

# Econometria e Séries Temporais - Aula(s) 10/11 -

Prof. Mestre. Omar Barroso

Instituto Brasileiro de Educação, Pesquisa e Desenvolvimento

# Cointegração

- Cointegração em econometria se refere a uma relação estatística entre **duas ou mais variáveis** de séries temporais, indicando que, embora essas variáveis **possam ser não estacionárias individualmente** (ou seja, suas médias, variâncias e covariâncias mudam ao longo do tempo), uma combinação linear delas é estacionária (ou seja, sua relação é estável ao longo do tempo).
- A cointegração sugere uma relação de **equilíbrio de longo prazo** entre as variáveis, mesmo que elas se desviem umas das outras no curto prazo.

# Teoria

- Ou seja, quando  $X_t$  e  $Y_t$  são  $I(1)$  e temos um  $\theta$  no qual  $Y_t - \theta X_t$  é  $I(0)$ ,  $X_t$  e  $Y_t$  são cointegrados.
- Em outras palavras, a Cointegração de  $X_t$  e  $Y_t$  significa que  $X_t$  e  $Y_t$  seguem uma tendência estocástica similar.
- Dessa forma, a tendência pode ser eliminada com uma diferença específica da série no qual a série resultante será estacionária.

# Teoria (Não estacionariedade e raízes unitárias)

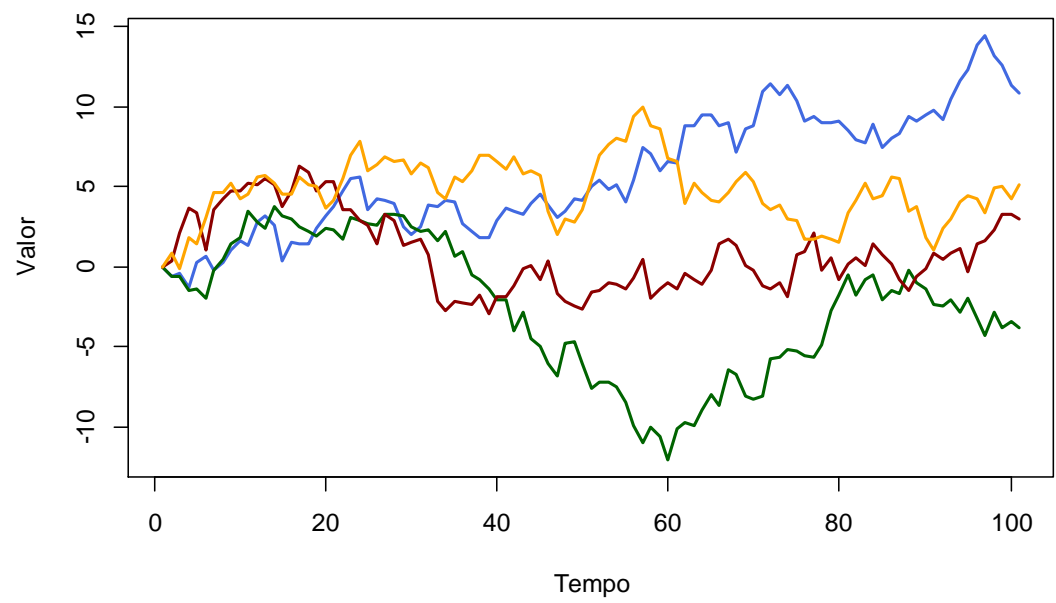
- Uma série temporal é não estacionária se suas propriedades estatísticas, como média e variância, mudam ao longo do tempo. Muitas séries temporais econômicas, como PIB, preços de ações ou taxas de câmbio, exibem tendências ou mudanças persistentes, tornando-as não estacionárias. Um teste de raiz unitária (ADF ou teste de Chow) pode confirmar se uma série é não estacionária testando se a série pode ser diferenciada para se tornar estacionária.

# Teoria (Problema de Regressão Espúria)

- Quando séries temporais não estacionárias são usadas na análise de regressão sem abordar sua não estacionariedade, os resultados podem ser enganosos ou "espúrios". Ou seja, mesmo que não haja uma relação significativa, a regressão pode sugerir alta correlação ou significância simplesmente devido ao comportamento de tendência das variáveis. É aqui que a cointegração entra para resolver o problema.

# Teoria (Equilíbrio de Longo Prazo)

- Quando duas ou mais variáveis não estacionárias são cointegradas, isso significa que, apesar de suas caminhadas aleatórias individuais, elas compartilham uma tendência estocástica comum. Existe uma combinação linear dessas variáveis que é estacionária, sugerindo que elas se movem juntas no longo prazo e quaisquer desvios dessa relação acabarão se corrigindo. Isso implica uma relação de equilíbrio de longo prazo entre as variáveis.



# Teoria (Equilíbrio de Longo Prazo)

- Se duas séries  $X_t$  e  $Y_t$  são cointegradas, a série é obtida pela diferença entre  $y_t - \theta x_t$  que deve ser estacionária.
- Se a série não é cointegrada,  $y_t - \theta x_t$  é não estacionária. Essa suposição pode ser testada com um teste de raiz unitária.

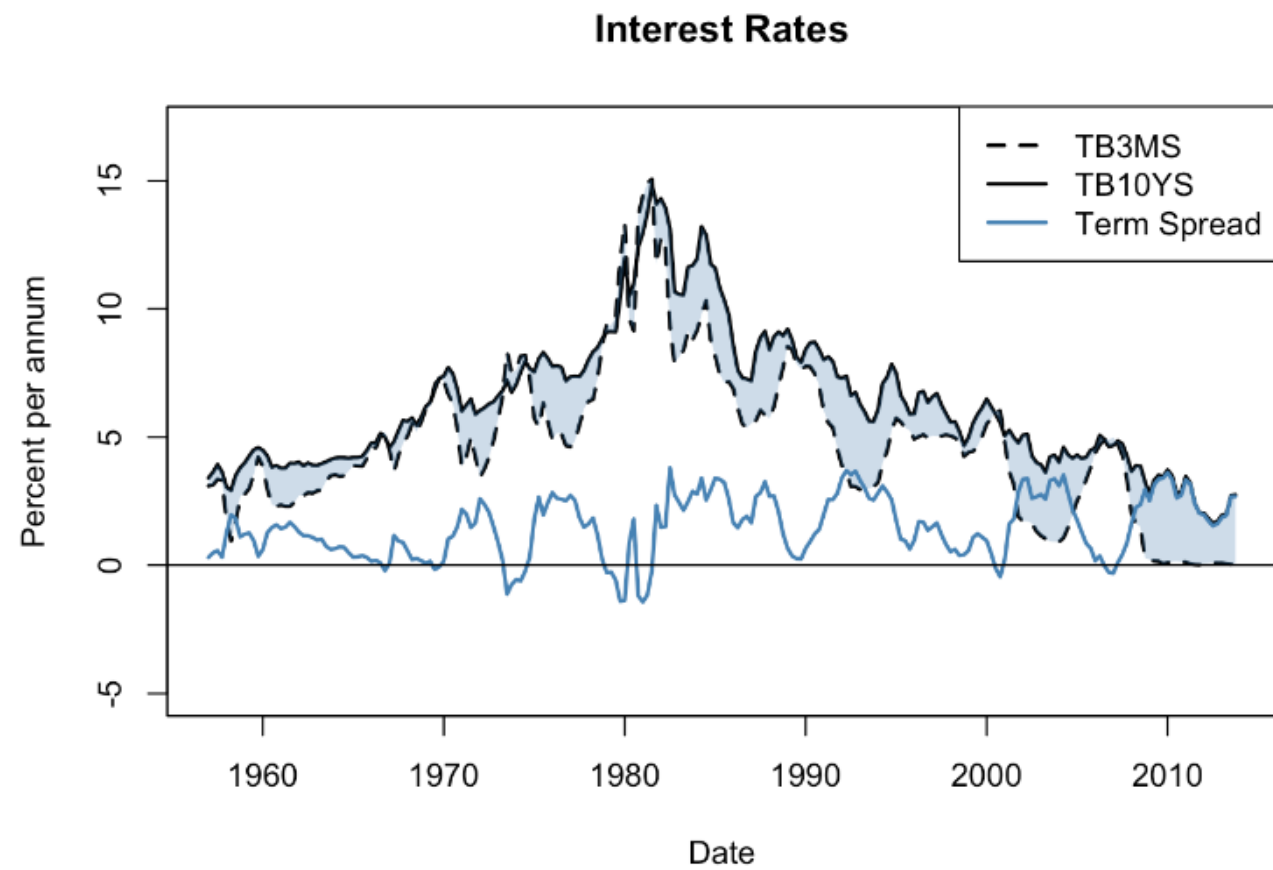


# Teoria (Equilíbrio de Longo Prazo)

- 1. Se  $\theta$  é “conhecido”.
- Isso nos possibilita em computar as diferenças  $z_t = y_t - \theta x_t$  assim os testes de raiz unitária podem ser aplicados para o  $z_t$ . Utilizaremos os valores críticos do ADF.

# Teoria (Equilíbrio de Longo Prazo)

- 2. Se  $\theta$  é desconhecido.
- Devemos refinar a série para os testes de raiz unitária.
- usando OLS (isso é chamado de regressão de primeiro estágio). Então, um teste Dickey-Fuller é usado para testar a hipótese de que é uma série não estacionária.
- $y_t = \alpha + \theta x_t + z_t$



Fonte: Econometrics with R

# Teoria (Mecanismo de Correção de Erros)

- Na presença de cointegração, um mecanismo de correção de erros (ECM) pode ser empregado para modelar tanto a dinâmica de curto prazo quanto o equilíbrio de longo prazo.
- O ECM considera desvios do equilíbrio (ou seja, quando as variáveis divergem de sua relação cointegrada) e ajusta a dinâmica de curto prazo de acordo. Isso permite a incorporação de relações de equilíbrio de longo prazo em modelos de curto prazo.

# Teoria (Mecanismo de Correção de Erros)

- Se duas  $I(1)$  séries temporais  $X_t$  e  $Y_t$  são cointegradas, suas diferenças são estacionárias e podem ser modeladas em um VAR no qual é augmentado pelo regressor  $y_{t-1} - \theta x_{t-1}$ .
- Esse método é conhecido como o Vetor de Erro de Correção do Modelo (**VECM** - Vector Error Correction Model).
- Nesse caso  $y_{t-1} - \theta x_{t-1}$  é o termo de erro a ser corrigido.
- Valores defasados dos termos de erro corrigidos são importantes para prever  $\Delta x_t$  e/ou  $\Delta y_t$ .

# Teoria (testes)

- **Método de duas etapas de Engle-Granger:** Primeiro, uma regressão é estimada entre as variáveis não estacionárias para verificar um equilíbrio de longo prazo. Se os **resíduos** dessa regressão forem **estacionários**, as variáveis são ditas **cointegradas**. A segunda etapa envolve modelar a dinâmica de curto prazo com um ECM.
- **Teste de Johansen:** Esta é uma abordagem multivariada mais sofisticada para testar a cointegração, particularmente útil ao lidar com múltiplas variáveis. O método de Johansen estima o número de relacionamentos de cointegração e fornece uma estrutura mais formal para lidar com múltiplas séries temporais.

Vamos praticar

# Taxa de Juros e Tesouro EUA (10 anos)

- Primeiro vamos realizar o teste de ADF para conferir a estacionariedade das duas séries.
- Para o tesouro americano, Podemos perceber que o teste t, demonstra um valor de -1.560 (z.lag.1).
- Como a estatística de teste ADF **-1,5604** é maior que os valores críticos em todos os níveis (mesmo o nível menos estrito de 10%, que é -2,57), falhamos em rejeitar a hipótese nula de que a série tem uma raiz unitária. Isso implica que a série GS10 é não estacionária.

```
Test regression drift

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.66003 -0.12754 -0.00209  0.12684  1.50950

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.026899   0.020339   1.323   0.186
z.lag.1      -0.004909   0.003146  -1.560   0.119
z.diff.lag    0.308826   0.033944   9.098 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.255 on 787 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.09628,    Adjusted R-squared:  0.09399
F-statistic: 41.92 on 2 and 787 DF,  p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -1.5604 1.2312

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.43 -2.86 -2.57
phi1  6.43  4.59  3.78
```



# Taxa de Juros e Tesouro EUA (10 anos)

- Para a taxa de juros...
- A estatística de teste  $-2,8574$  é ligeiramente maior que o valor crítico no nível de 5%, mas menor que o valor crítico no nível de 10%. Como ela quase não atinge o limite de 5%, mas passa do nível de 10%, você pode concluir cautelosamente que a Federal Funds Rate é fracamente estacionária no nível de significância de 10%, mas ainda não estacionária em níveis mais rigorosos (1% e 5%).

```
Test regression drift

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.66003 -0.12754 -0.00209  0.12684  1.50950

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.026899   0.020339   1.323   0.186
z.lag.1     -0.004909   0.003146  -1.560   0.119
z.diff.lag   0.308826   0.033944   9.098 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.255 on 787 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.09628,    Adjusted R-squared:  0.09399
F-statistic: 41.92 on 2 and 787 DF,  p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -1.5604 1.2312

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.43 -2.86 -2.57
phi1  6.43  4.59  3.78
```

# Valores Críticos teste t

- 1%: -3.43
- 5%: -2.86
- 10%: -2.57

# Taxa de Juros e Tesouro EUA (10 anos)

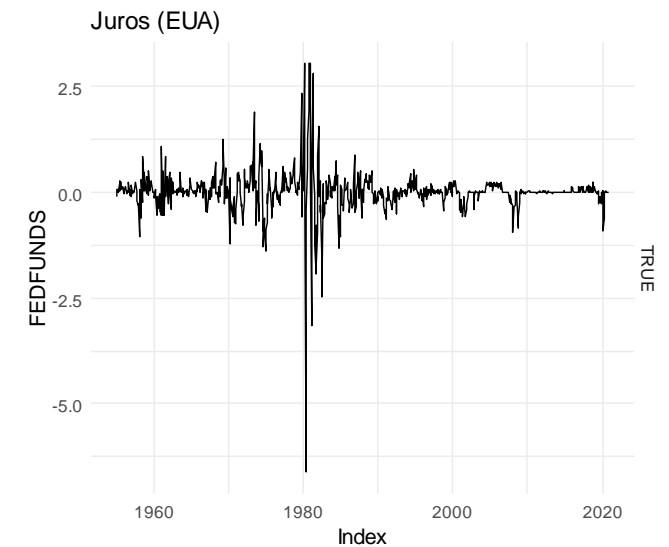
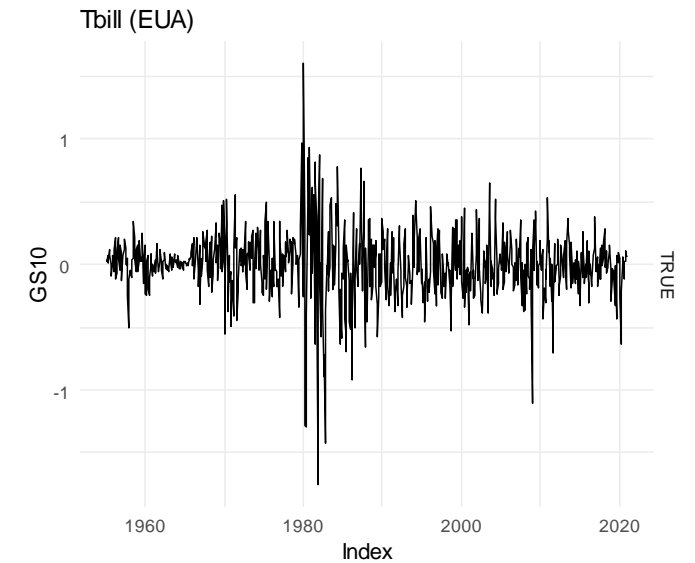
- A série GS10 é claramente não estacionária (possui uma raiz unitária), pois a estatística de teste ADF não rejeita a hipótese nula de uma raiz unitária em nenhum nível de significância padrão.
- A série FEDFUNDS parece ser fracamente estacionária no nível de significância de 10%, mas é não estacionária nos níveis de significância de 5% e 1%.

# Taxa de Juros e Tesouro EUA (10 anos)

- Como ambas as séries são não estacionárias ou fracamente estacionárias, devemos considerar o seguinte:
- **Diferenciação:** diferenciar ambas as séries para torná-las estacionárias.
- **Teste de cointegração:** dado que ambas as séries são não estacionárias (ou quase isso), podemos prosseguir para testar a cointegração entre elas usando o teste de Johansen. Se a cointegração estiver presente, um VECM pode ser aplicado para capturar a relação de longo prazo entre as duas taxas de juros.

# Testes Após a Diferenciação

- Pelo “olhômetro” podemos dizer que aparentemente as séries seguem um padrão estacionário agora.
- Porém, devemos seguir com as nossas formalidades para verificar se de fato isso acontece!



# Testes Após a Diferenciação

- Ambos os testes ADF sugerem que as séries diferenciadas para GS 10 e FED FUNDS são estacionárias. Aqui está o porquê:
- 1. GS10:
- - Estatística de teste: -20,3822
- - Valores críticos: para significância de 1%, o valor crítico é -3,43.
- - Como a estatística de teste (-20,38) é muito menor que o valor crítico (-3,43), \*\*rejeitamos a hipótese nula\*\*, indicando que a série GS10 diferenciada é estacionária.

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.6166 -0.1277 -0.0020  0.1352  1.4067

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.001863   0.008902  -0.209   0.834
z.lag.1      -0.838134   0.041121 -20.382 < 2e-16 ***
z.diff.lag    0.207227   0.034897   5.938 4.32e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.25 on 786 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3751,    Adjusted R-squared:  0.3736
F-statistic: 235.9 on 2 and 786 DF,  p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -20.3822 207.7167

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.43 -2.86 -2.57
phi1  6.43  4.59  3.78
```

# Testes Após a Diferenciação

- 2. FEDFUNDS:
- - **\*\*Estatística de teste\*\***: -18,2287
- - **\*\*Valores críticos\*\***: Para significância de 1%, o valor crítico é -3,43.
- - Da mesma forma, a estatística de teste (-18,23) é menor que o valor crítico (-3,43), então **\*\*rejeitamos a hipótese nula\*\*** aqui também, indicando que a série FEDFUNDS diferenciada é estacionária.

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-6.3368 -0.0887  0.0057  0.1092  2.9302

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.001181   0.016183  -0.073   0.942
z.lag.1      -0.713435   0.039138 -18.229 < 2e-16 ***
z.diff.lag    0.156188   0.035229   4.433 1.06e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.4546 on 786 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3254,    Adjusted R-squared:  0.3237
F-statistic: 189.6 on 2 and 786 DF,  p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -18.2287 166.1434

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.43 -2.86 -2.57
phi1  6.43  4.59  3.78
```

# Teste de Johansen

- **Resultados da estatística de rastreamento:** O teste é baseado na estatística de rastreamento, que ajuda a determinar o número de relacionamentos de cointegração ( $r$ ) entre as séries (GS10 e FEDFUNDS).
- $r = 0$  (hipótese nula: sem cointegração): Estatística do teste: 45,12. Valores críticos: No nível de significância de 5%, o valor crítico é 19,96.
- Como a estatística do teste (45,12) é maior que o valor crítico (19,96), rejeitamos a hipótese nula de nenhuma cointegração.
- Isso sugere que há pelo menos um relacionamento de cointegração entre as séries GS10 e FEDFUNDS.  $r \leq 1$  (hipótese nula: no máximo uma cointegração):

Test type: trace statistic , without linear trend and constant in cointegration

Eigenvalues (lambda):

[1] 5.149246e-02 4.233218e-03 4.152245e-19

Values of teststatistic and critical values of test:

	test	10pct	5pct	1pct
$r \leq 1$		3.35	7.52	9.24 12.97
$r = 0$		45.12	17.85	19.96 24.60

Eigenvectors, normalised to first column:

(These are the cointegration relations)

	GS10.I2	FEDFUNDS.I2	constant
GS10.I2	1.0000000	1.0000000	1.0000000
FEDFUNDS.I2	-0.8951933	-0.05012499	-0.3467149
constant	-1.5119701	-5.35734099	-29.3005011

Weights W:

(This is the loading matrix)

	GS10.I2	FEDFUNDS.I2	constant
GS10.d	-0.01837585	-0.005499475	-1.545616e-18
FEDFUNDS.d	0.05636722	-0.006883044	4.653350e-18



# Teste de Johansen

- **Estatística do teste:** 3,35 Valores críticos: No nível de significância de 5%, o valor crítico é 9,24.
- Como a estatística de teste (3,35) é menor que o valor crítico (9,24), não conseguimos rejeitar a hipótese nula. Isso sugere que há apenas uma relação de cointegração.
- **Conclusão do teste de Johansen:** Há uma relação de cointegração entre as séries GS10 e FEDFUNDS, indicando que essas duas séries compartilham uma relação de equilíbrio de longo prazo, apesar do desvio de curto prazo.

Test type: trace statistic , without linear trend and constant in cointegration

Eigenvalues (lambda):

[1] 5.149246e-02 4.233218e-03 4.152245e-19

Values of teststatistic and critical values of test:

	test	10pct	5pct	1pct
r <= 1		3.35	7.52	9.24 12.97
r = 0		45.12	17.85	19.96 24.60

Eigenvectors, normalised to first column:

(These are the cointegration relations)

	GS10.I2	FEDFUNDS.I2	constant
GS10.I2	1.0000000	1.00000000	1.0000000
FEDFUNDS.I2	-0.8951933	-0.05012499	-0.3467149
constant	-1.5119701	-5.35734099	-29.3005011

Weights W:

(This is the loading matrix)

	GS10.I2	FEDFUNDS.I2	constant
GS10.d	-0.01837585	-0.005499475	-1.545616e-18
FEDFUNDS.d	0.05636722	-0.006883044	4.653350e-18

# VECM

- Isso significa que as mudanças em GS10 e FEDFUNDS seguem essa relação de equilíbrio de longo prazo. Uma mudança em uma variável será seguida por um ajuste na outra para manter esse equilíbrio.
- Matriz de Carregamento (Pesos W):
- A matriz de carregamento indica o quanto fortemente cada variável se ajusta para restaurar o equilíbrio quando há um desvio:
- **GS10.d (primeira linha):** A velocidade de ajuste para GS10 é -0,0184, sugerindo que GS10 responde muito lentamente a desvios do equilíbrio de longo prazo.
- **FEDFUNDS.d (segunda linha):** A velocidade de ajuste para FEDFUNDS é 0,056, indicando que FEDFUNDS se ajusta mais rápido que GS10 para corrigir desvios do equilíbrio.

$$GS10_{t-2} - 0.895 \cdot FEDFUNDS_{t-2} - 1.511 \cdot \text{constant} = 0$$

Test type: trace statistic , without linear trend and constant in cointegration

Eigenvalues (lambda):

[1] 5.149246e-02 4.233218e-03 4.152245e-19

Values of teststatistic and critical values of test:

	test	10pct	5pct	1pct
r <= 1		3.35	7.52	9.24 12.97
r = 0		45.12	17.85	19.96 24.60

Eigenvectors, normalised to first column:  
(These are the cointegration relations)

	GS10.I2	FEDFUNDS.I2	constant
GS10.I2	1.0000000	1.00000000	1.0000000
FEDFUNDS.I2	-0.8951933	-0.05012499	-0.3467149
constant	-1.5119701	-5.35734099	-29.3005011

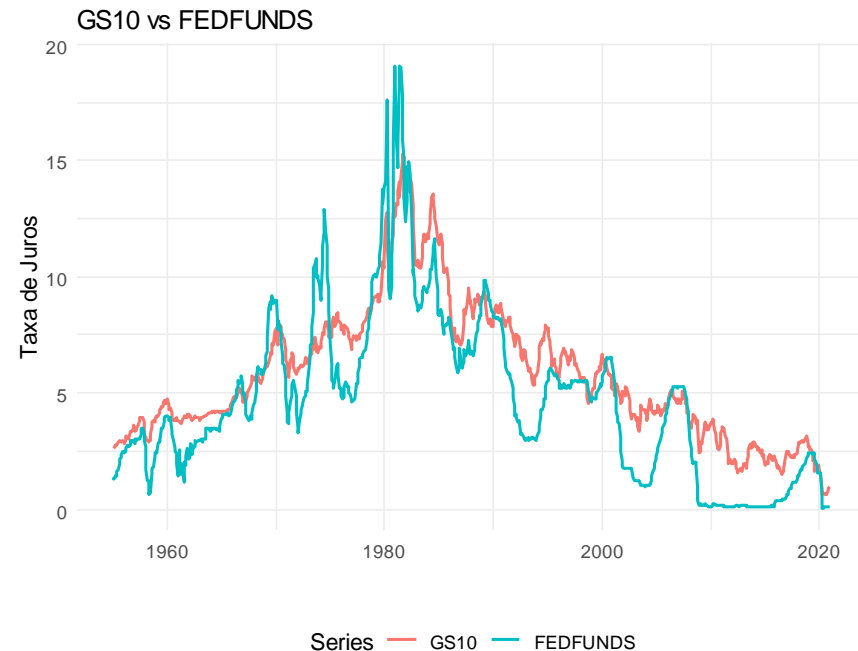
Weights W:

(This is the loading matrix)

	GS10.I2	FEDFUNDS.I2	constant
GS10.d	-0.01837585	-0.005499475	-1.545616e-18
FEDFUNDS.d	0.05636722	-0.006883044	4.653350e-18

# Visualização

- Os testes conferem a relação das duas séries temporais a serem comparadas.
- Podemos perceber que apesar de algumas divergências a curto prazo, ambas as séries tendem a “caminhar” para o mesmo local durante o longo prazo.



# Bibliografia/Referência

- Engle, Robert, and Clive Granger. 1987. "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing." *Econometrica* 55 (2): 251–76.