

I. Динамика

1. Второй закон Ньютона

$$\vec{m}\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

В инерциальных системах отсчета (ИСО)

m — масса материальной точки,

\vec{a} — ускорение этой материальной точки,

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \vec{F}_{\text{равн}}$ — сумма всех сил, действующих на эту материальную точку (равнодействующая сила).

ИСО — системы отсчета, относительно которых любая материальная точка, свободная от действия сил, не имеет ускорения.

Инерциальной может приближенно считаться:

- Система отсчета, связанная с поверхностью Земли (если не требуется учитывать вращение Земли и силы притяжения к Солнцу и планетам)
- Система отсчета, с центром в центре Земли, оси которой направлены на звезды (если надо учесть вращение Земли вокруг своей оси, но вращение вокруг Солнца и притяжение к Солнцу и планетам можно не учитывать).
- Система отсчета, с центром в центре Солнца, оси которой направлены на звезды (если можно не учитывать вращение солнечной системы вокруг ядра галактики и притяжение к другим звездам).

2. Теорема о движении центра масс

$$M_{\text{сист}} \vec{a}_{\text{ц.м.}} = \vec{F}_1^{\text{внеш}} + \vec{F}_2^{\text{внеш}} + \vec{F}_3^{\text{внеш}} + \dots$$

В ИСО

Внешние силы — силы, действующие на тела, входящие в систему, со стороны тел, не входящих в эту систему.

$M_{\text{сист}}$ — масса системы материальных точек (масса тела или системы тел),

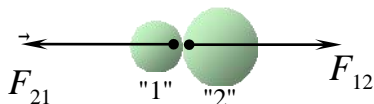
$a_{\text{ц.м.}}$ — ускорение центра масс этой системы,

$\vec{F}_1^{\text{внеш}} + \vec{F}_2^{\text{внеш}} + \dots$ — сумма внешних сил, действующих на эту систему.

3. Третий закон Ньютона

Если одно тело (1) действует на другое тело (2) силой (F_{12}), то

второе тело (2) обязательно действует на первое (1) такой силой F_{21} , что \rightarrow



$$F_{21} = -F_{12}$$

- $F_{21} = F_{12}$
- $F_{21} \uparrow \downarrow F_{12}$
- F_{21} и F_{12} — лежат на одной прямой
- F_{21} и F_{12} — имеют одну природу: например, если F_{12} — сила трения, то F_{21} тоже сила трения.

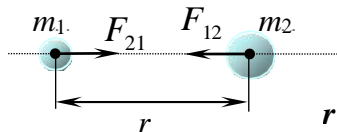
4. Силы, которые могут действовать на тело, можно разделить на две группы:

Силы, действующие на тело со стороны тел, соприкасающихся с ним (действие через контакт).

Силы, действующие на тело со стороны тел, не соприкасающихся с ним (действие через силовые поля: гравитационное, электрическое или магнитное) — гравитационная, электрическая или магнитная сила.

5. Гравитационная сила

$$F_{\text{грав}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$F_{21} = F_{12} = F_{\text{грав}}$ — сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками или однородными шарами (сферами), массы которых m_1 и m_2 .

r — расстояние между этими материальными точками, или центрами шаров (сфер).

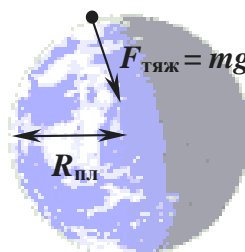
т. е. телами, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними.

γ — гравитационная постоянная $\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ — измеряется в специальных экспериментах, очень важная величина (фундаментальная константа)

$$F_{\text{тяж}} \approx F_{\text{грав. на поверхн.}} = \gamma \frac{M_{\text{пл}}}{R_{\text{пл}}^2} \cdot m = gm$$

g — ускорение свободного падения на поверхности планеты

$$g = \gamma \frac{M_{\text{пл}}}{R_{\text{пл}}^2}$$



Первая космическая скорость —

скорость спутника, который вращается вокруг планеты по круговой орбите минимального возможного радиуса $r \approx R_{\text{пл}}$.

Для такого спутника по II закону Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тяж}}$. Ускорение спутника — центростремительное ускорение (т. к. он равномерно движется по окружности) $a = a_{\text{ц.}} = v^2/r$, сила тяжести $F_{\text{тяж}} = mg$.

Учитывая, что $r \approx R_{\text{пл}}$, получим:

$$m \frac{v^2}{R_{\text{пл}}} = mg \Rightarrow v_1 = \sqrt{gR_{\text{пл}}}$$

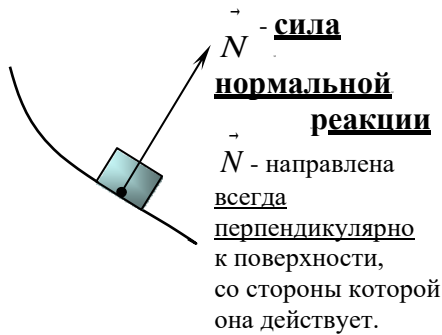
Вес тела — сила, с которой это тело, благодаря наличию у него массы, давит на подставку, на которой лежит, или действует на подвес, на котором висит.

Перегрузка — превышение весом величины mg . Возникает в ракетах, лифтах и пр. при движении с ускорением, направленным вверх.

Невесомость — состояние, в котором вес равен нулю (т. е. тело не давит на подставку). Невесомость может возникать не только при отсутствии гравитационной силы, но и в лифтах, самолетах, космических кораблях и пр., движущихся с $a = g$.

6. Силы, действующие через контакт (со стороны прикасающихся тел)

6.1. Если к телу прикасается **твёрдая поверхность**, то со стороны этой поверхности на тело могут действовать две силы:



Эта сила мешает телу "пройти сквозь поверхность" (т. е. ограничивает область возможного движения тела).

По своей природе она является силой упругости.

Сила нормальной реакции действует всегда, когда между телом и поверхностью есть контакт.

Сила трения - $F_{тр}$

$F_{тр}$ - направлена всегда параллельно поверхности, со стороны которой действует (по касательной к поверхности, если поверхность не плоская).

Эта сила мешает телу скользить по поверхности (иногда делает скольжение совсем невозможным).

По своей природе она является результатом взаимного притяжения молекул тела и поверхности, а также зацепления микронеровностей тела и поверхности.

Сила трения может отсутствовать: $F_{тр} = 0$, если

1. В задаче указано, что "поверхность гладкая".
2. Тело "не стремится скользить", т. е. оно не скользило бы по поверхности даже, если бы поверхность вдруг стала абсолютно гладкой и скользкой.

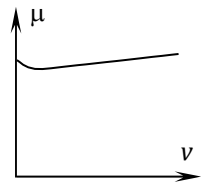
$$F_{тр} = \mu N$$

Если происходит скольжение

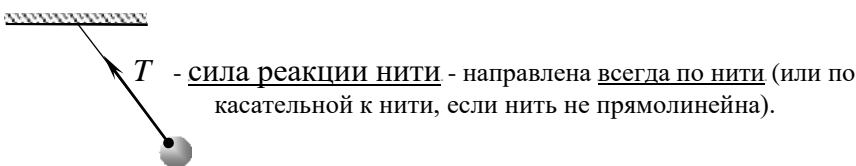
$$F_{тр} \leq \mu N$$

Если нет скольжения

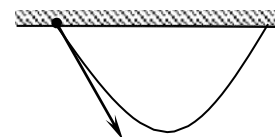
μ - **коэффициент трения** между телом и поверхностью. Он зависит от материала, степени шероховатости тела и поверхности, а также от скорости тела относительно поверхности v . (см. график)



6.2. Если к телу прикреплена **нерастяжимая натянутая нить** (трос, веревка и т. п.), то со стороны этой нити на тело действует **сила реакции нити** (сила натяжения нити)



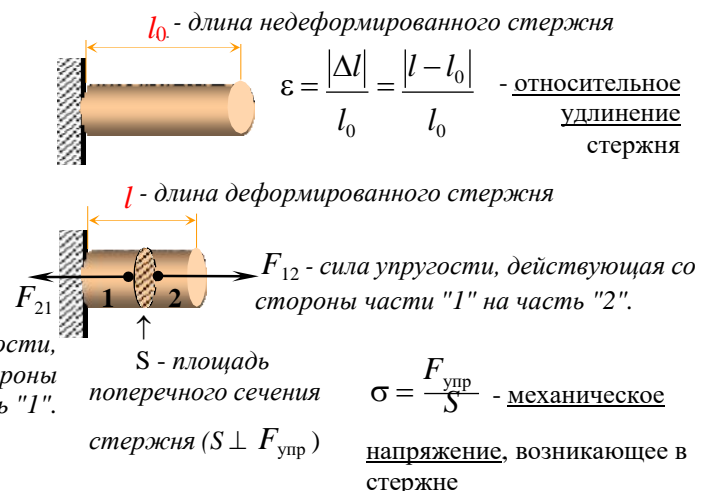
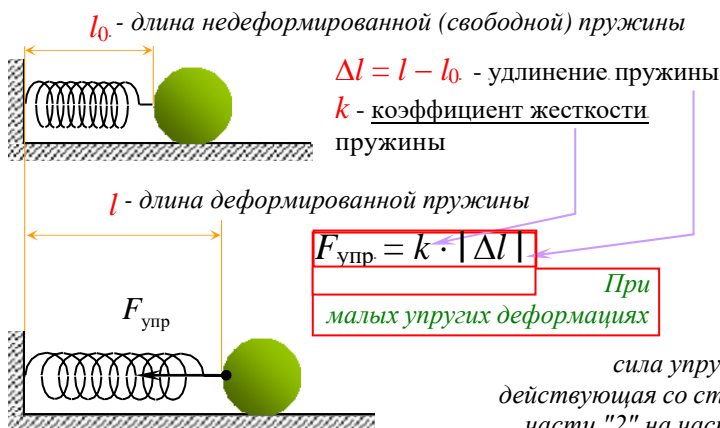
Если мысленно разделить нить на две части, то сила реакции будет действовать со стороны одной части нити на другую часть этой нити. (В этом случае чаще употребляют название "сила натяжения нити".)



T - сила, действующая на потолок со стороны веревки, прикрепленной к нему.

Деформация считается упругой, если после прекращения действия деформирующих сил тело возвращается к начальной форме

6.3. Если к телу прикасается **упруго деформированное тело** (пружина, упругий стержень, резиновый шнур и т. п.), то со стороны упруго деформированного тела действует **сила упругости** ($F_{упр}$) на тела, мешающие ему вернуться в недеформированное состояние. (Если мысленно расщечь деформированное тело на части, то со стороны одной части на другую тоже может действовать сила упругости.)



Из закона Гука:

$$\frac{F_{упр}}{S} = E \frac{|\Delta l|}{l_0} \Rightarrow F_{упр} = \frac{ES}{l_0} |\Delta l|$$

Значит, для упругого стержня $F_{упр} = k \cdot |\Delta l|$, где $k = ES/l_0$ - коэффициент жесткости упругого стержня.

Закон Гука: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

При малых упругих деформациях

E - модуль упругости (модуль Юнга) материала стержня.

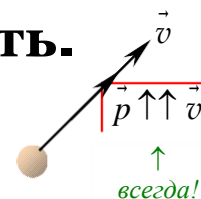
II. Законы сохранения. Работа и мощность.

1. Импульс материальной точки

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

m - масса материальной точки

\vec{v} - скорость этой материальной точки



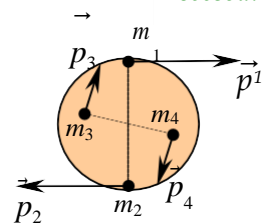
2. Импульс системы материальных точек

равен векторной сумме импульсов всех точек, входящих в эту систему.

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}^1 + \vec{p}^2 + \dots + \vec{p}^n$$

Пример: импульс однородного диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр

$$\vec{p}_{\text{диск}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \dots + \vec{p}_n = 0$$



3. Теорема об изменении импульса материальной точки

$$\Delta \vec{p} = \sum \vec{F} \cdot \Delta t$$

$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ - изменение импульса материальной точки.

$\sum \vec{F}$ - сумма всех сил, действующих на материальную точку.

$$\sum \vec{F} = \text{const}$$

Δt - время действия сил.

$\vec{F} \cdot \Delta t$ - импульс силы.

Выводится из II закона Ньютона: $m\vec{a} = \sum \vec{F}$. Если $\sum \vec{F} = \text{const}$, то $\vec{a} = \text{const}$ и

$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$ Подставив в уравнение \uparrow и, домножив обе части на Δt , получим ...

4. Теорема об изменении импульса системы материальных точек

Из п. 2: $\Delta \vec{p}_{\text{сист}} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 + \dots + \Delta \vec{p}_n = \sum \vec{F} \Delta t;$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} + \sum \vec{F}_{\text{внутр}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} + 0$$



$\uparrow \sum \vec{F}$ — сумма всех сил, действующих на все мат. точки системы

Из п.3: $\Delta \vec{p}_1 = \sum \vec{F}_1 \Delta t, \Delta \vec{p}_2 = \sum \vec{F}_2 \Delta t, \dots$ $\sum \vec{F}_{\text{внеш}}$ — сумма внешних сил, действующих на все мат. точки системы

$\sum \vec{F}_{\text{внутр}}$ — сумма внутренних сил, действующих на все мат. точки системы

$$\sum \vec{F}_{\text{внутр}} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \dots + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \dots = 0 \text{ — по III закону Ньютона } \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} = 0, \dots$$

$$\Delta \vec{p}_{\text{сист}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t$$

$\sum \vec{F}_{\text{внеш}}$ — сумма внешних сил, действующих на все мат. точки системы

Δt — время, в течение которого действовали силы.

$\Delta \vec{p}_{\text{сист}}$ — изменение импульса системы материальных точек за время Δt

5. Закон сохранения импульса:

$$\vec{p}'_{\text{сист}} = \vec{p}_{\text{сист}}$$

Если, 1) $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$
2) $\Delta t \approx 0$ - при быстрых взаимодействиях (взрывах, выстрелах, соударениях), если внешние силы не возрастают до больших значений и остаются малы по сравнению с внутренними силами.

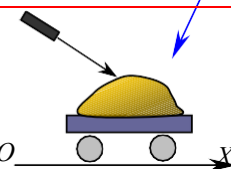
Импульс системы материальных точек сохраняется, если

- 1) Сумма внешних сил, действующих на эту систему **равна нулю**.
- 2) **Время** действия внешних сил **мало** так, что импульс системы не успевает существенно измениться - выстрелы, взрывы, соударения, при которых внешние силы малы по сравнению с внутренними силами.

Кроме того,

- 3) **сохраняется проекция импульса на ту координатную ось, к которой перпендикулярна сумма внешних сил.**

$$p'_{\text{сист}x} = p_{\text{сист}x}, \text{ если } \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \perp OX$$

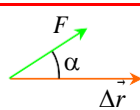


6. Работа силы

Единица измерения работы в СИ
 $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$A_F = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \alpha$$

$F = \text{const}$ (и движение по прямой, в неизменном направлении.)



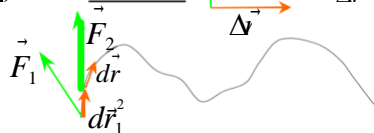
A_F — работа силы F
 $\Delta \vec{r}$ — перемещение материальной точки, на которую действует сила \vec{F} .

α — угол между силой F и перемещением $\Delta \vec{r}$.

$A > 0$, если α — острый угол.

$A < 0$, если α — тупой угол.

$A = 0$, если $\alpha = 90^\circ$.



Чтобы найти работу не постоянной силы над точкой, которая движется по произвольной траектории, надо мысленно разбить движение на такие малые перемещения dr_1, dr_2, \dots , чтобы на каждом из них с достаточной точностью можно было бы считать движение

прямолинейным, а силу постоянной. Тогда

$$A = F_1 dr_1 + F_2 dr_2 + \dots$$

7. Мощность

Единица измерения мощности в СИ
 $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$

$$N = \frac{A}{t}$$

$N = \text{const}$

Работа, совершенная за время t .

Если мощность не постоянна, то вычисляется

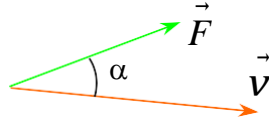
средняя мощность:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{t}$$

мгновенная мощность:

$$N = \frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot v$$

$$N = F \cdot v \cdot \cos \alpha$$



8. Механическая энергия

$$E_{\text{мех}} = E_k + E_p$$

Потенциальная энергия

— этой энергией обладают тела, на которые

действуют консервативные силы: $F_{\text{грав}} (F_{\text{тяж}}), F_{\text{упр}}, F_{\text{электр}}$

Консервативны, если они неизменны во времени для каждого положения, или являются внутренними для системы.

Кинетическая энергия

Этой энергией обладают движущиеся тела.

Силы, работа которых над системой при ее перемещении зависит только от начального и конечного положений этой системы. Работа консервативных сил не зависит от того, каким способом (по какой траектории) система была переведена из начального положения в конечное.

Основное свойство консервативных сил: работа консервативных сил

над системой, совершившей движение по замкнутой траектории (когда конечное положение совпадает с начальным), равна нулю.

Потенциальная энергия

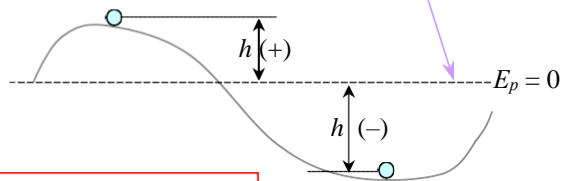
— это такая функция от расположения системы, убыль которой при перемещении системы равна работе консервативных сил на этом перемещении.

$$E_{p1} - E_{p2} = A_{\text{конс1-2}}$$

Чтобы вычислить конкретное значение E_p , договариваются в каком положении системы "О" считать $E_p(O) = 0$. Тогда в произвольном положении "М" потенциальная энергия системы $E_p(M) = A_{\text{конс М-О}}$

$$E_{p(\text{тяж})} = \pm mgh_{\text{центра масс над нулевым уровнем}}$$

$$E_p^{\text{упр}} = \frac{k\Delta l^2}{2}$$



9. Теорема о механической энергии

$$\Delta E_{\text{мех}} = \Delta E_k + \Delta E_p = A_{\text{всех сил}} - A_{\text{конс}} = A_{\text{неконс. сил}}$$

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{неконс}}$$

10. Закон сохранения механической энергии

Механическая энергия системы материальных точек сохраняется, если в системе совершают работу только консервативные силы ($A_{\text{нек}} = 0$)

$$E'_{\text{мех}} = E'_{\text{мех}}$$

Если $A_{\text{неконс}} = 0$

11. Диссипативные силы

— неконсервативные силы, работа которых сопровождается выделением

$F_{\text{трения скольжения}}; F_{\text{сопр. жидк. и г.}}; F_{\text{неупруг. взаимод.}}$

тепла.

$A_{\text{внутр. дис}} = -Q$ — не зависит от системы отсчета

$$E'_{\text{мех}} - E''_{\text{мех}} = Q$$

Если $A_{\text{неконс}} = A_{\text{внутр. дис.}}$

12. Методы вычисления работы

$$A_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \alpha \quad \vec{F} = \text{const}$$

$$A_{\text{конс1-2}} = E_{p1} - E_{p2}$$

$$A_{\text{тяж}} = mg(h_1 - h_2)$$

$$A_{\text{неконс}} = \Delta E_{\text{мех}}$$

$$A_{\text{упр}} = \frac{k}{2}(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2)$$

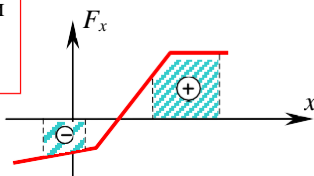
$$A_{\text{всех сил}} = \Delta E_k$$

$$A_{\vec{F}} = \pm S \text{ под графиком } F_x(x)$$

Если $\vec{F} \parallel OX$, или $v \parallel OX$

Численно

"+" — если график выше оси x
 "-" — если график ниже оси x



13. Средняя по времени сила

$$\vec{F}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{сист}}}{\Delta t}$$

Средняя по времени сумма внешних сил, действующих на систему материальных точек

Изменение импульса системы за время Δt

