Econometria e Séries Temporais
- Aula 16 -

Prof. Mestre. Omar Barroso

Instituto Brasileiro de Educação, Pesquisa e Desenvolvimento

Janela “deslizante” ou “Móvel” (Rolling Window)

- Uma regressão de janela móvel é uma técnica em que um modelo de regressão linear é ajustado repetidamente ao longo de uma janela de tempo móvel (móvel), permitindo-nos observar como a relação entre as variáveis dependentes e independentes muda ao longo do tempo.
- Esta técnica aplica um modelo de regressão linear a uma **janela móvel** (subconjunto) de dados. O tamanho da janela determina quantos períodos de tempo são incluídos em cada regressão. O modelo é reestimado conforme a janela "rola" para frente no tempo.

Janela “deslizante” ou “Móvel” (Rolling Window)

- À medida que a janela "rola" para frente no tempo, a regressão é reestimada a cada passo, o que permite a detecção de mudanças nos relacionamentos ao longo do tempo.
- Este método é especialmente útil na análise de dados de séries temporais **não estacionárias**, onde os relacionamentos econômicos podem mudar devido a mudanças estruturais, intervenções políticas ou choques externos.

Janela “deslizante” ou “Móvel” (Rolling Window)

- O tamanho da janela determina quantos períodos de tempo são incluídos em cada regressão. O modelo é reestimado conforme a janela "rola" para frente no tempo.
- Por que essa relação? As relações econômicas/financeiras podem evoluir ao longo do tempo devido a mudanças nas condições econômicas, políticas ou choques externos. Uma regressão de janela móvel ajuda a detectar essas relações que variam com o tempo.

Janela “deslizante” ou “Móvel” (Rolling Window)

- O tamanho da janela determina quantos períodos de tempo são incluídos em cada regressão. O modelo é reestimado conforme a janela "rola" para frente no tempo.
- Por que essa relação? As relações econômicas/financeiras podem evoluir ao longo do tempo devido a mudanças nas condições econômicas, políticas ou choques externos. Uma regressão de janela móvel ajuda a detectar essas relações que variam com o tempo.

Motivações

- **Parâmetros Variáveis no Tempo:** Em muitos contextos de séries temporais, as relações entre variáveis evoluem ao longo do tempo. Uma regressão de janela rolante nos permite estimar essas relações variáveis no tempo ajustando uma série de regressões lineares em diferentes intervalos de tempo.
- **Quebras Estruturais:** Mudanças estruturais, como crises financeiras, mudanças na política monetária, desastres naturais, ou inovações tecnológicas, podem causar mudanças nas relações entre variáveis. Regressões de janela rolante podem ajudar a identificar essas quebras.

Metodologia Matemática da Janela Deslizante

- Considerando um modelo de regressão linear simples, a relação entre a variável dependente Yt e a variável independente Xt é expressa como:
- $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \epsilon_t$

- y_t : A variável dependente em tempo t;
- x_t : A variável independente no tempo t;
- β_0 : O intercepto;
- β_1 : A inclinação do coeficiente Xt;
- ϵ_t : O termo de erro, assumido como uma distribuição normal com média zero e variância constante σ^2.

Metodologia Matemática da Janela Deslizante

- Considerando um modelo de regressão linear simples:
- $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \epsilon_t$
- Em uma regressão deslizante, estimamos a relação entre uma janela de peso w.
- Para cada janela, o subconjunto $\{y_{t-w+1}, y_{t-w+2}, \dots, y_t\}$ é usado para estimar o modelo. À medida que a janela "rola" para a frente, o modelo de regressão é reestimado, fornecendo uma série de estimativas para β_0 e β_1 ao longo do tempo.

Metodologia Matemática da Janela Deslizante

- *Etapas de regressão de janela rolante*
- Escolha o tamanho da janela *w*, que determina quantas observações são usadas em cada regressão.
- Assim, para cada passo ‘t’ , criamos um subconjunto $\{y_{t-w+1}, y_{t-w+2}, \ldots, y_t\}$ para as variáveis dependentes.
- E também criamos um subconjunto $\{x_{t-w+1}, x_{t-w+2}, \ldots, x_t\}$ para variáveis independentes.

Metodologia Matemática da Janela Deslizante

- Para cada passo t, estimar o seguinte modelo usando o subconjunto de dados: $Y_t = \hat{\beta}_0^{(t)} + \hat{\beta}_1^{(t)} X_t + \hat{\varepsilon}_t$

- Os coeficientes estimados $\beta_0^{(t)}$ e $\beta_1^{(t)}$ serão específico para o subconjunto que termina no tempo ‘t’.
- Mova a janela para frente em um passo de tempo, ou seja, a próxima regressão usa o subconjunto $\{y_{t-w+2}, \dots, y_{t+1}\}$ e repita o processo.
- Depois de executar a regressão para cada janela, colete os coeficientes $\beta_0^{(t)}$ e $\beta_1^{(t)}$ estimados para cada janela.

Matemática por Trás da Janela Deslizante

- Dado que temos uma série temporal $\{y_1, y_2, \dots, y_t\}$ para variável dependente e $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ para variável independente.
- Defina o tamanho da janela w, onde w é menor que T, o número total de observações.
- Para cada passo de tempo t começando de w a T.
- Defina o subconjunto de observações como:

$$Y_t^{(w)} = \{Y_{t-w+1}, Y_{t-w+2}, \dots, Y_t\}$$

$$X_t^{(w)} = \{X_{t-w+1}, X_{t-w+2}, \dots, X_t\}$$

Matemática por Trás da Janela Deslizante

- Colocando a regressão linear: $Y_t^{(w)} = \beta_0^{(t)} + \beta_1^{(t)} X_t^{(w)} + \varepsilon_t$

- Aonde os coeficientes $\beta_0^{(t)}$ e $\beta_1^{(t)}$ são os interceptos estimados (deslizantes) e a inclinação da Janela terminando em tempo t.
- Estimando os parâmetros:

$$\hat{\beta}_1^{(t)} = \frac{\sum_{i=t-w+1}^{t} (X_i - \bar{X}_t)(Y_i - \bar{Y}_t)}{\sum_{i=t-w+1}^{t} (X_i - \bar{X}_t)^2}$$

$$\hat{\beta}_0^{(t)} = \bar{Y}_t - \hat{\beta}_1^{(t)} \bar{X}_t$$

Matemática por Trás da Janela Deslizante

- Os coeficientes $\beta_0^{(t)}$ e $\beta_1^{(t)}$ para t-ésima janela podem ser calculados da determinada maneira:

$$\hat{\beta}_1^{(t)} = \frac{\sum_{i=t-w+1}^{t}(X_i - \bar{X}_t)(Y_i - \bar{Y}_t)}{\sum_{i=t-w+1}^{t}(X_i - \bar{X}_t)^2}$$

$$\hat{\beta}_0^{(t)} = \bar{Y}_t - \hat{\beta}_1^{(t)}\bar{X}_t$$

- Aonde $\hat{\beta}_1^{(t)}$ é a razão da amostral entre Xi, Yi e a diferença de Xi e X ao quadrado.

Matemática por Trás da Janela Deslizante

- $\bar{Y}_t$: é a média de $Y_t^{(w)}$ (e.g. a variável dependente da janela).
- $\bar{X}_t$: é a média de $x_t^{(w)}$ (e.g. a variável independente da janela).
- Após estimar $\beta_0^{(t)}$ e $\beta_1^{(t)}$, armazená-los como estimativas contínuas para essa janela.
- Repita esse processo à medida que a janela avança t=w para t=T, produzindo uma série temporal estimada $\beta_0^{(t)}$ e $\beta_1^{(t)}$.

$$\hat{\beta}_1^{(t)} = \frac{\sum_{i=t-w+1}^{t}(X_i - \bar{X}_t)(Y_i - \bar{Y}_t)}{\sum_{i=t-w+1}^{t}(X_i - \bar{X}_t)^2}$$

$$\hat{\beta}_0^{(t)} = \bar{Y}_t - \hat{\beta}_1^{(t)}\bar{X}_t$$

Vamos praticar...

Janela sobre o PIB

- Vamos supor que escolhemos uma janela do tamanho w=20 (representando 20 períodos) e temos dados do PIB Yt e sua defasagem Xt.
- Para t = 20, estimamos uma regressão usando dados dos períodos 1 á 20:

$$Y_{1:20} = \hat{\beta}_0^{(20)} + \hat{\beta}_1^{(20)} X_{1:20} + \hat{\varepsilon}_{1:20}$$

- Para t = 21, estimamos uma regressão usando dados dos períodos 2 a 21:

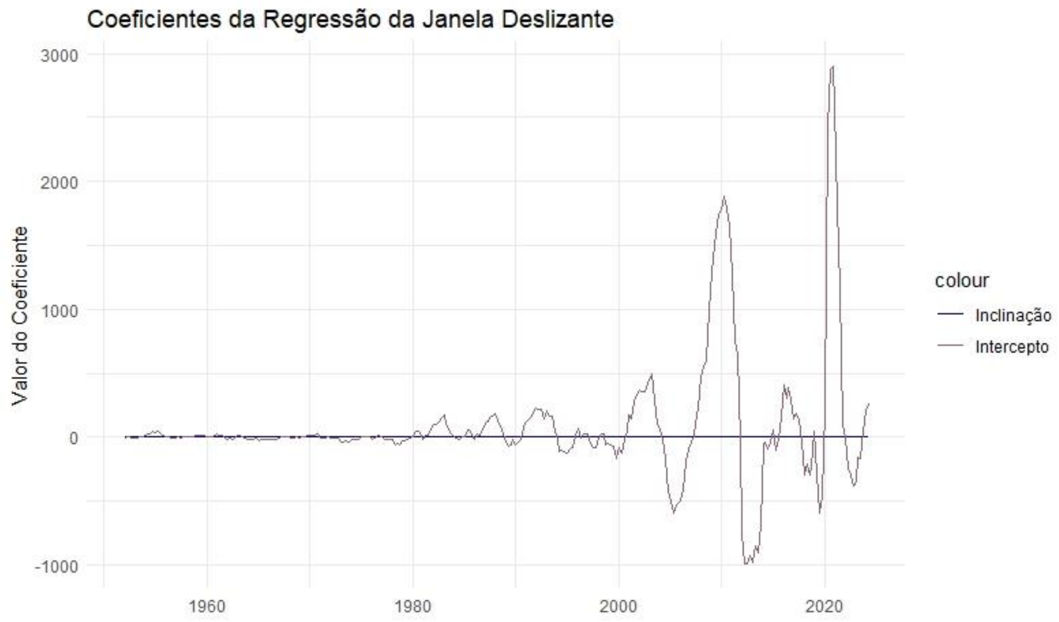
$$Y_{2:21} = \hat{\beta}_0^{(21)} + \hat{\beta}_1^{(21)} X_{2:21} + \hat{\varepsilon}_{2:21}$$

- Esse processo continua para todos os passos, armazenando as estimativas contínuas $\beta_0^{(t)}$ e $\beta_1^{(t)}$ em cada passo.

Janela sobre o PIB (EUA)

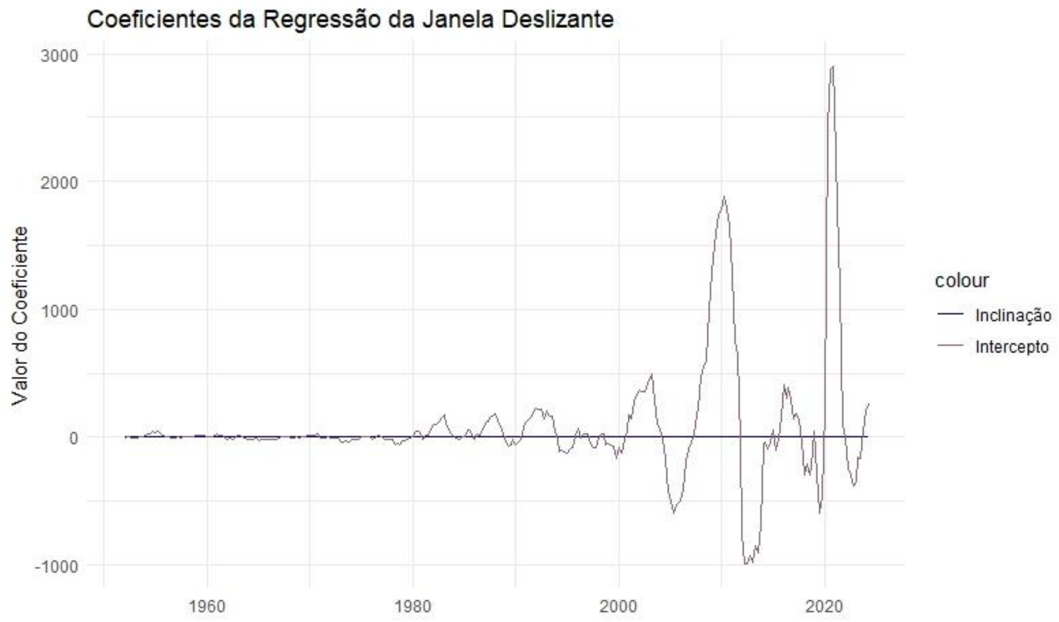
- **Eixo X (Tempo):** O eixo horizontal representa o tempo, abrangendo de aproximadamente a década de 1950 até a década de 2020. Cada ponto no tempo corresponde a uma regressão de janela rolante para aquele período específico.

- **Eixo Y (Valor do Coeficiente):** O eixo vertical representa os valores estimados dos coeficientes de regressão rolante (inclinação e interceptação). A magnitude dos valores nos diz o quanto a variável dependente é afetada pela variável independente em cada ponto no tempo.



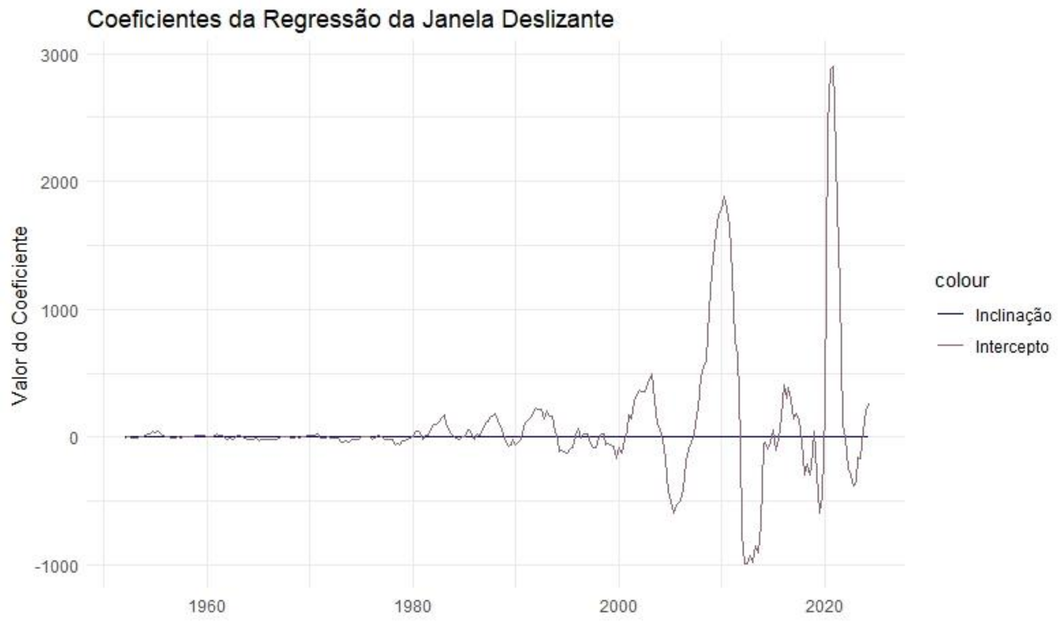
Janela sobre o PIB (EUA)

- A linha rotulada "Inclinação" mostra a inclinação ou a relação entre a variável independente e a variável dependente em cada janela.
- O gráfico mostra que a inclinação permanece relativamente estável perto de zero durante grande parte do período anterior (por volta de 1950 a 1980), significando uma relação mínima ou estável entre as variáveis durante esse tempo.



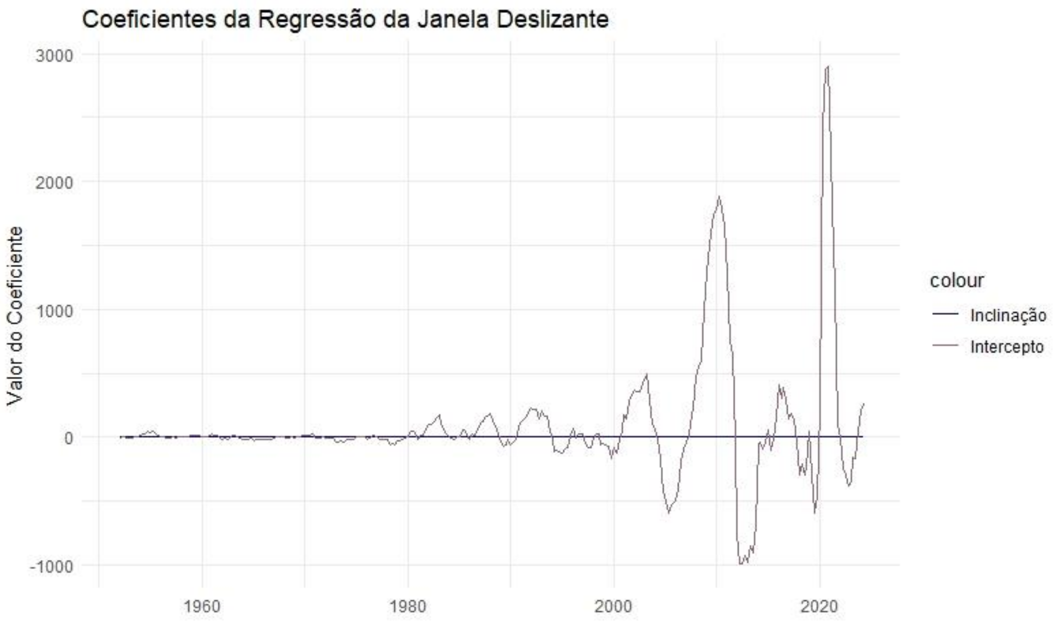
Janela sobre o PIB (EUA)

- No entanto, após 1980, há movimentos bruscos, picos particularmente perceptíveis por volta de 2008 e novamente por volta de 2020. Esses picos podem corresponder a eventos econômicos significativos (por exemplo, crises financeiras, a pandemia de COVID-19), sugerindo que a relação entre as variáveis se tornou muito mais volátil durante esses períodos.



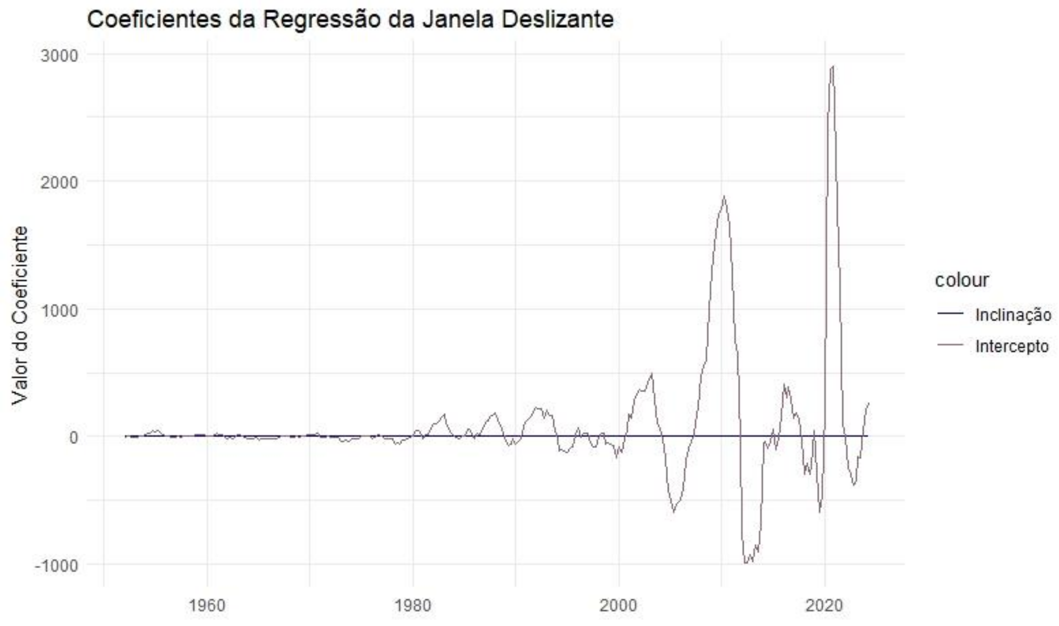
Janela sobre o PIB (EUA)

- A linha "Intercepto" representa o intercepto da regressão, que fornece o nível de base da variável dependente quando a variável independente é zero.
- O intercepto também flutua ao longo do tempo, com aumentos e diminuições perceptíveis, particularmente no período pós-2000. Isso pode indicar mudanças na tendência subjacente da variável dependente ao longo do tempo, especialmente durante choques econômicos.



Janela sobre o PIB (EUA)

- A regressão de janela rolante mostra relações de mudança ao longo do tempo, indicando que os coeficientes do modelo não são estáticos. Este é um sinal de dinâmica variável no tempo, onde grandes eventos (por exemplo, crises financeiras, pandemias) levam a mudanças significativas nos coeficientes.
- O aumento acentuado e a volatilidade nos coeficientes após 2008 e 2020 sugerem a presença de quebras estruturais, destacando a necessidade de diferentes modelos ou parâmetros durante esses períodos.



Vantagens da Janela

- **Detectando relacionamentos que variam com o tempo:** ajuda a capturar relacionamentos em mudança em dados de séries temporais, o que é particularmente útil em economia, finanças e qualquer domínio onde mudanças estruturais são comuns.
- **Flexibilidade:** o tamanho da janela pode ser ajustado para explorar variações de curto ou longo prazo.
- **Insights sobre quebras estruturais:** mudanças repentinas nos coeficientes estimados podem sinalizar quebras estruturais ou mudanças de regime.

Limitações

- **Tamanho de janela fixa:** a escolha do tamanho da janela é subjetiva e pode afetar os resultados.
- Perda de dados: quanto maior o tamanho da janela, menor o número de regressões que podem ser realizadas (já que você perde observações iniciais).
- **Interpretabilidade:** se os coeficientes mudarem drasticamente ao longo do tempo, interpretar os resultados pode ser desafiador.

Exercícios para praticar...

- Escolha uma base de dados de sua preferência e rascunhe um modelo de regressão com janela sobre “t” períodos.
- Escolha a janela w de acordo com sua pergunta de pesquisa.
- Replique a regressão de rolagem no R de acordo com os códigos fornecidos.

Referências

Diebold, F. X., and Mariano, R. S. (1995), Comparing Predictive Accuracy, Journal of Business and Economic Statistics, 13, 130-141

Diebold, F. X., and Mariano, R. S. (2015), Comparing Predictive Accuracy, Twenty Years Later: A Personal Perspective on the Use and Abuse of Diebold–Mariano Tests, Journal of Business and Economic Statistics, 33, 1-9

Elliott, G., and Timmermann, A. (2016), Economic Forecasting, Princeton University Press. (Ch 2, Ch16, Ch17)

Giacomini, F., and White, H. (2006), Tests of Conditional Predictive Ability, Econometrica 74, 1545–78

West, K. D. (1996), Asymptotic Inference About Predictive Ability, Econometrica, 64, 1067–1084.