분하면

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2xy + x - 1) = 2x + 2y + 1$$

이므로 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,2)} = 2(3) + 2(2) + 1 = 11$이다. y변수에 대해 미분하면

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy + x - 1) = 2x$$

이므로 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3,2)} = 2(3) = 6$이다.

풀이 (2) $f(x,y)=y\sin(xy)$를 x변수에 대해 미분하면

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y\sin(xy))=y(y\cos(xy))=y^2\cos(xy)$$

이므로 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,\pi)}=\pi^2\cos\pi=-\pi^2$이다. y변수에 대해 미분하면

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y\sin(xy))=\sin(xy)+y(x\cos(xy))=\sin(xy)+xy\cos(xy)$$

이므로 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,\pi)}=\sin(\pi)+\pi\cos\pi=-\pi$이다.

유제 주어진 함수 $f(x,y)$에 대하여 $\frac{\partial f}{\partial x}$와 $\frac{\partial f}{\partial y}$를 구하시오.

(1) $f(x,y)=\dfrac{2y}{y+\cos x}$ (2) $f(x,y)=(2x-3y)^2$

예제 식 $yz-\ln z=x+y$이 독립인 변수 x와 y에 대해 함수 z를 정의할 때 $\frac{\partial z}{\partial x}$를 구하시오.

풀이 식 $yz-\ln z=x+y$를 x변수로 미분하면

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz)-\frac{\partial}{\partial x}(\ln z)=\frac{\partial}{\partial x}(x+y)$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=1$$

$$\left(y-\frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{yz-1}$$

이다.

유제 식 $z=x\sin(2x-y^2)$이 독립인 변수 x와 y에 대해 함수 z를 정의할 때 $\frac{\partial z}{\partial x}$를 구하시오.

예제 평면 $x=1$과 포물면 $z=x^2+y^2$이 만나는 곡선은 포물선이다. 이 포물선의 점 $(1,2,5)$에서 포물선에 접하는 직선의 기울기를 구하시오.

풀이 포물선은 yz평면과 평행인 평면에 들어 있고 포물선에 접하는 직선의 기울기는 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}$ 이다. 따라서 기울기는

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right|_{(1,2)} = \left.2y\right|_{(1,2)} = 4$$

이다.

유제 곡면 $z=x^2+y^3$에 대하여 점 $(-1,1,2)$를 지나고 다음 평면에 들어 있는 직선의 기울기를 구하시오.

(1) 평면 $x=2$ (2) 평면 $y=-1$

이차 편미분 (Second-Order Partial Derivative)

이차 편미분 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (또는 f_{xx}), $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (또는 f_{yx})는 다음과 같이 정의된다:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

혼합 미분정리 (The Mixed Derivative Theorem)

만약 함수 $f(x,y)$와 편미분 f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}가 점 (a,b) 근방에서 잘 정의되고 점 (a,b)에서 연속일 때,

$$f_{xy}(a,\, b) = f_{yx}(a,\, b)$$

이다.

예제 $f(x,y) = xy + \dfrac{e^y}{y^2+1}$일 때 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$를 구하시오.

풀이 방법1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy + \frac{e^y}{y^2+1})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{e^y(y^2+1) - e^y(2y)}{y^2+1}\right) = 1\end{aligned}$$

방법2) 혼합미분정리에 의해

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xy + \frac{e^y}{y^2+1}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

이다.

유제 다음 함수 $f(x,y)$에 대하여 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}를 구하시오.

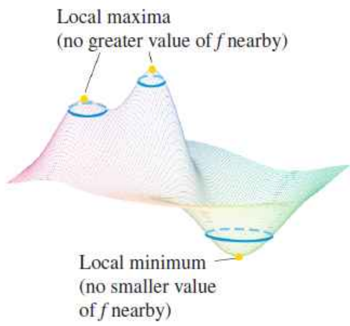
(1) $f(x,y) = x\sin y + y\sin x + xy$ (2) $f(x,y) = \sin(xy)$

(3) $f(x,y) = e^{-xy}$ (4) $f(x,y) = 1 + xy^2 - y^4$

극소와 극대(Local Minimum and Local Maximum)

점 (a,b)를 포함하는 영역 R에 정의된 함수 $f(x,y)$와 점 (a,b)를 포함하는 열린 원반 위의 임의의 점 (x,y)에 대하여

1. $f(a,b) \geq f(x,y)$가 성립하면 $f(a,b)$를 극댓값이라고 하고,
2. $f(a,b) \leq f(x,y)$가 성립하면 $f(a,b)$를 극솟값이라고 한다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

극값의 일차미분정리(First Derivative Test for Local Extreme Values)

함수 $f(x,y)$가 정의역의 내부점 (a,b)에서 극댓값 또는 극솟값을 가지고 일차 편미분이 존재하면

$$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$$

이다.

임계점과 안장점(Critical Points and Saddle Points)

함수 $f(x,y)$가 정의된 영역의 내부점 (a,b)에서 $f_x(a,b)=0$이고 $f_y(a,b)=0$이거나 $f_x(a,b)$ 또는 $f_y(a,b)$가 존재하지 않으면 점 (a,b)는 임계점이라고 한다.

미분가능한 함수 $f(x,y)$가 점 (a,b)를 중심으로 하는 임의의 원반에 $f(x,y)>f(a,b)$인 내부점 (x,y)와 $f(x,y)<f(a,b)$인 내부점 (x,y)가 항상 존재하면 점 (a,b)를 안장점이라고 한다.

예제 다음 주어진 함수의 극값이 존재하면 극값을 구하고 극값이 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오.

(1) $f(x,y)=x^2+y^2-4y+9$ (2) $f(x,y)=y^2-x^2$

풀이

(1) f는 좌표평면 전체에서 미분가능한 함수이고 편미분은 $f_x(x,y)=2x$, $f_y(x,y)=2y-4$이다. 따라서 극값의 일차미분정리에 의하여 극값을 가질 점 (x,y)는

$$f_x(x,y)=2x=0,\ f_y(x,y)=2y-4=0$$

을 만족시킨다. 따라서 극값은 점 $(0,2)$에서 생길 수 있다. 반면

$$f(x,y)=x^2+(y-2)^2+5$$

이기 때문에 $f(x,y)\ge 5$이고,

$$f(0,2)=0^2+2^2-4(2)+9=5$$

이기 때문에 좌표평면 전체에서 $f(x,y)\ge f(0,2)$을 만족한다. 따라서 점 $(0,2)$에서 극솟값을 갖는다.

(2) 함수 $f(x,y)$는 좌표평면 전체에서 미분가능한 함수이고 $f_x(x,y)=-2x$이고 $f_y(x,y)=2y$이다. 따라서 극값의 일차미분정리에 의하여 극값을 가질 수 있는 점은 $f_x(x,y)=-2x=0$과 $f_y(x,y)=2y=0$을 만족시켜야 한다. 즉 $(0,0)$에서 극값을 가질 수 있다. 하지만 점 $(0,0)$ 근처 x축 위에서 $f(x,0)=-x^2<0$이고 y축 위에서는 $f(0,y)=y^2>0$이기 때문에 항상 $f(0,0)=0$보다 큰 함숫값을 가지는 점과 $f(0,0)=0$보다 작은 함숫값을 가지는 점이 존재한다. 즉 $f(x,y)$는 극값을 가지지 않는다. 위의 설명에 의해 $(0,0)$은 안장점이다.

유제

다음 주어진 함수의 극값이 존재하면 극값을 구하고 극값이 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오.

(1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-3y+4$

(2) $f(x,y)=2xy-5x^2-2y^2+4x+4y-4$

극값의 이차미분정리(Second Derivative Test for Local Extreme Values)

점 (a,b)를 중심으로 하는 원반에서 함수 $f(x,y)$의 일차 편미분들과 이차 편미분들이 존재하고 연속이라고 가정하자. $f_x(a,b)=0$이고 $f_y(a,b)=0$일 때 다음 정리들이 성립한다:

(1) 점 (a,b)에서 $f_{xx}<0$이고 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$이면 f는 점 (a,b)에서 극댓값을 갖는다.

(2) 점 (a,b)에서 $f_{xx}>0$이고 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$이면 f는 점 (a,b)에서 극솟값을 갖는다.

(3) f가 점 (a,b)에서 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$이면 점 (a,b)은 안장점이다.

▶ 점 (a,b)에서 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$이면 극점 또는 안장점을 판단할 수 없다. 다른 방법을 써야 한다.

▶ $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$이고 함수 f의 헤시안(Hessian)이라고 부른다.

예제

다음 주어진 함수의 극값을 구하시오.

(1) $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$ (2)

$f(x,y)=3y^2-2y^3-3x^2+6xy$

풀이

(1) 함수 f는 좌표평면 전체에 정의된다. 극값의 일차미분정리에 의해 극값을 가질 수 있는 점은

$$f_x(x,y)=y-2x-2=0,\ f_y(x,y)=x-2y-2=0$$

을 만족시켜야 한다. 즉 점 $(-2,-2)$에서 극값을 가질 수 있다. 이 점에서 극값을 가지는지 판별하기 위해 이차 편미분을 구하면

$$f_{xx}(x,y)=-2,\ f_{yy}(x,y)=-2,\ f_{xy}=1$$

이므로

$$f_{xx}(-2,-2)=-2<0,\ f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=3>0$$

이다. 즉 극값의 이차미분정리에 의해 함수 f는 점 $(-2,-2)$에서 극댓값 $f(-2,-2)=8$을 가진다.

(2) 함수 f는 좌표평면 전체에 정의된다. 극값의 일차미분정리에 의해 극값을 가질 수 있는 점은

$$f_x(x,y) = -6x+6y=0,\ f_y(x,y)=6y-6y^2+6x=0$$

을 만족시켜야 한다. 즉 $x=y$, $12y-6y^2=0$이므로 $(x,y)=(0,0)$ 또는 $(2,2)$에서 극값을 가질 수 있다. 이 점에서 극값을 갖는지 판별하기 위해 이차 편미분을 구하면

$$f_{xx}(x,y)=-6,\ f_{yy}(x,y)=6-12y,\ f_{xy}(x,y)=6$$

이므로 헤시안은

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = -6(6-12y)-36 = -72+72y$$

이다. 따라서 점 $(2,2)$에서는 72이므로 극댓값 $f(2,2)=8$을 갖는다. 점 $(0,0)$에서는 -72이므로 $(0,0)$은 안장점이다.

유제

다음 주어진 함수의 극값을 구하시오.

(1) $f(x,y)=10xye^{-(x^2+y^2)}$　　(2) $f(x,y)=e^{2x}\cos y$

(3) $f(x,y)=x^2-y^2-2x+4y+6$　　(4) $f(x,y)=x^4+y^4+4xy$

닫힌 영역에서 정의된 함수의 최댓값과 최솟값

유계의 닫힌 영역 R에서 정의된 연속인 함수 $f(x, y)$의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법은 다음 세 단계로 이루어져 있다.

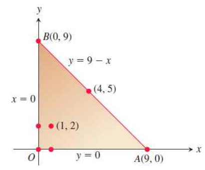
(1) R의 내부에서 $f(x, y)$의 임계점을 구하고 극값을 구한다.

(2) R의 경계에서 $f(x, y)$의 임계점을 구하고 극값을 구한다.

(3) (1)과 (2)에서 구한 값 중 최댓값과 최솟값을 고른다.

예제 좌표평면의 일사분면에서 직선 $x=0$, $y=0$, $y=9-x$로 둘러싸인 영역에서 함수 $f(x, y)=2+2x+4y-x^2-y^2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이 f가 미분가능한 함수이므로 주어진 영역의 내부와 경계에서 $f_x(x, y)=0$이고 $f_y(x, y)=0$인 점을 찾으면 된다.



(1) 영역의 내부: $f_x(x, y)=2-2x=0$, $f_y(x, y)=4-2y=0$인 (x, y)는 $(1, 2)$이고 이 점에서 함숫값은

$$f(1, 2)=7$$

이다.

(2) 영역의 경계:

(I) 선분 $\overline{OA}$는 x축 위의 닫힌 영역 $0 \le x \le 9$이다. 이 선분에서 함수 f는 $f(x, 0)=2+2x-x^2$이므로 극값은 $x=0$, $x=9$ 그리고 $\dfrac{df(x, 0)}{dx}=0$이 되는 점 x에서 가질 수 있다. $\dfrac{df(x, 0)}{dx}=2-2x=0$이므로 이때 x값은 1이다. 따라서 최댓값과 최솟값이 될 수 있는 값들은

$$x=0\text{일 때 } f(0, 0)=2$$
$$x=9\text{일 때 } f(9, 0)=-61$$
$$x=1\text{일 때 } f(1, 0)=3$$

이다.

(II) 선분 $\overline{OB}$는 y축 위의 닫힌 영역 $0 \le y \le 9$이다. 이 선분에서 함수 f는 $f(0, y)=2+4y-y^2$이므로 극값은 $y=0$, $y=9$ 그리고 $\dfrac{df(y, 0)}{dy}=0$이 되는 점 y에서 가질 수 있다. $\dfrac{df(y, 0)}{dy}=4-2y=0$이므로 이때 y값은 2

다. 따라서 최댓값과 최솟값이 될 수 있는 값들은

$$y=0\text{일 때 } f(0,0)=2,$$
$$y=9\text{일 때 } f(0,9)=-43,$$
$$y=2\text{일 때 } f(0,2)=6$$

이다.

(III) 선분 $\overline{AB}$는 $y=9-x$이고 양 끝점은 $(0,9)$와 $(9,0)$이다. 이 선분 위의

f는

$f(x,y)=f(x,9-x)=2+2x+4(9-x)-x^2-(9-x)^2=-2x^2+16x-43$이므로 $\dfrac{df(x,9-x)}{dx}=-4x+16=0$인 점, 즉 $(4,5)$에서 극값을 가진다. 따라서 극값은 $f(9,0)=-61$, $f(0,9)=-43$, $f(4,5)=-11$이다.

결론: 최댓값과 최솟값이 될 수 있는 값들은 7, 2, -61, 3, -43, 6, -11이다. 즉 최댓값은 7이고 최솟값은 -61이다.

유제

닫힌 영역 $0\le x\le 5$, $-3\le y\le 3$위에 정의된 함수

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x$$

의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

연습문제

1. 다음 함수의 f_x, f_y, f_z를 구하시오.

(1) $f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2$ (2) $f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$

(3) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ (4) $f(x, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$

2. 다음 편미분을 갖는 함수 $z = f(x, y)$를 구하거나 구할 수 없다면 그 이유를 설명하시오.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 6y$ (2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x}{(x+y)^2}$

3. 다음과 같이 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} y^3, & y \ge 0 \\ -y^2, & y < 0 \end{cases}$$

에 대하여 f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}를 구하고 각각의 정의역을 설명하시오.

4. 함수 $T = (x^2 + y^2)^{-1/2}$가 $T_{xx} + T_{yy} = T^3$을 만족시킨다는 것을 증명하시오.

5. 다음 함수 $f(x, y)$는 $f_x(0, 0)$과 $f_y(0, 0)$은 존재한다는 것을 보이시오:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 < y < 2^2 \\ 1, & otherwise. \end{cases}$$

6. 다음 주어진 함수의 모든 극대점, 극소점 그리고 안장점을 찾으시오.

(1) $f(x,y)=5xy-7x^2+3x-6y+2$ (2) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

(3) $f(x,y)=e^x(x^2-y^2)$ (4) $f(x,y)=\ln(x+y)+x^2-y$

7. 다음 주어진 영역 R에 정의된 함수 $f(x,y)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $f(x,y)=2x^2-y^2+6y$, $R: x^2+y^2 \le 16$

(2) $f(x,y)=\dfrac{-2y}{x^2+y^2+1}$, $R: x^2+y^2 \le 4$

(3) $f(x,y)=xy-x-3y$,

R: 꼭짓점이 $(0,0)$, $(0,4)$, $(5,0)$인 좌표평면 위의 삼각형

8. 다음 물음에 답하시오.

(1) 평면 $3x+2y+z=6$위의 점 중 원점에 가장 가까운 점과 그 거리를 구하시오.

(2) 3차원 공간에 정의된 원뿔 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 위의 점과 점 $(-6,4,0)$사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

9. $x+y+z=27$이고 $x^2+y^2+z^2$이 최소가 되게 하는 양의 실수 x, y, z를 구하시오.

10. 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=4$로 둘러싸인 영역에서 함수

$$f(x,y)=3x^2+2y^2-4y$$

의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

제 36강 다변수함수의 연쇄법칙

독립변수가 한 개이고 종속변수가 두 개일 때 연쇄법칙 (Chain Rule)

함수 $w=f(x,y)$가 미분가능하고 $x=x(t)$, $y=y(t)$가 변수 t를 가지는 미분가능한 함수일 때, 합성함수 $w=f(x(t),y(t))$는 변수 t를 가지는 미분가능한 함수이고

$$\frac{dw}{dt}=f_x(x(t),y(t))x'(t)+f_y(x(t),y(t))y'(t)$$

이다. 간단하게

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

로 쓴다.

예제 $w=xy$이고 $x=\cos t$, $y=\sin t$일 때 연쇄법칙을 이용하여 $\frac{dw}{dt}$를 구하시오. $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $\frac{dw}{dt}$를 구하시오.

풀이 연쇄법칙을 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{\partial(xy)}{\partial x}\frac{d(\cos t)}{dt}+\frac{\partial(xy)}{\partial y}\frac{d(\sin t)}{dt}\\&=y(-\sin t)+x(\cos t)\\&=\sin t(-\sin t)+\cos t(\cos t)\\&=-\sin^2 t+\cos^2 t=\cos 2t\end{aligned}$$

이다. $t=\frac{\pi}{2}$이면 $\frac{dw}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi=-1$이다.

유제 다음 주어진 w, x, y에 대하여 연쇄법칙을 이용하여 $\frac{dw}{dt}$를 구하시오.

(1) $w=x^2+y^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$

(2) $w=x^2+y^2$, $x=\cos t+\sin t$, $y=\cos t-\sin t$

독립변수가 한 개이고 종속변수가 3개일 때의 연쇄법칙 (Chain Rule)

함수 $w = f(x, y, z)$가 미분가능하고 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$가 변수 t를 가지는 미분가능한 함수일 때, 합성함수 $w = f(x(t), y(t), z(t))$는 변수 t를 가지는 미분가능한 함수이고

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

이다.

예제 $w = xy + z$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ 일 때 $\dfrac{dw}{dt}$를 구하시오. $t = 0$일 때 $\dfrac{dw}{dt}$ 값을 구하시오.

풀이 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial(xy+z)}{\partial x}\frac{d\cos t}{dt} + \frac{\partial(xy+z)}{\partial y}\frac{d\sin t}{dt} + \frac{\partial(xy+z)}{\partial z}\frac{dt}{dt} \\ &= y(-\sin t) + x(\cos t) + 1 \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = \cos 2t + 1\end{aligned}$$

이다. $t = 0$일 때 $\dfrac{dw}{dt}(0) = \cos(0) + 1 = 2$이다.

유제 다음 주어진 w, x, y, z에 대하여 연쇄법칙을 이용하여 $\dfrac{dw}{dt}$를 구하시오.

(1) $w = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$, $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $z = \dfrac{1}{z}$

(2) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 4\sqrt{t}$

두 개의 독립변수와 세 개의 종속변수를 가지는 함수의 연쇄법칙 (Chain Rule)

함수 $w=f(x,y,z)$, $x=x(r,s)$, $y=y(r,s)$, $z=z(r,s)$가 미분가능한 함수일 때, 합성함수 $w=f(x(r,s),y(r,s),z(r,s))$는 변수 r과 s를 가지는 미분가능한 함수이고 w를 r과 s변수로 편미분 하면

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

이다.

예제 $w=x+2y+z^2$, $x=\frac{r}{s}$, $y=r^2+\ln s$, $z=2r$일 때 $\frac{\partial w}{\partial r}$와 $\frac{\partial w}{\partial s}$를 구하시오.

풀이 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\&=(1)(\frac{1}{s})+(2)(2r)+(2z)(2)=\frac{1}{s}+4r+8r=\frac{1}{s}+12r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\&=(1)(-\frac{r}{s^2})+(2)(\frac{1}{s})+(2z)(0)=-\frac{r}{s^2}+\frac{2}{s}\end{aligned}$$

이다.

유제 $w=x^2+y^2$, $x=r-s$, $y=r+s$일 때 $\frac{\partial w}{\partial r}$와 $\frac{\partial w}{\partial s}$를 구하시오.

음함수 미분 정리 (Implicit Differentiation)

함수 $F(x,y)$가 미분가능하고 식 $F(x,y)=0$이 y를 x변수에 대한 함수를 정의할 때 $F_y \neq 0$인 점에서

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

가 성립한다.

함수 $F(x,y,z)$가 미분가능하고 식 $F(x,y,z)=0$이 z를 변수 x와 y에 대한 함수를 정의할 때 $F_z \neq 0$인 점에서

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

가 성립한다.

예제

(1) 음함수 미분정리를 이용하여 $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$일 때 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

(2) 음함수 미분정리를 이용하여 $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$일 때 $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$를 구하시오.

풀이

(1) $F(x,y) = y^2 - x^2 - \sin xy$로 두면 음함수 미분정리에 의해

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$

이다.

(2) $F(x,y,z) = z^3 - xy + yz + y^3 - 2$라 두면

$$F_x = -y, \; F_y = -x + z + 3y^2, \; F_z = 3z^2 + y$$

이다. 따라서 음함수 미분정리에 의해

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{y}{3z^2 + y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{x - z - 3y^2}{3z^2 + y}$$

이다.

유제

다음 주어진 식이 성립할 때 주어진 점에서 $\dfrac{dy}{dx}$값을 구하시오.

(1) $x^3 - 2y^2 + xy = 0$, $(1, 1)$

(2) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$, $(-1, 1)$

유제

다음 주어진 식이 성립할 때 주어진 점에서 $\dfrac{dz}{dx}$와 $\dfrac{dz}{dy}$값을 구하시오.

(1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 1 = 0$, $(2, 3, 6)$

(2) $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(z+x) = 0$, (π, π, π)

연습문제

1. (1) $w = f(s^3 + t^2)$이고 $f'(x) = e^x$일 때 $\dfrac{dw}{dt}$와 $\dfrac{dw}{ds}$를 구하시오.

(2) $w = f\left(ts^2, \dfrac{s}{t}\right)$이고 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x^2}{2}$일 때 $\dfrac{\partial w}{\partial t}$와 $\dfrac{\partial w}{\partial s}$를 구하시오.

2. 함수 $f(u, v, w)$가 미분가능하고 $u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$일 때

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

을 보이시오.

3. $w = f(x, y)$가 미분가능한 함수이고 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이다.

(1) $w = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$에 대하여

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \sin\theta + f_y \cos\theta$$

임을 보이시오.

(2) 문제 (1)의 두 식을 이용하여 f_x와 f_y를 $\dfrac{\partial w}{\partial r}$와 $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$에 대해 나타내시오.

(3) 다음식이 성립함을 보이시오:

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

4. 함수 $w = f(x, y)$는 $f_{xx} + f_{yy} = 0$을 만족시킨다. $u = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$이고 $v = xy$일 때 $w_{xx} + w_{yy} = 0$이 성립함을 보이시오.

경북대학교 - 수학 리마인드

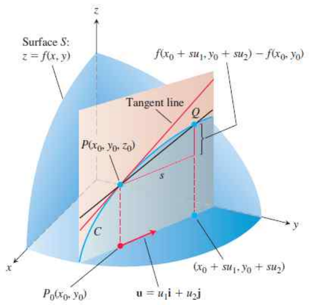
제 37강 방향미분과 기울기벡터

이변수 함수의 방향미분(Directional Derivatives)

좌표평면 위에 점 $P_0(x_0, y_0)$와 단위벡터 $u = u_1 i + u_2 j$가 있다. 함수 f에 대해서 극한

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

이 존재하면 $\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0}$를 f의 방향 u로의 방향미분이라고 한다. $\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0}$는 $D_u f(P_0)$ 또는 $D_u f|_{P_0}$라고도 쓴다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

기하학적 의미: $\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0}$는 함수 f의 점 P_0에서 방향 u로의 기울기를 나타낸다.

예제 함수 $f(x, y) = x^2 + xy$의 점 $P_0(1, 2)$과 방향 $u = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$으로의 방향미분을 구하시오.

풀이 정의에 의해

$$\begin{aligned}
\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} &= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1,\ y_0 + su_2) - f(x_0,\ y_0)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - f(1,\ 2)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1 \cdot 2)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{\frac{5s}{\sqrt{2}} + s^2}{s} = \frac{5}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

이다.

유제 함수 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$의 점 $P_0(1,1)$과 방향 $u=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$으로의 방향미분을 구하시오.

기울기 벡터(Gradient Vector)

함수 $f(x,y)$에 대하여 기울기 벡터는

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

이다. 점 $P_0(x_0,y_0)$에서 기울기 벡터 값은 $\nabla f|_{P_0}$ 또는 $\nabla f(x_0,y_0)$라고 쓴다.

정리: 함수 $f(x,y)$가 점 $P_0(x_0,y_0)$을 포함하는 열린 근방에서 미분가능 할 때 단위벡터 u에 대하여

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0}=\nabla f|_{P_0}\cdot u$$

가 성립한다.

▶ 증명: 방향미분의 정의에서 $P_0(x_0,y_0)$를 지나고 기울기가 $u=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}$인 직선을 각각 $x=x_0+su_1$, $y=y_0+su_2$라고 두면 연쇄법칙에 의해

$$\begin{aligned}\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0}&=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\frac{\partial x}{\partial s}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\frac{\partial y}{\partial s}\\&=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}u_1+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}u_2=\nabla f|_{P_0}\cdot u\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

기울기벡터의 성질(Gradient Vector)

1. $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$
2. $\nabla(f-g)=\nabla f-\nabla g$
3. $\nabla(kf)=k\nabla f$
4. $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$
5. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

예제 점 $(2,0)$에서 방향 $v=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$으로의 함수 $f(x,y)=xe^y+\cos(xy)$의 방향벡터를 구하시오.

풀이

v의 단위벡터는 $u=\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}j$이다.

$$f_x(x,y)=e^y-y\sin(xy),\ f_y(x,y)=xe^y-x\sin(xy)$$

이므로 $f_x(2,0)=1$, $f_y(2,0)=2$이다. 따라서 $\nabla f|_{(2,0)}=i+2j$이고 방향미분은

$$D_uf\big|_{(2,0)}=\nabla f|_{(2,0)}\cdot u=(i+2j)\cdot\left(\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}j\right)=\frac{3}{5}-\frac{8}{5}=-1$$

이다.

유제

점 $(5,5)$에서 방향 $v=4i+3j$으로의 함수 $f(x,y)=2xy-3y^2$의 방향벡터를 구하시오.

방향미분 $D_uf=\nabla f\cdot u=|\nabla f|\cos\theta$의 성질

1. 함수 f는 $\cos\theta=1(\theta=0)$일 때 가장 빨리 증가한다. 즉 점 P_0에서 u가 ∇f의 방향일 때 가장 빨리 증가한다.
2. 함수 f는 점 P_0에서 $-\nabla f$의 방향으로 가장 빨리 감소한다.
3. f가 변화하지 않는 방향은 θ가 $\frac{\pi}{2}$일 때다. 즉 ∇f와 수직인 방향으로 f는 변하지 않는다.

예제

함수 $f(x,y)=x^2+y^2$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 (1,1)에서 가장 빠르게 증가하는 방향을 구하시오.
(2) 점 (1,1)에서 가장 빠르게 감소하는 방향을 구하시오.
(3) 점 (1,1)에서 변화가 0인 방향을 구하시오.

풀이

(1) 가장 빠르게 증가하는 방향은 $\nabla f|_{(1,1)}$의 방향이고 $\nabla f|_{(1,1)} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$이기 때문에 방향은 $u = \dfrac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}}{|2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$이다.

(2) 가장 빠르게 감소하는 방향은 $-\nabla f|_{(1,1)}$의 방향이고 $\nabla f|_{(1,1)} = 2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$이기 때문에 방향은 $u = -\dfrac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}}{|2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$이다.

(3) 변화가 없는 방향은 $\nabla f|_{(1,1)}$와 수직인 방향이기 때문에
$u = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$ 또는 $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$이다.

유제

함수 $f(x, y) = \dfrac{x-y}{xy+2}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(1, -1)$에서 가장 빠르게 증가하는 방향을 구하시오.

(2) 점 $(1, -1)$에서 가장 빠르게 감소하는 방향을 구하시오.

(3) 점 $(1, -1)$에서 변화가 0인 방향을 구하시오.

레벨곡선의 접선

미분가능한 함수 $f(x, y)$와 상수 c에 대하여 레벨곡선 $f(x, y) = c$를 생각하자. 이때 이 레벨곡선 위의 곡선 $r = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j}$는 $f(g(t), h(t)) = c$를 만족시킨다. 이 식을 미분하면

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) \cdot \left(\frac{\partial g}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial t}\boldsymbol{j}\right) = \nabla f \cdot \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 즉 ∇f는 레벨곡선에 수직인 방향을 갖는다. 따라서 레벨곡선 위의 점 (x_0, y_0)에 접하는 직선의 방정식은

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

이다.

예제

점 $(-2, 1)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 2$의 접선을 구하시오.

풀이 $\nabla f|_{(-2,1)} = \left.\left(\frac{x}{2}\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}\right)\right|_{(-2,1)} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$이므로 접선의 방정식은 $-1(x+2)+2(y-1)=0$이다. 정리하면 $-x+2y=4$이다.

유제 점 $(\sqrt{2},1)$에서 레벨곡선 $x^2-y=1$의 접선의 방정식을 구하시오.

삼변수 함수의 기울기 벡터(Gradient)

미분가능한 함수 $f(x,y,z)$와 단위벡터 $u = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$에 대하여 기울기 벡터와 방향벡터는 각각

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

이다. f는 ∇f의 방향으로 가장 빠르게 증가하고 $-\nabla f$의 방향으로 가장 빠르게 감소한다.

예제 함수 $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$와 점 $P_0(1,1,0)$에 대하여 $v = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$의 방향으로 미분하시오. 점 $P_0(1,1,0)$에서 f가 가장 빠르게 증가하는 방향과 그 기울기를 구하시오.

풀이 벡터 v의 방향은 $u = \dfrac{v}{|v|} = \dfrac{2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \dfrac{2}{7}\boldsymbol{i} - \dfrac{3}{7}\boldsymbol{j} + \dfrac{6}{7}\boldsymbol{k}$이다. f의 편미분은

$$f_x = 3x^2 - y^2,\ f_y = -2xy,\ f_z = -1$$

이기 때문에

$$\nabla f|_{(1,1,0)} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$D_u f(1,1,0) = \nabla f|_{(1,1,0)} \cdot u = \frac{2}{7} \cdot 2 + \left(-\frac{3}{7}\right)(-2) + \frac{6}{7}(-1) = \frac{4}{7}$$

임을 알 수 있다. f는 ∇f의 방향으로 가장 빠르게 증가하기 때문에 f가 가장 빠르게 증가하는 방향은 $\dfrac{\nabla f|_{(1,1,0)}}{|\nabla f|_{(1,1,0)}|} = \dfrac{2}{3}\boldsymbol{i} - \dfrac{2}{3}\boldsymbol{j} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{k}$이고 기울기는 $|\nabla f|_{(1,1,0)}| = 3$이다.

유제 함수 $f(x,y,z) = x\ln y + y\ln z - x$와 점 $P_0(2,1,e)$에 대하여 $v = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$의 방향으로 미분하시오.

접평면 (Tangent Plane)

미분가능한 함수 $f(x,y,z)$와 상수 c에 대하여 레벨곡면 $f(x,y,z)=c$의 점 P_0에서의 접평면은 벡터 $\nabla f|_{P_0}$에 수직이고 점 P_0을 지나는 평면이다. 따라서 접평면의 방정식은

$$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0$$

이고 법선의 방정식은

$$x=x_0+f_x(P_0)t,\ \ y=y_0+f_y(P_0)t,\ \ z=z_0+f_z(P_0)t$$

이다.

예제 점 $P_0(1,2,4)$에서 레벨곡면 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0$의 접평면과 법선의 방정식을 구하시오.

풀이 접평면은 P_0을 지나고 $\nabla f|_{P_0}$에 수직인 평면이다. 기울기 벡터는

$$\nabla f|_{P_0}=(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\Big|_{(1,2,4)}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

이므로 접평면의 방정식은

$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$, 즉

$$2x+4y+z=14$$

이다. 법선은 점 P_0를 지나고 기울기가 $\nabla f|_{P_0}$이므로 법선의 방정식은

$$x=1+2t,\ \ y=2+4t,\ \ z=4+t$$

이다.

유제 점 $(0,0,0)$에서 곡면 $z=xcosy-ye^x$의 접평명과 법선의 방정식을 구하시오.

연습문제

1. 함수 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$에 대하여 다음을 만족시키는 벡터를 구하시오.

(1) $D_u f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$가 가장 크다. (2) $D_u f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$가 가장 작다.

(2) $D_u f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)=0$ (4) $D_u f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)=-2$

(5) $D_u f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)=-3$

2. 점 $(1,2)$에서 방향 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$으로의 함수 $f(x,y)$의 방향미분은 $2\sqrt{2}$이고 방향 $-2\boldsymbol{j}$로의 방향미분은 -3이다. 점 $(1,2)$에서 함수 f의 방향 $-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$로의 방향미분값을 구하시오.

3. 점 $P_0(1,1,3)$에서 곡면 $f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$과 $g(x,y,z)=x+z-4=0$의 교점이 이루는 곡선의 접선의 방정식을 구하시오.

4. 함수 $f(x,y)=x^2+y^2$을 곡선

$$r(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j},\ t>0$$

의 단위 접벡터 방향으로 미분하시오.

5. 다음 주어진 점 P_0에서 곡면 $f(x,y,z)=0$의 접평면과 법선의 방정식을 구하시오.

(1) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3,\ P_0(1,1,1)$

(2) $f(x,y,z)=ye^x-ze^{y^2}-z,\ P_0(0,0,1)$

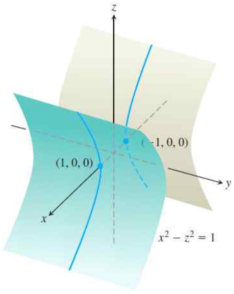
(3) $f(x,y,z)=\sqrt{y-x}-z,\ P_0(1,2,1)$

(4) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2)-z,\ P_0(0,0,1)$

제 38강 최대 및 최소: Lagrange 곱셈자

예제

3차원 공간의 쌍곡기둥 $x^2 - z^2 = 1$에서 원점에 가장 가까운 점을 구하시오.



그림출처:Thomas' Calculus 14th edition.

풀이 1

점 (x, y, z)에서 원점까지의 거리는 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$이므로 $x^2 - z^2 = 1$일 때 함수

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

의 최솟값을 구하면 된다. x와 y를 독립변수로 하고 z를 종속변수로 하면 $z^2 = x^2 - 1$이므로 함수 f는 쌍곡기둥 위에서

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

이 된다. h의 최솟값을 구하기 위하여 편미분을 계산하면

$$h_x(x, y) = 4x = 0, \ \ h_y(x, y) = 2y = 0$$

을 만족시키는 점 중에서 최솟값이 나온다는 것을 배웠다. 하지만 $(x, y) = (0, 0)$을 만족시키는 쌍곡기둥의 점은 존재하지 않는다. 무엇이 잘못된 것일까?

이것은 함수 h의 정의역이 xy평면 전체이고 극값의 일차미분정리는 xy평면 전체에서 h의 극값이 될 필요조건을 주기 때문이다. 이 문제를 피하기 위해서 우리는 x를 y와 z의 종속변수로 두어야 한다. 즉 $x^2 = z^2 + 1$이라고 두고 쌍곡기둥 위에서 f를 구하면

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

이 되고 극값이 될 필요조건은

$$k_y(y, z) = 2y = 0, \ \ k_z(y, z) = 4z = 0$$

이 된다. 즉 $(y, z) = (0, 0)$이 되는 점에서 최솟값을 가질 수 있다. 게다가

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1 = k(0, 0)$$

을 만족시키므로 $(y, z) = (0, 0)$에서 최솟값을 가진다. 이때 x 값은 $x^2 = 1$을 만족시키기 때문에 점 $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$에서 최솟값을 가진다.

풀이 원점을 중심으로 갖고 반지름이 점점 커지는 구 $x^2+y^2+z^2=r^2$을 생각하자. 이때 반지름 r이 점점 커지다가 처음으로 쌍곡기둥과 만나는 점에서 최솟값이 생긴다는 것을 알 수 있다. 또한 만나는 점에서 구와 쌍곡기둥은 같은 법선과 접평면을 가진다. 즉 구와 쌍곡기둥을 정의하는 함수 f와 g를 각각

$$f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-r^2,\ g(x, y, z)=x^2-z^2-1$$

이라고 두면 ∇f와 ∇g는 만나는 점에서 평행해야 한다. 다시 말하면 만나는 점에서 $\lambda \in R$이 존재하여

$$\nabla f=\lambda \nabla g$$

를 만족시켜야 한다. 이것을 계산하면

$$2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}=\lambda(2x\boldsymbol{i}-2z\boldsymbol{k})$$

이고 각각의 성분이 같아야 하므로 다음의 세 식이 성립해야 한다.

$$2x=\lambda 2x,\ 2y=0,\ 2z=-2\lambda z$$

따라서 $\lambda=1$이고 $y=0$, $z=0$이어야 한다. 따라서 $x^2-z^2=1$식에 의해 $x^2=1$이므로 최솟값이 되는 점은 $(\pm 1, 0, 0)$임을 알 수 있다.

Lagrange 곱셈자 방법(Lagrange Multiplier Method)

함수 $f(x, y, z)$와 $g(x, y, z)$는 미분가능하고 $g(x, y, z)=0$일 때 $\nabla g \neq 0$라고 가정하자. $g(x, y, z)=0$을 만족시키는 점에서 f의 극솟값과 극댓값은 변수 x, y, z, λ에 대하여 다음의 식을 만족시키는 점에서 나타난다.

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

여기서 λ를 Lagrange 곱셈자라고 부른다.

예제 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$위에서 함수 $f(x, y)=xy$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이 타원은 함수 $g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1$의 레벨집합이다. Lagrange 곱셈자 방법을 쓰면 극값들은 식 $\nabla f = \lambda \nabla g$과 $g(x,y)=0$을 동시에 만족시키는 점에서 나타난다. 먼저 $\nabla f = \lambda \nabla g$를 계산하면

$$y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = \lambda\left(\frac{x}{4}\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\right)$$

가 된다. 즉 $y=\frac{\lambda x}{4}$이고 $x=\lambda y$이다. 따라서 $x=\lambda y=\frac{\lambda^2 x}{4}$이기 때문에 만약 $x=0$이면 $y=0$이고 $(0,0)$은 타원 위에 없기 때문에 $x \neq 0$이어야 한다. $x \neq 0$이면 $\lambda^2=4$이다. 즉 $\lambda= \pm 2$이고 $x= \pm 2y$이다. 이 식을 타원 방정식에 대입하면

$$1=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=\frac{(\pm 2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=y^2$$

이고 $y= \pm 1$임을 알 수 있다. 따라서 극값은 $(\pm 2,1)$과 $(\pm 2,-1)$에서 생기므로 최댓값은 2이고 최솟값은 -2이다.

유제 원 $x^2+y^2=1$위에서 함수 $f(x,y)=3x+4y$의 최댓값과 최솟값을 Lagrange 곱셈자 방법을 이용하여 구하시오.

두 가지 제약이 있을 때 Lagrange 곱셈자 방법

함수 $f(x,y,z)$와 $g_1(x,y,z)$, $g_2(x,y,z)$는 미분가능하고 $g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0$일 때 ∇g_1과 ∇g_2는 평행이 아니라고 가정하자. $g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0$을 만족시키는 점에서 f의 극솟값과 극댓값은 변수 x,y,z,λ,μ에 대하여 다음의 식을 만족시키는 점에서 나타난다.

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2,\quad g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0$$

예제 평면 $x+y+z=1$과 원통 $x^2+y^2=1$의 교점들은 타원을 이룬다. 이 타원의 점 중 원점에서 거리가 가장 먼 점과 가장 가까운 점을 구하시오.

풀이 우리는 제약이

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-1=0,$$
$$g_2(x,y,z)=x+y+z-1=0$$

일 때 함수 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$의 최댓값과 최솟값을 구해야 한다. Lagrange 곱셈자 방법을 이용하면 다음과 같은 식을 풀어야 한다:

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2,\quad g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0$$

즉

$$2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}=\lambda(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j})+\mu(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

이고 이 식을 성분별로 풀면

$$2x=2\lambda x+\mu,\ 2y=2\lambda y+\mu,\ 2z=\mu$$

이다. 정리하면

$$2x=2\lambda x+2z \Rightarrow x(1-\lambda)=z$$
$$2y=2\lambda y+2z \Rightarrow y(1-\lambda)=z$$

이므로 $\lambda\neq1$이면 $x=y=\dfrac{z}{1-\lambda}$이고 $\lambda=1$이면 $z=0$이다.

(1) $z=0$인 경우: 연립방정식 $x^2+y^2=1$, $x+y=1$을 풀면 극값은 $(1,0,0)$과 $(0,1,0)$에서 나온다는 것을 알 수 있다.

(2) $x=y=\dfrac{z}{1-\lambda}$인 경우: 연립방정식 $x^2+y^2=1$, $x+y+z=1$을 정리하면

$1=x^2+y^2=2x^2$, $1=x+x+z=2x+z$이므로

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z=1-2x=1\mp\sqrt{2}$$

이다.

즉 극값은 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2}\right)$와 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2}\right)$에서 생길 수 있다.

종합하면 최댓값은 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2}\right)$에서 생기고 최솟값은 $(1,0,0)$ 또는 $(0,1,0)$에서 생긴다.

유제

평면 $2x-y=0$과 $y+z=0$이 만나는 직선에서 함수 $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$의 최댓값을 Lagrange 곱셈자 방법을 이용하여 구하시오.

연습문제

1. 다음 물음에 답하시오.

(1) xy평면에 있는 곡선 $x^2+xy+y^2=1$위에 있는 점 중 원점에 가장 가까운 점과 가장 먼 점을 모두 구하시오.

(2) 평면 $x+2y+3z=14$위에 있는 점 중 점 $(1,-1,1)$에 가장 가까운 점을 모두 구하시오.

(3) 곡면 $z^2=xy+4$위에 있는 점 중 원점에 가장 가까운 점을 모두 구하시오.

2. 다음 물음에 답하시오.

(1) 평면 $z=1$과 구 $x^2+y^2+z^2=10$의 교점이 이루는 곡선에서 함수 $f(x,y,z)=x^2yz+1$의 극값을 모두 구하시오.

(2) 평면 $2y+4z=5$와 원뿔 $z^2=4x^2+4y^2$의 교점이 이루는 곡선에서 원점까지 가장 가까운 점을 모두 구하시오.

3. 구 $x^2+y^2+z^2=1$위의 점 (x,y,z)의 온도는 $T=400xyz^2$이다. 온도가 가장 높은 점과 낮은 점은 모두 어디인가?

4. 양의 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$에 대하여 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$을 만족시킬 때 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$의 최댓값을 구하시오.

5. 다음 물음에 답하시오.

(1) 반지름이 r이고 원점을 중심으로 하는 구위에서 $x^2y^2z^2$의 최댓값은 $\left(\frac{r^2}{3}\right)^3$임을 보이시오.

(2) (1)을 이용하여 음이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여

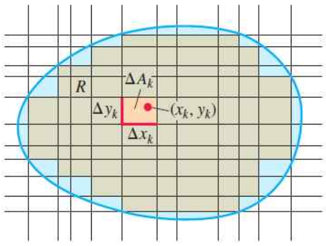
$$(xyz)^{1/3} \le \frac{x+y+z}{3}$$

이 성립함을 보이시오.

제 39강 이중적분

이중적분 (Double Integrals)

좌표평면 위의 유계인 영역 R 위에 정의된 함수 $f(x,y)$가 있다. 좌표평면을 x축과 y축에 평행이고 간격이 각각 Δx, Δy인 직선들로 나누어서 만든 작은 직사각형들 중 영역 R에 완전히 들어가는 n개의 직사각형들을 생각하자. 이 작은 직사각형들은 R의 분할을 이루고 Δx와 Δy가 작아질수록 영역 R안에 완전히 들어가는 직사각형의 수 n은 커진다. 이 직사각형들의 넓이는 $\Delta A = \Delta x \Delta y$이다. R의 분할을 이루는 직사각형에 1부터 n까지 번호를 주면 k번째 직사각형의 넓이는 $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$라고 쓸 수 있다. 이제 각각의 직사각형 내부의 점 (x_k, y_k)를 고르면 R에서 f의 리만합은



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

이다. 각각의 직사각형 내부의 점 (x_k, y_k)를 어떻게 고르냐와 분할을 어떻게 구성하느냐에 따라서 S_n은 다른 값을 가질 수 있다. 만약 n이 점점 커질 때 S_n의 극한값이 존재하면, 함수 f는 영역 R에서 적분가능하다라고 하고 그 극한값을 이중적분이라고 부르며

$$\iint_R f(x,y)\, dA \text{ 또는 } \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

라고 쓴다.

푸비니의 정리 (Fubini's Theorem)

좌표평면 안의 영역 R위에 정의된 연속인 함수 $f(x,y)$가 있다.

1. 영역 R이 닫힌영역 $[a,b]$ 위에서 연속인 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$에 대하여 $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$이면

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

이다.

2. 영역 R이 닫힌영역 $[c,d]$ 위에서 연속인 함수 $h_1(y)$, $h_2(y)$에 대하여 $h_1(y) \le x \le h_2(y)$, $c \le y \le d$이면

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

이다.

예제 다음 주어진 함수 $f(x,y)$와 영역 R에 대하여 $\iint_R f(x,y)dA$을 구하시오.

(1) $f(x,y) = 100 - 6x^2y$, $R: 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1$

(2) $f(x,y) = x\sin y$, $R: 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le x$

풀이 (1) 푸비니 정리에 의하여

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_0^2 100 - 6x^2y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}[100x - 2x^{3y}]_{x=0}^{x=2}dy$$
$$= \int_{-1}^{1} 200 - 16y\,dy = [200y - 8y^2]_{y=-1}^{y=1} = 400$$

(2) 푸비니의 정리에 의하여

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^{\pi}\int_0^{x} xsiny\,dy\,dx = \int_0^{\pi}[x\cos y]_{y=0}^{y=x}dx$$
$$= \int_0^{\pi} x\cos x - x\,dx = [-x\sin x]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} -\sin x\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi}$$
$$= [\cos x]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{\pi^2}{2} = -2 - \frac{\pi^2}{2}$$

이다.

유제 다음 주어진 함수 $f(x,y)$와 영역 R에 대하여 $\iint_R f(x,y)dA$을 구하시오.

(1) $f(x,y) = x^2y - 2xy$, $R: 0 \le x \le 3,\ -2 \le y \le 0$

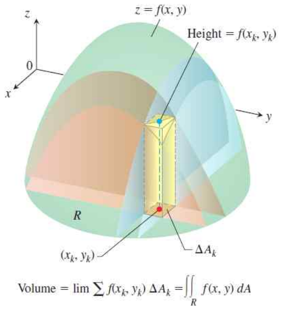
(2) $f(x,y) = y$, $R: 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x$

부피 (Volume)

좌표평면 안에 영역 R위에 정의된 연속이고 양수인 함수 $f(x,y)$가 있다. 영역 R과 곡면 $z=f(x,y)$로 둘러싸인 입체도형의 부피는

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

이다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

예제 다음 주어진 곡면과 영역 R 사이의 입체도형의 부피를 구하시오.

(1) 곡면: $z=10+x^2+3y^2$, $R: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$

(2) 곡면: $z=\dfrac{\sin x}{x}$, R: x축, 직선 $y=x$, 직선 $x=1$로 둘러싸인 삼각형

풀이 (1) 부피는 $\iint_R f(x,y)\,dA$이므로 푸비니 정리에 의하여

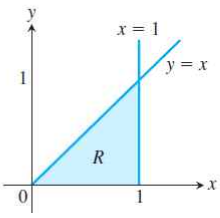
$$\begin{aligned} V=\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_0^1\int_0^2 10+x^2+3y^2\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left[10y+x^2y+y^3\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 (20+2x^2+8)\,dx \\ &= \left[28x+\frac{2}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = 28+\frac{2}{3} = \frac{86}{3} \end{aligned}$$

이다.

(2) 영역 R은 오른쪽의 그림의 파란 부분이다. 따라서 영역 R은 $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$이고 부피는

$$\begin{aligned} V=\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_0^1\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=1} = 1-\cos 1 \end{aligned}$$

이다.



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

유제

다음 주어진 곡면과 영역 R 사이의 입체도형의 부피를 구하시오.

(1) 곡면: $z=x^2+y^2$, R: 직선 $y=x$, $x=0$, $x+y=2$로 둘러싸인 삼각형

(2) 곡면: $z=x^2$, R: xy 평면에서 포물선 $y=2-x^2$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 영역

예제

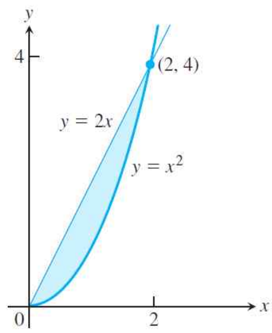
이중적분 $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,dy\,dx$ 의 적분 범위를 xy평면위에 그리시오. 적분의 x, y의 적분 순서를 바꾸었을 때 적분 범위가 어떻게 바뀌는지 쓰시오.

풀이

이중적분 $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,dy\,dx$ 의 적분 범위는 오른쪽 그림의 파란색 부분이다. 적분의 순서를 바꾸었을 때 적분은

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,dx\,dy$$

이다.



유제

다음 적분의 적분 범위를 xy 평면위에 그리시오. 적분의 x, y의 적분 순서를 바꾸었을 때 적분 범위가 어떻게 바뀌는지 쓰시오.

(1) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\,dx$

(2) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\,dy$

(3) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,dy\,dx$

(3) $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\tan^{-1}y} \sqrt{xy}\,dx\,dy$

연습문제

1. 다음 이중적분을 구하시오.

(1) $\int_1^2 \int_0^4 2xy\, dy\, dx$ (2) $\int_0^{\ln 2} \int_1^{\ln 5} e^{2x+y}\, dy\, dx$

(3) $\int_\pi^{2\pi} \int_0^\pi (\sin x + \cos y)\, dx\, dy$ (4) $\int_1^4 \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + \sqrt{y}\right) dx\, dy$

2. 다음 주어진 함수 $f(x,y)$를 주어진 영역 R에서 적분하시오.

(1) $f(x,y) = xy\cos y$, $R: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi$

(2) $f(x,y) = e^{x-y}$, $R: 0 \le x \le \ln 2,\ 0 \le y \le \ln 2$

3. 다음 이중적분을 구하시오.

(1) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\, dx\, dy$ (2) $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\tan^{-1} y} \sqrt{xy}\, dx\, dy$

(3) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$ (4) $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{3}} e^{x^2}\, dx\, dy$

4. 다음 물음에 답하시오.

(1) 곡면 $z = 4 - x^2 - y$와 $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$인 부분의 공통부분의 부피를 구하시오.

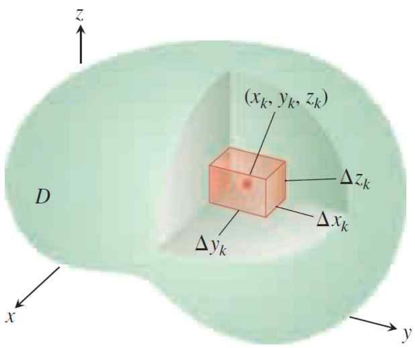
(2) 사각기둥 $|x| + |y| \le 1$이 평면 $z = 0$과 $3x + z = 3$에 의해 잘린 입체도형의 부피를 구하시오.

5. 다음을 증명하시오.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)^2$$

제 40강 삼중적분

삼중적분 (Triple Integrals)



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

공간 안에 유계이고 닫힌영역 D 위에 정의된 함수 $F(x,y,z)$가 있다. 공간좌표를 x축, y축, z축에 평행이고 간격이 각각 Δx, Δy, Δz인 직선들로 나누어서 만든 작은 직육면체 중 영역 D에 완전히 들어가는 n개의 직육면체들을 생각하자. 이 작은 직육면체들은 D의 분할을 이루고 Δx, Δy, Δz가 작아질수록 영역 D 안에 완전히 들어가는 직육면체의 수 n은 커진다. 이 직사각형들의 부피는 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$이다. D의 분할을 이루는 직육면체에 1부터 n까지 번호를 주면 k번째 직사각형의 넓이는 $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$라고 쓸 수 있다. 이제 각각의 직육면체 내부의 점 (x_k, y_k, z_k)를 고르면 D에서 $F(x,y,z)$의 리만합은

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

이다. 각각의 직육면체 내부의 점 (x_k, y_k, z_k)를 어떻게 고르냐와 분할을 어떻게 구성하느냐에 따라서 S_n은 다른 값을 가질 수 있다. 만약 n이 점점 커질 때 S_n의 극한값이 존재하면, 함수 F는 영역 D에서 적분가능하다라고 하고 그 극한값을 삼중적분이라고 부르며

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dV \text{ 또는 } \iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

라고 쓴다. 유계이고 닫힌영역 D의 부피는

$$\iiint_D dV$$

이다.

삼중적분하는 방법

z, y, x 방향 순서대로 적분하는 방법은 다음과 같다.

1. 입체영역 D의 xy평면으로의 사영을 R이라고 하자.

2. $z-$적분한계 찾기: z축에 평행하고 D를 통과하는 직선이 z성분이 증가할 때 D에 들어가는 점 $z=f_1(x,y)$와 D에서 나오는 점 $z=f_2(x,y)$를 찾는다.

3. $y-$적분한계 찾기: xy 평면에서 y축에 평행인 직선을 그었을 때 y가 증가함에 따라 R에 들어가는 점 $y=g_1(x)$와 R에서 나오는 점 $y=g_2(x)$를 찾는다.

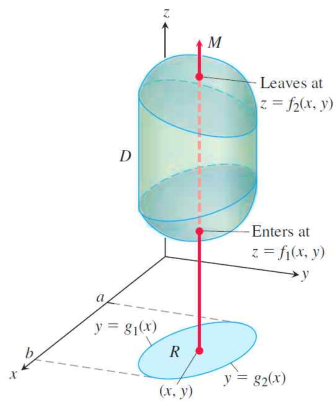


그림 출처: Thomas' Calculus 14th edition.

4. $x-$적분한계 찾기: 영역 R을 x축으로의 사영이 닫힌영역 $a \le x \le b$이면 삼중적분은 다음과 같다.

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dV = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

예제 S는 원점을 중심으로 하고 반지름이 5인 공이고 D는 S와 $z \geq 3$인 영역의 공통영역이다. D 위에 정의된 함수 $F(x,y,z)$의 삼중적분을 구할 적분한계를 구하시오.

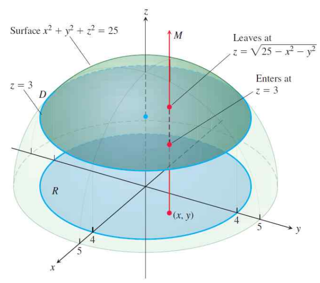
풀이 영역 D는 평면 $z=3$의 위쪽부분과 구 $x^2+y^2+z^2=25$의 안쪽 부분의 공통영역이다.

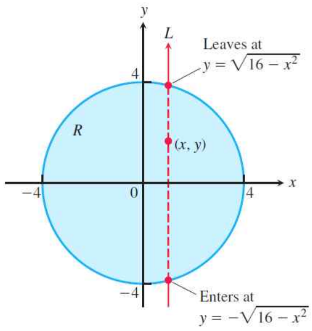
(1) 정사영 R: 영역 D의 xy평면으로의 정사영을 R이라고 하면 $R: x^2+y^2=16$이다.

(2) $z-$적분한계: R안에 고정된 점 (x,y)에서 z축에 평행한 직선을 그으면 점 $z=3$에서 영역 D에 들어가 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$에서 나온다.

(3) $y-$적분한계: 점 (x,y)를 지나고 y축에 평행한 직선을 그으면 $y=-\sqrt{16-x^2}$에서 영역 R에 들어가 $y=\sqrt{16-x^2}$에서 나온다.

(4) $x-$적분한계: 영역 R의 x축 정사영은 $[-4,4]$이므로 삼중적분은





그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{3}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

이다.

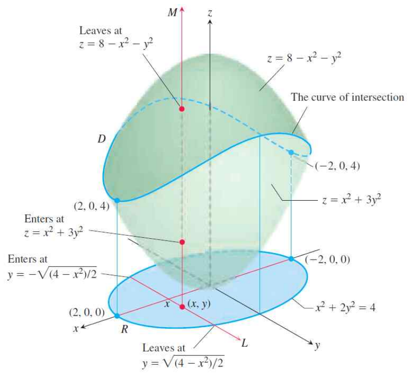
유제 좌표공간 안의 닫힌영역 D는 점 $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$을 꼭짓점으로 하는 사면체다. D 위에 정의된 함수 $F(x,y,z)$의 삼중적분을 구할 적분한계를 구하시오.

예제 곡면 $z=x^2+3y^2$ 과 $z=8-x^2-y^2$ 으로 둘러싸인 영역 D의 부피를 구하시오.

풀이 유계이고 닫힌영역 D의 부피는

$$\iiint_D dV$$

이다. 적분한계를 찾기 위해 영역 D가 어떻게 생겼는지 먼저 살펴보자. 곡면 $z=x^2+3y^2$ 과 $z=8-x^2-y^2$ 가 만나는 곡선은 $x^2+3y^2=8-x^2-y^2$, 즉 타원기둥 $4=x^2+2y^2$ 위에 있다. 따라서 D의 xy평면으로의 정사영 R은



그림출처: Thomas' Calculus 14th edition.

$$4 \geq x^2+2y^2$$

을 만족시키는 타원의 내부이다. R에 들어 있는 점 (x,y)에 대하여 z축에 평행하고 점 (x,y)를 지나는 직선은 $z=x^2+3y^2$ 을 통과하여 $z=8-x^2-y^2$ 으로 나온다. xy평면에 점 (x,y)를 지나고 y축에 평행인 직선은 $y=-\sqrt{\dfrac{4-x^2}{2}}$ 를 통과하여 $y=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{2}}$ 으로 나온다. 마지막으로 R의 x축으로의 정사영은 $[-2,2]$이다. 따라서 부피는

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_D dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8-2x^2-4y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[8y-2x^2y-\frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[2\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\,(8-2x^2)-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right] dx \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,dx \\
&= 8\pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

이다.

유제 좌표공간 안에 곡면 $z=8-x^2-y^2$ 과 $z=x^2+y^2$ 으로 둘러싸인 영역 D의 부피를 구하시오.

연습문제

1. 다음 삼중적분을 구하시오.

(1) $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$ (2) $\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

(2) $\int_1^e\int_1^{e^2}\int_1^{e^3} \frac{1}{xyz}\,dx\,dy\,dz$ (4) $\int_0^{\pi/6}\int_0^1\int_{-2}^3 y\sin z\,dx\,dy\,dz$

2. 원기둥 $x^2+z^2=4$와 평면 $y=3$으로 둘러싸이고 $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$인 영역의 부피를 구하는 삼중적분을 서로 다른 6개의 적분한계로 나타내고 그 값을 구하시오.

3. 다음 물음에 답하시오.

(1) 좌표평면 $x=0,\ y=0,\ z=0$과 평면 $x+z=1,\ y+2z=2$로 둘러싸인 영역의 부피를 구하시오.

(2) 좌표평면 $x=0,\ y=0,\ z=0$과 곡면 $x=4-y^2$과 평면 $y+z=2$로 둘러싸인 영역의 부피를 구하시오.

(3) 원기둥 $x^2+y^2=4$를 평면 $z=0$과 $x+z=3$으로 자른 영역의 부피를 구하시오.

4. 타원체 $x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$의 부피가 8π일 때 c의 값을 구하시오.

5. 다음 물음에 답하시오.

(1) $\iiint_D (1-x^2-y^2-z^2)\,dV$가 최대가 되는 영역 D를 구하시오.

(2) $\iiint_D (4x^2+4y^2+z^2-4)\,dV$가 최소가 되는 영역 D를 구하시오.

제 41강 벡터장과 선적분

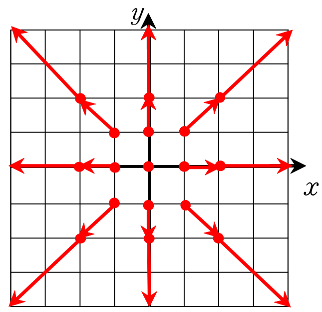
벡터장(vertor field)

n차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$에 대하여 함수 $\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$을 $\mathbb{R}^n$**상의 벡터장**이라고 한다. 이때 이 벡터장은 정의역 D의 각각의 원소 $\mathbf{x}$를 n차원 벡터 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$로 대응시킨다.

[참고]
벡터장은 각각의 점에서의 크기와 방향을 나타냄으로써 유체의 흐름 또는 중력장 등을 표현하는데 유용하게 사용될 수 있다.

예제 $\mathbb{R}^2$상의 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$를 그림으로 나타내시오.

풀이



유제 $\mathbb{R}^2$상의 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$를 그림으로 나타내시오.

그래디언트장(gradient vector field)

스칼라 함수 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$에 대하여 우리가 이전 [제 35강]에서 다루었던 함수 f의그래디언트 ∇f를 생각해보자. 즉,

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = f_{x_1}(x_1, \ldots, x_n)\mathbf{i}_1 + \cdots + f_{x_n}(x_1, \ldots, x_n)\mathbf{i}_n.$$

이때, ∇f는 $\mathbb{R}^n$상의 벡터장이 되고 우리는 이것을 함수 f의 **그래디언트장** 또는 **기울기벡터장**이라고 한다.

만약 벡터장 $\mathbf{F}$가 어떤 스칼라 함수 f의 그래디언트장 일 때 (즉, $\mathbf{F} = \nabla f$) 그 벡터장 $\mathbf{F}$를 **보존벡터장**(conservative vector field), 함수 f를 $\mathbf{F}$를 위한 **포텐셜함수**(potential function)이라고 한다.

예제 함수 $f(x, y) = \tan(xy)$의 그래디언트장을 구하시오.

풀이

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= y\sec^2(xy)\mathbf{i} + x\sec^2(xy)\mathbf{j}\end{aligned}$$

이다.

유제 함수 $f(x, y, z) = e^z\sqrt{x^2 + y^2}$의 그래디언트장을 구하시오.

유제 함수 $f(x, y) = \dfrac{(x-y)^2}{2}$의 그래디언트장을 그림으로 나타내시오.

선적분(line integral)

평면 곡선 C가 매개변수방정식 $x = x(t),\ y = y(t),\quad a \le t \le b$ 또는 벡터방정식 $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ 로 주어져있다. 이때 우리는 곡선 C를 매끄러운 곡선(smooth curve)이라 가정하자. (즉, $\mathbf{r}'$은 연속이고 $\mathbf{r}'(t) \ne 0$.)

구간 $[a, b]$를 일정한 길이의 n개의 부분 구간 $[t_{i-1}, t_i]$들로 나누고 $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$라 하면 점 $P_i(x_i, y_i)$들은 곡선 C를 각각의 길이가 $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$인 n개의 부분 곡선으로 나눈다. 이때 각각의 부분 곡선 위의 임의의 점 $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$를 택한다.

함수 f가 매끄러운 곡선 $C(x = x(t),\ y = y(t),\quad a \le t \le b)$상에 정의되어 있다고 하자. 만약 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$가 존재하면 그것을 **곡선 C위에서의 f의 선적분**이라 하고 다음과 같이 표현한다.

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

[정리]

정의역이 매끄러운 곡선 $C(x = x(t),\ y = y(t),\quad a \le t \le b)$를 포함하는 이변수 함수 f가 연속일 때 다음이 성립한다.

(i) $\displaystyle\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \quad \left(= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt\right)$

(ii) $\displaystyle\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt$

(iii) $\displaystyle\int_C f(x, y)\,dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt$

위와 같은 방식으로 3차원 공간상의 선적분도 정의할 수 있다.

공간 곡선 C가 매개변수방정식 $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad a \le t \le b$로 주어졌을 때 곡선 C위에서의 f의 선적분은 다음과 같이 정의하고

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,\Delta s_i$$

다음이 성립한다.

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

예제 곡선 C가 제 1사분면에 속한 중심이 원점이고 반지름이 2인 원의 일부분을 나타낼 때, $\int_C xy^2\,ds$를 구하시오.

풀이 먼저 곡선 C를 매개변수방정식으로 나타내면

$$x = 2\cos t,\; y = 2\sin t,\;\; 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

이다.

$$\begin{aligned}\int_C xy^2\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t)(4\sin^2 t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t)(4\sin^2 t)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt \\ &= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\sin^2 t\,dt \\ &= 16\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

유제 C가 점 $(1,2)$로 부터 점 $(5,5)$를 잇는 선분일 때, $\int_C (x-1)e^{y-2}\,ds$를 구하시오.

벡터장의 선적분(line integrals of vector fields)

벡터 함수 $\mathbf{r}(t), a \le t \le b$로 표현된 매끄러운 곡선 C상에 정의된 벡터장 $\mathbf{F}$가 연속이라고 하자. 이때, **곡선 C위에서의 $\mathbf{F}$의 선적분**은 다음과 같이 정의한다.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$$

여기서 $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$는 곡선 C상의 각 점에서의 단위접선벡터를 나타낸다.

[참고]

벡터장의 선적분은 주어진 벡터장에서 곡선 C를 따라 이동했을 때의 한 일의 양을 구하는 것과 같다. 왜냐하면 선적분의 정의에서와 같이 곡선 C를 각각의 길이가 $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$인 n개의 부분 곡선으로 나누었을 때 각각의 부분에서 한 일의 양은 근사적으로 $\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \left[\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)\right] = \left[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)\right]\Delta s_i$이므로 총 일의 양은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*))\right]\Delta s_i$가 되기 때문이다.

예제 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = -xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$에 대하여 곡선 C가 벡터 함수 $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$로 주어졌을 때 선적분 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$를 구하시오.

풀이 $x = \cos t$, $y = \sin t$이므로

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -\cos t \sin t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t + \cos^3 t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 1\end{aligned}$$

이다.

유제

힘의 장 $\mathbf{F}(x, y) = y^2\,\mathbf{i} + x^2 y\,\mathbf{j}$ 상에서 입자가 벡터 함수 $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} - 2t^3\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$로 표현된 곡선 C를 따라 움직일 때 한 일의 총량을 구하시오.

연습문제

1. (1) 함수 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 그래디언트장을 구하시오.
(2) 위에서 구한 그래디언트장을 그림으로 나타내시오.

2. 다음 주어진 곡선 C에 대하여 선적분을 구하시오.

(1) $\int_C xy^2\, ds$, $\quad C: x = \sin t,\ y = \cos t,\ \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$

(2) $\int_C z^3 dx + e^x dy + xy\, dz$, $\quad C: x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ \ 0 \le t \le 1$

(3) $\int_C e^x dx + (y - x) dy$, $\quad C$는 점 $(0, 0)$부터 점 $(2, 2)$까지의 선분과 그리고 점 $(2, 2)$부터 점 $(3, 5)$까지의 선분

3. 힘의 장 $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$ 상에서 입자가 사이클로이드 C의 호 $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$를 따라 움직일 때 한 일의 총량을 구하시오.

제 42강 선적분의 기본 정리와 Green 정리

선적분의 기본 정리(the fundamental theorem for line integrals)

우리는 제 10강에서 미분적분학의 기본 정리에 대하여 알아보았다. 즉, 함수 $F'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 $\int_a^b F'(x)\,dx = = F(b) - F(a)$이다. 함수의 그래디언트 벡터를 이용하여 선적분에서도 이와 유사한 정리를 얻을 수 있다.

[선적분의 기본 정리]
C는 벡터 함수 $\mathbf{r}(t), a \le t \le b$로 표현된 매끄러운 곡선이라 하자. 함수 f가 미분가능하고 ∇f가 C상에서 연속일때, 다음이 성립한다.

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

[참고]
위의 정리에서 만약 벡터장 $\mathbf{F}$가 f의 그래디언트장일 때 (즉, $\mathbf{F} = \nabla f$) 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$은 위의 정리를 이용하여 쉽게 계산할 수 있다.

예제 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (\sin y + ye^x)\,\mathbf{i} + (x\cos y + e^x)\,\mathbf{j}$에 대하여 곡선 C가 벡터 함수 $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$로 주어졌다고 가정하자.

(1) $\mathbf{F} = \nabla f$를 만족시키는 함수 f를 찾으시오.

(2) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$를 계산하시오.

풀이 (1) $f_x(x,y) = \sin y + ye^x$이므로 $f(x,y) = x\sin y + ye^x + g(y)$이다. 그러면 $x\cos y + e^x = f_y(x,y) = x\cos y + e^x + g'(y)$가 되고, 따라서 $g'(y) = 0$이다. 따라서, $f(x,y) = x\sin y + ye^x + a$ (a는 적분상수)이고, 여기서 우리는 함수 f를 $f(x,y) = x\sin y + ye^x$로 선택할 수 있다.

(2) 선적분의 기본정리에 의해

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(0,1) - f(1,0) = 1$$

유제 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = y^2 e^{xy}\,\mathbf{i} + (xy+1)e^{xy}\,\mathbf{j}$ 에 대하여 곡선 C가 벡터 함수 $\mathbf{r}(t) = t^2(1+t)\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$로 주어졌다고 가정하자.

(1) $\mathbf{F} = \nabla f$를 만족시키는 함수 f를 찾으시오.

(2) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 를 계산하시오.

경로 독립(independence of path)과 보존벡터장

[참고]

시작점과 끝점이 같은 두 개의 매끄러운 곡선 C_1과 C_2에 대해 일반적으로 $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$이다. 하지만 여기서 만약 벡터장 $\mathbf{F}$가 보존벡터장이면 선적분의 기본 정리에 의해 항상 $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$이 된다.

연속인 벡터장 $\mathbf{F}$가 주어졌을 때, 만약 시작점과 끝점이 같은 임의의 두 개의 매끄러운 곡선 C_1과 C_2에 대하여 $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$이면 선적분 $\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$는

경로 독립이라고 한다.

[정리]

(1) 선적분 $\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$이 경로 독립이 될 필요충분조건은 모든 매끄러운 닫힌 곡선(즉, 시작점과 끝점이 같은 곡선)에 대하여 $\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$이다.

(2) 연결 열린 집합 D상에서 벡터장 $\mathbf{F}$가 연속일 때, 만약 선적분 $\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$이 D상에서 경로 독립이면, $\mathbf{F}$는 보존벡터장이다.

(3) 단순 연결 열린 집합 D상에서 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$에 대하여 P와 Q가 연속인 1차 편도함수를 가진다고 가정하자. 이때, D상에서 $\mathbf{F}$가 보존벡터장이 되기 위한 필요충분조건은 D의 전체에 걸쳐

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

가 성립할 때이다.

예제 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 + x\,e^{xy})\,\mathbf{i} + (x^2 y + y\,e^{xy})\,\mathbf{j}$가 보존벡터장인지 아닌지 판정하시오.

풀이 $\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + xe^{xy}) = 2xy + x^2 e^{xy} \neq 2xy + y^2 e^{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y + y e^{xy})$이므로 위의 정리에 의해 $\mathbf{F}$는 보존벡터장이 아니다.

유제

벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = 2y\,e^{2x}\,\mathbf{i} + (e^{2x} + e^{2y})\,\mathbf{j}$ 가 보존벡터장인지 아닌지 판정하고, 만약 $\mathbf{F}$ 가 보존벡터장일 경우 $\mathbf{F} = \nabla f$를 만족시키는 함수 f를 찾으시오.

Green's 정리

C는 평면상의 양의 방향을 가지는 유한 개의 조각마다 매끄러운 단순 닫힌 곡선이고 이때 D를 곡선 C가 둘러싸고 있는 영역이라고 하자. 만약 이변수함수 P와 Q가 영역 D를 포함하는 열린 영역에서 연속인 편도함수를 가지면 다음이 성립한다.

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

[참고]

Green's 정리는 평면에 속한 영역 상의 이중 적분과 그 영역의 경계선 상의 선적분 사이의 관계성을 나타내주는 정리이다.

예제

C가 원점에서 점 $(1,0)$으로, 점 $(1,0)$에서 점 $(0,1)$로, 다시 점 $(0,1)$에서 원점으로 향하는 곡선일 때 선적분 $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$를 구하시오.

풀이

Green's 정리에 의해

$$\begin{aligned}\oint_C xy\,dx + x^2\,dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x - x)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

예제

타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

풀이

타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$의 매개변수방정식은 다음과 같다.

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$$

타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$로 둘러싸인 영역을 D라 할 때 Green's 정리에 의해

$$\begin{aligned}\iint_D 1\,dA &= \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (b\sin t)(a\sin t)\,dt + (a\cos t)(b\cos t)\,dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dt = \pi ab\end{aligned}$$

이다.

유제 C가 중심이 원점이고 반지름이 3인 원일 때 선적분 $\oint_C y^3\,dx - x^3\,dy$를 구하시오.

연습문제

1. 힘의 장 $\mathbf{F}(x,y) = (1+xy)e^{xy}\,\mathbf{i} + x^2 e^{xy}\,\mathbf{j}$ 상에서 입자가 점 $(1,0)$에서 점 $(0,2)$로 이동할 때 한 일의 총량을 구하시오.

2. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j} = \dfrac{-\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$ 에 대하여 다음의 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$가 성립함을 보이시오.

(2) 선적분 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 이 경로 독립이 아님을 보이시오.

(3) 본문에서 소개된 정리가 성립하지 않는 이유에 대해 논하시오.

3. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (e^y - 2y)\,\mathbf{i} + x\,e^y\,\mathbf{j}$ 에 대하여 C가 시계반대방향의 타원 $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$일 때, 선적분 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 을 구하시오.

제 43강 회전과 발산

회전(curl)과 발산(divergence)

$\mathbb{R}^3$상의 벡터장 $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$에 대하여 P, Q, R의 편도함수가 존재할 때, $\mathbf{F}$의 **회전**은 다음과 같이 정의된 $\mathbb{R}^3$상의 벡터장이다.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$\mathbb{R}^3$상의 벡터장 $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$에 대하여 $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$가 존재할 때, $\mathbf{F}$의 **발산**은 다음과 같이 정의된 삼변수함수이다.

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

[참고]

(1) 회전과 발산은 벡터 미적분학의 기본적인 연산들로서 유체의 흐름과 전자기학 등에서 중요하게 활용되어진다.

(2) $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{F}$, $\quad \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

예제 $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + e^{xyz}\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$의 회전과 발산을 구하시오.

풀이 (1) $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & e^{xyz} & z^2 \end{vmatrix} = \left(0 - xye^{xyz}\right)\mathbf{i} - (0 - xy)\mathbf{j} + \left(yze^{xyz} - xz\right)\mathbf{k}$

$$= -xye^{xyz}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + \left(yze^{xyz} - xz\right)\mathbf{k}$$

(2) $\operatorname{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}xyz + \dfrac{\partial}{\partial y}e^{xyz} + \dfrac{\partial}{\partial z}z^2 = yz + xze^{xyz} + 2z$

유제 $\mathbf{F}(x,y,z) = \sin(yx)\,\mathbf{i} + \cos(xz)\,\mathbf{j} + \tan(xy)\,\mathbf{k}$의 회전과 발산을 구하시오.

회전과 발산의 성질

[정리]

(1) 삼변수함수 f가 연속인 2차 편도함수를 가질 때, $\mathrm{curl}\,(\nabla f) = 0$이다.

(2) 만약 $\mathbf{F}$가 보존벡터장이면, $\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = 0$이다.

(3) $\mathbb{R}^3$상의 벡터장 $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$에 대하여 P, Q, R이 연속인 편도함수를 가지고 $\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = 0$이면, $\mathbf{F}$가 보존벡터장이다.

(4) $\mathbb{R}^3$상의 벡터장 $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$에 대하여 P, Q, R이 연속인 2차 편도함수를 가지면, $\mathrm{div}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = 0$이다.

(증명)

(1) $\mathrm{curl}\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$

(2) $\mathbf{F}$가 보존벡터장이므로 $\nabla f = \mathbf{F}$가 성립하도록 하는 함수 f가 존재한다.
그러므로 (1)에 의해 $\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = \mathrm{curl}\,(\nabla f) = 0$이다.

(3) 생략 (추후에 다룰 Stokes' 정리를 이용하여 증명 가능)

(4) $\mathrm{div}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$

예제 $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2 z\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} + xy^2\,\mathbf{k}$가 보존벡터장이 아님을 증명하시오.

풀이 $\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z & xyz & xy^2 \end{vmatrix} = xy\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{k} \neq 0$이므로 정리 (2)에 의해 $\mathbf{F}$는 보존벡터장이 아니다.

유제

$\mathbf{F}(x, y, z) = z\cos y\,\mathbf{i} + xz\sin y\,\mathbf{j} + x\cos y\,\mathbf{k}$가 보존벡터장인지 아닌지를 판정하시오. 만일 $\mathbf{F}$가 보존벡터장일 경우 $\nabla f = \mathbf{F}$를 만족시키는 함수 f를 구하시오.

예제

벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz}\,\mathbf{i} + \cos(xy)\,\mathbf{j} + z\sin(xy)\,\mathbf{k}$는 다른 벡터장의 회전으로 표현될 수 없음을 증명하시오.

풀이

벡터장 $\mathbf{F}$가 또 다른 벡터장 $\mathbf{G}$의 회전으로 표현이 된다고 가정하자. 즉, $\mathbf{F} = \operatorname{curl}\mathbf{G}$. 그러면 정리 (4)에 의해

$$0 = \operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{G} = \operatorname{div}\mathbf{F} = 0 - x\sin(xy) + \sin(xy) = (1-x)\sin(xy) \neq 0$$

이므로 모순이다. 따라서, 벡터장 $\mathbf{F}$는 다른 벡터장의 회전으로 표현될 수 없다.

연습문제

1. 다음 벡터장 $\mathbf{F}$ 의 회전과 발산을 구하시오.

(1) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z \sin y\, \mathbf{i} + e^x \cos z\, \mathbf{j} + e^y \sin x\, \boldsymbol{k}$

(2) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xyz}\, \mathbf{i} + \ln(2x + 3y + 4z)\, \mathbf{j} + \sin(xyz)\, \mathbf{k}$

2. 각 성분이 연속인 편도함수를 가지는 $\mathbb{R}^3$상의 벡터장 $\mathbf{F}, \mathbf{Q}$과 삼변수함수 f, g에 대하여 다음을 증명하시오.

(1) $\text{curl}\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{curl}\,\mathbf{F} + \text{curl}\,\mathbf{G}$

(2) $\text{div}\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{div}\,\mathbf{F} + \text{div}\,\mathbf{G}$

(3) $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^3 z^3\, \boldsymbol{i} + 3xy^2 z^3\, \mathbf{j} + 3xy^3 z^2\, \mathbf{k}$가 보존벡터장인지 아닌지를 판정하시오. 만일 $\mathbf{F}$가 보존벡터장일 경우 $\nabla f = \mathbf{F}$를 만족시키는 함수 f를 구하시오.

제 44강 곡면적분

곡면적분(surface integral)

호의 길이(arc length)	$\leftrightarrow$	곡면의 넓이(surface area)
선적분(line integral)	$\leftrightarrow$	곡면적분(surface integral)

곡면 S가 다음의 벡터방정식으로 표현되어 있다고 가정하자.

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k},\quad (u,v)\in D$$

여기서 D는 $uv-$평면상의 직사각형이면서 매개변수 정의역이다.

영역 D를 가로와 세로의 길이가 각각 $\Delta u, \Delta v$인 부분 사각형 R_{ij}들로 나누었을 때 그들에 대응되는 곡면 S의 조각들을 S_{ij}, 그리고 각 조각마다의 한 점들을 P_{ij}^*라 하자. 각 점 P_{ij}^*마다 함수 f에 대한 함숫값을 계산하고 그것을 대응되는 조각의 넓이 ΔS_{ij}에 곱한 후, Riemann 합 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$을 고려한다.

이때, 곡면 S의 조각들의 개수가 증가하도록 극한을 취함으로써 다음과 같이 **곡면 S상의 함수 f의 곡면적분**을 정의한다.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

(1) 한편, $\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$를 조각 S_{ij}의 한 꼭짓점에서의 접선벡터라 할 때, 각각의 조각들의 넓이는 $\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v$이고, 따라서 곡면적분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$$

(2) 만약 곡면 S가 방정식 $z = g(x,y)$로 주어졌을 때 이것은 매개변수방정식 $x = x,\ y = y,\ z = g(x,y)$로 나타낼 수 있고 따라서

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

이다. 그러므로 곡면적분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\;dA$$

예제 곡면 S가 중심이 원점이고 반지름이 1인 구일 때 곡면적분 $\iint_S 2z\, dS$를 구하시오.

풀이 곡면 S는 벡터방정식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$\mathbf{r}(u,v) = \sin u \cos v\, \mathbf{i} + \sin u \sin v\, \mathbf{j} + \cos u\, \mathbf{k},\ 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi$

그러면 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sin u$ 이고, 따라서

$$\begin{aligned}\iint_S 2z\, dS &= \iint_D 2\cos u\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 2\cos u \sin u\ du\, dv \\ &= \left(\int_0^{\pi} \sin(2u)\, du\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\, dv\right) = 0\end{aligned}$$

이다.

유제 곡면 S가 방정식 $z = x^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi$로 주어졌을 때 곡면적분 $\iint_S 2x\, dS$를 구하시오.

벡터장에서의 곡면적분

곡면 S상의 각 점에서 단위법선벡터는 양면에 각 1개씩 서로 반대 방향으로 놓여 있다. 만약 단위법선벡터 $\mathbf{n}$이 S상에 걸쳐 연속적으로 변화할 수 있도록 각각의 모든 점에서 단위법선벡터를 선택할 수 있다면 그 곡면 S를 **가향곡면**(oriented surface), 그리고 그러한 하나의 단위법선벡터를 **방향**(orientation)으로 설정한 곡면을 **유향곡면**(oriented surface)라 한다.

만약 매끄러운 가향곡면 S가 다음의 벡터방정식 $\mathbf{r}(u,v)$로 표현되어 있을 경우, 우리는 항상 그 곡면의 방향을 단위법선벡터 $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$로 줄 수 있다.

연속인 벡터장 $\mathbf{F}$가 방향이 단위법선벡터 $\mathbf{n}$인 유향곡면 S상에 정의되어 있을 때, 다음과 같이 **곡면 S상의 벡터장 $\mathbf{F}$의 곡면적분**을 정의한다.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

(1) 이때, 곡면 S가 매개변수 정의역이 D인 벡터방정식 $\mathbf{r}(u,v)$로 주어졌다면

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS \\ &= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA\end{aligned}$$

이고, 따라서 곡면적분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

(2) 만약 벡터장 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, 곡면 S가 방정식 $z = g(x,y)$로 주어졌을 때 이것은 매개변수방정식 $x = x$, $y = y$, $z = g(x,y)$로 나타낼 수 있고 따라서

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

이다. 그러므로 곡면적분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

예제 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{k}$가 바깥쪽 방향을 향하는 곡면 S $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\quad x, y, z \geq 0$상에 정의되어 있을 때, 곡면적분 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.

풀이 곡면 S $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x, y, z \geq 0$는 다음의 벡터방정식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{r}\,(u, v) = \sin u \cos v\ \mathbf{i} + \sin u \sin v\ \mathbf{j} + \cos u\ \mathbf{k},\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

그러면

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) = 2\cos u\ \mathbf{i} + \sin u \cos v\ \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \sin^2 u \cos v\ \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v\ \mathbf{j} + \sin u \cos u\ \mathbf{k}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= 2\sin^2 u \cos u \cos v + \sin^2 u \cos u \cos v \\ &= 3\sin^2 u \cos u \cos v\end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 u \cos u \cos v\, du\, dv \\ &= 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos u\, du\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v\, dv\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{3}\right)(1) = 1\end{aligned}$$

유제 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j}$가 꼭짓점을 $(\pm 2, \pm 2, \pm 2)$로 가지고 바깥쪽 방향을 향하는 정육면체상에 정의되어 있을 때, 곡면적분 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.

연습문제

1. 곡면 S는 원뿔면 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 의 위쪽에 위치한 구 $x^2+y^2+z^2=9$의 일부분이다. 이때, 다음의 물음에 답하시오.

(1) 곡면 S를 벡터방정식 $\mathbf{r}(u,v)$로 나타내시오.

(2) (1)에서 얻은 벡터방정식을 이용하여 곡면 S에 대한 단위 법선벡터

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$$ 를 구하시오.

2. 다음의 곡면적분을 구하시오.

(1) $\iint_S (xy+z)\,dS$

이때, 곡면 S는 평면 $z=0$과 $z=2$사이에 있는 원기둥 $x^2+y^2=4$

(2) $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, $\mathbf{F}(x,y,z)=-2y\,\mathbf{i}+z\,\mathbf{k}$

이때, 곡면 S는 포물면 $z=3-x^2-y^2$, $z\geq 0$

3. 곡면적분을 이용하여 다음에 주어진 곡면의 넓이를 구하시오.

(1) 평면 $z=16$의 아래에 놓여진 포물면 $z=x^2+y^2$

(2) 평면 $z=-\frac{1}{2}$의 위에 놓여진 원 $x^2+y^2+z^2=9$

제 45강 Stokes' 정리

Stokes' 정리

Stokes' 정리는 Green 정리의 고차원 판(version)으로 간주할 수 있다.

Green 정리		Stokes' 정리
평면상의 영역 D위에서의 이중 적분을 D의 경계 곡선 위에서의 선적분과 연관시킴	$\leftrightarrow$	공간상의 곡면 S위에서의 곡면적분을 S의 경계 곡선 위에서의 선적분과 연관시킴

[복습: 회전과 발산]

$\mathbb{R}^3$상의 벡터장 $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$에 대하여 P, Q, R의 편도함수가 존재할 때, $\mathbf{F}$의 **회전**은 다음과 같이 정의된 $\mathbb{R}^3$상의 벡터장이다.

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$\mathbb{R}^3$상의 벡터장 $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$에 대하여 $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$가 존재할 때, $\mathbf{F}$의 **발산**은 다음과 같이 정의된 삼변수함수이다.

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

[정리: Stokes' 정리]

S는 유한개의 조각마다 매끄러운 유향곡면으로서 그것의 경계 C는 단순 닫힌 유한개의 조각마다 매끄러운 양의 방향을 가지는 곡선이라고 가정하자. 만약 벡터장 $\mathbf{F}$의 성분들이 곡면 S를 포함하는 열린 영역에서 연속인 편도함수를 가진다면 다음이 성립한다.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

[비교] Green 정리: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

예제 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 4y\,\mathbf{k}$와 방향이 바깥쪽으로 향하는 곡면 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0$에 대하여 (1) 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$과 (2) 곡면적분 $\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$를 각각 계산하고 그 값들을 서로 비교하시오.
이때, 곡선 C는 곡면 S의 경계이다.

풀이 (1) 곡선 C는 다음과 같은 벡터 함수로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}\,,\quad 0 \le t \le 2\pi$$

그러면 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = 2\cos t\,\mathbf{j} + 8\sin t\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$ 이다.
따라서

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 + 2\cos(2t))\,dt \\ &= [2t + \sin(2t)]_0^{2\pi} = 4\pi\end{aligned}$$

이다.

(2) 곡면 S는 다음의 벡터방정식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = 2\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{i} + 2\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + 2\cos\phi\,\mathbf{k},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

또한, $\mathrm{curl}\mathbf{F} = 4\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$이다.
그러면

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = 4\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = 4\cos\theta\sin^2\phi\,\mathbf{i} + 4\sin\theta\sin^2\phi\,\mathbf{j} + 4\sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

이므로

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = 16\cos\theta\sin^2\phi + 4\sin\theta\sin^2\phi + 4\sin\phi\cos\phi$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathrm{curl}\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\cos\theta\sin^2\phi + 4\sin\theta\sin^2\phi + 4\sin\phi\cos\phi\;d\phi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\phi\cos\phi\;d\phi\,d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\phi\cos\phi\;d\phi\right) = (2\pi)(2) = 4\pi\end{aligned}$$

유제

벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$와 방향이 아래쪽으로 향하는 곡면 $S: z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$에 대하여, Stokes' 정리를 이용하여 $\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$를 계산하시오.

유제

벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^y\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} + xz\sin y\,\mathbf{k}$와 $xz-$평면에서 시계방향인 곡선 $C: x^2 + z^2 = 4$에 대하여, Stokes' 정리를 이용하여 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$를 계산하시오.

연습문제

1. 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$와 방향이 아래쪽으로 향하는 반구 $S : x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16,\ \ z \le 4$에 대하여, Stokes' 정리를 이용하여 $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$를 계산하시오. 또한, 그 계산 결과를 위의 첫 번째 유제 문제에서 얻은 답과 비교해보고 왜 그러한 결과가 도출되었는지에 대하여 설명하시오.

2. 만약 벡터장 $\mathbf{F}$가 Stokes' 정리의 가정을 만족하고 곡면 S가 구일 때 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

3. 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$와 꼭짓점을 $(\pm1, \pm1, \pm1)$로 가지고 바깥쪽 방향을 향하는 정육면체의 윗면과 네 개의 옆면으로 이루어진 곡면 S에 대하여 다음의 물음에 답하시오.

(1) 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$을 계산하시오. (이때, 곡선 C는 곡면 S의 경계)

(2) 곡면적분 $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$를 계산하시오.

(3) (1)과 (2)의 결과들을 서로 비교함으로써 이때 Stokes' 정리가 성립함을 보이시오.