Mini curso de Probabilidade e Estatística

Por tutor Mestre Omar Barroso Khodr

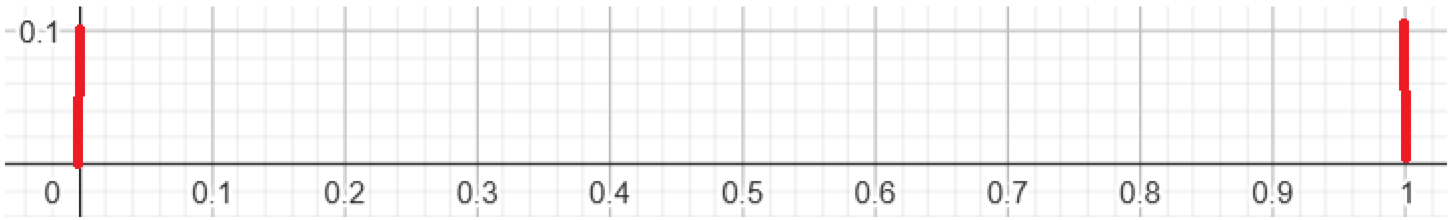
- Aula 3: Fundamentos de probabilidade
- Experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos
- Definição clássica, *frequentista* e axiomática de probabilidade
- Probabilidade condicional e independência

Eventos

- Usaremos o termo “evento” para descrever a ocorrência ou não ocorrência de uma propriedade do resultado de um experimento (quantas moedas honestas foram lançadas; quantos jogos de futebol foram realizados no campeonato brasileiro; Dias da semana/meses/anos; entre outras).
- Frequentemente denotamos tal evento por uma letra, então, por exemplo, podemos falar do evento A_1 (como o evento ocorrido no tempo 1); A_2 (ocorrido no tempo 2); e, assim subsequentemente...
- Desse mesmo modo podemos denotar eventos de maneiras diferentes, por exemplo, evento ‘A’; ‘B’; ‘C’; e assim por diante.

Eventos Certos e Impossíveis

- Lembrando nosso axioma mais importante, **1. Não Negatividade** $\boldsymbol{P(A) \geq 0}$
- Para algum experimento, seja A um evento cuja ocorrência é certa, e seja C um evento impossível.
- Então dizemos que P(A) = 1, e P(C) = 0.
- Lembre do eixo X, a probabilidade deve ficar dentro desse limite:



Eventos Mutuamente Exclusivos e Adição

- Suponha que os eventos , $D_1 \ldots, D_k$ sejam mutuamente exclusivos, o que significa que no máximo um dos eventos D_i pode ocorrer.
- Seja A o evento em que um dos $D_1 \ldots, D_k$ ocorre.
- Isso significa que, se qualquer um dos eventos D1, . . . , Dk ocorrer, por definição, A ocorre.
- Então: $P(A) \;=\; P(D1) + \ldots + P(Dk)$.

Eventos Mutuamente Exclusivos

- 1. **Lançamento de uma moeda:** Os eventos "sair cara" e "sair coroa" são mutuamente exclusivos, pois uma moeda não pode mostrar ambos os lados ao mesmo tempo em um único lançamento.
- 2. Ao lançar um dado de seis faces, os eventos "sair 2" e **Resultado de um dado:** "sair 5" são mutuamente exclusivos, já que o dado só pode mostrar um número por vez.
- 3. **Escolha de uma única carta:** Se você retirar uma carta de um baralho, os eventos "a carta ser um Ás" e "a carta ser um Rei" são mutuamente exclusivos, pois uma única carta não pode ser ambas ao mesmo tempo.
- 4.**Ganhador de uma eleição:** Em uma eleição onde há dois candidatos, os eventos "Candidato A vencer" e "Candidato B vencer" são mutuamente exclusivos, pois apenas um deles pode ganhar.

Eventos Mutuamente Exclusivos (Axioma)

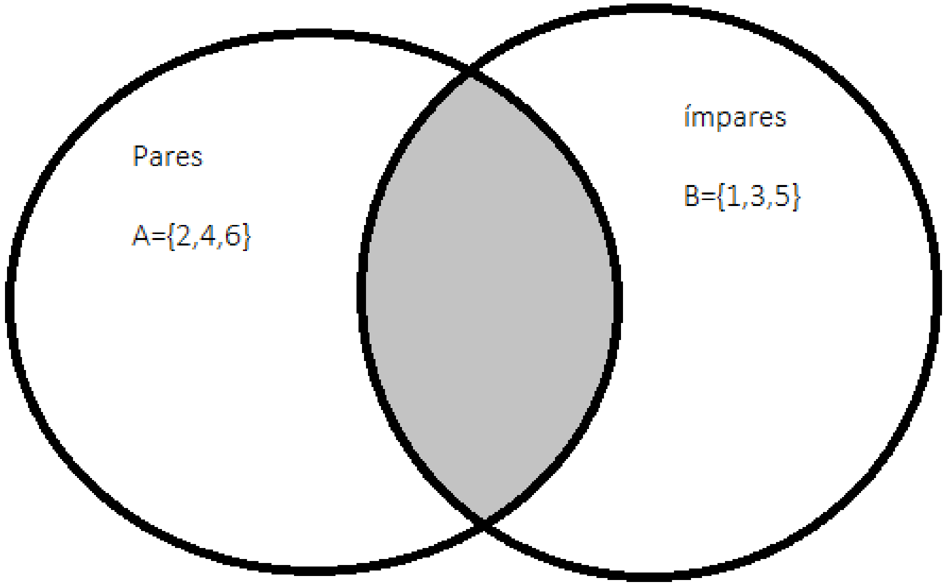
- Quando dois eventos ("A" e "B") são Mutuamente Exclusivos, é impossível que ocorram juntos:
- P(A e B) = 0
- "A probabilidade de A e B juntos é igual a 0 (impossível)“.
- **Exemplo:** Em um baralho, uma carta não pode ser um Rei E uma Rainha ao mesmo tempo!
- A probabilidade de um Rei e uma Rainha é 0 (Impossível).

Soma de eventos individuais

- Cenário: Jogando um Dado Justo de Seis Lados
- Considere jogar um dado padrão de seis lados. Os resultados possíveis são:
- S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Definindo dois eventos mutuamente exclusivos:
- Evento A: Tirar um número par → {2, 4, 6}
- Evento B: Tirar um número ímpar → {1, 3, 5}

Soma de eventos individuais

- Jogando um dado justo, podemos conseguir a probabilidade de um evento par **E** ímpar?
- Não, pois é impossível. Dado que: $A \cap B = \emptyset$



Elaborado pelo autor

Soma de eventos individuais

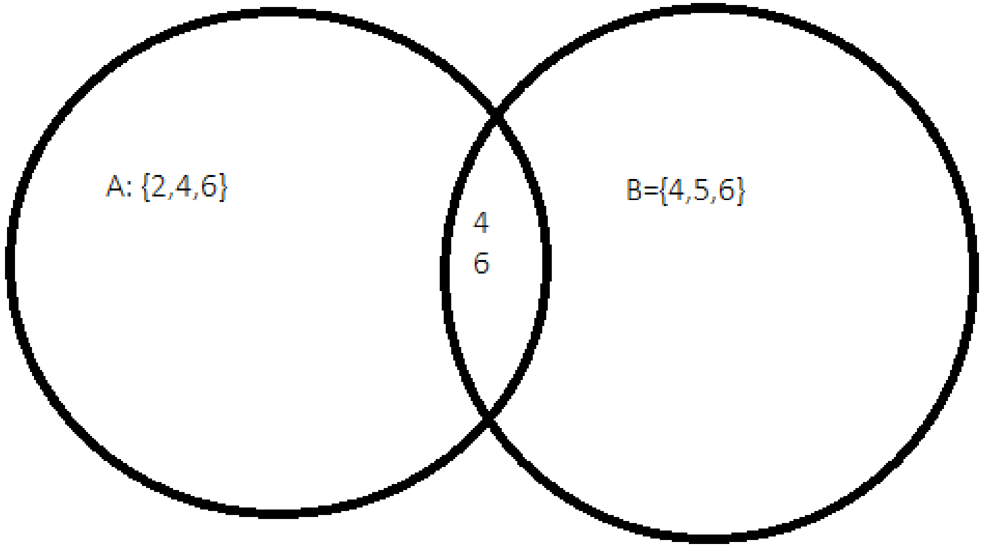
- Como A e B são mutuamente exclusivos, a probabilidade de A ou B ocorrer é a soma de suas probabilidades individuais:
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Ou seja,
- $P(A) = \{2,4,6\} \equiv \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \equiv 0.5$
- $P(B) = \{1,3,5\} \equiv \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \equiv 0.5$
- $\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Eventos Não Mutuamente Não Exclusivos

- Exemplos:
- 1. Tirar uma carta do baralho
- Evento A: Tirar um Rei (4 cartas possíveis: ♠K, ♥K, ♦K, ♣K)
- Evento B: Tirar uma carta de Copas (13 cartas possíveis: ♥A, ♥2, ..., ♥K)
- Por que não mutuamente exclusivos?
- O Rei de Copas (♥K) satisfaz ambos os eventos.
- Portanto, $A \cap B = \{♥K\} \neq \emptyset$.

Eventos Mutuamente Não Exclusivos

- 2. Jogando um Dado de Seis Faces
- Evento A: Tirar um número par (2, 4, 6)
- Evento B: Tirar um número > 3 ; nesse caso: (4, 5, 6)
- Por que não mutuamente exclusivos?
- Os números 4 e 6 satisfazem ambos os eventos.
- Assim, $A \cap B = \{4, 6\} \neq \emptyset$.



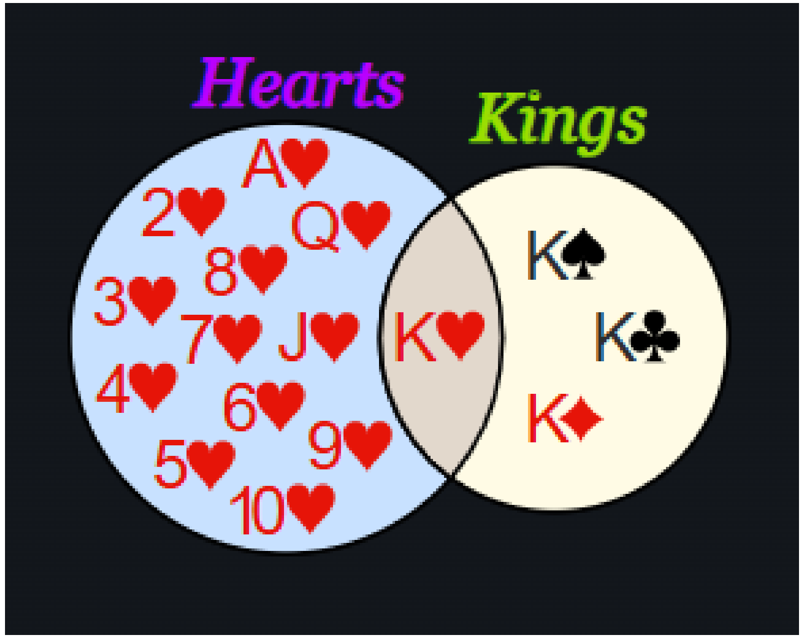
Elaborado pelo autor

Eventos Não Mutuamente Exclusivos

- 3. Selecionando um Aluno de uma Turma
- Evento A: O aluno é formado em matemática.
- Evento B: O aluno está na equipe de debate.
- Por que não mutuamente exclusivos?
- Um aluno pode ser formado em matemática e participar da equipe de debate.
- Portanto, $A \cap B \neq \emptyset$.

Visualizando ...

- Copas e Reis (Kings ou K)
- Nesse caso, uma copa que é rei (K), existe apenas 1 elemento. Em outras palavras, ele está inserido na intercessão.
- todos os Copas (13 deles).
- todos os Reis (4 deles).



Fonte: Math Is Fun

Exercício

- Em uma sala, 16 pessoas estudam francês, 21 estudam espanhol e há 30 pessoas no total.
- Nesse caso, este é um evento mutualmente exclusivo?

Exercício

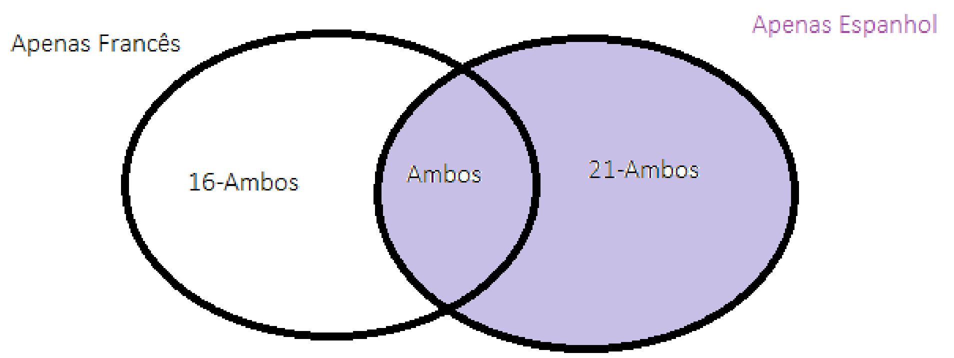
- Em uma sala, 16 pessoas estudam francês, 21 estudam espanhol e há 30 pessoas no total.
- Nesse caso, este é um evento mutualmente exclusivo?
- Não! Pois existe a possibilidade de um grupo de pessoas estudarem francês e espanhol.
- Ou seja, $P(F \cap E)$.

Exercício

- Em uma sala, 16 pessoas estudam francês, 21 estudam espanhol e há 30 pessoas no total.
- Nesse contexto...
- Nosso espaço amostral ou Ω é 30, pois é o total de pessoas.
- Assim podemos deduzir que...
- P(francês) = 16/30
- P(espanhol)= 21/30
- Porém, como encontramos $P(F \cap E)$?

Exercício

- Vamos designar "ambos" como aqueles que estudam francês e espanhol.
- Assim, vamos isolar o número dos alunos que estudam APENAS uma língua.
- Pessoas que estudam APENAS francês deve ser 16 – ambos.
- Pessoas que estudam APENAS espanhol dever 21 - ambos.

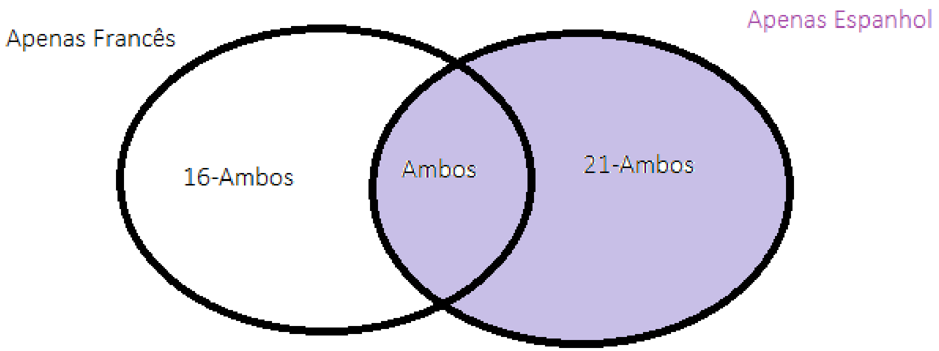


Elaborado pelo autor

Exercício

- Lembrando que nosso $\Omega = 30$.
- $16 + 21 = 37$
- $37 - \text{Ambos} = 30$
- Ambos = 7
- De outra maneira,
- $P(F)=16$
- $P(E)=21$
- $P(F)+P(E) = P(F \cup E) = 16+21 = 37$

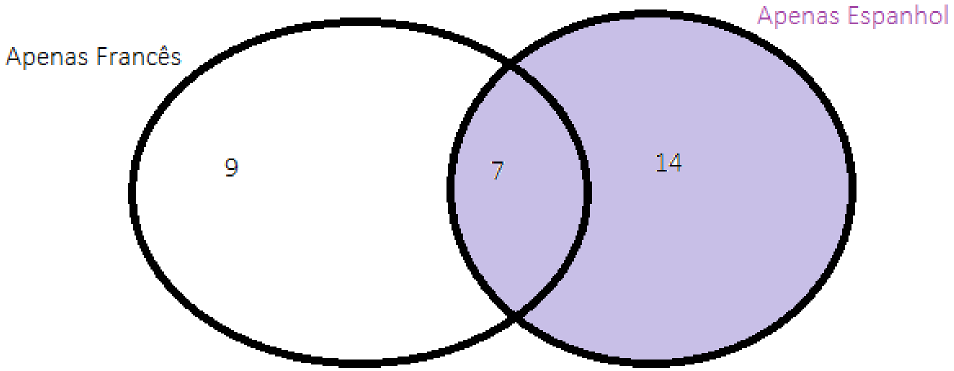
...



Elaborado pelo autor

Exercício

- P(F)+P(E) = P(F U E) = 16+21 = 37
- $P(F \cup E) - P(F \cap E) = \Omega \ \rightarrow$
  $37 - P(F \cap E) = 30 \ \rightarrow$
  $P(F \cap E) = 30 - 37 = 7$



Elaborado pelo autor

Fórmula para eventos mutuamente não exclusivos

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \ \cap B)$

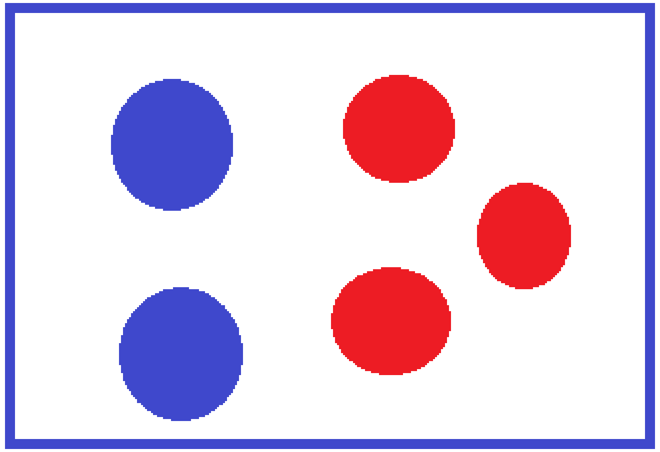
Probabilidade Condicional

- Vimos que eventos mutuamente exclusivos (ou independentes), são eventos no qual o resultado de um evento não afeta o outro.
- Nesse mesmo contexto, eventos mutuamente não exclusivos podem ser dependentes. Deste modo, condições prévias podem afetar o resultado final da probabilidade.
- Por essa lógica, na probabilidade condicional o que ocorre é que uma ação anterior afetará os resultados da próxima ação e assim por diante.

Probabilidade Condicional (exemplo)

- Há 2 bolinhas azuis e 3 vermelhas em um saco.
- Qual é probabilidade de obter uma bolinha azul?

S=

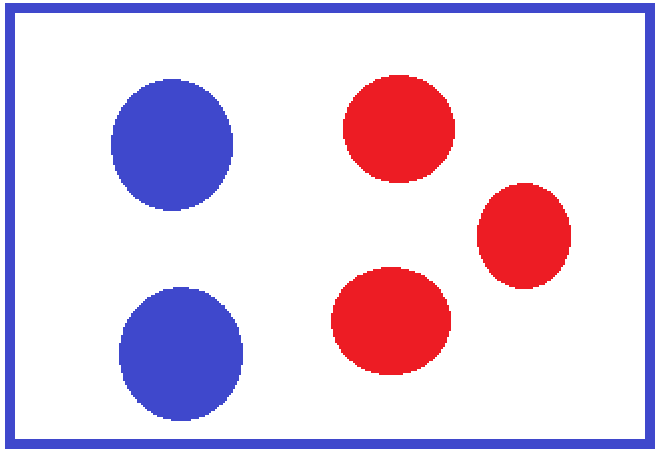


Elaborado pelo autor

Probabilidade Condicional (exemplo)

- Há 2 bolinhas azuis e 3 vermelhas em um saco.
- Qual é probabilidade de obter uma bolinha azul?
- A probabilidade é: P(A) = 2/5 ou 0.4
- No próximo passo, qual é a probabilidade de obter uma bolinha azul dado que tiramos a primeira e não colocamos ela de volta?

S=

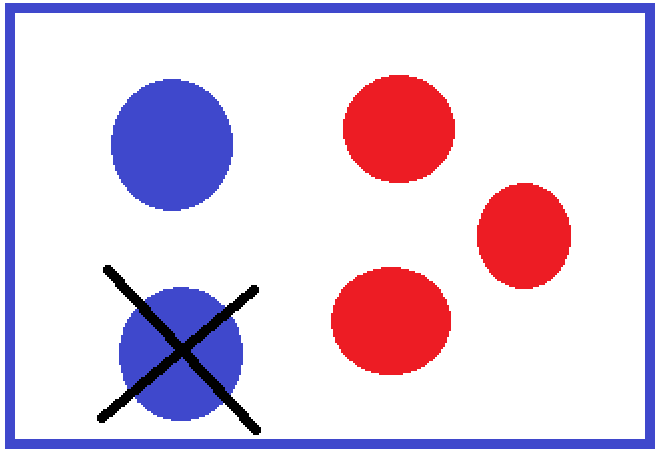


Elaborado pelo autor

Probabilidade Condicional (exemplo)

- Há 2 bolinhas azuis e 3 vermelhas em um saco.
- Qual é probabilidade de obter uma bolinha azul?
- A probabilidade é: P(A) = 2/5 ou 0.4
- No próximo passo, qual é a probabilidade de obter uma bolinha azul dado que tiramos a primeira e não colocamos ela de volta?

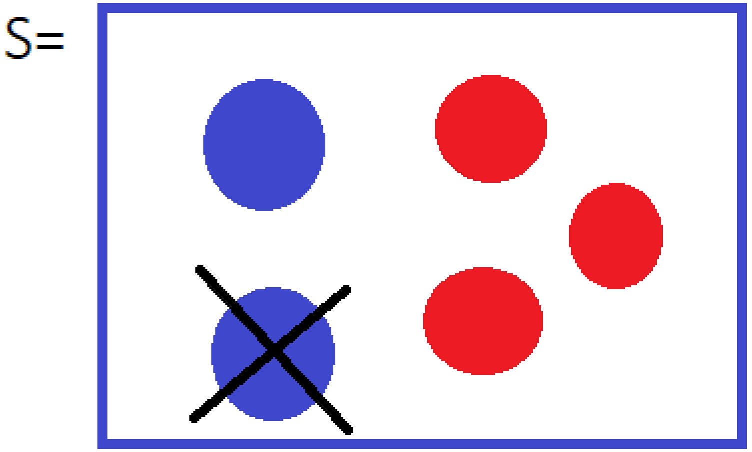
S=



Elaborado pelo autor

Probabilidade Condicional (exemplo)

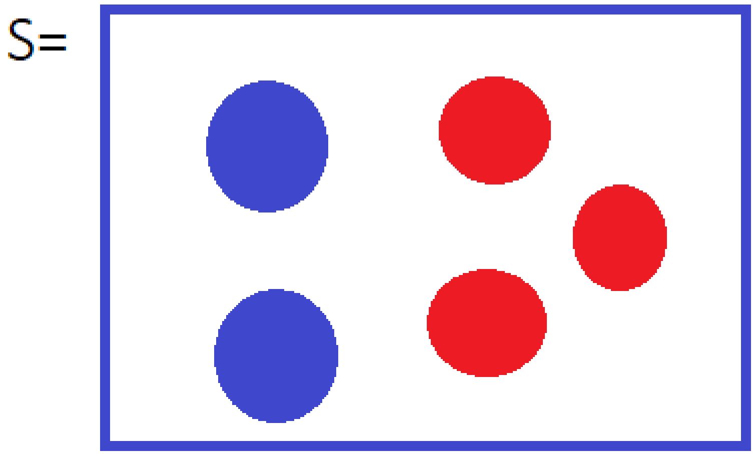
- Há 2 bolinhas azuis e 3 vermelhas em um saco.
- Qual é probabilidade de obter uma bolinha azul?
- A probabilidade é: P(A) = 2/5 ou 0.4
- No próximo passo, qual é a probabilidade de obter uma bolinha azul dado que tiramos a primeira e não colocamos ela de volta?
- A probabilidade de conseguir uma segunda bola azul dado **P(B|A)** que obtemos uma azul é: P(B|A)=1/4.



Elaborado pelo autor

Probabilidade Condicional (exemplo)

- Revisando, P(A) = 2/5. Desta forma, se não retornamos a primeira bolinha azul, a probabilidade de obter azul dado que removemos a primeira é P(B|A) = 1/4.
- Agora qual é a probabilidade conseguir a **primeira bolinha azul E a segunda bolinha azul** também?
- Nesse caso, multiplicamos P(A) x P(B|A) = 2/5 . ¼ = 2/20 = 1/10

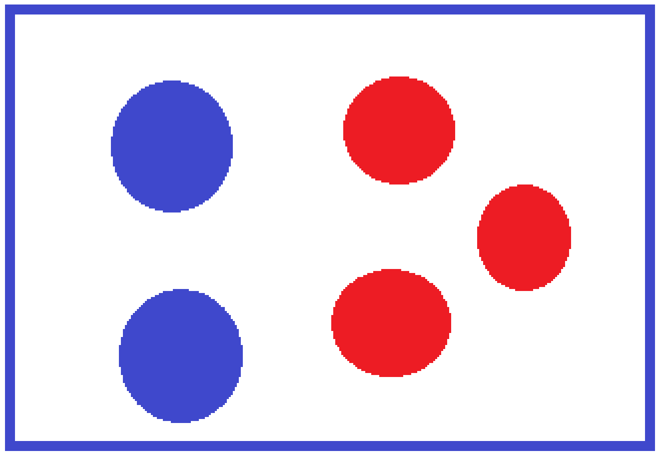


Elaborado pelo autor

Probabilidade Condicional (exemplo)

- A notação inteira fica dessa maneira, quando estamos falando de eventos mutuamente não exclusivos...
- Notação:
- $P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$

S=



Elaborado pelo autor

Probabilidade Condicional (exemplo 2)

- Supomos que estamos organizando uma nova campanha de marketing para entender o comportamento dos clientes da sorveteria Idp e amigos.
- Após uma coleta de dados minuciosa, os resultados constam que 70% dos clientes gostam de chocolate e **35% gostam de chocolate E de morango**.
- Nesse caso, qual é a porcentagem daqueles que gostam de chocolate E que também gostam de morango?

Fonte: Bing.com

Probabilidade Condicional (exemplo 2)

- Vamos organizar...
- Após uma coleta de dados minuciosa, os resultados constam que 70% dos clientes gostam de chocolate e **35% gostam de chocolate E de morango**.
- P(Choco) = 0.7
- $P(Choco \cap Mora) = 0.35$
- Qual é a probabilidade daqueles que gostam de Morango gostam também de chocolate (o contrário)?
- Percebem que ficou faltando? P(Mora | Choco) ?

Fonte: Bing.com

Probabilidade Condicional (exemplo 2)

- Vamos organizar...
- Qual é a probabilidade daqueles que gostam de Morango gostam também de chocolate (o contrário)?
- Percebem que ficou faltando? P(Mora | Choco) ? Temos isso:
- $P(Choco \cap Mora) = P(choco).P(Mora \,|Choco)$ Ou seja,
- 0.35 = 0.7 . P(Mora| Choco)

Fonte: Bing.com

Probabilidade Condicional (exemplo 2)

- $P(Choco \cap Mora) = P(choco).P(Mora\ |Choco)$ Ou seja,
- 0.35 = 0.7 . P(Mora| Choco)
- Podemos apenas dividir P(Mora| Choco) ...
- $P(mora\ |choco) = \frac{P(Choco \cap Mora)}{P(choco)}$
- $P(mora\ |choco) = \frac{0.35}{0.7} = 0.5$

Fonte: Bing.com

Probabilidade Condicional (exemplo 2)

- $P(mora \mid choco) = \frac{P(Choco \cap Mora)}{P(choco)}$
- $P(mora \mid choco) = \frac{0.35}{0.7} = 0.5$
- Desta maneira, nossos cálculos sugerem que 50% dos clientes que gostam de soverte de chocolate **também** gostam de morango.
- Ou seja, chocolate é o sabor mais popular, mas nem todos aqueles que gostam de chocolate querem sorvetes de morango. Todavia, aqueles que gostam de morango também gostam de chocolate. Dessa maneira, talvez vale a pena investir em suprimentos de soverte de morango.

Fonte: Bing.com

Probabilidade Condicional (exemplo)

- Se retornamos as bolinhas no saco a cada vez, as chances não mudam e os eventos são independentes:
- **Com Substituição:** os eventos são Independentes (as chances não mudam).
- **Sem Substituição:** os eventos são Dependentes (as chances mudam).

Exercícios para praticar...

- * Não precisa entregar...
- Refaça todos os exercícios dos slides até se familiarizar com a dinâmica.
- Peça para a IA de sua escolha (Chat Gpt, Deep Seek, Co-pilot, etc...) para modificar os elementos e probabilidades e assim refaça os exercícios. Nesse contexto, peça para a IA fazer exercícios similares e pratique.
- Repita, repita, repita....

Bibliografia

- **BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A.** Estatística Básica. Saraiva, 2017.
- **LARSON, R.; FARBER, B.** Estatística Aplicada. Pearson, 2016.
- **Pishro-Nik; H.** Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes**.** Kappa Research, 2014.
- **TRIOLA, M. F.** Introdução à Estatística. Pearson, 2018.