В. Б. Балакин, О методах типа Рунге-Кутта для газовой динамики, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1970, том 10, номер 6, 1512–1519

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 10 Ноябрь 1970 Декабрь № 6

УДК 518:517.9:533.7

# О МЕТОДАХ ТИПА РУНГЕ-КУТТА ДЛЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

*В. Б. БАЛАКИН*

*(Москва)*

## § 1. Вводные замечания

Применяемые в настоящее время разностные методы сквозного счета первого и второго порядка точности обеспечивают расчет полей давления, скорости и температуры с точностью, измеряемой в типичных условиях единицами процентов. Увеличение емкости памяти и повышение быстродействия современных вычислительных машин позволяют выдвинуть проблему разработки и внедрения усложненных методов повышенной точности, приближающейся к достигнутой для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработка таких методов может основываться на идеях широко распространенного метода Рунге-Кутта. Пример реализации метода Рунге-Кутта для нелинейных гиперболических систем принадлежит В. В. Русанову, предложившему пятиточечную схему третьего порядка точности [1].

Цель данной работы заключается в том, чтобы указать единую методику построения максимально точных методов типа Рунге-Кутта произвольного порядка и предложить новые разностные схемы третьего и четвертого порядка точности.

## § 2. Основные уравнения

Вывод разностных схем производится применительно к системе уравнений газовой динамики, представленной в векторной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(f) = 0, \tag{1}$$

где

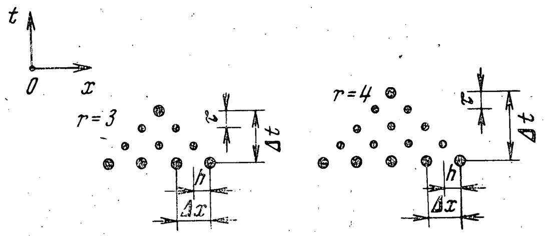
$$f = \begin{Vmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{Vmatrix}, \qquad F = \begin{Vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)\, u \end{Vmatrix}.$$

Обозначения газодинамических функций стандартные. Система (1) замыкается алгебраическим уравнением для удельной энергии, которое в случае совершенного газа имеет вид

$$= \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}. \tag{2}$$

## § 3. Общая разностная схема

Известно, что решение обыкновенного дифференциального уравнения по методу Рунге-Кутта находится в результате вычислительного процесса типа «счет — пересчет». Значение производной от решения, используемое




Фиг. 1

в этом процессе для выполнения очередного шага вдоль траектории, находится как средневзвешенное от значений в нескольких пробных точках поля направлений. Основываясь на этом принципе, будем определять решение системы (1) на шаге в результате последовательных уточнений по схеме

$$\{f_k^n\} = f^{[0]} \to f^{[1]} \to \ldots \to f^{[r]} = \{f^{n+1}\}.$$

Как принято в методе Рунге-Кутта, для расчета каждого промежуточного значения $f^{[i]}$ будем использовать $f^{[0]}, f^{[1]}, \ldots, f^{[i-1]}$.

Введем в плоскости $(x, t)$ разностную сетку с шагами $\Delta x$ и $\Delta t$. При нечетном $r$ примем шахматное расположение узлов, при котором любые два соседних слоя сдвинуты один относительно другого на $\Delta x / 2$. При четном $r$ будем пользоваться обычной прямоугольной сеткой. Наряду с основной разностной сеткой введем вспомогательную, поместив $r - 1$ дополнительный слой с шахматным расположением узлов между каждыми двумя слоями основной сетки (фиг. 1). Будем пользоваться как целыми, так и полуцелыми значениями пространственного индекса $k$, обозначая значения функций в узлах основной сетки $f_k^n$, а в узлах вспомогательной сетки $f_k^{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, r - 1$. Введем обозначения для операторов осреднения, взятия разности и тождественного оператора:

$$\mu f_k = {}^1/_2 (f_{k-1/2} + f_{k+1/2}), \qquad \delta f_k = f_{k+1/2} - f_{k-1/2}, \qquad I f_k = f_k.$$

Наряду с операторами $\mu$, $\delta$, $I$ будем использовать производные от них операторы $\delta^2, \delta^3, \delta^4, \ldots, \mu\delta, \mu\delta^2, \mu\delta^3, \ldots$.

Запишем формулы общей схемы $r$-го порядка точности в следующей итерационной форме:

$$f_k^{[0]} = f_k^{\,n},$$

$$f_k^{[i]} = \alpha_{i,\,i-1}^{(1)} \mu f_k^{[i-1]} + \frac{\tau}{h} \beta_{i,\,i-1}^{(1)} \delta F_k^{[i-1]} + (\alpha_{i,\,i-2}^{(1)} I + \alpha_{i,\,i-2}^{(2)} \delta^2) f_k^{[i-2]} + \frac{\tau}{h} \beta_{i,\,i-2}^{(1)} \mu\delta F_k^{[i-2]} +$$

$$+ (\alpha_{i,\,i-3}^{(1)} \mu + \alpha_{i,\,i-3}^{(2)} \mu\delta^2) f_k^{[i-3]} + \frac{\tau}{h} (\beta_{i,\,i-3}^{(1)} \delta + \beta_{i,\,i-3}^{(2)} \delta^3) F_k^{[i-3]} + \qquad (3)$$

$$+ (\alpha^{(1)}_{i,\,i-4} I + \alpha^{(2)}_{i,\,i-4}\delta^2 + \alpha^{(3)}_{i,\,i-4}\delta^4) f_k^{[i-4]} + \frac{\tau}{h}(\beta^{(1)}_{i,\,i-4}\mu\delta + \beta^{(2)}_{i,\,i-4}\mu\delta^3) F_k^{[i-4]} + \ldots$$

$$\ldots + (\alpha^{(1)}_{i,\,0}\ldots) f_k^{[0]} + \frac{\tau}{h}(\beta^{(1)}_{i,\,0}\ldots) F_k^{[0]}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$f_k^{[r]} = f_k^{n+1}.$$

Здесь

$$f_k^{[i]} = f(k\Delta x,\ n\Delta t + \varepsilon_i\tau), \qquad F_k^{[i]} = F(f_k^{[i]}), \qquad \tau = \Delta t/r, \qquad h = \Delta x/2.$$

Неизвестные коэффициенты общей формулы (3) $\alpha^{(\nu)}_{i,\,i-j}$, $\beta^{(\nu)}_{i,\,i-j}$, $\varepsilon_i$ необходимо выбирать таким образом, чтобы разложение $f_k^{[r]}$ по степеням $\Delta t$ совпадало с разложением $f(k\Delta x,\ (n+1)\Delta t)$ до членов порядка $\Delta t^r$ включительно.

Составление разложений и вычисление коэффициентов схем представляет собой чрезвычайно трудоемкую техническую задачу вследствие нелинейного характера зависимости $F(f)$. Приведем здесь окончательные результаты, опустив громоздкие промежуточные выкладки.

## § 4. Разностные аналоги методов Эйлера и метода Рунге-Кутта четвертого порядка

Известные трехточечные схемы второго порядка точности оказываются частными случаями предложенной общей схемы (3) при $r = 2$. Так, для двухшагового варианта схемы Лакса — Вендроффа [2]

$$\varepsilon_1 = 1, \qquad \alpha^{(1)}_{1,0} = 1, \qquad \beta^{(1)}_{1,0} = -1/2, \qquad \beta^{(1)}_{2,1} = -1, \qquad \alpha^{(1)}_{2,0} = 1,$$
$$\alpha^{(1)}_{2,1} = \alpha^{(2)}_{2,0} = \beta^{(1)}_{2,0} = 0.$$

Сама схема может быть представлена в виде

$$f^{[1]}_{k+1/2} = 1/2\,(f_k^{[0]} + f_{k+1}^{[0]}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F^{[0]}_{k+1} - F^{[0]}_k), \qquad f_k^{[2]} = f_k^{[0]} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F^{[1]}_{k+1/2} - F^{[1]}_{k-1/2}). \tag{4}$$

Эта схема может рассматриваться как аналог модифицированного метода ломаных Эйлера. Аналогия становится совершенно отчетливой, если уравнения (4) записать в форме, принятой для методов типа Рунге-Кутта:

$$f_k^{n+1} = f_k^{\,n} - \Delta t P_2, \tag{5}$$

где

$$P_1 = \frac{1}{\Delta x}(F^{[0]}_{k+1} - F^{[0]}_k), \qquad P_2 = \frac{1}{\Delta x}(F^{[1]}_{k+1/2} - F^{[1]}_{k-1/2}).$$

Разностную схему leap frog («скачущая лягушка») из [3] можно считать аналогом метода Эйлера с пересчетом. Эта схема описывается уравнениями

$$\begin{gathered} f^{[1]}_{k+1/2} = 1/2\,(f_k^{[0]} + f_{k+1}^{[0]}) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F^{[0]}_{k+1} - F^{[0]}_k), \\ f_k^{[2]} = f_k^{[0]} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F^{[0]}_{k+1} - F^{[0]}_{k-1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F^{[1]}_{k+1/2} - F^{[1]}_{k-1/2}) \end{gathered} \tag{6}$$

или, что то же самое, уравнениями

$$f_k^{n+1} = f_k^{\,n} - \frac{\Delta t}{2}(P_1 + P_2), \qquad P_1 = \frac{1}{2\Delta x}(F_{k+1}^{[0]} - F_{k-1}^{[0]}),$$

$$P_2 = \frac{1}{\Delta x}(F_{k+1/2}^{[1]} - F_{k-1/2}^{[1]}). \tag{7}$$

Продолжая эти аналогии, естественно попытаться найти разностный метод для газовой динамики, похожий на метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой метод получен в виде

$$f_k^{n+1} = f_k^{\,n} - \frac{\Delta t}{6}(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4), \tag{8}$$

где

$$P_1 = \frac{1}{2\Delta x}(F_{k+1}^{[0]} - F_{k-1}^{[0]}), \qquad P_2 = \frac{1}{\Delta x}(F_{k+1/2}^{[1]} - F_{k-1/2}^{[1]}),$$

$$P_3 = \frac{1}{2\Delta x}(F_{k+1}^{[2]} - F_{k-1}^{[2]}), \qquad P_4 = \frac{1}{\Delta x}(F_{k+1/2}^{[3]} - F_{k-1/2}^{[3]}),$$

где, в свою очередь, $f_{k+1/2}^{[1]}$ и $f_k^{[2]}$ определяются формулами (6), а

$$f_{k+1/2}^{[3]} = (f_k^{[2]} + f_{k+1}^{[2]}) - (f_{k-1/2}^{[1]} + f_{k+3/2}^{[1]}) + {}^1/_2\,(f_k^{[0]} + f_{k+1}^{[0]}) -$$
$$- 2\,\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{k+1}^{[2]} - F_k^{[2]}) + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{k+3/2}^{[1]} - F_{k-1/2}^{[1]}). \tag{9}$$

## § 5. Методы типа Рунге-Кутта на однородных сетках

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, система уравнений для коэффициентов общей схемы (3) оказывается неопределенной и при любом $r > 1$ возникает обилие различных конкретных схем. Выделим из всего многообразия методов типа Рунге-Кутта класс методов, отвечающих следующим требованиям:

1) слои вспомогательной сетки должны быть равноотстоящими (тогда $\varepsilon_i = i$),

2) значения вектора $f_k^{[i]}$ должны аппроксимировать решение системы (1),

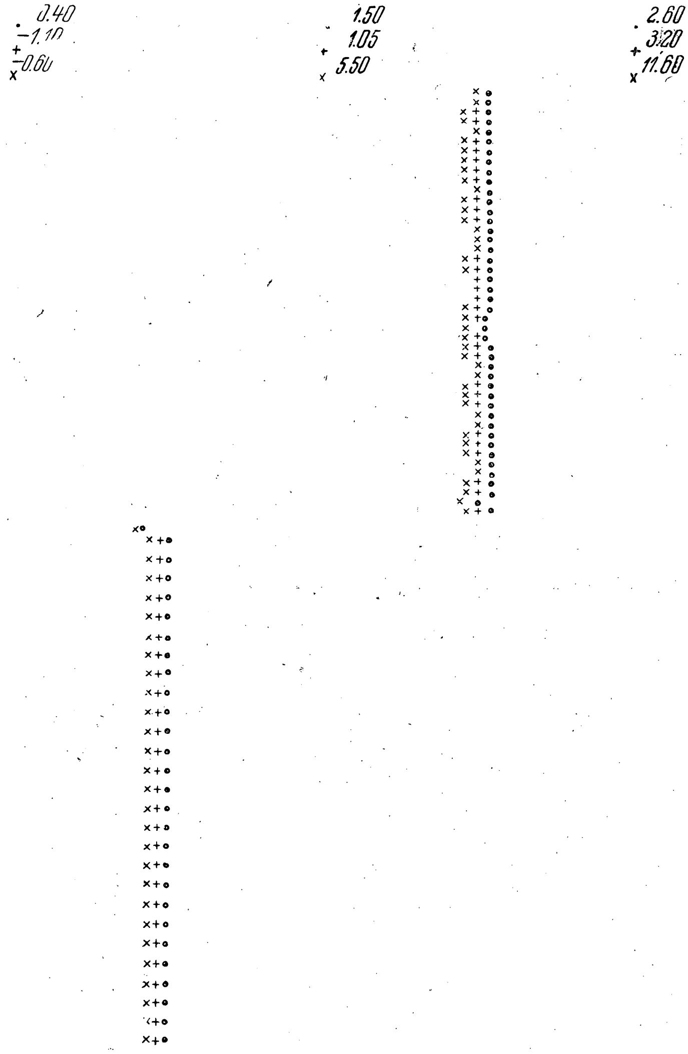
3) при переходе от $i$-го промежуточного слоя к $(i + 1)$-му порядок точности аппроксимации должен повышаться на единицу.

Первое требование направлено на обеспечение геометрической однородности вспомогательной разностной сетки. Схемы типа Рунге-Кутта на однородных сетках можно использовать как обычные многослойные схемы. Второе требование означает, что промежуточные значения должны иметь физический смысл, их можно выводить на печать, обрабатывать и т. п. Третье требование обеспечивает иерархию при конструировании методов возрастающей точности: схема низкого порядка является элементом схемы более высокого порядка.

При $r=2$ существует однопараметрическое семейство схем, удовлетворяющих сформулированным требованиям. Это семейство описывается разностными уравнениями с параметром $\omega$:

$$\begin{aligned} f_{k+1/2}^{[1]} &= \mu f_{k+1/2}^{[0]} - \frac{\tau}{2h}\delta F_{k+1/2}^{[0]}, \\ f_k^{[2]} &= 4\omega\mu f_k^{[1]} - \frac{\tau}{h}\delta F_k^{[1]} + [(1-4\omega)I - \omega\delta^2] f_k^{[0]} + \frac{\tau}{h}2\omega\mu\delta F_k^{[0]}. \end{aligned} \tag{10}$$

При $\omega = 0$ из (10) как частный случай получается метод (4).




Фиг. 2. Ударная волна, $n=50$; сверху: $\cdot$ — 2.111, $+$ — 2.166, $\times$ — 8.611; снизу: $\cdot$ — 1.000, $+$ — 0.000, $\times$ — 2.500

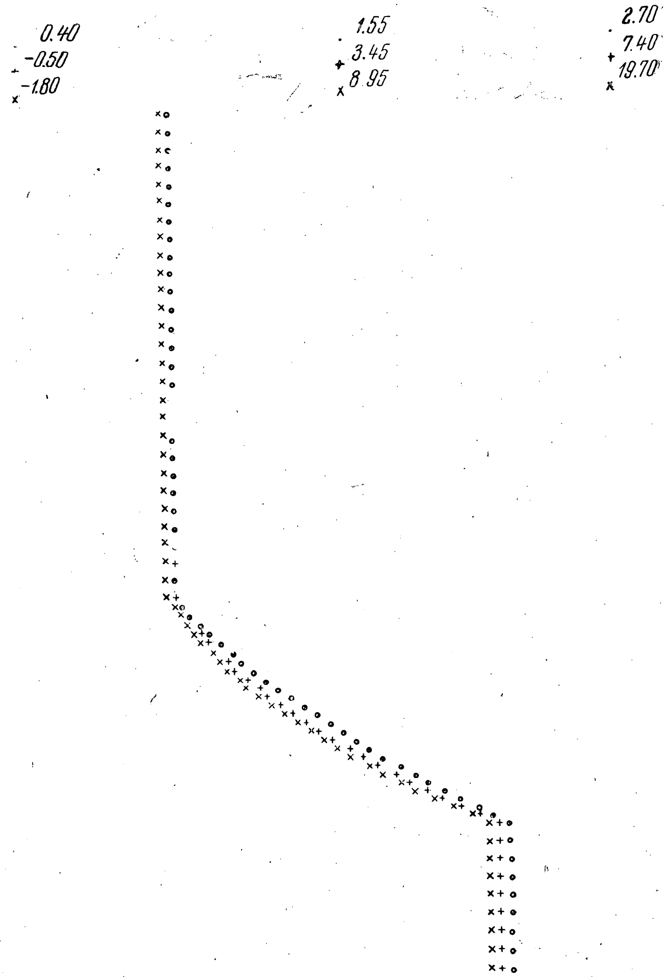
Все схемы семейства (10) при линеаризации переходят в явную трехточечную схему второго порядка точности, устойчивую при выполнении условия Куранта — Фридрихса — Леви.

При $r=3$ и $r=4$ система уравнений для коэффициентов в (3) также оказывается неопределенной. Из всех ее решений наибольшую практическую ценность имеют те, которым соответствуют компактные схемы с наименьшим числом слагаемых в правой части.

Выпишем в качестве примера формулы компактного варианта метода третьего порядка:

$$f_k^{[1]} = \mu f_k^{[0]} - \frac{\tau}{2h}\delta F_k^{[0]}, \qquad f_{k+1/2}^{[2]} = f_{k+1/2}^{[0]} - \frac{\tau}{h}\delta F_{k+1/2}^{[1]}, \tag{11}$$

$$f_k^{[3]} = \frac{1}{4}\mu f_k^{[0]} + \left(\frac{3}{4}I - \frac{1}{8}\delta^2\right) f_k^{[1]} - \frac{9}{8}\frac{\tau}{h}\delta F_k^{[2]}.$$

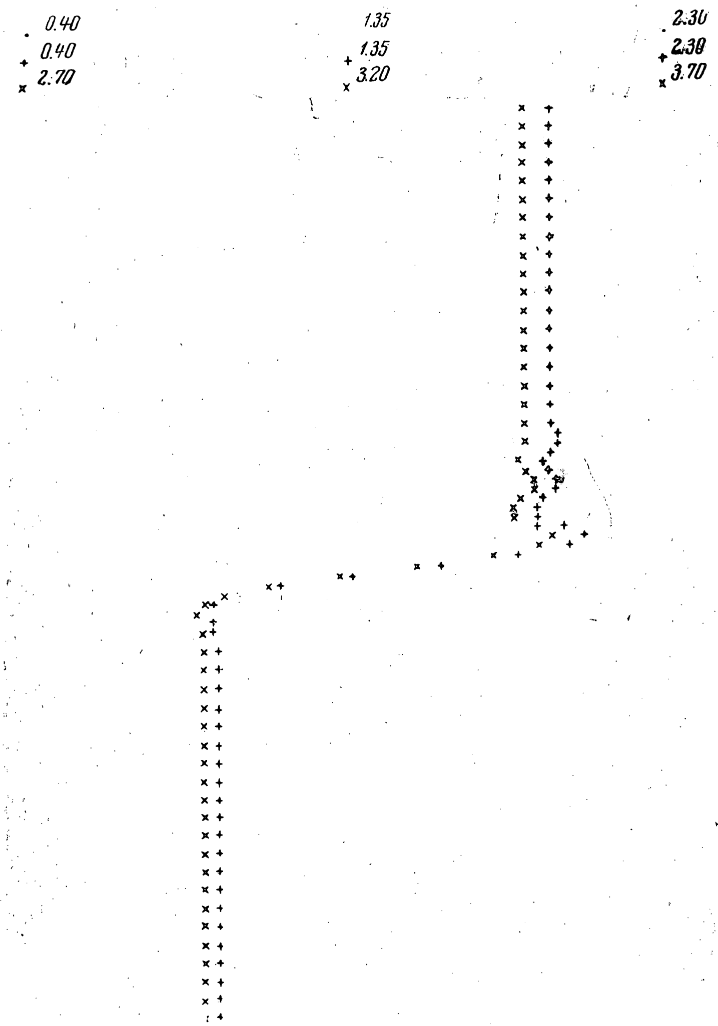



Фиг. 3. Волна разрежения, $n = 100$; сверху: $\cdot$ — 1.000, $+$ — 1.500, $\times$ — 3.625; снизу: $\cdot$ — 2.192, $+$ — 5.491, $\times$ — 14.38

Чтобы записать метод четвертого порядка, достаточно в уравнениях (11) изменить индексы на $^1/_2$ и присоединить уравнение для $f_k^{[4]}$:

$$f_k^{[4]} = f_k^{[2]} - \frac{32}{27}\frac{\tau}{h}\delta F_k^{[3]} + \frac{5}{27}\frac{\tau}{h}(\delta^3 + 3\delta) F_k^{[1]} - \frac{10}{27}\frac{\tau}{h}\mu\delta F_k^{[0]}. \tag{12}$$

Линеаризовав разностные уравнения и выразив путем последовательной подстановки $f_k^{n+1}$ через $\{f_k^n\}$, получим единственно возможную схему $r$-го порядка на $r+1$ точке. Устойчивость таких максимально точных ли-




Фиг. 4. Контактный разрыв, $n = 75$; сверху: $\cdot$ — 2.000, $+$ — 2.000, $\times$ — 3.500; снизу: $\cdot$ — 1.000, $+$ — 1.000, $\times$ — 3.000

нейных схем исследована в [4], где доказано, что в качестве условий устойчивости следует принять неравенства

$$|\lambda\Delta t / \Delta x| \leqslant 1, \text{ если } r \text{ четно}, \qquad (13)$$
$$|\lambda\Delta t / \Delta x| \leqslant {}^1/_2, \text{ если } r \text{ нечетно}$$

($\lambda$ — наибольшая скорость распространения возмущений).

Условия (13) показывают, что область зависимости решения устойчивых разностных уравнений при $r > 2$ шире области зависимости решения дифференциальных уравнений, определяемой расположением характеристик. Именно, сеточная область зависимости ($r+1$ узел) охватывает отрезок длины $r\Delta x$, в то время как характеристики вырезают из оси $x$ всего лишь отрезок длины $\Delta x$ при нечетном $r$ и длины $2\Delta x$ при четном $r$. Таким образом, повышение точности вычислений требует привлечения информации о состоянии течения в областях, примыкающих к области «физической» зависимости решения.

На схемы (10) — (12) получены экспериментальные подтверждения. В качестве примера на фиг. 2—4 приведены профили, рассчитанные по схеме четвертого порядка (12) при максимально допустимом шаге по времени (точкой обозначена плотность, знаком $+$ удельный вес, знаком $\times$ удельная энергия).

Обращает на себя внимание хорошее качество решения с ударной волной и центрированной волной разрежения.

*Поступила в редакцию 8.01.1970*

### Цитированная литература

1. В. В. Русанов. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений. Докл. АН СССР, 1968, **180**, № 6, 1303—1305.
2. P. D. Lax, B. Wendroff. Systems of conservation laws. Communs Pure and Appl. Math., 1960, **13**, № 2, 217—235.
3. E. L. Rubin, S. Z. Burstein. Difference methods for the inviscid and viscous equations of a compressible gas. J. Comput. Phys., 1967, **2**, 178—196.
4. G. Strang. Accurate partial difference methods. I. Linear Cauchy problems. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1963, **12**, № 5, 392—402.