Графическое решение задачи линейного программирования

Решить графически данную задачу линейного программирования.

$$F = 4x_1 + 3x_2 - 1 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. Найдем вначале область допустимых решений (ОДР). Решим графически первое неравенство:

$$x_1 + x_2 \le 8 \qquad (1)$$

Для этого построим вначале прямую линию, соответствующую неравенству:

$$x_1 + x_2 = 8. \qquad (1.1)$$

Поскольку, если $x_1 = 0$, то $x_2 = 8$, а значит прямая (1.1) проходит через точку (0;8). Аналогично, если $x_1 = 8$, то $x_2 = 0$, следовательно, прямая (1.1) проходит также через точку (8;0). Проведем через эти две точки прямую линию. (см. рис. 1). Эта линия делит плоскость на две полуплоскости, которые мы условно назовем верхней и нижней полуплоскостями. Так как координаты точки (0;0) удовлетворяют неравенству (1), то неравенству соответствует нижняя полуплоскость, которая содержит эту точку. Этот факт мы изобразим на рис. 1 штрихами, направленными вниз от линии 1 .

Теперь решим графически второе неравенство:

$$-2x_1 + 3x_2 \le 9 \qquad (2)$$

Ему соответствует прямая, заданная уравнением:

$$-2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (2.1)$$

На примере этого уравнения напомним другой способ построения прямой. Перепишем уравнение (2.1) в виде:

$$x_2 = 3 + \frac{2}{3}x_1 \qquad (2.2)$$

Тогда при $x_1 = 0$, находим, что $x_2 = 3$, это дает точку (0;3) искомой прямой. Угловой коэффициент этой прямой $\kappa = \frac{2}{3}$. Но угловой коэффициент любой прямой равен $tg\alpha$ где α - угол наклона прямой к оси 0х. Если теперь мы отложим три единицы вправо от точки (0;3) , а затем две единицы вверх, то получим другую точку (3;5) которая также лежит на прямой (2.1). Через полученные точки проводим прямую. Начало координат (0;0) удовлетворяет (2) и лежит ниже графика линии 2 , поэтому соответствующая полуплоскость является «нижней», что мы и отмечаем штрихами, направленными вниз от прямой 2. Аналогично строим прямую, соответствующую неравенству

$$2x_1 - x_2 \le 10 \qquad (3)$$

Уравнение

$$2x_1 - x_2 = 10 \qquad (3.1)$$

заменяем на уравнение $x_2 = 2x_1 - 10$.

Ясно, что прямая проходит через точку (5;0), и имеет угловой коэффициент к = 2. При этом самому неравенству

$$2x_1 - x_2 \le 10 \Leftrightarrow x_2 \ge 2x_1 - 10$$

соответствует верхняя полуплоскость, отмеченная штрихами вверх от прямой 3.

Тривиальным неравенствам $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ соответствует первая четверть координатной плоскости. Пересечение всех указанных полуплоскостей определяет ОДР данной задачи. На рисунке 1 это область, ограниченная выпуклым пятиугольником *OABCD*.

Изобразим на рисунке градиент (вектор роста $\vec{c}$) целевой функции F . Это вектор началом в (0;0) и концом в точке М (4;3), поскольку $\vec{c} = \{4;3\}$.

Построим линию уровня $F(x) = 11$. Она определяется уравнением:

$$4x_1 + 3x_2 = 12 \qquad (4)$$

Мы взяли здесь константу С =11, для того чтобы точки пересечения прямой (4) с осями координат имели целые координаты.

$$4x_1 + 3x_2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Действительно, согласно уравнению прямой в отрезках, имеем две точки пересечения линии уровня (4) с осями координат: $M_1(0;4)$ и $M_2(3;0)$. Через них проводим пунктиром соответствующую линию уровня. Очевидно, что она перпендикулярна градиенту $\vec{c}$. Отрезок $[M_1M_2]$ пересекается с ОДР и в каждой его точке значение целевой функции $F(x) = 11$.

Известно, что значение функции F увеличивается в направлении градиента $\vec{c}$. Чтобы найти максимальное значение $F(x)$ на ОДР будем параллельно перемещать линию уровня в направлении градиента $\vec{c}$ до тех пор, пока, она будет иметь хотя бы одну точку пересечения с ОДР задачи. Из рисунка ясно, что последним пересечением смещенной линии уровня (4) и ОДР будет точка *C*.

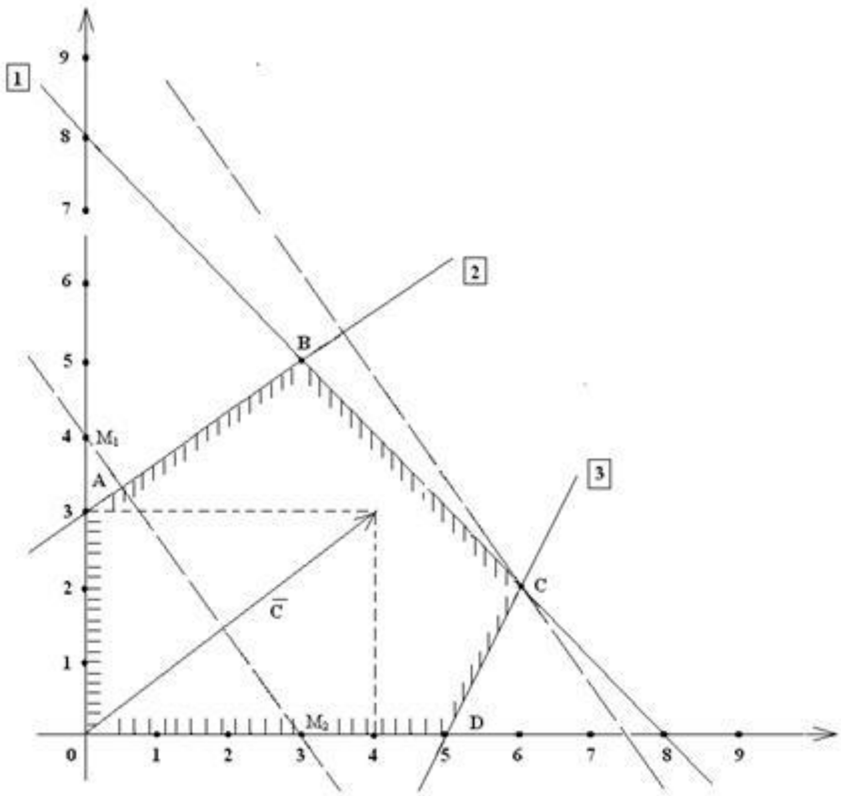


Рис 1. Графическое решение задачи ЛП.

На этой линии уровня очевидно и будет достигаться максимальное значение целевой функции *F* в ОДР, поскольку при дальнейшем движении линии уровня в направлении вектора градиента , она перестает пересекаться с ОДР. Итак, максимальное значение функция F(x) имеет в точке *C*. Так как эта точка является пересечением прямых 1 и 3, то ее координаты находятся из системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 = 10 \end{cases} \qquad (5)$$

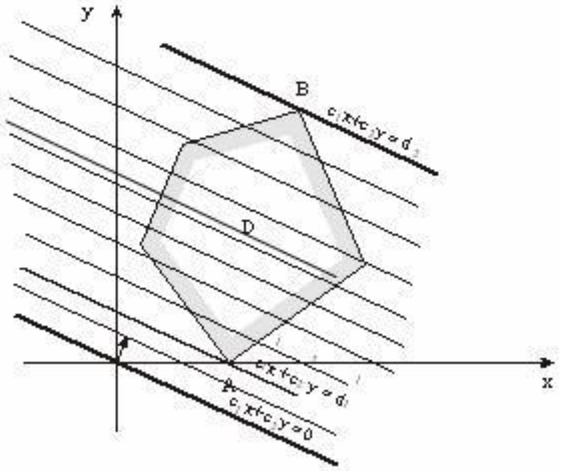
Чтобы решить эту систему, складываем уравнения. Тогда получим, что $3x_1 = 18 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = 2.$ Итак, координаты точки найдены *C* (6;2). Найдем максимальное значение функции:

$$F_{\max} = F(C) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 - 1 = 29\,.$$

Ответ: максимальное значение целевой функции *F* достигается в точке *C* (6;2) и равно 29:

Решение задачи линейного программирования графическим методом включает следующие этапы:

1. На плоскости $X_1 0 X_2$ строят прямые.
2. Определяются полуплоскости.
3. Определяют многоугольник решений;
4. Строят вектор $\vec{n} = \overrightarrow{gradF} = \{c_1, c_2\}$, который указывает направление возрастания целевой функции;
5. Передвигают прямую, соответствующую целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ в направлении вектора $\vec{n} = \overrightarrow{gradF} = \{c_1, c_2\}$ до крайней точки многоугольника решений.
6. Вычисляют координаты точки и значение целевой функции в этой точке.



При этом могут возникать следующие ситуации:

1. Целевая функция принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение в единственной точке А.

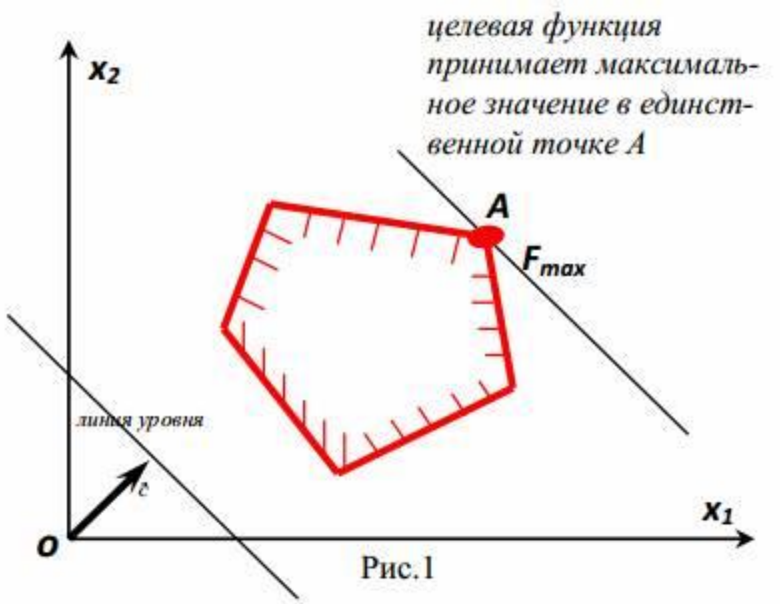


Рис.1

2. Целевая функция принимает экстремальное значение на отрезке АВ(множество решений).

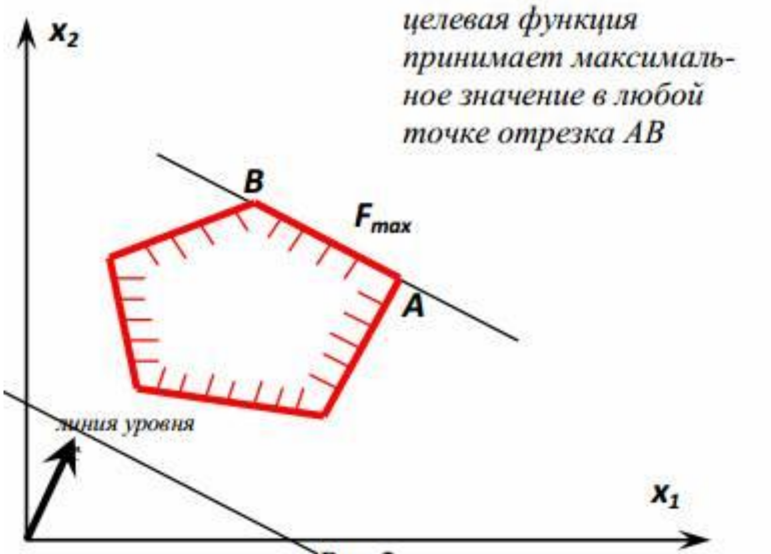


Рис.2

3. Целевая функция не ограничена сверху (при поиске на максимум) или снизу (на минимум)

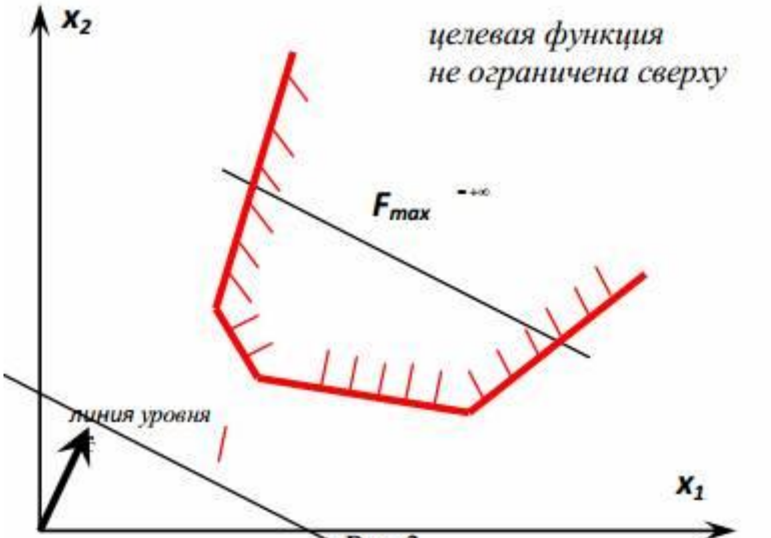


Рис.3

4. Система ограничений задачи несовместна

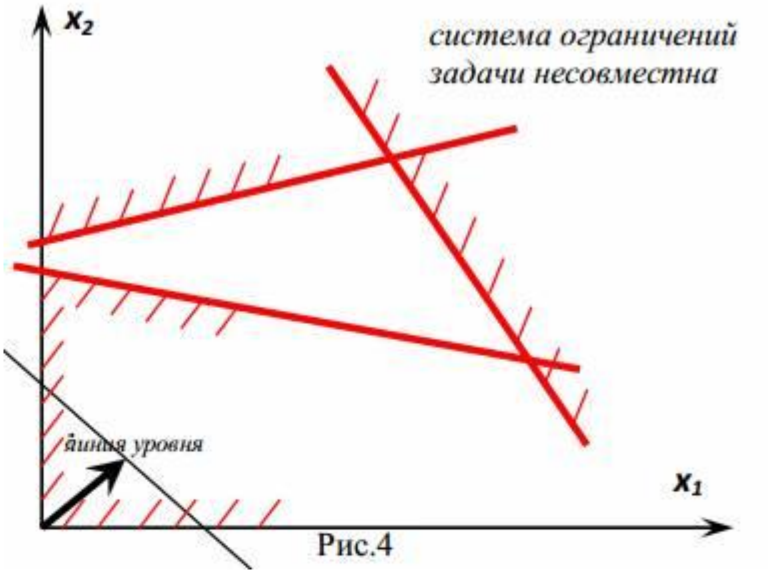


Рис.4