Mini curso de Probabilidade e Estatística

Por tutor Mestre Omar Barroso Khodr

Aula 4: Variáveis aleatórias discretas e contínuas

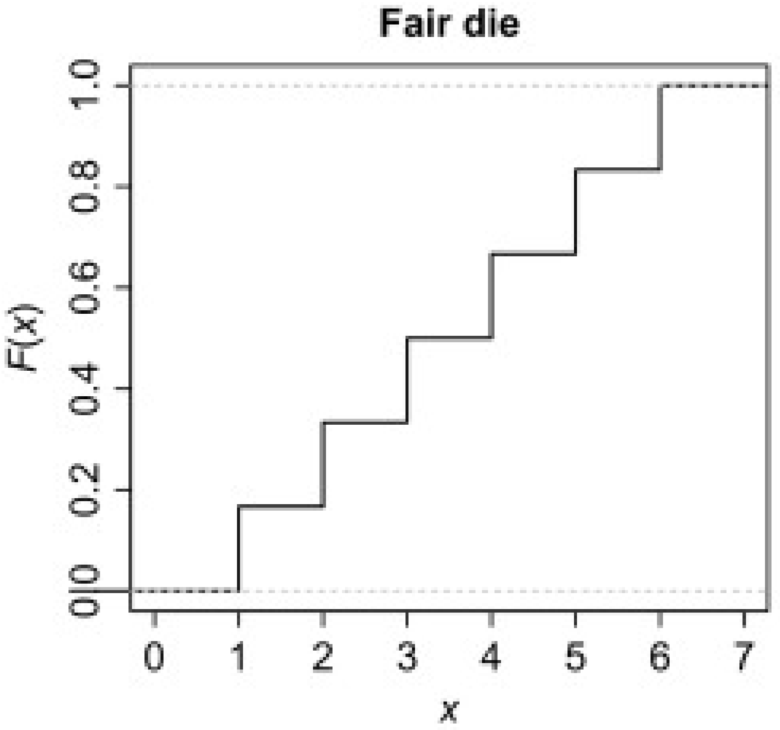
- Definição e exemplos
- Função de distribuição acumulada (FDA)
- Valor esperado e variância

Variáveis Aleatórias

- Só pode assumir valores específicos e separados.
- Variáveis aleatórias são usadas para quantificar resultados e entender ocorrências aleatórias de experimentos.
- Por exemplo,
- Número de possibilidades ao jogar um dado honesto:
- $x \,\epsilon \{1,2,3,4,5,6\}$
- Número de caras ao jogar uma moeda honesta 10 vezes.
- O tempo necessário para correr uma maratona.
- Nesse contexto, seus valores são desconhecidos antes do experimento ser realizado, mas se tornam conhecidos depois que o resultado é observado (eles podem ser representados por um letra *ex-ante* do evento).

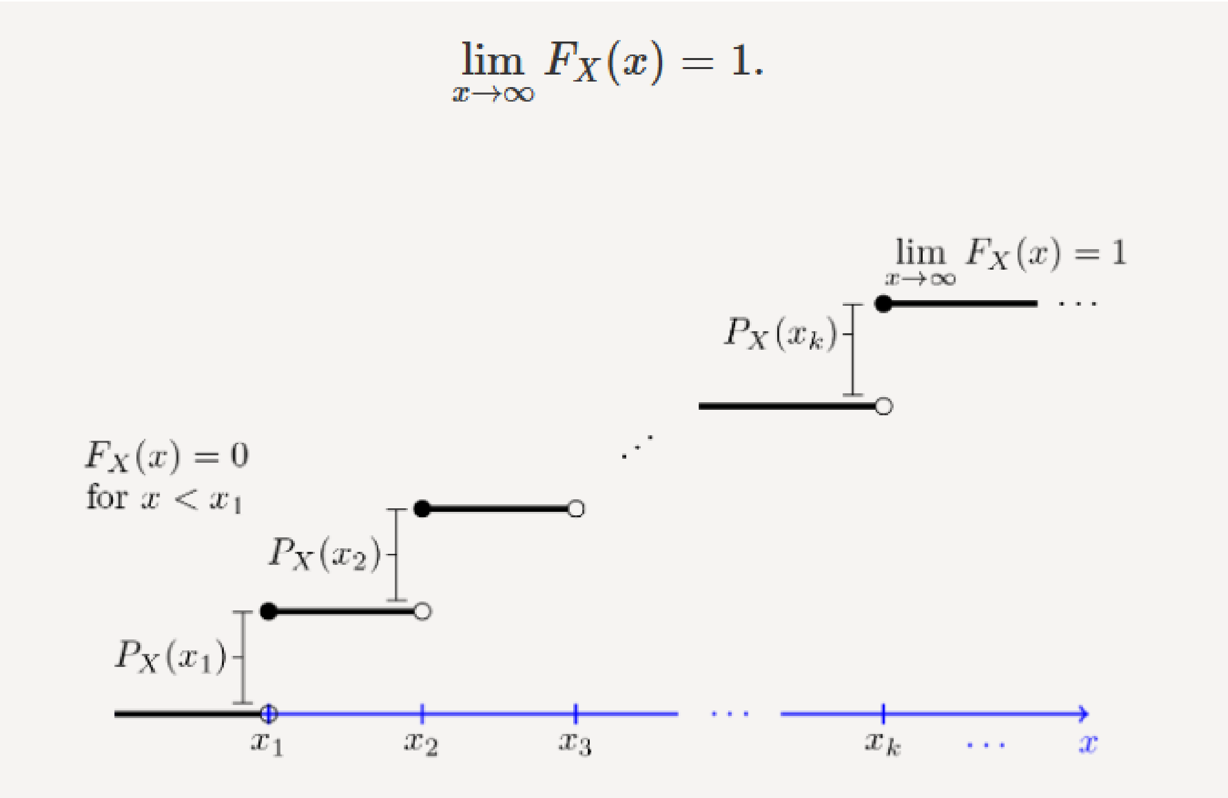
Variáveis Aleatórias

- Dada uma variável aleatória X, definimos uma *função de distribuição cumulativa (fdc ou cdf – do inglês cumulative distribution function).*
- Ou seja, em termos matemáticos: $F_x\colon \mathbb{R} \to [0,1], tal\ que F_x(t) = P\,\{X \le t\}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
- Nesta notação, $P\,\{X \le t\}$ denota a probabilidade de que X ≤ t.



Fonte: Tacq, 2010.

Variáveis Aleatórias



Fonte: Pishro-Nik, 2014.

Variáveis Aleatórias

- Existem 3 tipos de variáveis aleatórias: discretas, contínuas e mistas.

Variáveis Aleatórias Discretas

- Lembrando nosso axioma, $P \geq 0$.
- Uma variável aleatória discreta é uma variável que pode assumir um **número contável [finito]** de valores distintos.
- Uma variável aleatória discreta é uma função que atribui **valores numéricos** aos resultados de um experimento estatístico.
- Exemplos:
- O número de alunos presentes na sala de aula
- O número de prêmios recebidos durante o ano letivo
- A taxa de incidência diária de casos de covid
- O número de pacientes em uma enfermaria

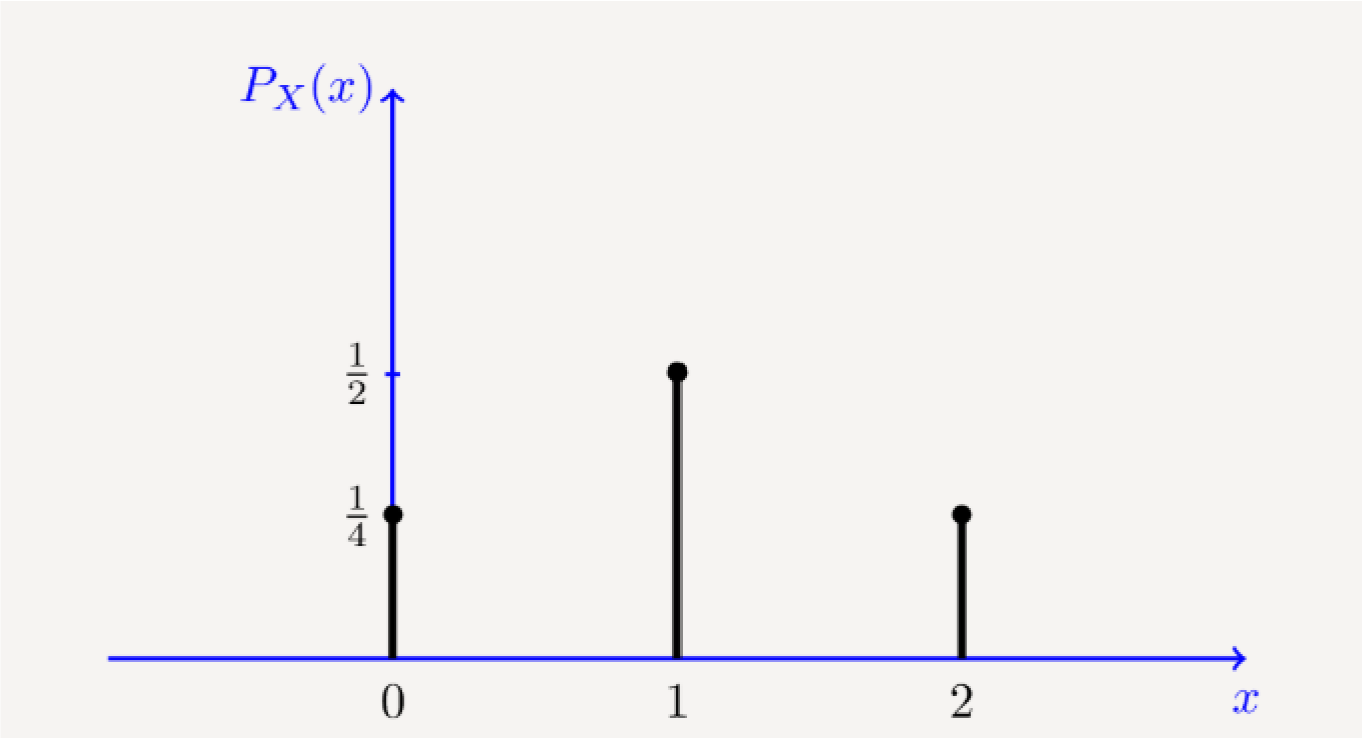
Variáveis Aleatórias Discretas

- Suponhamos que X seja uma variável aleatória discreta no qual o seu intervalo é representado como R_x sendo um conjunto contável ou finito.
- Podemos listar os elementos R_x da determinada maneira.
- $R_x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$
- Prestem a atenção que a variável aleatória é representada com X e os elementos x.
- Assim, podemos fizer que estamos interessados em $\mathrm{X} = x_k$.

Variáveis Aleatórias Discretas

- Nesse contexto, as probabilidades dos eventos $\{\mathrm{X} = x_k\}$ são formalmente desenhados pela função de massa de probabilidade (ou Probability Mass Function - PMF).
- Suponha que X seja uma variável discreta com intervalo $R_x = \{x_1, x_2, x_n, \ldots, x_n\}$.
- Assim, a função $P_x(x_k) = P(X = x_k)$, para k = 1, 2,3,....

Variáveis Aleatórias Discretas



Fonte: Pishro-Nik, 2014.

Variáveis Aleatórias Contínuas

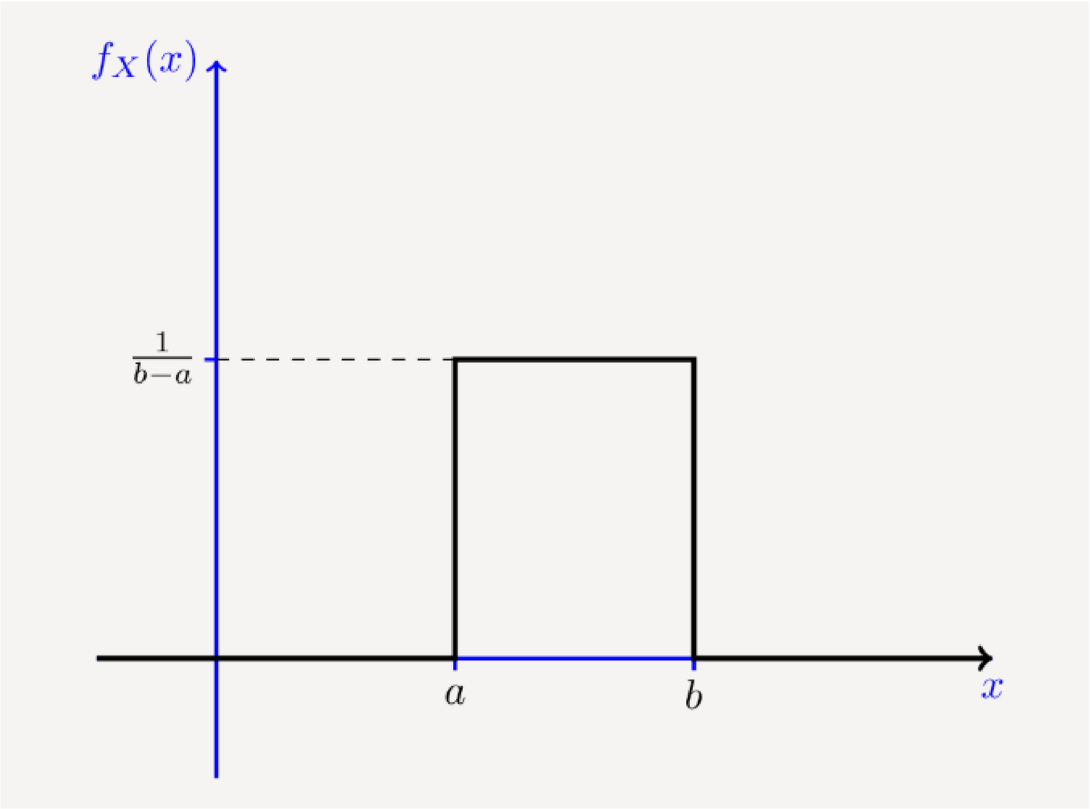
- Uma variável aleatória contínua é uma variável que pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo **contínuo** de valores.
- Isso significa que ela pode assumir um número **incontável** de valores, diferentemente de uma variável aleatória discreta.
- Nesse sentido, a probabilidade de uma variável aleatória contínua fica em algum intervalo, como $\mathrm{P}\{a < Y \ \leq b\} = \int_a^b fY(s)ds$.
- Ou seja, os valores determinados no intervalo podem ser infinitos mas devem igualar o 1 no total. $\int_{-\infty}^{+\infty} fY(s)ds = 1$ e $fY(s) \geq 0 \ \forall \ \ s \epsilon \ \mathbb{R}$.
- Nesse caso, uma variável aleatória X com $F_X(x)$ é dita contínua se $F_X(x)$ é uma função continua $\forall \ x \ \in \ \mathbb{R}$.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- *Exemplos de variáveis aleatórias contínuas...*
- O tempo que leva para correr um 5km
- O peso de uma pessoa
- A quantidade de açúcar que você coloca em uma xícara de café.
- Basicamente, seriam números que podem tomar proporções infinitas...
- Uma pessoa pode correr 5km em 20:00:1m/s; 1h; 30:03 mins. Etc..

Variáveis Aleatórias Contínuas

- A PMF não funciona para variáveis aleatórias contínuas, pois para uma variável aleatória contínua $x \in \mathbb{R}$.
- Em vez disso, geralmente podemos definir a função de densidade de probabilidade (FDP).
- No qual, $f_x = \begin{cases} \frac{1}{b-a};\ a < x < b \\ 0; x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$
- Deste modo, $\int_{-\infty}^{+\infty} fY(s)ds = 1$



Fonte: Pishro-Nik, 2014.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias mistas são variáveis aleatórias que possuem componentes **discretos e contínuos**. São utilizadas em diversas áreas, incluindo tráfego, filas, mercado de opções [finanças] e hidrologia.
- Você pode criar uma variável aleatória mista **combinando** uma variável aleatória discreta com uma variável aleatória contínua.
- Por exemplo, você pode lançar uma moeda e usar o resultado para determinar se deve usar a distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta ou da variável aleatória contínua.

Valor Esperado ou Esperança Estatística

- Informalmente, o valor esperado de uma variável aleatória pode ser interpretado como sua **média**.
- Formalmente, se X é uma variável aleatória e g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, então, por definição,

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i$$

- Para variáveis aleatórias discretas e contínuas:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Valor Esperado ou Esperança Estatística

- Os valores esperados para algumas funções g merecem nomes especiais:
- Média: $g(x) = x,\ E[X]$
- Segundo momento: $g(x) = x^2,\ E[X^2]$
- Variância: $g(x) = (x - E[X])^2,\ E[(X - E[X])^2]$

Valor Esperado ou Esperança Estatística

- Denominando a variância como, V(X). Nosso teorema fica:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E[(X - E[X])^2] \\
&= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] \\
&= E[X^2] - E[2XE[X]] + E[(E[X])^2] \\
&= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\
&= E[X^2] - (E[X])^2.
\end{aligned}
$$

Bibliografia

- **BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A.** Estatística Básica. Saraiva, 2017.
- **LARSON, R.; FARBER, B.** Estatística Aplicada. Pearson, 2016.
- **Pishro-Nik; H.** Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes**.** Kappa Research, 2014.
- **TRIOLA, M. F.** Introdução à Estatística. Pearson, 2018.