

I. Статика и гидростатика

1. Для равновесия твердого тела или системы тел необходимо одновременное выполнение двух условий:

I условие равновесия: Сумма внешних сил, действующих на систему, должна быть равна нулю.

$$\vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{внеш}} + \dots = 0$$

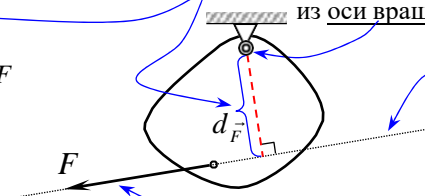
II условие равновесия: Сумма моментов внешних сил, действующих на систему, должна быть равна нулю относительно любой оси вращения.

$$M_{\vec{F}_1 \text{ веш}} + M_{\vec{F}_2 \text{ веш}} + \dots = 0$$

2. Вращающим моментом силы относительно оси вращения называется взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля этой силы на ее плечо. Плечом силы называется длина перпендикуляра, проведенного из оси вращения на линию действия этой силы

$$M_{\vec{F}} = \pm F \cdot d_{\vec{F}}$$

Знак «+» берется, если сила F стремится повернуть тело *против часовой стрелки*, знак «-» — если *по часовой*.



Замечание.

Приведенное здесь определение вращающего момента справедливо лишь для сил, лежащих в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Единица измерения M в СИ: 1 Н·м

Момент этой силы — отрицательное число: $M_{\vec{F}} < 0$

3. Не всегда одновременное выполнение I и II условий равновесия гарантирует неподвижность механической системы. Покой системы невозможен в положениях неустойчивого равновесия (т.е. в таких положениях, любое бесконечно малое смещение из которых, приводит к тому, что сумма внешних сил (или их моментов) стремится еще больше удалить систему от равновесного положения). Реализованы могут быть только положения устойчивого равновесия (т.е. такие положения, любое бесконечно малое смещение из которых, приводит к тому, что сумма внешних сил (или их моментов) стремится вернуть систему обратно в равновесное положение) и положения безразличного равновесия (т.е. положения, при бесконечно малых смещениях из которых сумма внешних сил и их моментов остается равна нулю).

4. Центром масс системы материальных точек m_1, m_2, \dots, m_N называется геометрическая точка (C), координаты которой определяются формулами:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}; \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}; \quad z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

Центр тяжести (т.е. точка приложения равнодействующей силы тяжести) совпадает с центром масс системы, если эта система находится в однородном гравитационном поле (или напряженность поля тяготения меняется в пределах системы незначительно) (т.е. *жидкость неподвижна относительно стенок сосуда*)

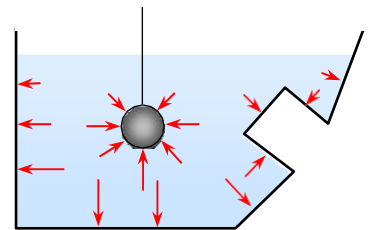
5. Сила гидростатического давления — сила, с которой покоящаяся жидкость действует на погруженные в нее тела, стенки и дно сосуда, в котором жидкость находится (без учета поверхностного натяжения).

По своей природе эта сила является

силой объемной упругости

Она возникает, если жидкость сжата (например, прижата силой тяготения к внутренней поверхности неподвижного сосуда) и зависит от степени сжатия.

Сила гидростатического давления всегда направлена перпендикулярно к той поверхности, на которую она действует (поскольку сила объемной упругости не может иметь составляющей параллельной поверхности, деформированного тела, а упругостью формы жидкость не обладает)



6. Давлением жидкости на плоскую поверхность называется отношение силы гидростатического давления, действующей на эту поверхность, к площади поверхности (при условии, что сила распределена по поверхности равномерно).

$$p = \frac{F_{\text{гидр. давл.}}}{S}$$

- поверхность плоская
- давление одинаково во всех точках поверхности

Если сила давления неравномерно распределена по поверхности, то можно вычислить среднее давление или давление в данной точке поверхности

$$p = \frac{dF_{\text{гидр. давл.}}}{dS}$$

Сила гидростатического давления, действующая на бесконечно малую площадку dS

площадь бесконечно малой площадки (эта площадь dS мала настолько, что площадку можно с достаточной точностью считать плоской и изменением давления в пределах dS можно пренебречь)

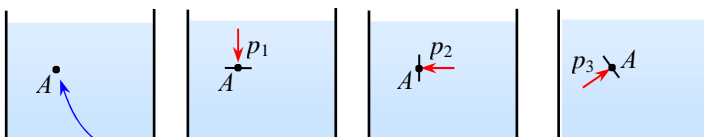
$$p_{\text{ср}} = \frac{F_{\text{гидр. давл.}}}{S}$$

поверхность плоская

Единица измерения давления в СИ: 1 Па = 1 Н/м².

7. Давление в какой-либо точке жидкости — это давление на воображаемую бесконечно малую площадку, на которой лежит эта точка. Причем, можно доказать, что

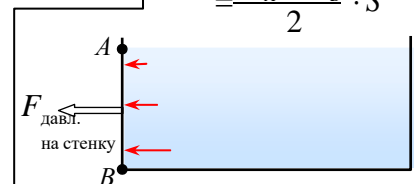
давление в данной точке жидкости не зависит от ориентации той воображаемой бесконечно малой площадки, на которую производится это давление.



$$p_A = p_1 = p_2 = p_3$$

Давление в точке жидкости A

$$F_{\text{давл. на стенку}} = p_{\text{ср}} \cdot S = p \cdot S = \frac{A}{2} \cdot S$$



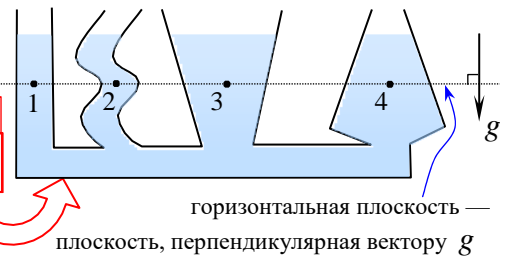
8. В однородной покоеющейся жидкости давления в точках, лежащих в одной горизонтальной плоскости (на одном уровне), одинаковы.

плотность жидкости ρ
одинакова во всех ее точках

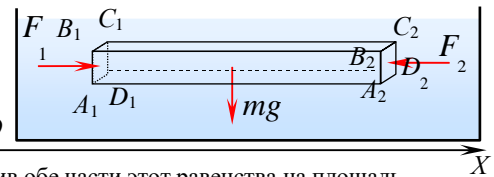
Открытая в атмосферу, свободная
поверхность жидкости горизонтальна,

т. к. во всех ее точках давление одинаково и равно атмосферному.

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$



Док-во: Мысленно выделим в жидкости прямоугольный параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Площадь $A_1B_1C_1D_1$ так мала, что во всех ее точках давление одинаково. Сторона A_1A_2 горизонтальна. Выделенный объем жидкости находится в равновесии, поэтому сумма всех действующих на него сил равна нулю: $\vec{mg} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\text{бок}} = 0$ (Сила $\vec{F}_{\text{бок}}$ — сумма сил гидростатического давления на боковые поверхности $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $C_1D_1D_2C_2$, $D_1A_1A_2D_2$.)
В проекциях на горизонтальную ось OX это уравнение имеет вид: $F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$. Разделив обе части этого равенства на площадь $A_1B_1C_1D_1$, получим что давления на площадки $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ равны: $p_1 = p_2$.



9. В однородной покоеющейся жидкости давления в точках, лежащих на разных горизонтальных уровнях, отличаются на

давление в точке, лежащей на более низком уровне

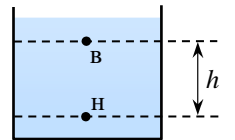
давление в точке, лежащей на более высоком уровне

$$p_H - p_B = \rho gh$$

ρ — плотность жидкости

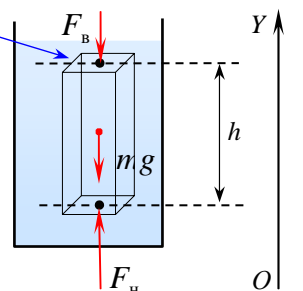
h — расстояние между верхним и нижним уровнями

g — ускорение свободного падения



Док-во: Мысленно выделим в жидкости прямоугольный параллелепипед с горизонтальными основаниями. Выделенный объем жидкости находится в равновесии, поэтому сумма всех действующих на него сил равна нулю: $mg + F_H + F_B + F_{\text{бок}} = 0$ (Сила $\vec{F}_{\text{бок}}$ — сумма сил гидростатического давления на боковые вертикальные поверхности.)

В проекциях на вертикальную ось OY это уравнение имеет вид: $-mg + F_H - F_B = 0 \Rightarrow F_H - F_B = mg = \rho Shg$ (здесь масса выделенного объема жидкости m представлена как произведение ее плотности ρ на объем $V = Sh$). Разделив обе части этого равенства на площадь основания S , получим: $p_H - p_B = \rho gh$.



10. Архимедова сила — выталкивающая (подъемная) сила, действующая на тело, погруженное

в жидкость или газ. Архимедова сила есть сумма всех сил гидростатического давления, действующих на тело, погруженное в жидкость или газ (кроме тех случаев, когда тело плотно прижато к дну или стенке сосуда так, что жидкость (газ) не проникает между телом и дном (стенкой) — в этих случаях суммарную силу гидростатического давления не называют архимедовой силой)

$$F_{\text{АРХ}} = m_{\text{выт}} \cdot g$$

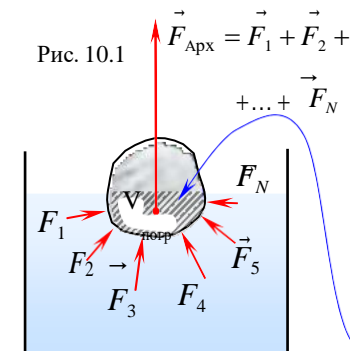
ускорение свободного падения

$m_{\text{выт}}$ — масса «вытесненной» жидкости — масса такой же жидкости, как вокруг тела, которая уместилась бы в объеме погруженной части тела $V_{\text{погр}}$

$$F_{\text{АРХ}} = \rho_{\text{ж}} \cdot V_{\text{погр}} \cdot g$$

если жидкость однородна

ρ — плотность среды (жидкости или газа), в которую погружено тело



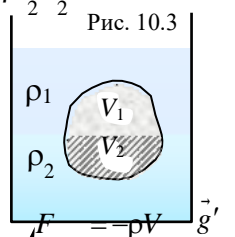
Док-во: Сумма сил гидростатического давления $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \vec{F}_{\text{АРХ}}$, действующих на объем $V_{\text{погр}}$ не зависит от того, какое вещество

находится внутри этого объема (F_1, F_2, \dots — силы упругости, они зависят от деформации жидкости, окружающей объем $V_{\text{погр}}$, а не от содержимого этого объема). Мысленно выделим в покоеющейся жидкости объем, совпадающий с $V_{\text{погр}}$ по форме и расположению (рисунок 10.2). На него будут действовать точно такие же силы гидростатического давления F_1, F_2, \dots , как и на объем погруженной части тела $V_{\text{погр}}$. Выделенный в жидкости объем находится в равновесии, значит,

$$F_{\text{АРХ}} + m_{\text{выт}} \vec{g} = 0 \Rightarrow F_{\text{АРХ}} = m_{\text{выт}} \cdot g, \text{ что и требовалось доказать.}$$

(В этом доказательстве считается, что атмосферного давления нет. Чтобы учесть его наличие, можно рассматривать тело на рисунке 10.1, как плавающее на границе раздела двух сред — жидкости (ρ) и воздуха (ρ')).

Если тело плавает на границе нескольких сред, плотностями ρ_1, ρ_2, \dots (На рис. 10.3 пример, когда сред две), то масса вытесненной жидкости $m_{\text{выт}}$ находится как сумма $m_{\text{выт}} = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \dots$ (V_1 — объем той части тела, которая погружена в первую среду, V_2 — объем той части тела, которая погружена во вторую среду, и т. д.)
Архимедова сила в этом случае равна $F_{\text{АРХ}} = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \dots)g$



11. Если сосуд с жидкостью движется с ускорением \vec{a} в ИСО, то в системе отсчета, связанной с сосудом, на каждую точку этой жидкости вместе с силой тяжести \vec{mg} действует сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$. Если жидкость неподвижна относительно сосуда, то в системе отсчета, связанной с движущимся сосудом, можно использовать формулы из пунктов 9 и 10, заменяя в них \vec{g} на $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$.

$$p_2 = p_3$$

$$p_1 - p_2 = \rho g' h$$

