Практические работы

Практическая работа №1
Построение остовного дерева графа. Нахождение найкратчайшего расстояния между заданными вершинами графа

Теоретическая часть:

1. Граф (понятие и определение графа, орграфа, неориентированного графа, вершины, ребра, дуги).
2. Определение: степень вершины графа и орграф, висящая, изолированная, ветвящаяся вершина.
3. Способы представления графа в ЭВМ
4. Матрица смежности вершин орграфа и неориентированного графа
5. Матрица инциденций орграфа и неориентированного графа
6. Определение понятий: цикл, цепь, маршрут в графе.
7. Определение понятия «дерево».
8. Определение понятия «эйлеров цикл»
9. Определение понятия «гамильтонов цикл»
10. Назначение Алгоритма
11. Отличие алгоритма Prim от Kruskal
12. Назначение алгоритма Dejkstra
13. Алгоритм Prim (пошаговая реализация)
14. Алгоритм Kruskal (пошаговая реализация)
15. Алгоритм Dejkstra (пошаговая реализация)

Практическая часть:

1. Дан граф №1 в матричном виде. Элементами матрицы являются веса ребер. Для данного графа (в соответствии с вариантом) построить:

   1) графическое изображение графа;

   2) остовное дерево минимального веса по алгоритму Prim;

   3) остовное дерево минимального веса по алгоритму Kruskal;

2. Для данного графа №2 найти наикратчайшее расстояние от вершины S до всех остальных вершин по алгоритму Dejkstra

Граф №1

Варианты

1. $\begin{vmatrix} 0&5&4&6&7&8&2&1 \\ 5&0&7&6&8&7&3&4 \\ 4&7&0&5&3&7&2&3 \\ 6&6&5&0&4&2&3&7 \\ 7&8&3&4&0&2&0&8 \\ 8&7&7&2&2&0&5&0 \\ 2&3&2&3&0&5&0&0 \\ 1&4&3&7&8&0&0&0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0&2&4&6&7&0&2&3 \\ 2&0&7&6&8&7&3&4 \\ 4&7&0&5&3&7&2&3 \\ 6&6&5&0&4&2&3&7 \\ 7&8&3&4&0&2&0&4 \\ 0&7&7&2&2&0&5&0 \\ 2&3&2&3&0&5&0&0 \\ 3&4&3&7&4&0&0&0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 0&2&5&4&0&0&3&7 \\ 2&0&7&6&8&7&3&4 \\ 5&7&0&5&3&7&2&3 \\ 4&6&5&0&4&2&3&7 \\ 0&8&3&4&0&2&0&4 \\ 0&7&7&2&2&0&5&0 \\ 3&3&2&3&0&5&0&0 \\ 7&4&3&7&4&0&0&0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0&5&4&6&7&8&2&4 \\ 5&0&4&5&6&2&0&3 \\ 4&4&0&5&3&7&2&3 \\ 6&5&5&0&4&2&3&7 \\ 7&6&3&4&0&2&0&8 \\ 8&2&7&2&2&0&5&0 \\ 2&0&2&3&0&5&0&0 \\ 4&3&3&7&8&0&0&0 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 0&2&4&6&7&0&2&3 \\ 2&0&7&6&8&7&3&4 \\ 4&7&0&2&5&4&1&2 \\ 6&6&2&0&4&2&3&7 \\ 7&8&5&4&0&2&0&4 \\ 0&7&4&2&2&0&5&0 \\ 2&3&1&3&0&5&0&0 \\ 3&4&2&7&4&0&0&0 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 0&4&3&7&1&2&0&5 \\ 4&0&7&6&8&7&3&6 \\ 3&7&0&5&3&7&2&4 \\ 7&6&5&0&4&2&3&3 \\ 1&8&3&4&0&2&0&1 \\ 2&7&7&2&2&0&5&0 \\ 0&3&2&3&0&5&0&4 \\ 5&6&4&3&1&0&4&0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0&4&4&6&7&5&2&0 \\ 4&0&7&6&8&7&3&4 \\ 4&7&0&5&3&7&2&3 \\ 6&6&5&0&4&6&3&7 \\ 7&8&3&6&0&2&0&8 \\ 5&7&7&2&2&0&5&0 \\ 2&3&2&3&0&5&0&0 \\ 0&4&3&7&8&0&0&0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0&3&4&6&4&0&1&3 \\ 3&0&7&6&4&7&3&4 \\ 4&7&0&5&3&7&2&3 \\ 6&6&5&0&4&2&3&7 \\ 4&4&3&4&0&2&0&4 \\ 0&7&7&2&2&0&5&0 \\ 1&3&2&3&0&5&0&2 \\ 3&4&3&7&4&0&2&0 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0&2&0&4&0&0&3&7 \\ 2&0&7&6&1&7&3&4 \\ 0&7&0&5&3&7&2&3 \\ 4&6&5&0&4&2&3&7 \\ 0&1&3&4&0&2&0&4 \\ 0&7&7&2&2&0&5&0 \\ 3&3&2&3&0&5&0&3 \\ 7&4&3&7&4&0&3&0 \end{vmatrix}$

$$10.\ \begin{vmatrix} 0&5&4&2&7&8&2&2\\ 5&0&4&5&6&2&0&3\\ 4&4&0&5&3&7&2&3\\ 2&5&5&0&3&2&3&7\\ 7&6&3&3&0&2&0&7\\ 8&2&7&2&2&0&5&0\\ 2&0&2&3&0&5&0&0\\ 2&3&3&7&7&0&0&0 \end{vmatrix}\quad 11.\ \begin{vmatrix} 0&3&4&6&5&0&2&3\\ 3&0&7&6&8&7&3&4\\ 4&7&0&2&6&4&1&2\\ 6&6&2&0&4&2&3&7\\ 5&8&6&4&0&2&0&2\\ 0&7&4&2&2&0&5&0\\ 2&3&1&3&0&5&0&0\\ 3&4&2&7&2&0&0&0 \end{vmatrix}\quad 12.\ \begin{vmatrix} 0&4&0&7&1&2&0&5\\ 4&0&7&6&8&7&3&7\\ 0&7&0&5&3&7&2&4\\ 7&6&5&0&4&2&3&3\\ 1&8&3&4&0&3&0&1\\ 2&7&7&2&3&0&5&0\\ 0&3&2&3&0&5&0&4\\ 5&7&4&3&1&0&4&0 \end{vmatrix}$$

$$13.\ \begin{vmatrix} 0&2&4&6&7&8&2&1\\ 2&0&7&6&4&7&3&4\\ 4&7&0&5&3&7&2&9\\ 6&6&5&0&4&2&3&7\\ 7&4&3&4&0&2&0&8\\ 8&7&7&2&2&0&5&0\\ 2&3&2&3&0&5&0&3\\ 1&4&9&7&8&0&3&0 \end{vmatrix}\quad 14.\ \begin{vmatrix} 0&9&4&6&8&0&2&5\\ 9&0&7&6&8&7&3&4\\ 4&7&0&5&3&7&2&3\\ 6&6&5&0&7&2&3&7\\ 8&8&3&7&0&2&0&4\\ 0&7&7&2&2&0&5&0\\ 2&3&2&3&0&5&0&0\\ 5&4&3&7&4&0&0&0 \end{vmatrix}\quad 15.\ \begin{vmatrix} 0&2&3&4&0&0&3&9\\ 2&0&5&6&8&7&3&4\\ 3&5&0&5&3&7&2&3\\ 4&6&5&0&4&2&3&7\\ 0&8&3&4&0&8&0&4\\ 0&7&7&2&8&0&5&0\\ 3&3&2&3&0&5&0&0\\ 9&4&3&7&4&0&0&0 \end{vmatrix}$$

$$16.\ \begin{vmatrix} 0&0&4&6&7&8&2&4\\ 0&0&4&5&6&2&0&3\\ 4&4&0&9&3&7&2&3\\ 6&5&9&0&4&2&3&7\\ 7&6&3&4&0&2&0&8\\ 8&2&7&2&2&0&5&4\\ 2&0&2&3&0&5&0&2\\ 4&3&3&7&8&4&2&0 \end{vmatrix}\quad 17.\ \begin{vmatrix} 0&8&4&6&7&0&2&5\\ 8&0&3&6&8&7&3&4\\ 4&3&0&2&5&4&1&2\\ 6&6&2&0&4&2&3&7\\ 7&8&5&4&0&2&0&4\\ 0&7&4&2&2&0&5&0\\ 2&3&1&3&0&5&0&4\\ 5&4&2&7&4&0&4&0 \end{vmatrix}\quad 18.\ \begin{vmatrix} 0&4&3&7&1&2&0&5\\ 4&0&7&6&8&7&3&6\\ 3&7&0&5&3&7&2&4\\ 7&6&5&0&4&2&3&3\\ 1&8&3&4&0&2&0&1\\ 2&7&7&2&2&0&5&0\\ 0&3&2&3&0&5&0&4\\ 5&6&4&3&1&0&4&0 \end{vmatrix}$$

$$19.\ \begin{vmatrix} 0&4&4&6&2&5&2&0\\ 4&0&7&6&8&7&3&4\\ 4&7&0&5&3&3&2&3\\ 6&6&5&0&4&6&3&7\\ 2&8&3&6&0&2&0&8\\ 5&7&3&2&2&0&5&0\\ 2&3&2&3&0&5&0&1\\ 0&4&3&7&8&0&1&0 \end{vmatrix}\quad 20.\ \begin{vmatrix} 0&3&4&5&4&2&4&3\\ 3&0&7&6&4&7&3&4\\ 4&7&0&5&3&7&2&3\\ 5&6&5&0&4&2&3&7\\ 4&4&3&4&0&2&0&4\\ 2&7&7&2&2&0&5&8\\ 4&3&2&3&0&5&0&2\\ 3&4&3&7&4&8&2&0 \end{vmatrix}\quad 21.\ \begin{vmatrix} 0&2&9&4&0&0&2&7\\ 2&0&7&6&1&7&3&4\\ 9&7&0&5&3&7&2&3\\ 4&6&5&0&4&2&3&7\\ 0&1&3&4&0&4&0&4\\ 0&7&7&2&4&0&5&0\\ 2&3&2&3&0&5&0&3\\ 7&4&3&7&4&0&3&0 \end{vmatrix}$$

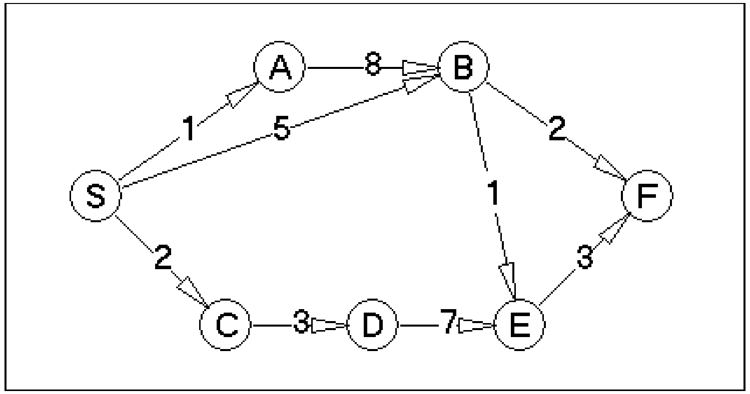
$$22.\ \begin{vmatrix} 0&9&4&2&7&0&2&2\\ 9&0&4&5&6&2&0&3\\ 4&4&0&5&3&7&2&3\\ 2&5&5&0&3&2&3&7\\ 7&6&3&3&0&2&0&8\\ 0&2&7&2&2&0&5&0\\ 2&0&2&3&0&5&0&0\\ 2&3&3&7&8&0&0&0 \end{vmatrix}\quad 23.\ \begin{vmatrix} 0&3&4&7&5&0&2&3\\ 3&0&7&6&8&7&3&4\\ 4&7&0&2&6&4&1&2\\ 7&6&2&0&4&2&3&7\\ 5&8&6&4&0&2&0&2\\ 0&7&4&2&2&0&5&0\\ 2&3&1&3&0&5&0&3\\ 3&4&2&7&2&0&3&0 \end{vmatrix}\quad 24.\ \begin{vmatrix} 0&2&0&5&1&2&0&5\\ 2&0&4&6&8&7&3&7\\ 0&4&0&5&3&7&2&4\\ 5&6&5&0&4&2&3&3\\ 1&8&3&4&0&3&0&1\\ 2&7&7&2&3&0&5&3\\ 0&3&2&3&0&5&0&4\\ 5&7&4&3&1&3&4&0 \end{vmatrix}$$

$$25.\ \begin{vmatrix} 0&1&6&6&7&8&2&1\\ 1&0&7&6&8&7&3&4\\ 6&7&0&5&3&7&2&3\\ 6&6&5&0&4&2&3&7\\ 7&8&3&4&0&2&0&8\\ 8&7&7&2&2&0&5&0\\ 2&3&2&3&0&5&0&3\\ 1&4&3&7&8&0&3&0 \end{vmatrix}\quad 26.\ \begin{vmatrix} 0&2&4&9&7&0&2&3\\ 2&0&7&6&8&7&3&4\\ 4&7&0&4&3&7&2&3\\ 9&6&4&0&4&2&3&7\\ 7&8&3&4&0&2&0&2\\ 0&7&7&2&2&0&5&0\\ 2&3&2&3&0&5&0&0\\ 3&4&3&7&2&0&0&0 \end{vmatrix}\quad 27.\ \begin{vmatrix} 0&2&1&4&0&4&3&7\\ 2&0&7&6&8&7&3&4\\ 1&7&0&5&3&7&2&3\\ 4&6&5&0&4&2&3&7\\ 0&8&3&4&0&2&0&4\\ 4&7&7&2&2&0&5&5\\ 3&3&2&3&0&5&0&9\\ 7&4&3&7&4&5&9&0 \end{vmatrix}$$

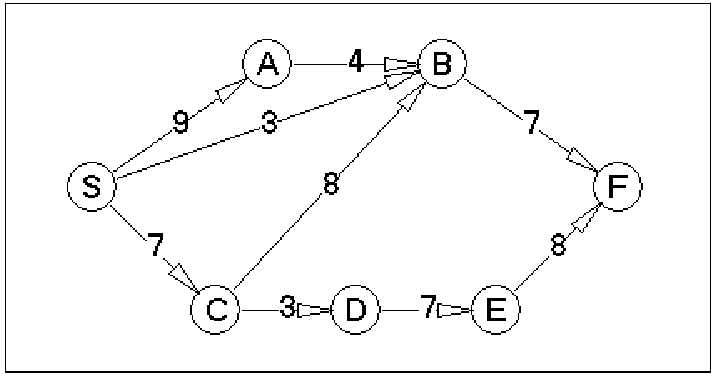
28. $\begin{vmatrix} 0&5&1&6&7&8&2&4 \\ 5&0&4&5&6&2&0&3 \\ 1&4&0&5&3&7&2&3 \\ 6&5&5&0&4&2&3&7 \\ 7&6&3&4&0&2&0&5 \\ 8&2&7&2&2&0&5&0 \\ 2&0&2&3&0&5&0&1 \\ 4&3&3&7&5&0&1&0 \end{vmatrix}$ 29. $\begin{vmatrix} 0&2&9&6&3&0&2&3 \\ 2&0&7&1&8&7&3&4 \\ 9&7&0&2&5&4&1&2 \\ 6&1&2&0&4&2&3&7 \\ 3&8&5&4&0&2&0&4 \\ 0&7&4&2&2&0&5&0 \\ 2&3&1&3&0&5&0&0 \\ 3&4&2&7&4&0&0&0 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 0&0&3&7&1&2&8&5 \\ 0&0&7&6&8&7&3&6 \\ 3&7&0&5&3&7&2&4 \\ 7&6&5&0&4&2&3&3 \\ 1&8&3&4&0&2&0&1 \\ 2&7&7&2&2&0&5&9 \\ 8&3&2&3&0&5&0&4 \\ 5&6&4&3&1&9&4&0 \end{vmatrix}$

Граф №2
Варианты

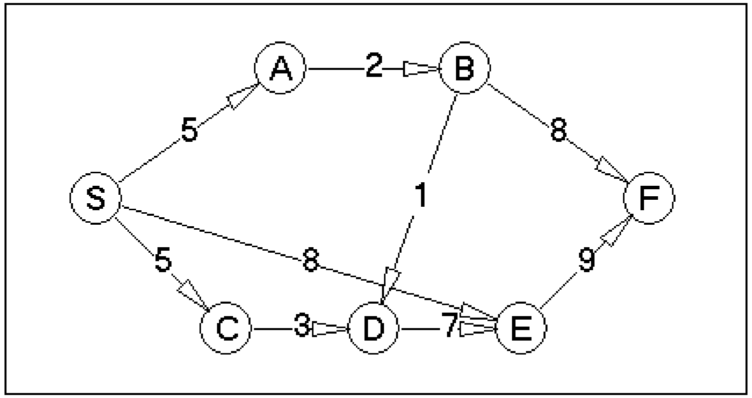
1



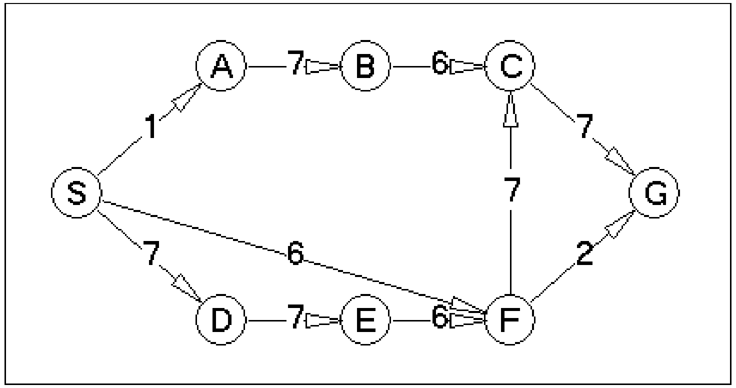
2



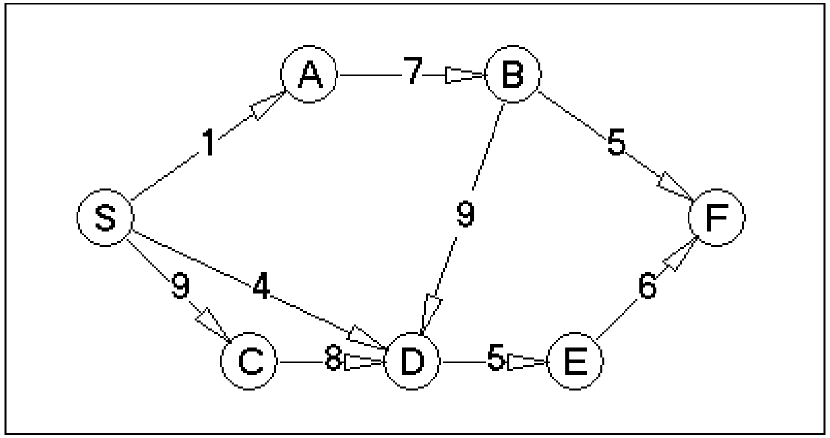
3

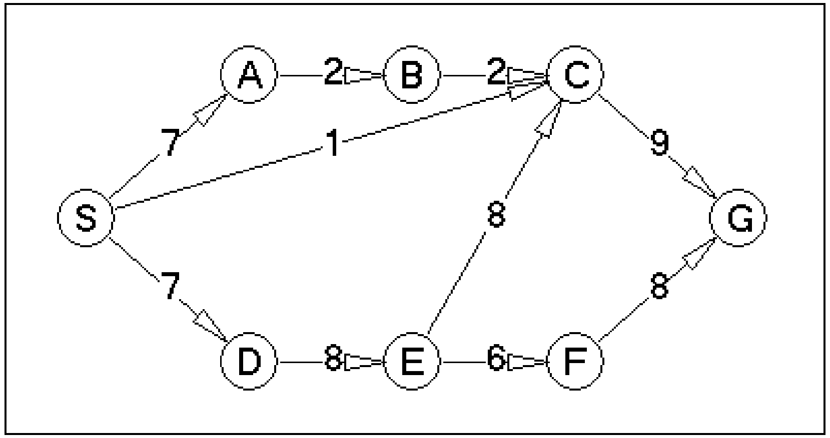


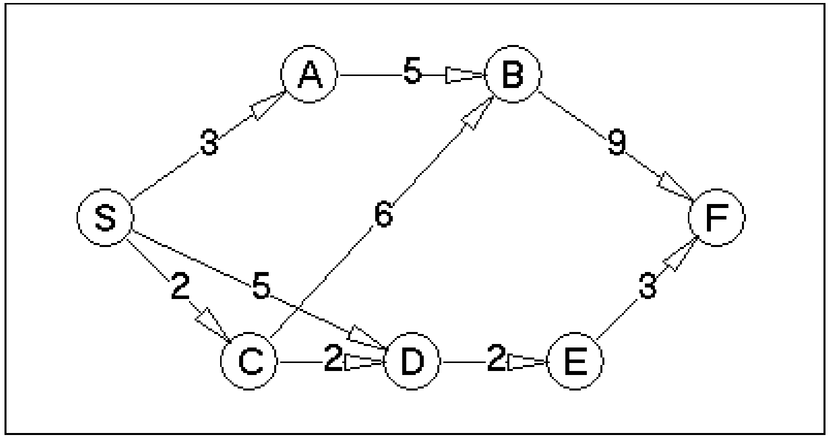
4

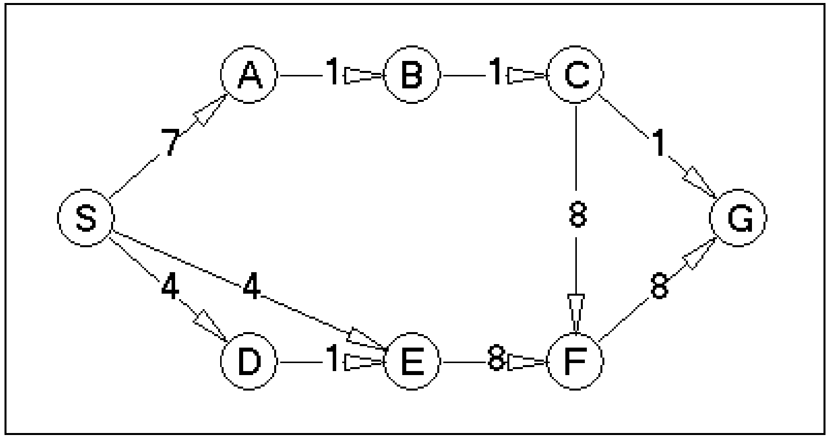


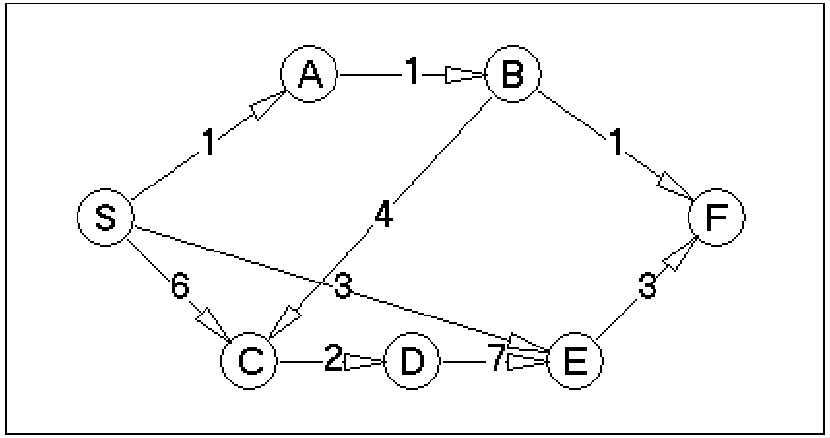
5


A
7
B
1
5
S
9
F
9
4
6
C
8
D
5
E
6

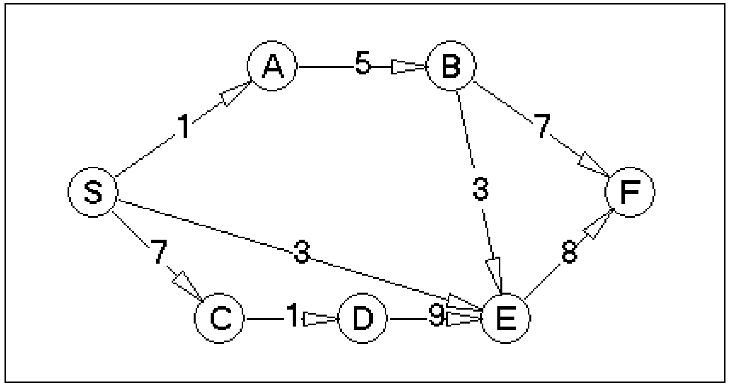

A
2
B
2
C
7
1
9
S
8
G
7
8
D
8
E
6
F
7


A
5
B
3
9
S
6
F
2
5
3
C
2
D
2
E
8

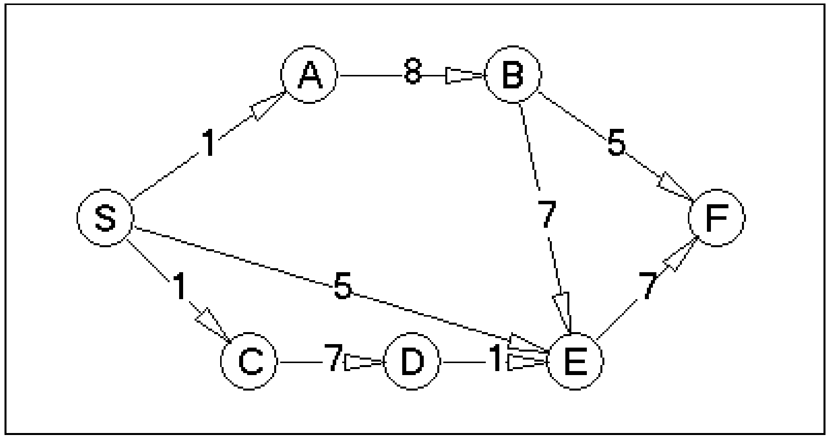

A
1
B
1
C
7
1
S
8
G
4
4
8
D
1
E
8
F
9


A
B
S
F
C
D
E
1
1
1
4
6
3
3
2
7
3

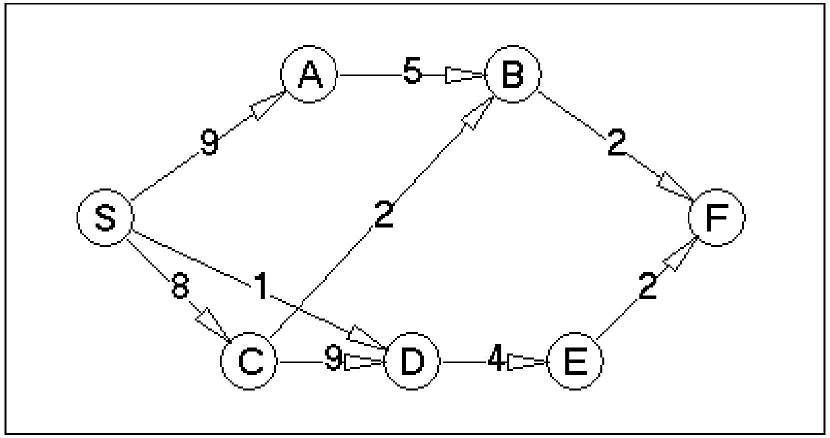
10


A
B
S
F
C
D
E
5
1
7
3
7
3
8
1
9

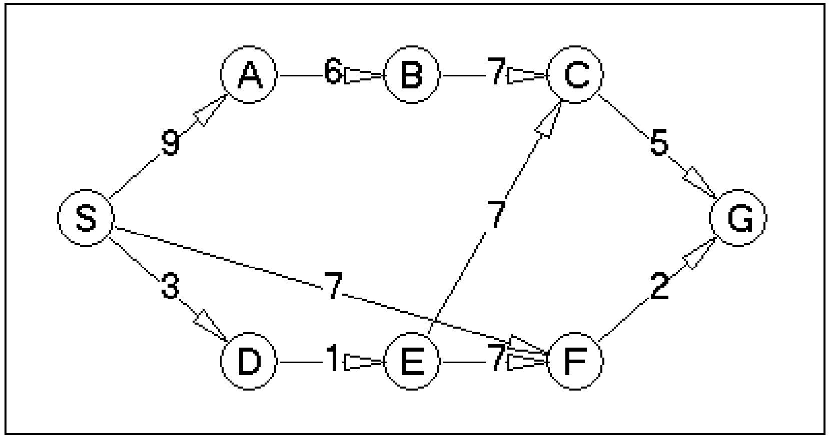
11


A
B
S
F
C
D
E
8
1
5
7
1
5
7
7
1

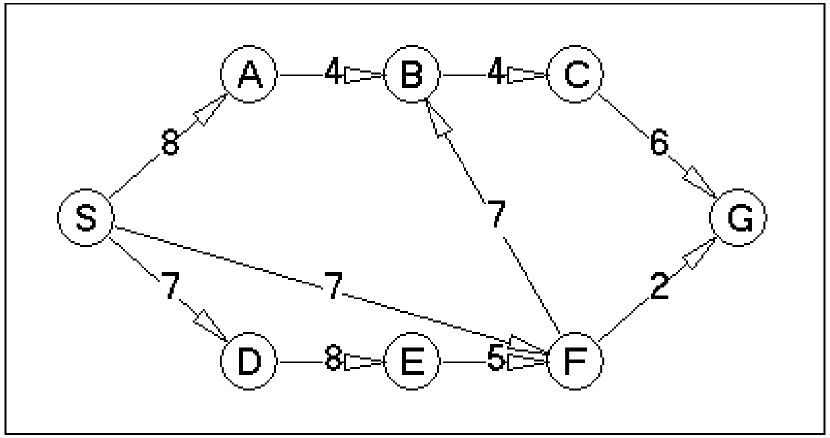
12


A
B
S
F
C
D
E
5
9
2
2
8
1
2
9
4

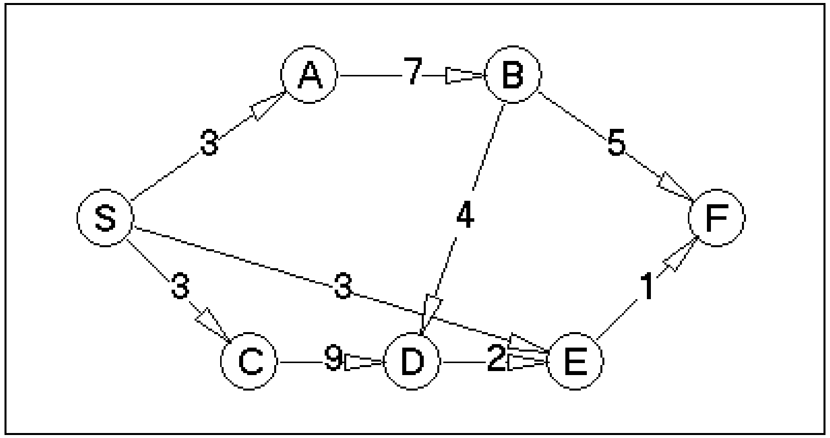
13


A
B
C
S
G
D
E
F
6
7
9
5
7
3
7
2
1
7

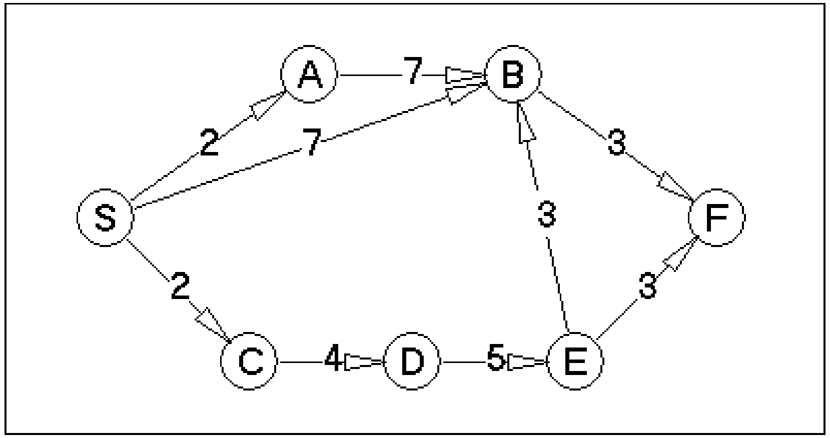
14


S
A
B
C
D
E
F
G
8
4
4
6
7
7
7
2
8
5

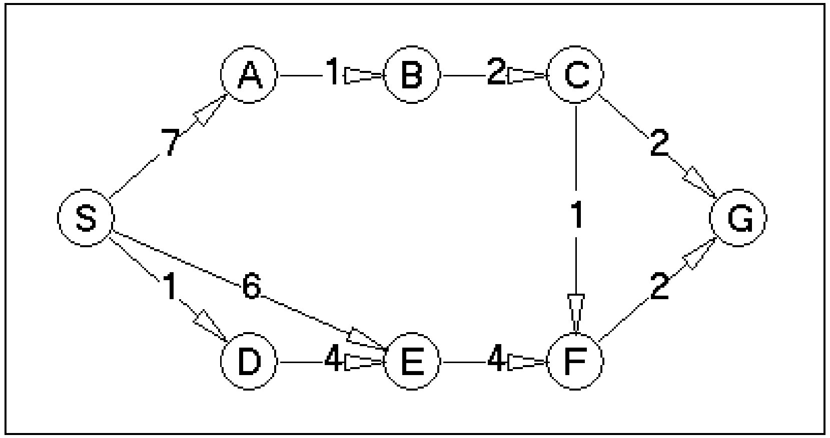
15


S
A
B
C
D
E
F
3
7
5
4
3
3
1
9
2

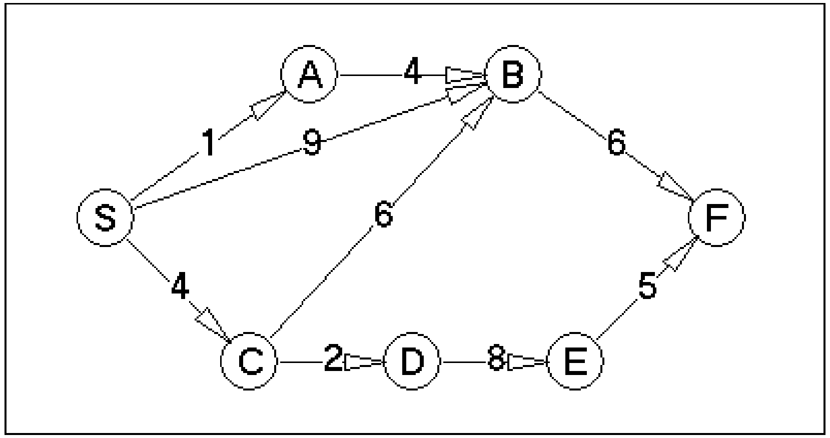
16


S
A
B
C
D
E
F
2
7
7
3
3
2
3
4
5

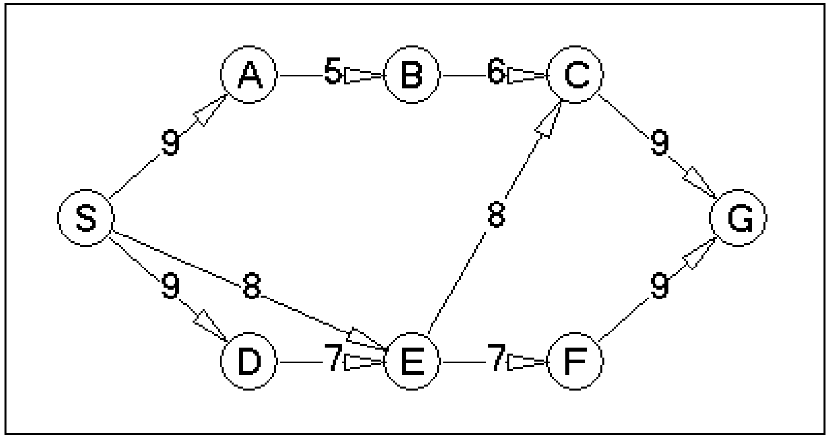
17


S
A
B
C
D
E
F
G
7
1
2
2
1
6
1
2
4
4

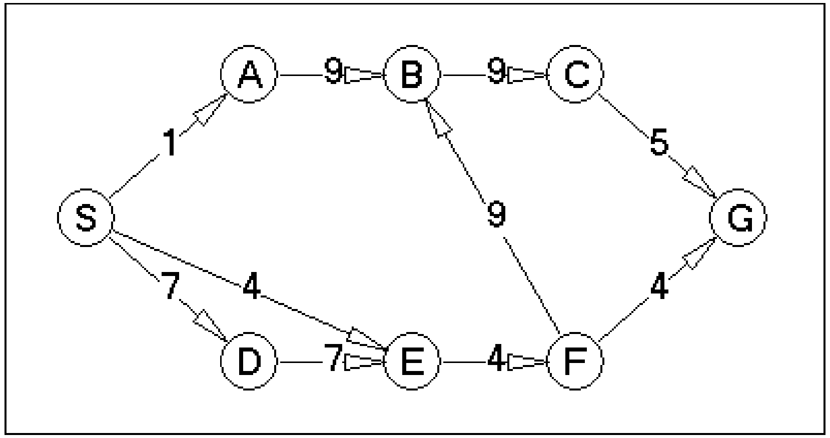
18


S
A
B
C
D
E
F
1
4
9
6
4
2
8
5
6

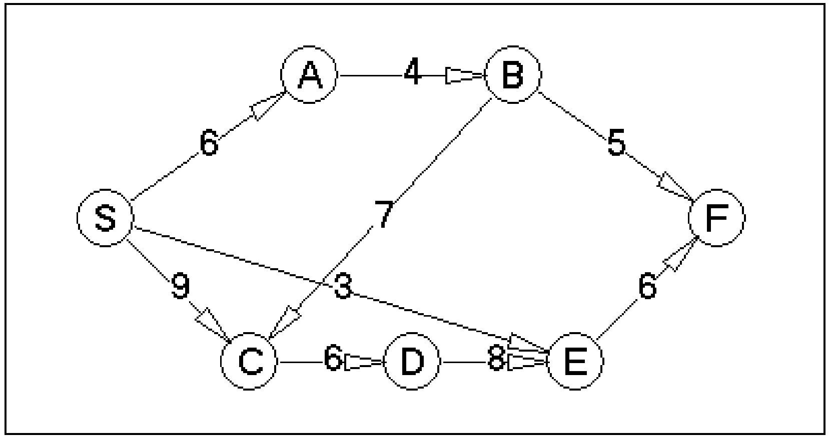
19


S
A
B
C
D
E
F
G
9
5
6
9
8
8
9
7
7
9

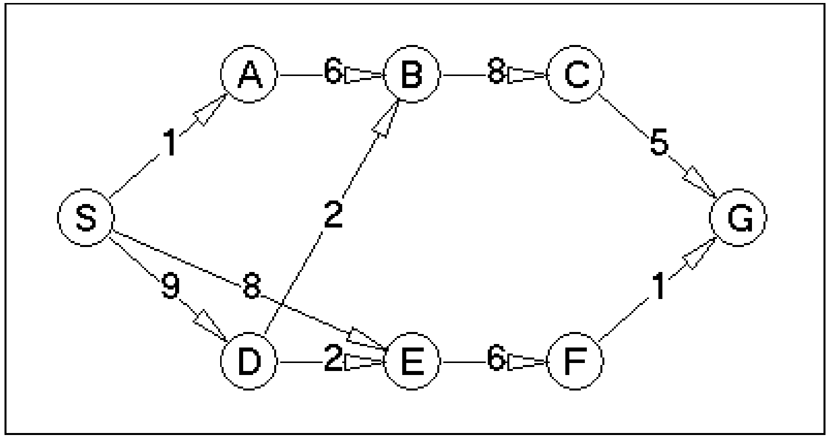
20

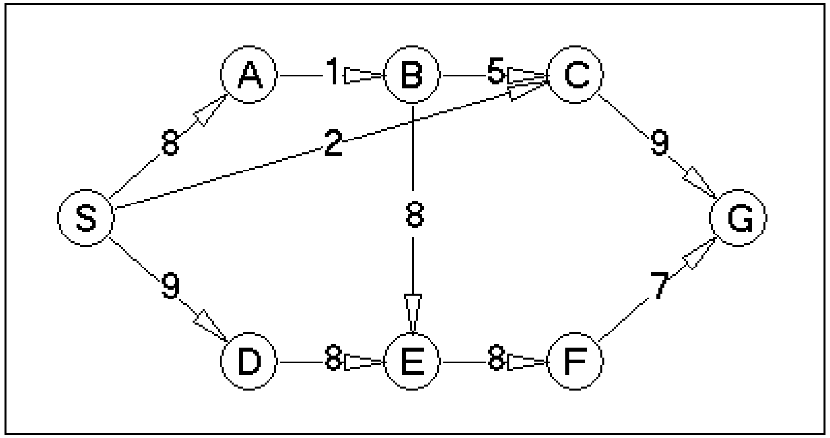

S
A
B
C
D
E
F
G
1
9
9
5
9
7
4
7
4
4

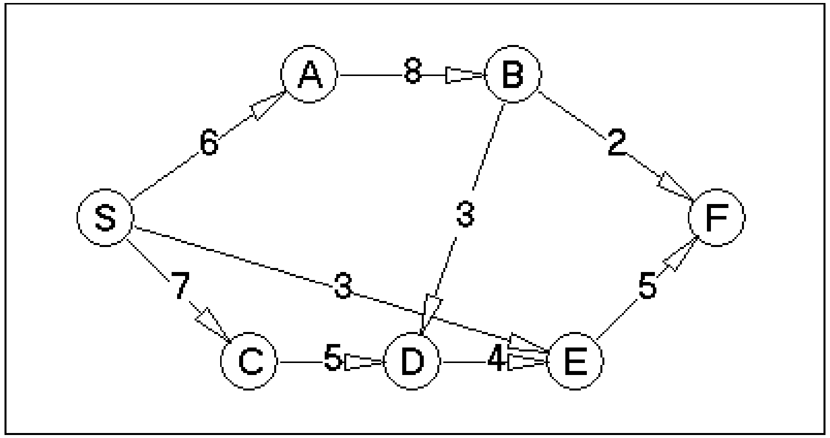
21

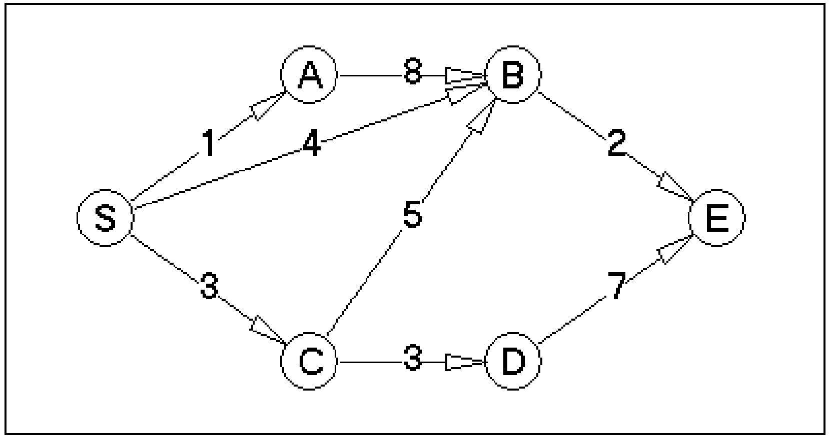

S
A
B
C
D
E
F
6
4
5
7
9
3
6
8
6

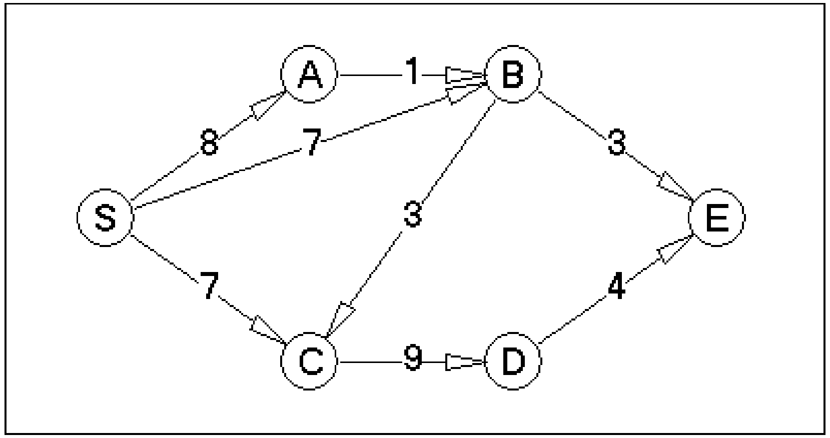
22


A
6
B
8
C
1
5
S
2
G
9
8
1
D
2
E
6
F
23

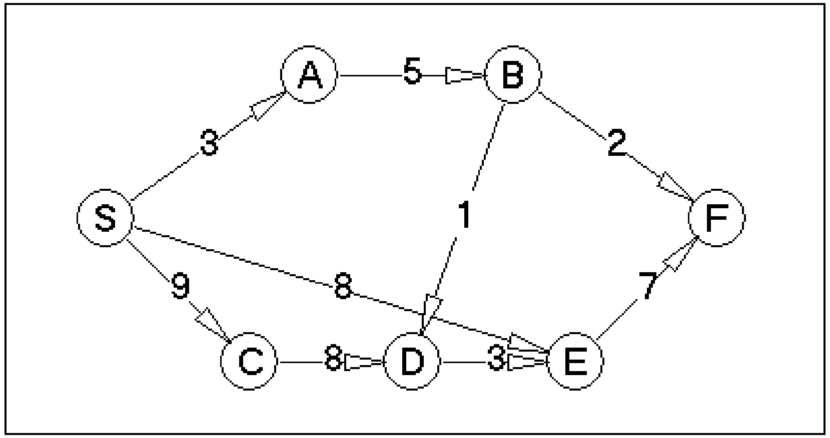

A
1
B
5
C
8
2
9
S
8
G
9
7
D
8
E
8
F
24


A
8
B
6
2
S
3
F
7
3
5
C
5
D
4
E
25

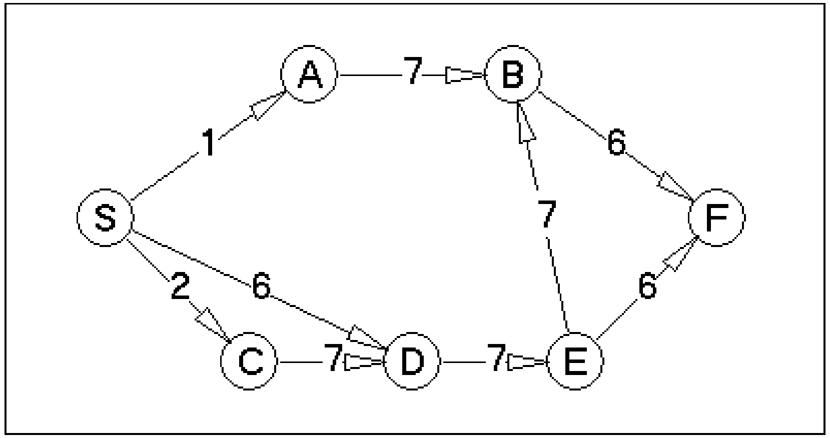

A
8
B
1
4
2
S
5
E
3
7
C
3
D
26


A
B
S
E
C
D
1
8
7
3
3
7
4
9

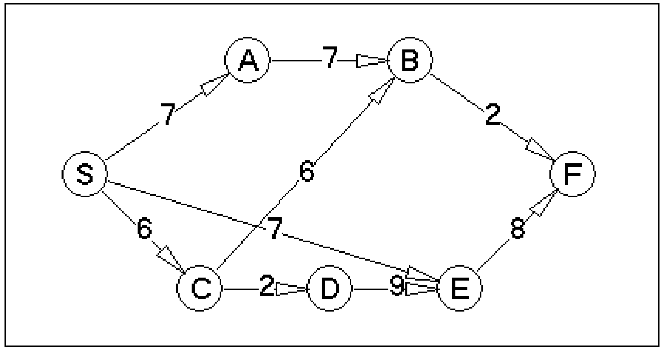
27


A
B
S
F
C
D
E
5
3
2
1
9
8
7
8
3

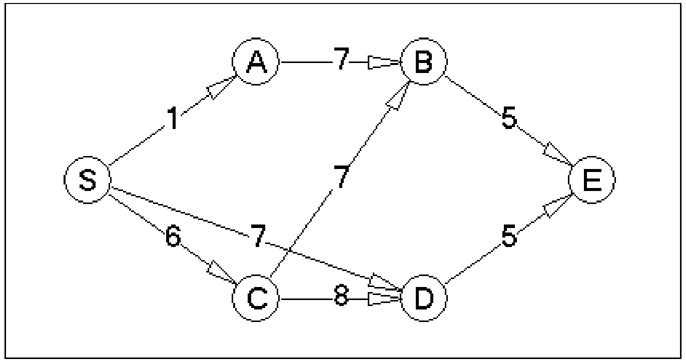
28


A
B
S
F
C
D
E
7
1
6
7
2
6
6
7
7

29


A
B
S
F
C
D
E
7
7
2
6
6
7
8
2
9

30


A
B
S
E
C
D
7
1
5
7
6
7
5
8

Практическая работа №2

Нахождение наикратчайших расстояний между всеми парами вершин графа. Алгоритм Флойда.

Теоретическая часть:

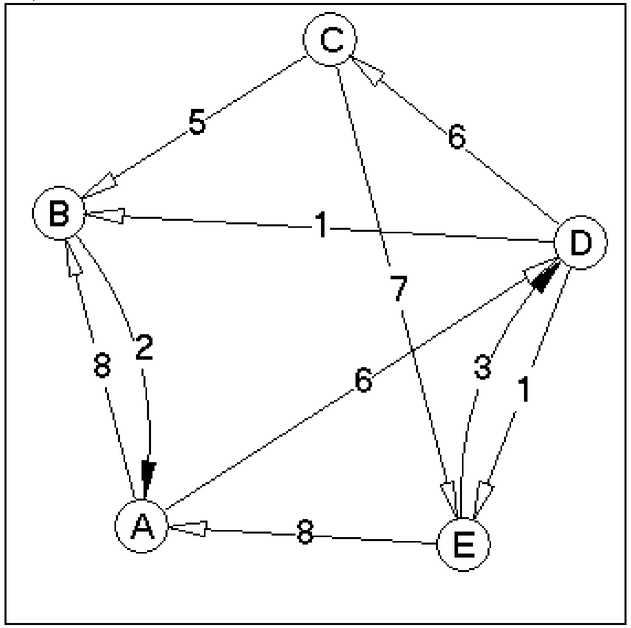
1. Назначение алгоритма Флойда.
2. Алгоритм Флойда (пошаговая реализация)

Практическая часть:

Найти матрицу узлов и матрицу элементов для заданного графа. Найти кратчайшую цепь и её длину между парами указанных вершин в соответствии с вариантом:

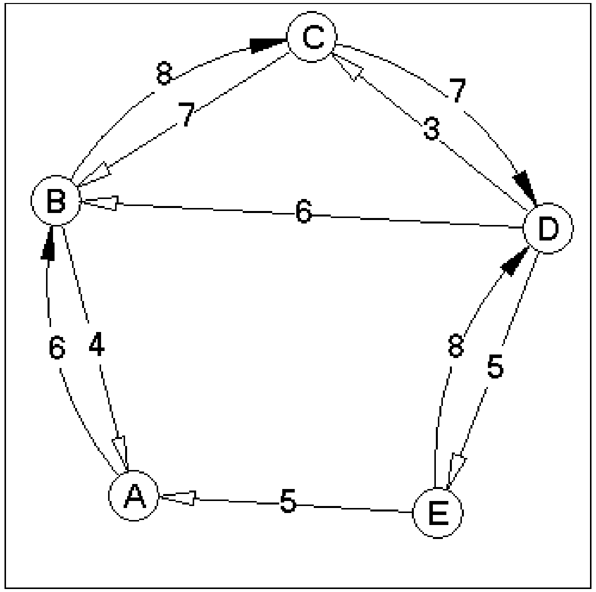
Вариант №1

EA, BC, AB -?



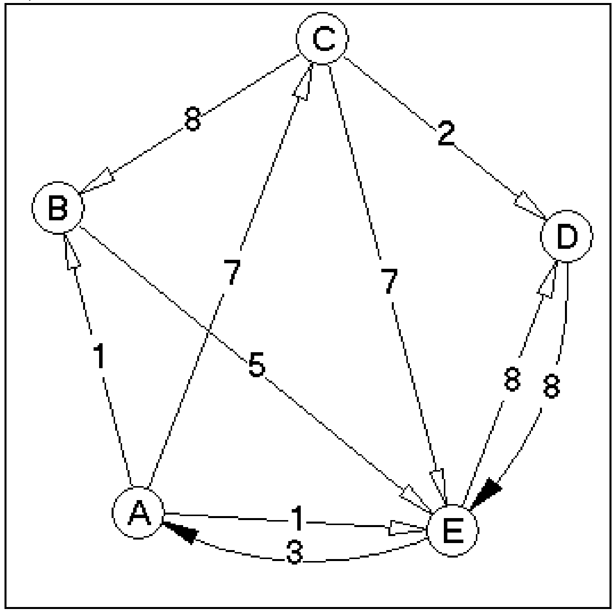
Вариант №2

AD, BD, CE - ?



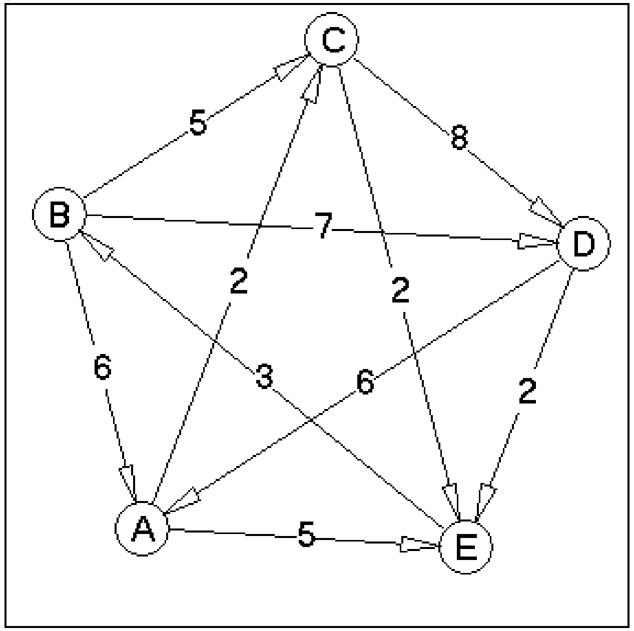
Вариант №3

BA, DB, EA-?



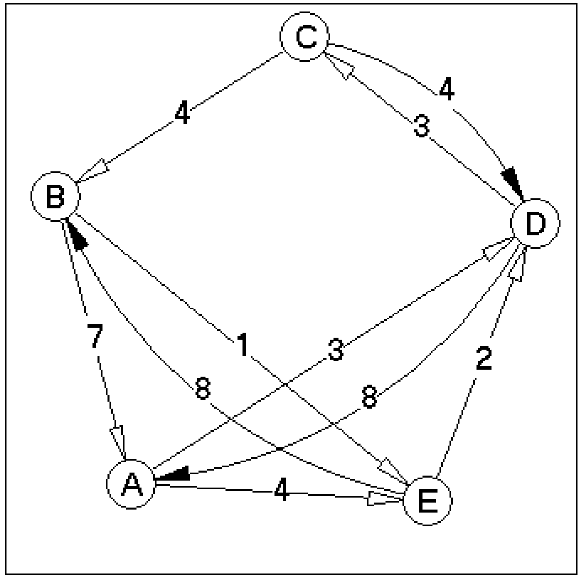
Вариант №4

BA, ED, AD-?



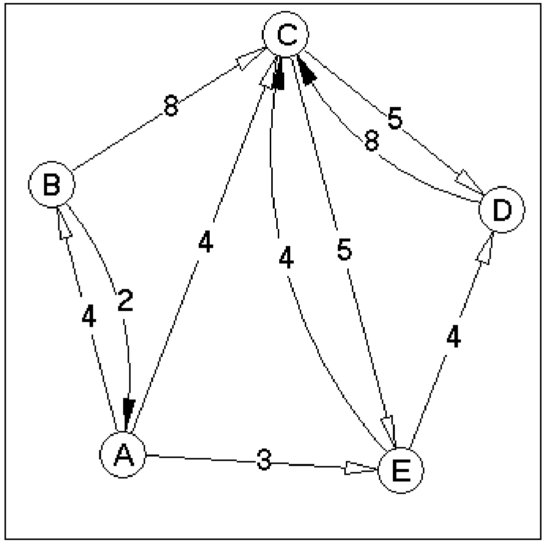
Вариант №5

BD, EC, CB-?



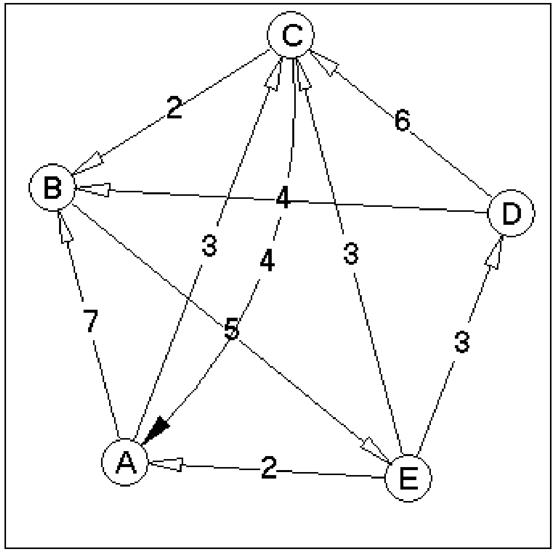
Вариант №6

BE, DE, BD-?



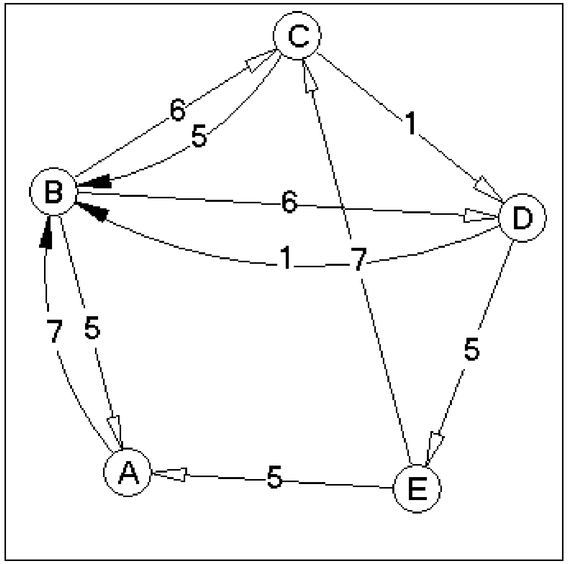
Вариант №7

CD, BC, DA-?



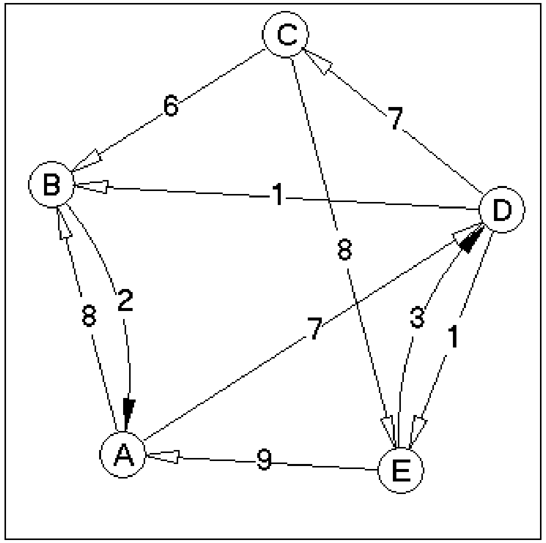
Вариант №8

AD, DE, BE-?



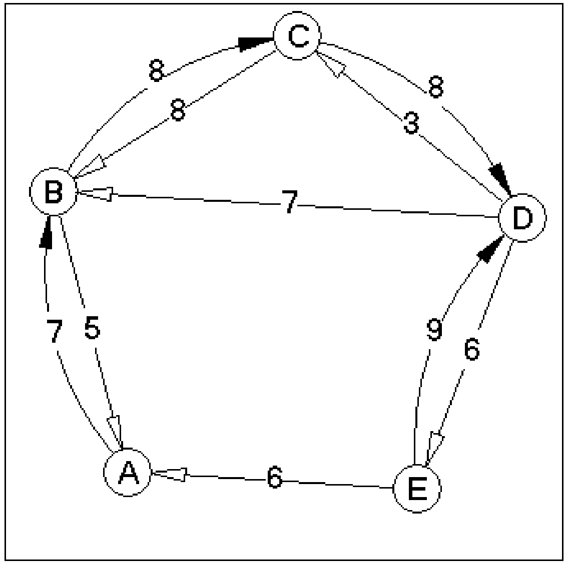
Вариант №9

EA, BC, AB-?



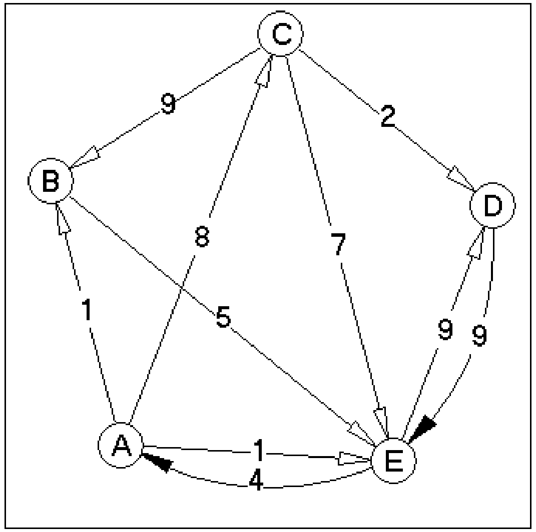
Вариант №10

AD, BD, CE-?



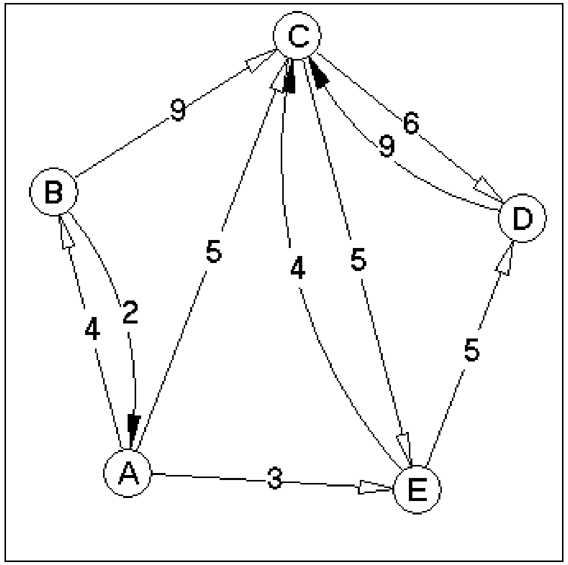
Вариант №11

BA, DB, EA-?



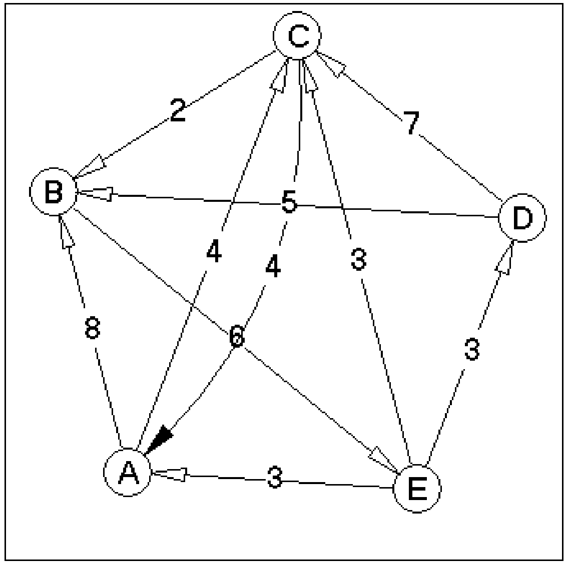
Вариант №12

BE, DE, BD-?



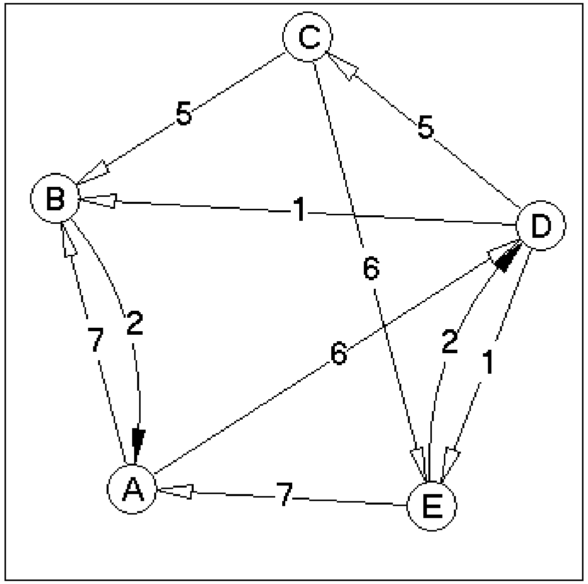
Вариант №13

CD, BC, DA-?



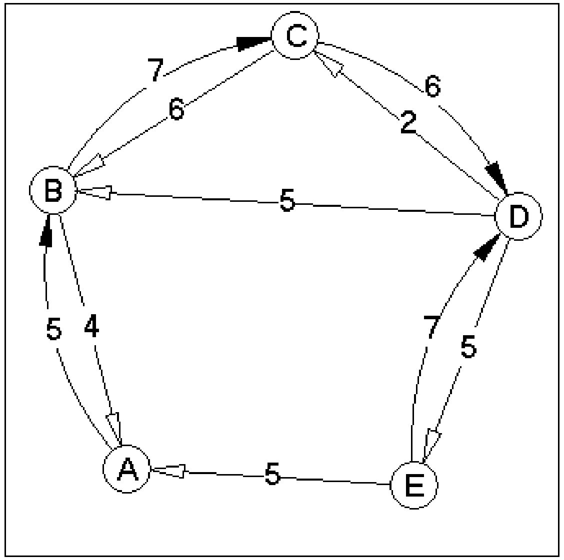
Вариант №14

EA, BC, AB-?



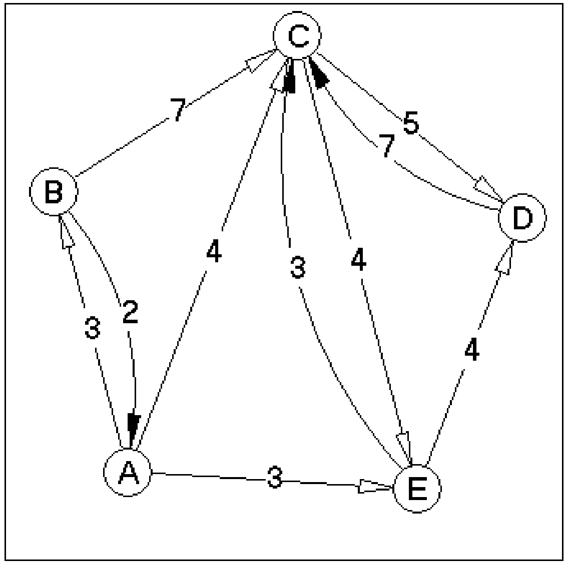
Вариант №15

AD, BD, CE-?



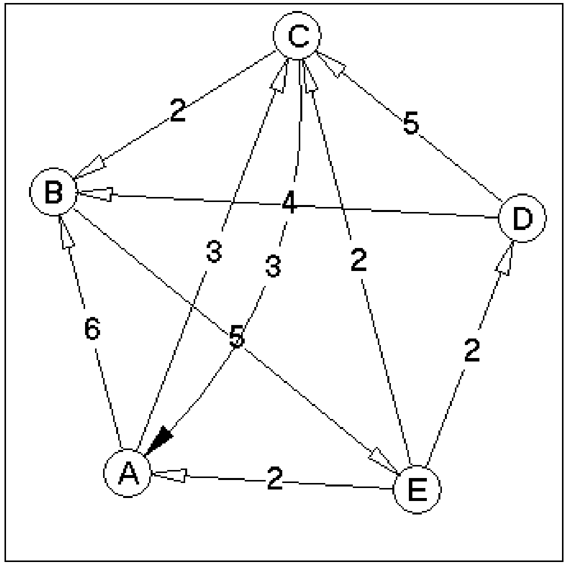
Вариант №16

BE, DE, BD-?



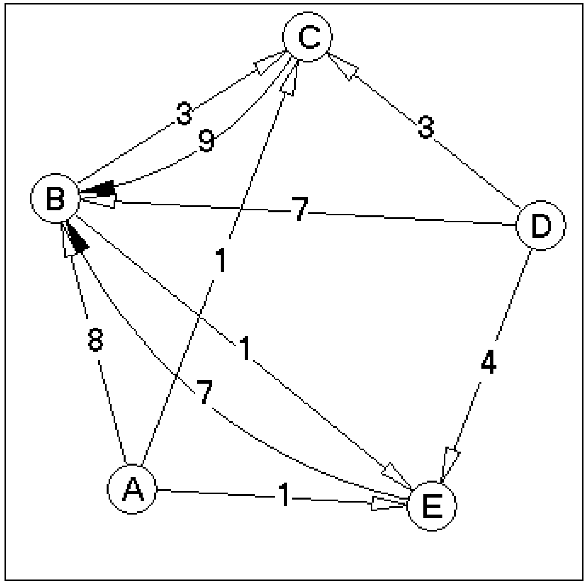
Вариант №17

CD, BC, DA-?



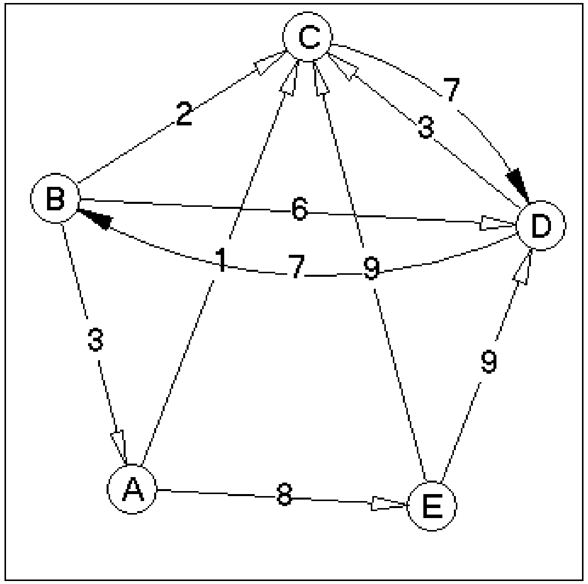
Вариант №18

ED, BA, BC-?



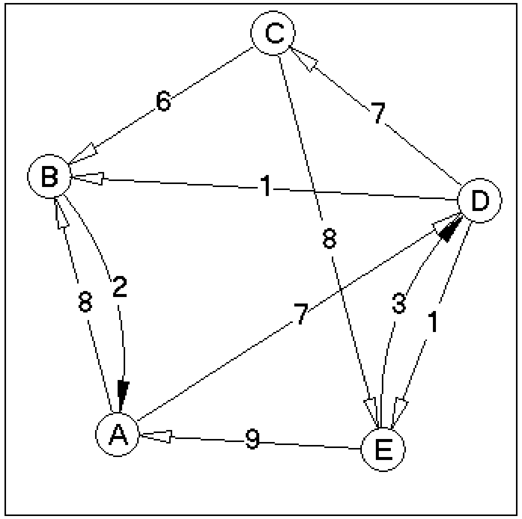
Вариант №19

DE, BD, BA-?



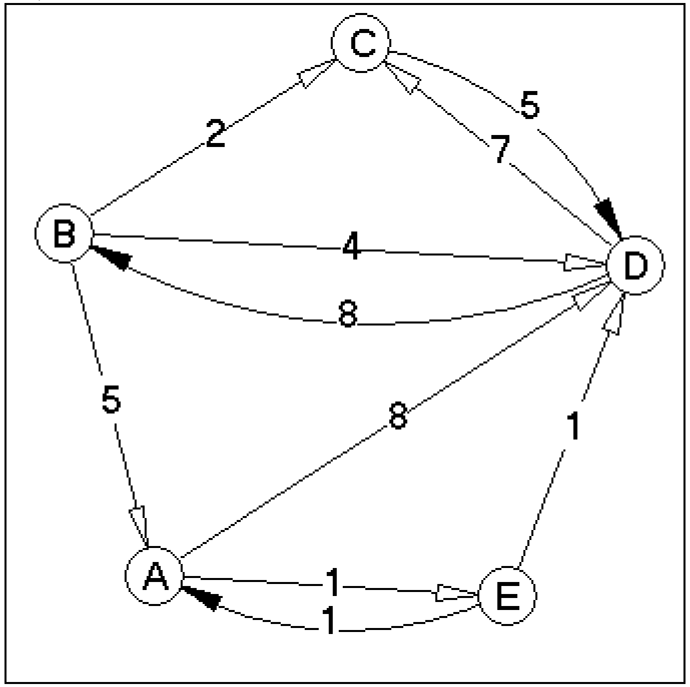
Вариант №20

EA, BC, AB-?



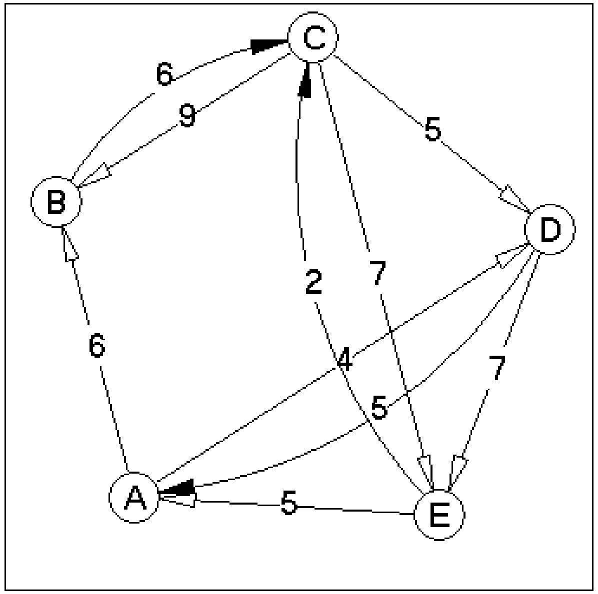
Вариант №21

AD, BC, BE.



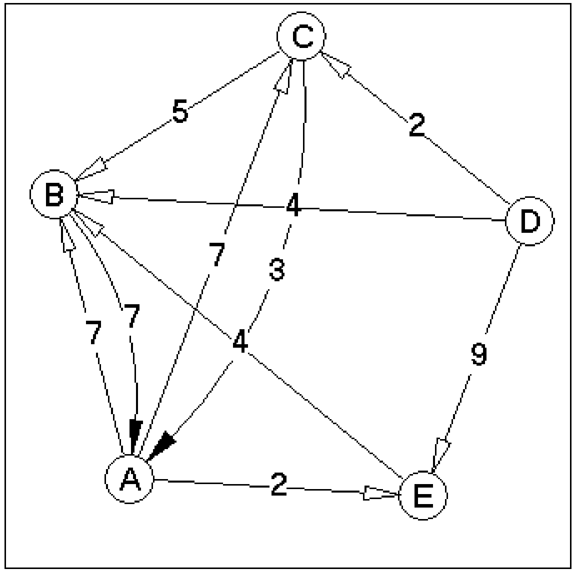
Вариант №22

AC, DA, ED-?



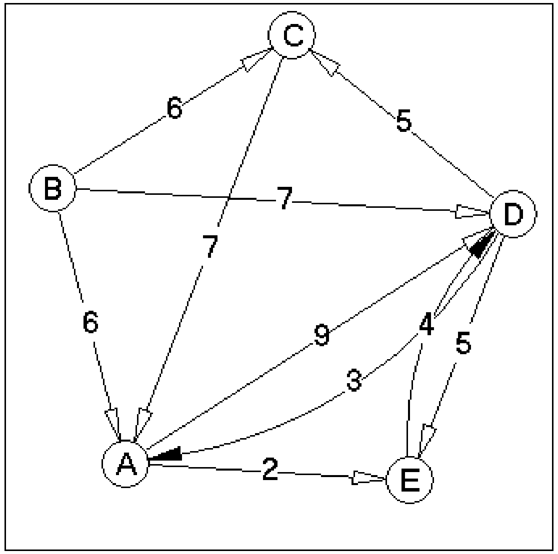
Вариант №23

:CA, AE, EC-?



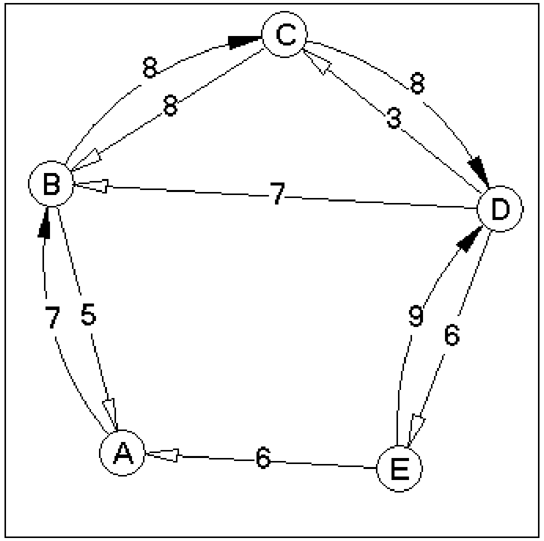
Вариант №24

EA, AB, BA-?



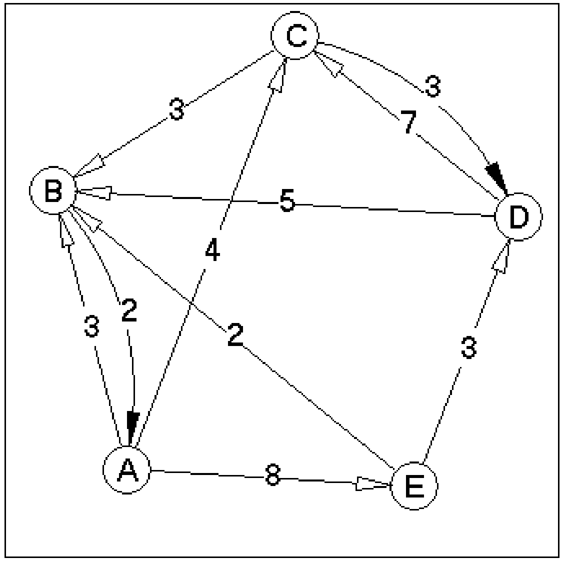
Вариант №25

AD, BD, CE-?



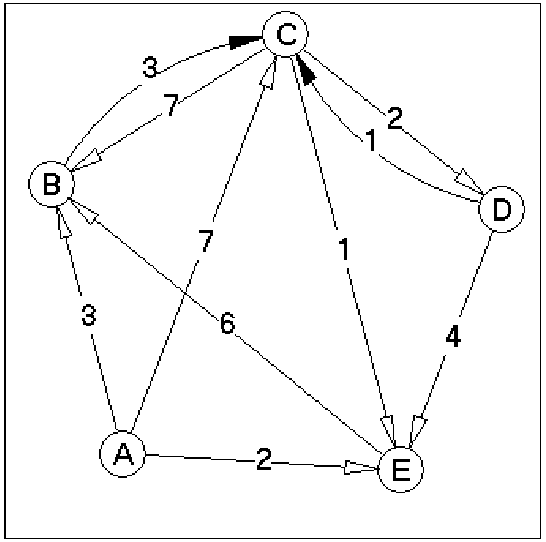
Вариант №26

BA, DB, DC-?



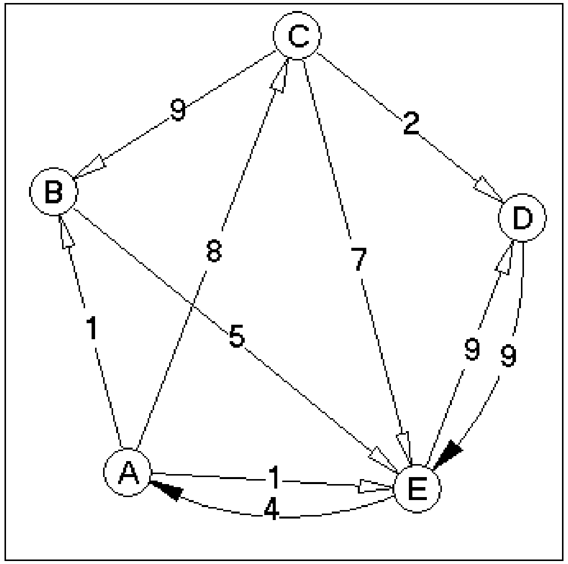
Вариант №27

BE, CA, EA-?



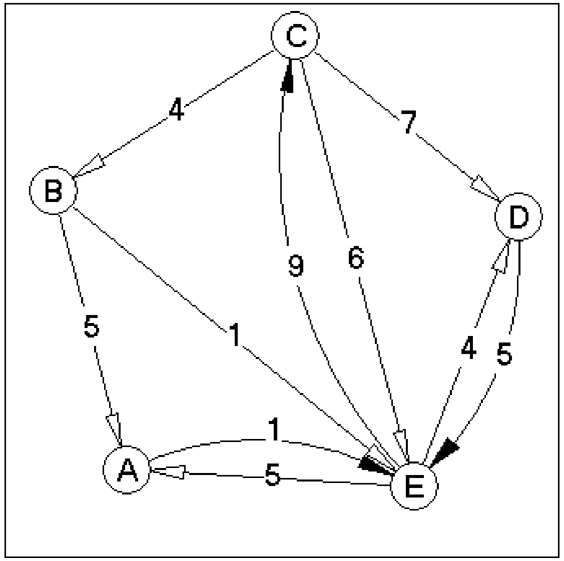
Вариант №28

BA, DB, EA-?



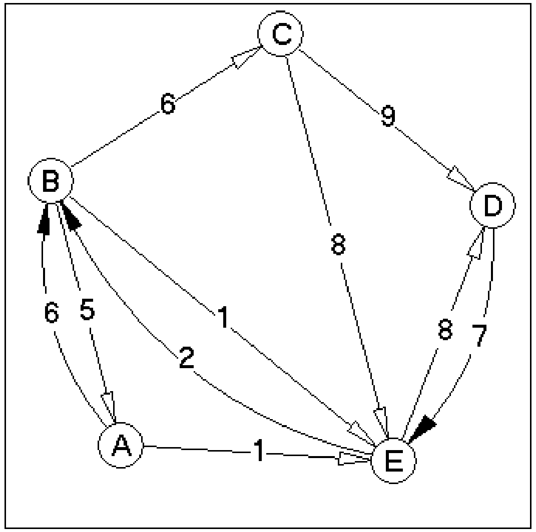
Вариант №29

BA, CD, DA-?



Вариант №30

DE, AE, CA-?



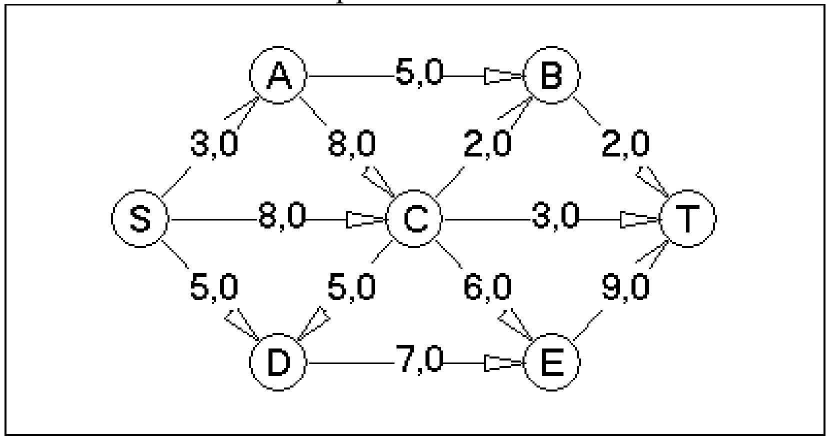
Практическая работа №3
Построение потоков максимальной мощности. Алгоритм Форда-Фалкерсона.

1. Теоретическая часть:
   2. Что называется сетью?
   3. Определение «сток» и «исток» на сети.
   4. Поток на сети.
   5. Мощность потока на сети.
   6. Пропускная способность дуг.
   7. Разрез на сети.
   8. Пропускная способность разреза.
   9. Теорема Форда-Фалкерсона.
   10. Прямая и обратная дуга.
   11. Алгоритм Форда-Фалкерсона.
   12. Алгоритм построения потока с двойным ограничением потока по дугам.
   13. Алгоритм построения потока в сети с несколькими источниками-стоками.
   14. Алгоритм построения потока в сети с неориентированными ребрами.
   15. Алгоритм построения потоков в сети с пропускными способностями узлов.

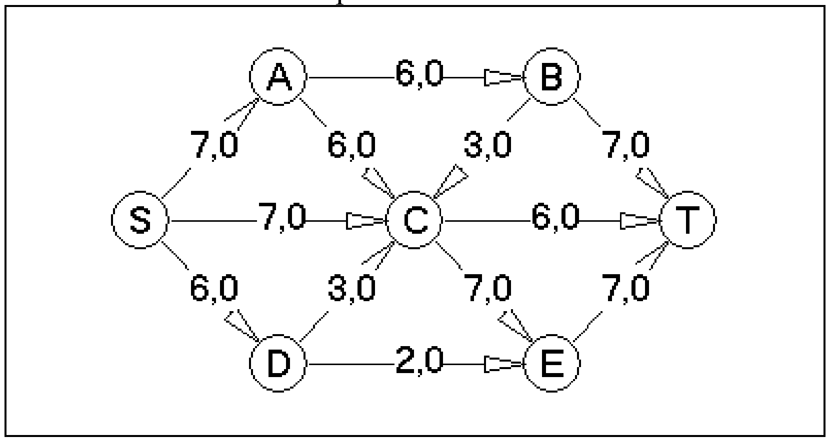
Практическая часть:

В соответствии с вариантом для данной сети:
- определить максимальный поток на сети;
- построить разрез на сети;
- определить пропускную способность разреза

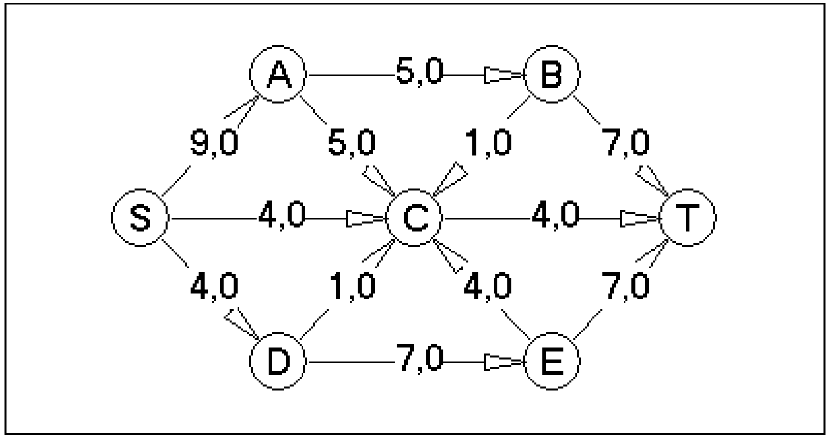
Вариант №1



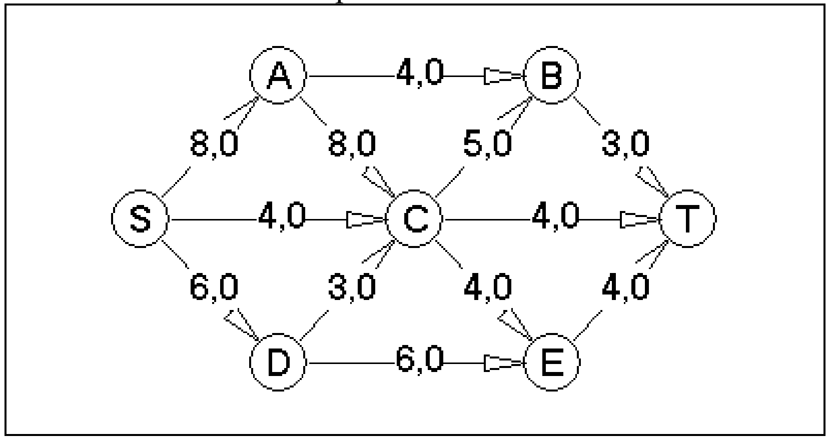
Вариант №2



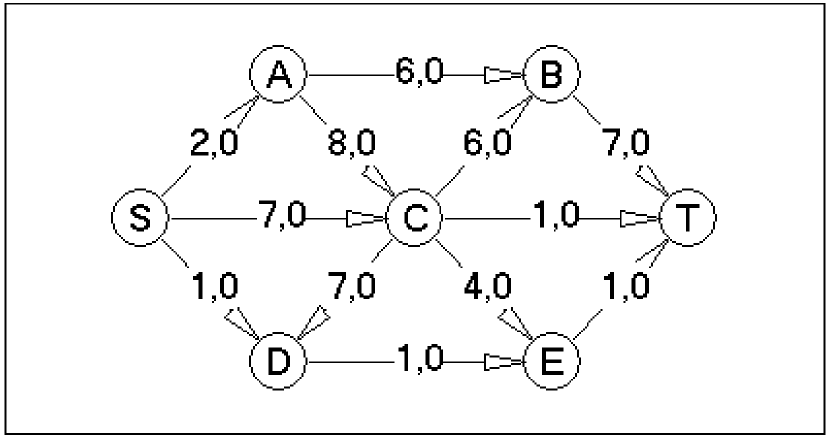
Вариант №3



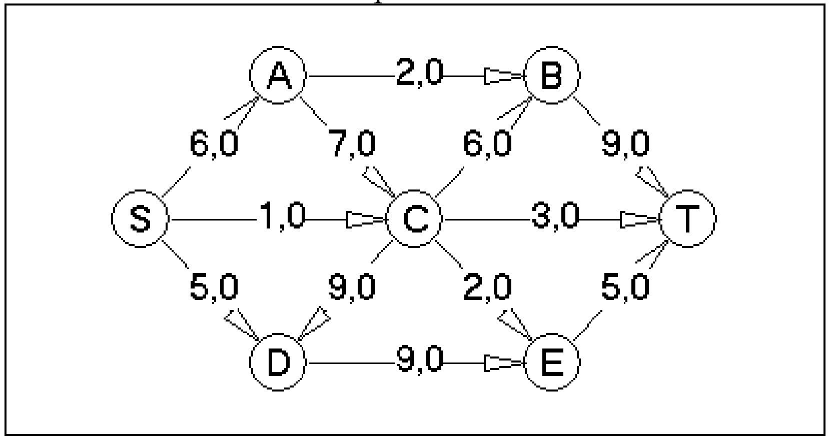
Вариант №4



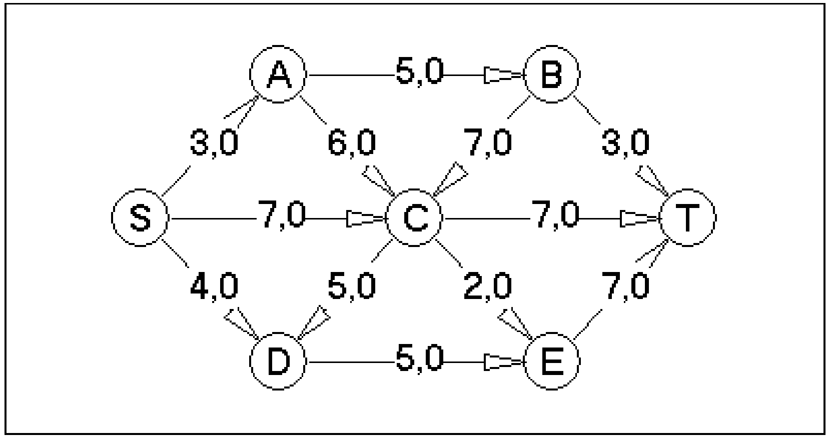
Вариант №5



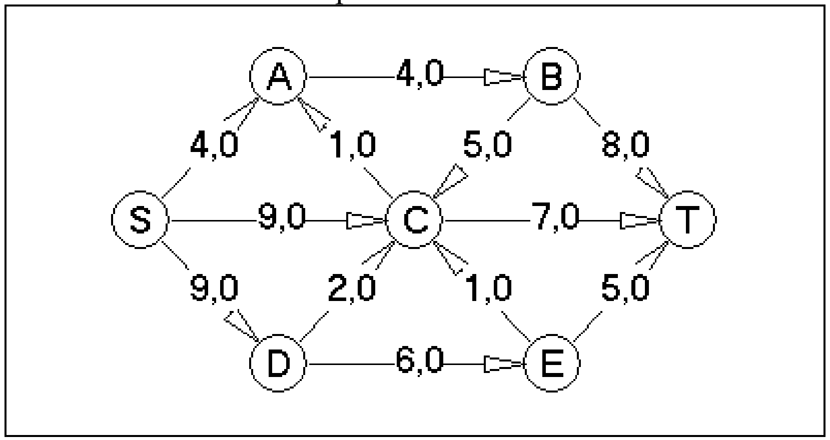
Вариант №6



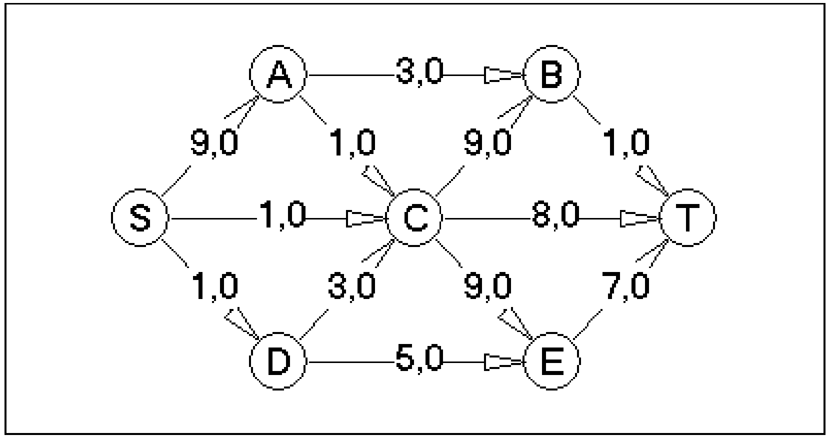
Вариант №7



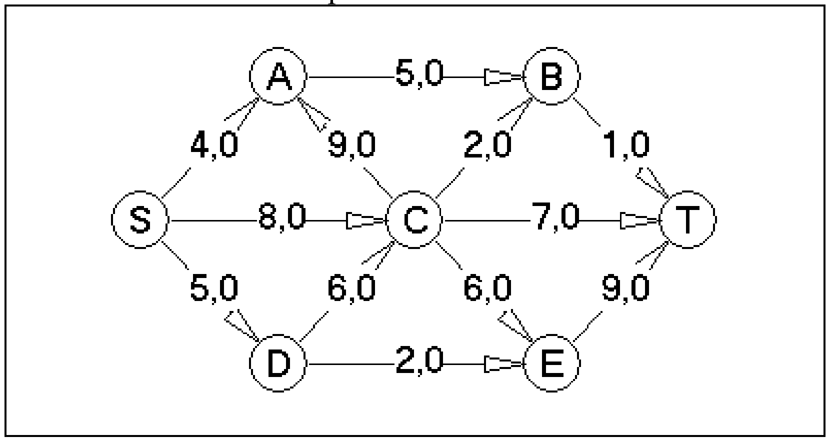
Вариант №8



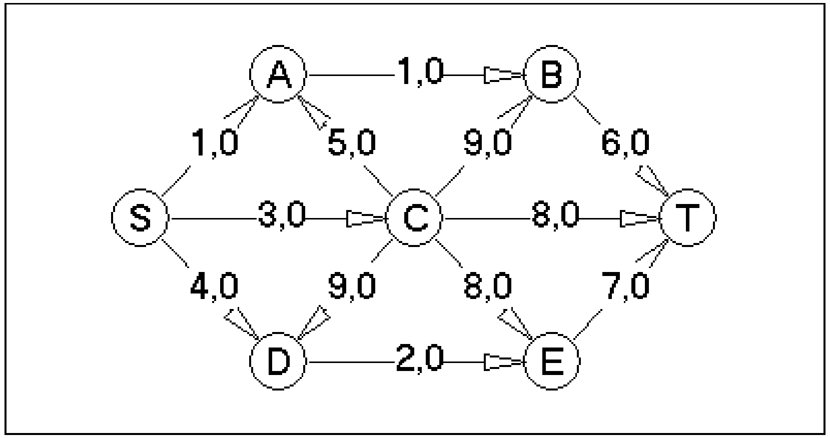
Вариант №9



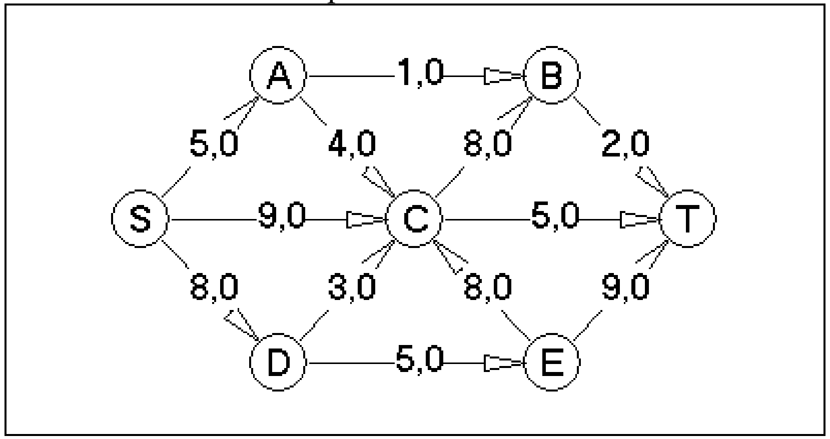
Вариант №10



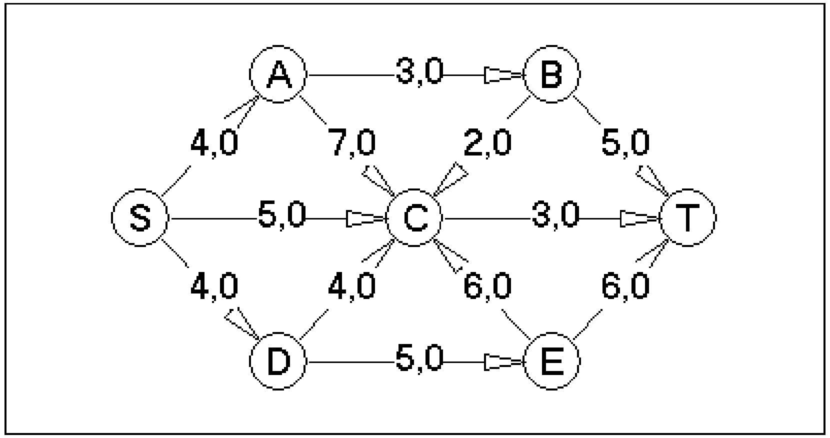
Вариант №11



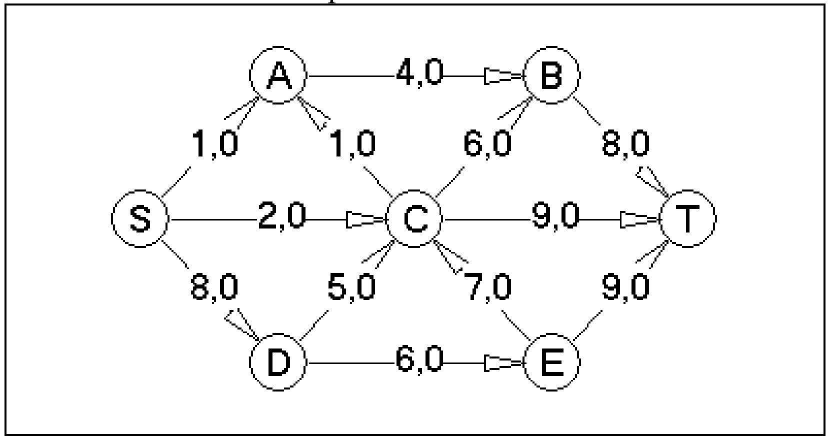
Вариант №12



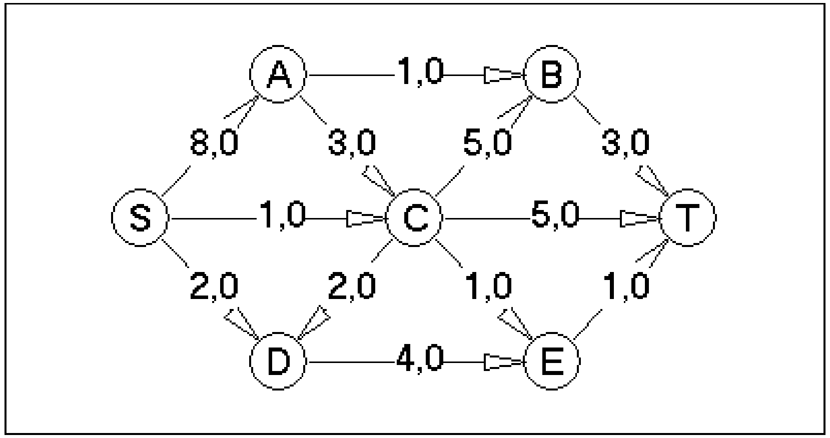
Вариант №13



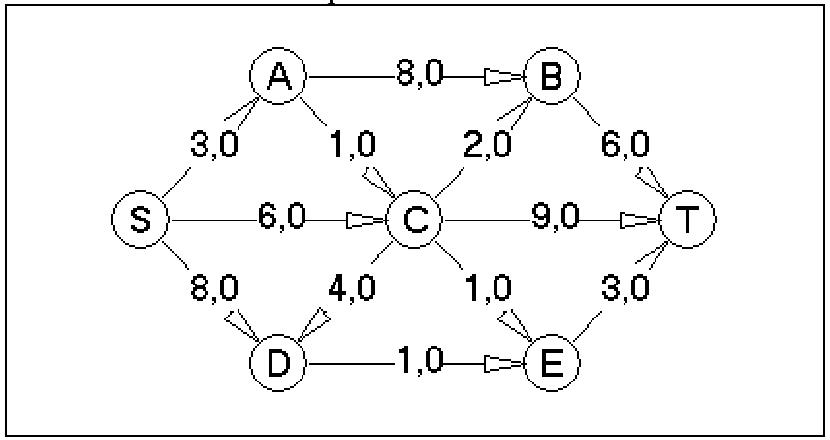
Вариант №14



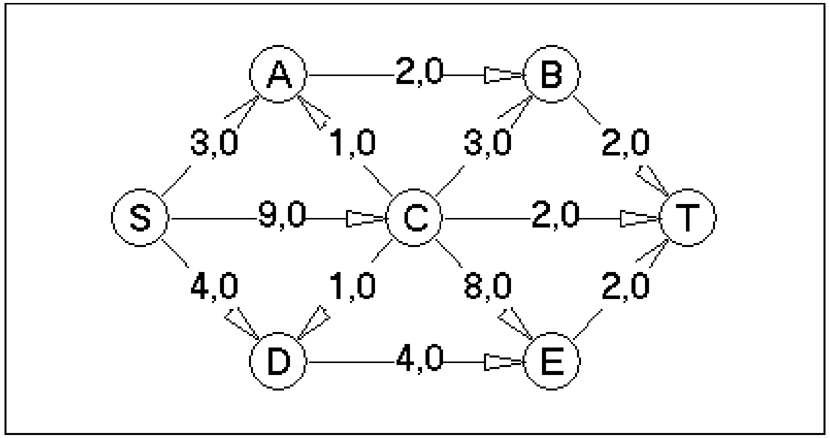
Вариант №15



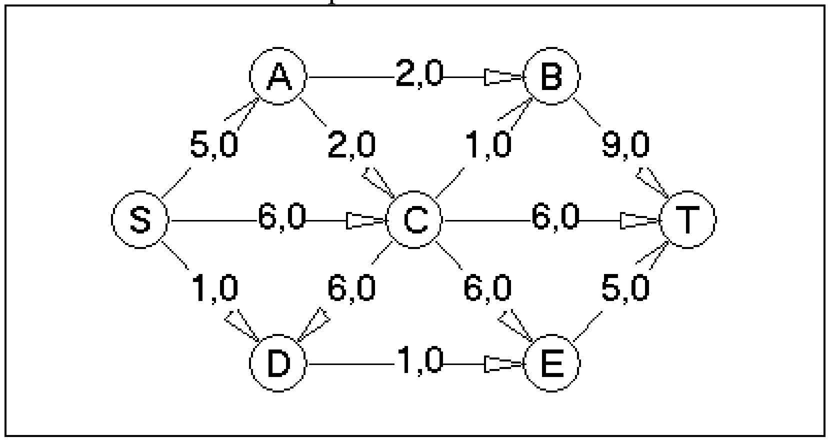
Вариант №16



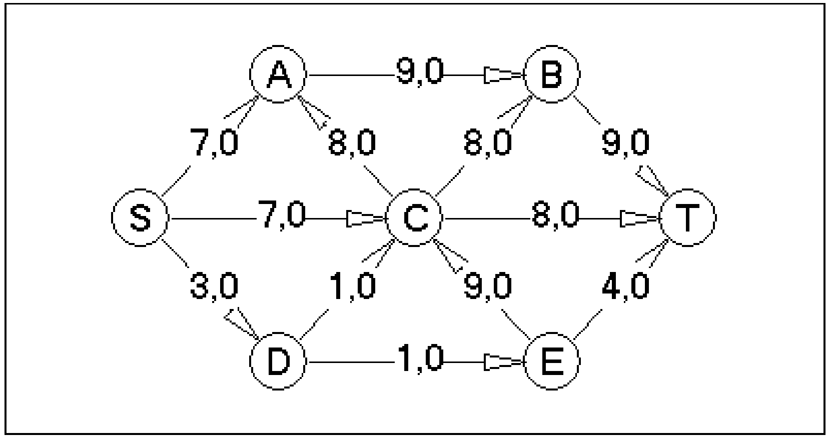
Вариант №17



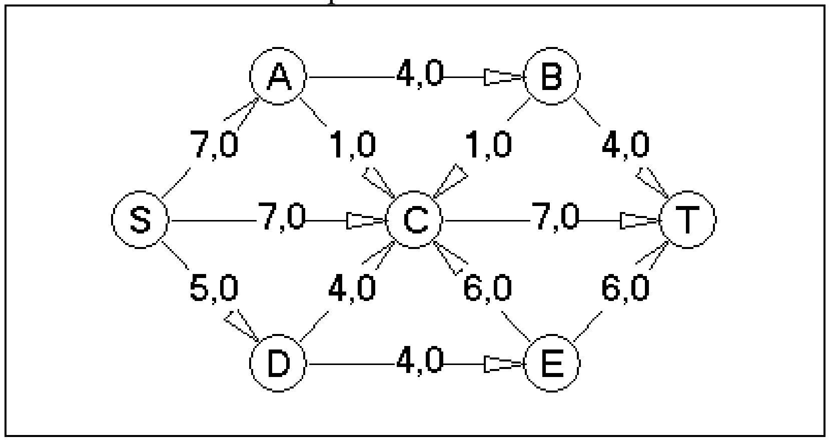
Вариант №18



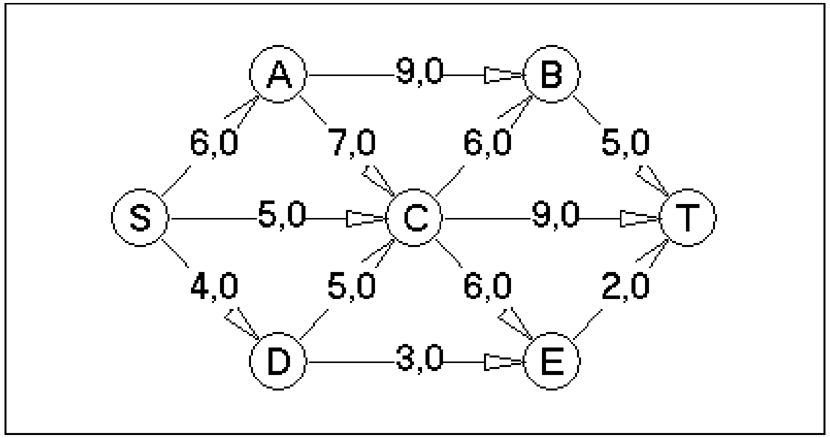
Вариант №19



Вариант №20

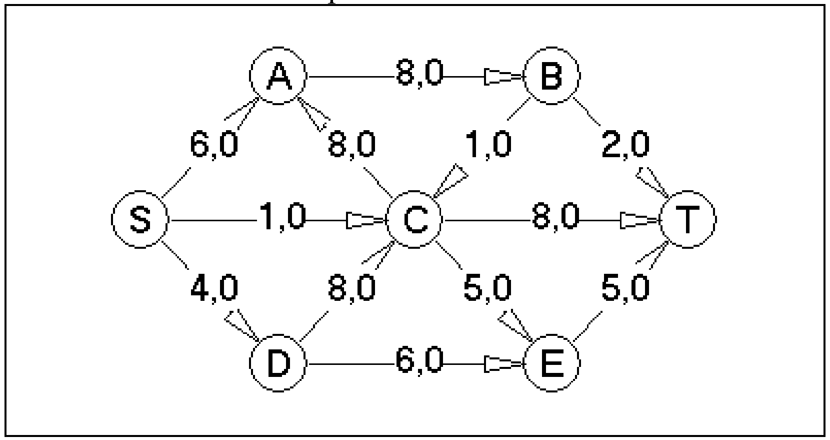


Вариант №21

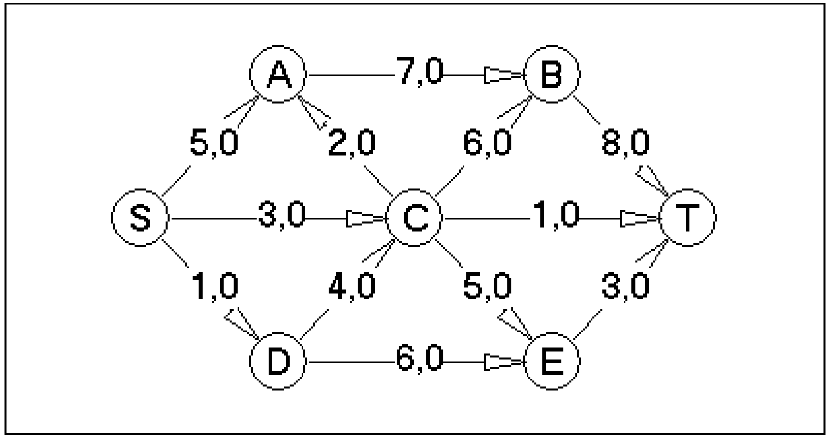


Вариант №22

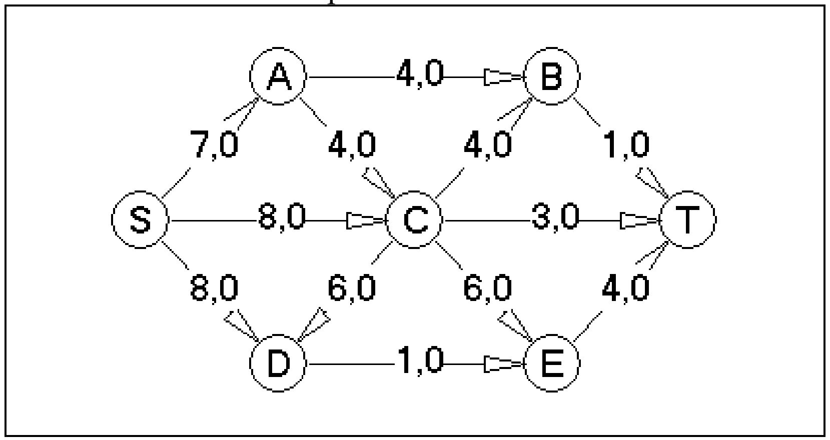
Вариант №23



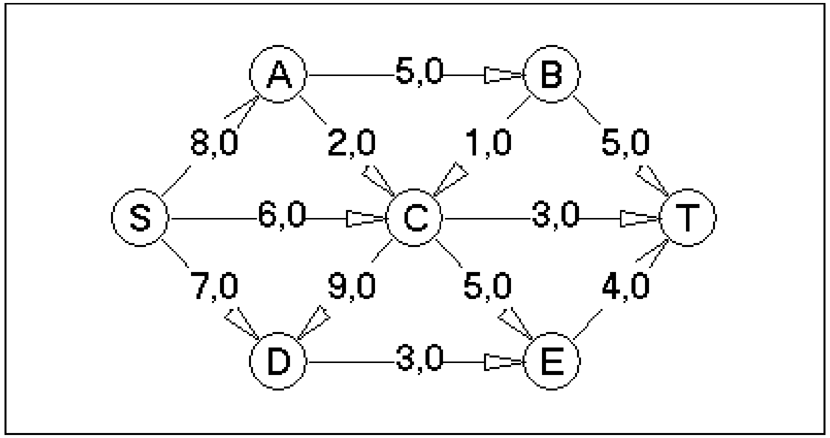
Вариант №24



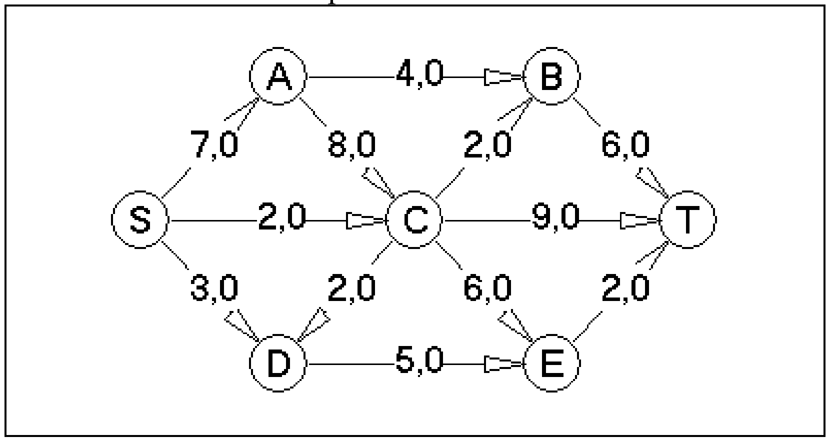
Вариант №25



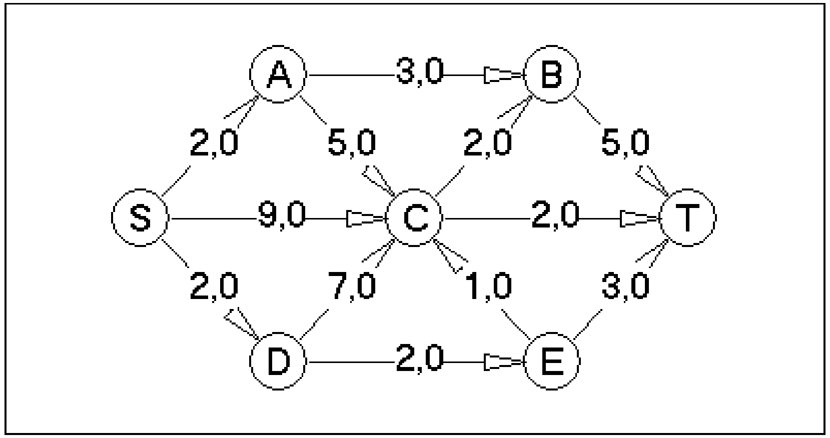
Вариант №26



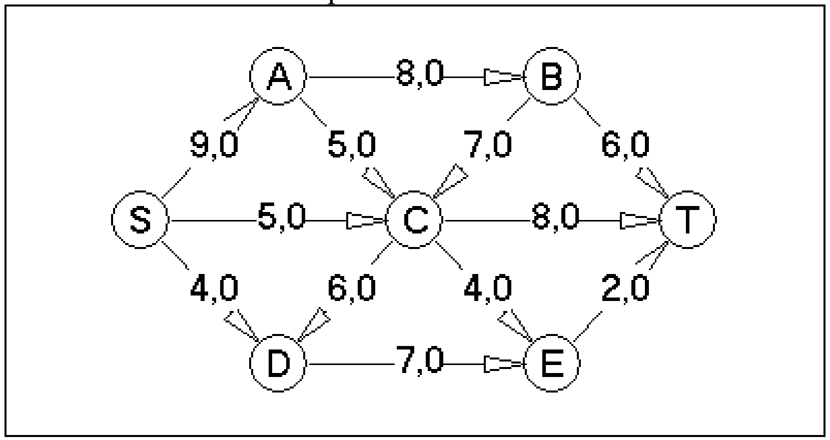
Вариант №27



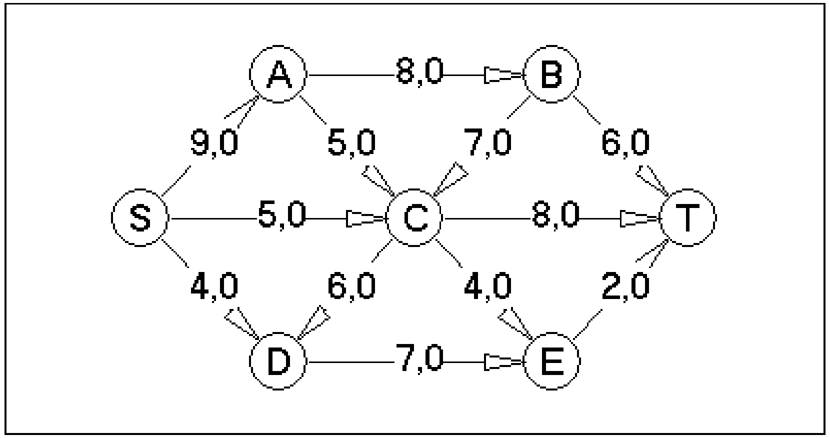
Вариант №28



Вариант №29



Вариант №30



Практическая работа №4

Нахождение потока заданной величины минимальной стоимости. Алгоритм Басакера-Гоуэна

Теоретическая часть:

1. Стоимость доставки единицы потока по дуге?
2. Понятие графа модифицированных стоимостей?
3. Формулировка постановки задачи?
4. Нахождение потока заданной величины минимальной стоимости?
5. Алгоритм Басакера-Гоуэна?

Практическая часть:

Для сети (смотреть практическую работу №3) построить поток заданной мощности в соответствии с вариантом минимальной стоимости. На каждой дуге сети указаны два числа. Первое число означает пропускную способность ребра, а второе число указывает на поток по ребру. Стоимость доставки единицы потока по дуге указана в соответствии с вариантом.

Вариант №1 Вариант №2 Вариант №3

SA — 7	SA — 6	SA — 7
SC — 8	SC — 8	SC — 9
SD — 9	SD — 3	SD — 2
AB — 4	AB — 4	AB — 4
AC — 5	AC — 4	AC — 5
BC — 2	BC — 2	BC — 4
BT — 8	BT — 7	BT — 8
CD — 3	CD — 3	CD — 7
CE — 7	CE — 6	CE — 7
DE — 6	DE — 6	DE — 6
ET — 4	ET — 4	ET — 2
CT — 5	CT — 5	CT — 4

Вариант №4	Вариант №5	Вариант №6
SA — 2	SA — 6	SA — 4
SC — 6	SC — 3	SC — 8
SD — 9	SD — 4	SD — 2
AB — 5	AB — 4	AB — 4
AC — 6	AC — 5	AC — 5
BC — 7	BC — 2	BC — 9
BT — 8	BT — 5	BT — 8
CD — 3	CD — 3	CD — 7
CE — 7	CE — 7	CE — 7
DE — 4	DE — 6	DE — 2
ET — 4	ET — 7	ET — 4
CT — 3	CT — 9	CT — 5

Вариант №7	Вариант №8	Вариант №9
SA — 3	SA — 8	SA — 6
SC — 4	SC — 9	SC — 3
SD — 9	SD — 6	SD — 5
AB — 6	AB — 8	AB — 4
AC — 8	AC — 2	AC — 5

BC — 6	BC — 5	BC — 2
BT — 4	BT — 5	BT — 5
CD — 3	CD — 4	CD — 9
CE — 7	CE — 7	CE — 7
DE — 3	DE — 6	DE — 5
ET — 7	ET — 7	ET — 7
CT — 9	CT — 6	CT — 9

Вариант №10	Вариант №11	Вариант №12
SA — 7	SA — 3	SA — 2
SC — 5	SC — 6	SC — 7
SD — 9	SD — 9	SD — 7
AB — 5	AB — 6	AB — 9
AC — 3	AC — 6	AC — 3
BC — 7	BC — 8	BC — 5
BT — 8	BT — 8	BT — 7
CD — 9	CD — 6	CD — 3
CE — 7	CE — 7	CE — 4
DE — 8	DE — 2	DE — 4
ET — 4	ET — 4	ET — 7
CT — 3	CT — 5	CT — 8

Вариант №13	Вариант №14	Вариант №15
SA — 4	SA — 5	SA — 2
SC — 3	SC — 5	SC — 4
SD — 6	SD — 6	SD — 8
AB — 8	AB — 5	AB — 2
AC — 3	AC — 7	AC — 9
BC — 7	BC — 7	BC — 4
BT — 6	BT — 8	BT — 8
CD — 9	CD — 8	CD — 9
CE — 5	CE — 7	CE — 7
DE — 8	DE — 8	DE — 2
ET — 7	ET — 4	ET — 7

Вариант №16	Вариант №17	Вариант №18
SA — 7	SA — 6	SA — 5
SC — 4	SC — 3	SC — 5
SD — 8	SD — 9	SD — 7
AB — 5	AB — 4	AB — 6
AC — 3	AC — 8	AC — 7
BC — 7	BC — 6	BC — 7
BT — 2	BT — 8	BT — 9
CD — 9	CD — 9	CD — 5
CE — 7	CE — 7	CE — 9
DE — 8	DE — 7	DE — 8
ET — 4	ET — 6	ET — 4
CT — 6	CT — 3	CT — 2

Вариант №19	Вариант №20	Вариант №21
SA — 2	SA — 8	SA — 6
SC — 6	SC — 5	SC — 6
SD — 7	SD — 9	SD — 5
AB — 5	AB — 4	AB — 5
AC — 6	AC — 4	AC — 6
BC — 7	BC — 9	BC — 7
BT — 5	BT — 8	BT — 8
CD — 3	CD — 4	CD — 9
CE — 7	CE — 7	CE — 7
DE — 6	DE — 4	DE — 8
ET — 4	ET — 8	ET — 4
CT — 3	CT — 7	CT — 6

Вариант №22	Вариант №23	Вариант №24
SA — 4	SA — 2	SA — 6
SC — 4	SC — 8	SC — 2
SD — 7	SD — 8	SD — 7
AB — 2	AB — 2	AB — 2

AC — 9	AC — 4	AC — 9
BC — 8	BC — 4	BC — 4
BT — 8	BT — 6	BT — 8
CD — 9	CD — 9	CD — 7
CE — 7	CE — 7	CE — 7
DE — 7	DE — 2	DE — 2
ET — 7	ET — 9	ET — 7

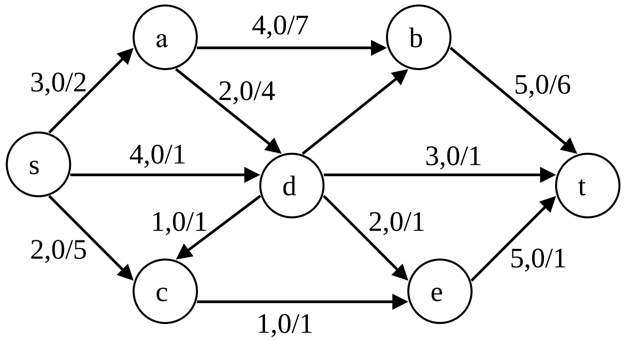
Вариант №25	Вариант №26	Вариант №27
SA — 5	SA — 8	SA — 2
SC — 5	SC — 6	SC — 6
SD — 7	SD — 8	SD — 7
AB — 5	AB — 5	AB — 7
AC — 6	AC — 6	AC — 6
BC — 7	BC — 8	BC — 7
BT — 5	BT — 5	BT — 5
CD — 5	CD — 3	CD — 3
CE — 7	CE — 7	CE — 7
DE — 6	DE — 8	DE — 6
ET — 4	ET — 4	ET — 7
CT — 3	CT — 8	CT — 3

Вариант №28	Вариант №29	Вариант №30
SA — 4	SA — 9	SA — 3
SC — 5	SC — 5	SC — 5
SD — 4	SD — 7	SD — 7
AB — 5	AB — 9	AB — 5
AC — 6	AC — 6	AC — 3
BC — 4	BC — 7	BC — 7
BT — 5	BT — 9	BT — 5
CD — 4	CD — 5	CD — 3
CE — 7	CE — 7	CE — 7
DE — 9	DE — 9	DE — 8
ET — 4	ET — 4	ET — 4
CT — 3	CT — 3	CT — 9

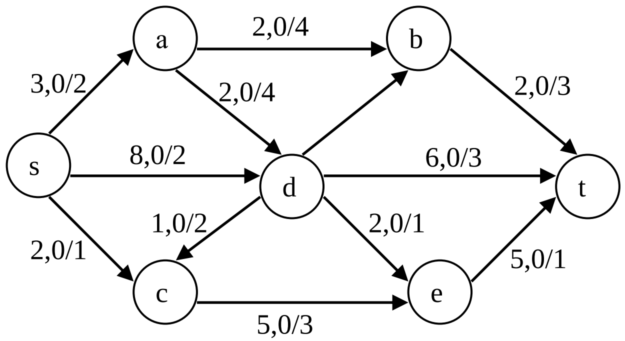
Практическая работа №5
Нахождение потока заданной величины минимальной стоимости. Алгоритм Клейна.

Для сети построить поток заданной мощности минимальной стоимости, используя алгоритм Клейна. V=6

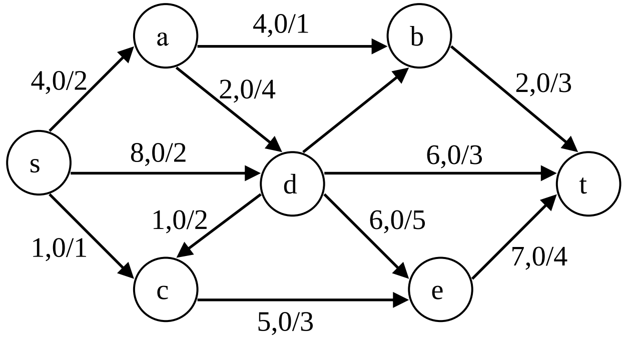
Вариант 1



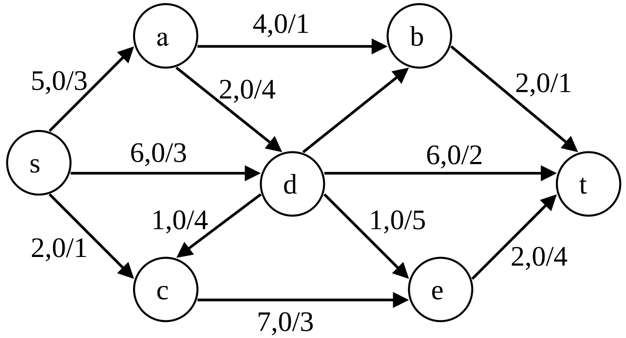
Вариант 2



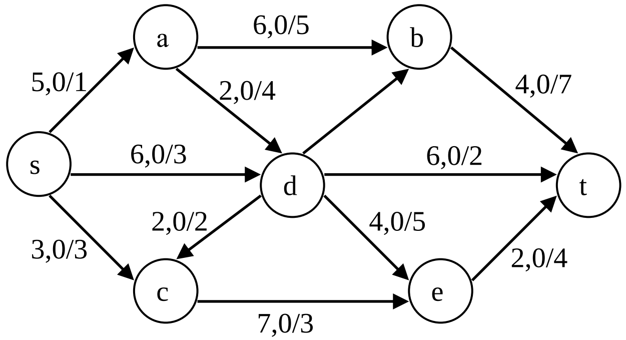
Вариант 3



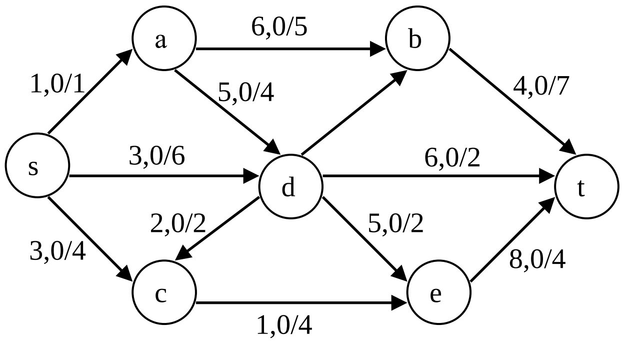
Вариант 4



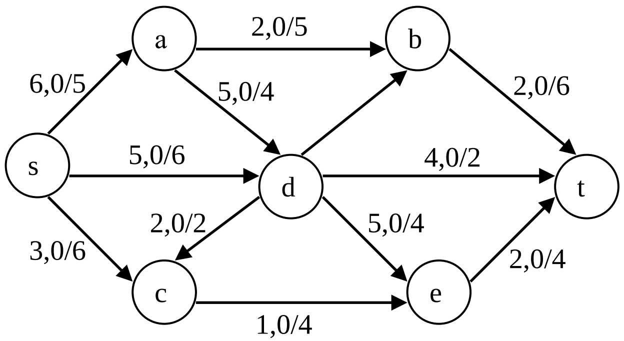
Вариант 5



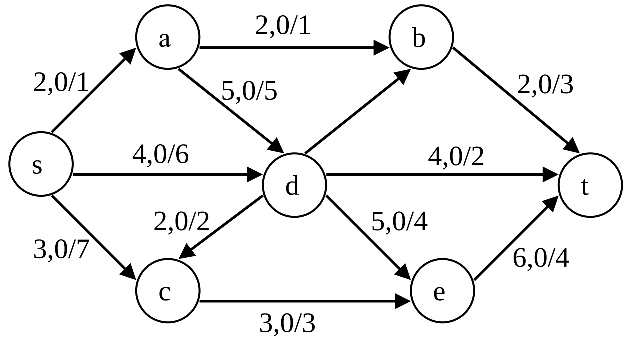
Вариант 6



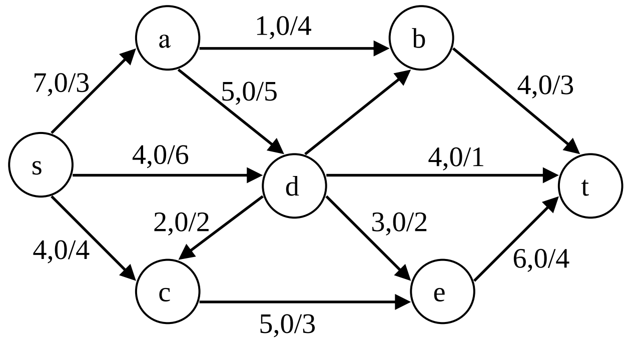
Вариант 7



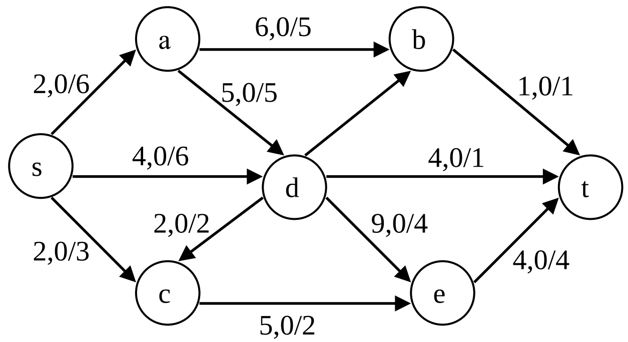
Вариант 8



Вариант 9



Вариант 10



Практическая работа №6
Сетевое планирование.
Модели управления проектами.

Построить и рассчитать временные характеристики сетевых графиков.

Вариант 1

Проект разработки и внедрения нового вида продукции включает в себя следующие работы (табл.).

Таблица 1

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	1
A_2	-	5
A_3	A_1	3
A_4	A_1	2
A_5	A_2, A_3	6
A_6	A_2, A_3	5
A_7	A_4, A_5	5
A_8	A_6	3

Требуется:
1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5. построить линейный график выполнения работ проекта.

Вариант 2.

Фирма «Астра» запланировала реконструкцию своего офиса. Перечень работ, которые необходимо для этого выполнить, представлены в табл..

Таблица 2

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	5
A_2	A_1	10
A_3	A_1	5
A_4	A_2	3
A_5	A_2	5
A_6	A_4	3
A_7	A_3	4
A_8	A_7	5
A_9	A_5, A_6, A_8,	39

Требуется:
1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5. построить линейный график выполнения работ проекта.

Вариант 3

Подготовка и проведение экскурсионного тура требует выполнения следующих работ (табл.)

Таблица 3

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	6
A_2	-	8
A_3	-	2
A_4	A_1	3
A_5	A_1	4
A_6	A_3	6
A_7	A_3	3

A_8	A_2, A_5,A_6	4
A_9	A_2, A_5,A_6	4
A_{10}	A_4, A_8,	2
A_{11}	A_7	3

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать временные параметры свершения событий, пользуясь четырехсекторной схемой. Выделить критические работы, указать критический срок выполнения проекта;
3. определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
4. построить линейный график выполнения работ проекта.

Вариант 4

Комплекс работ по организации спортивно-оздоровительного мероприятия для детей туристской школы приведен в табл.

Таблица 4

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	4
A_2	-	6
A_3	A_1	2
A_4	A_1	6
A_5	A_2, A_3	3
A_6	A_2, A_3	3
A_7	A_4, A_5	5

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить сроки выполнения работ и их резервы времени.

Вариант 5

Осуществление проекта требует выполнения ряда работ, перечень которых задан в табл.

Таблица 5

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	5
A_2	-	3
A_3	A_1	7
A_4	A_1	6
A_5	A_2	7
A_6	A_4, A_5	3
A_7	A_4, A_5	10
A_8	A_3, A_6	8

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. определить:
   а) сколько времени потребуется для завершения проекта;
   б) можно ли отложить выполнение работы A_4 на без отсрочки завершения проекта в целом;
   в) на сколько месяцев можно отложить выполнение работы A_3 без отсрочки завершения проекта в целом.

Вариант 6

Проект подготовки нового экскурсионного тура состоит из восьми работ (табл.)

Таблица 6

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	3
A_2	-	6
A_3	A_1	2

A_4	A_2, A_3	5
A_5	A_4	4
A_6	A_5	3
A_7	A_2, A_3	9
A_8	A_6, A_7	3

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить можно ли отложить выполнение работы A_3 на без отсрочки завершения проекта в целом;
5. определить, на сколько месяцев можно отложить выполнение работы A_6 без отсрочки завершения проекта в целом.

Вариант 7

Университет рассматривает предложение о строительстве новой турбазы. Работы которой следует выполнить перед началом строительства, представлены в табл.

Таблица 7

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	6
A_2	A_1	8
A_3	A_1	12
A_4	A_3	4
A_5	A_3	12
A_6	A_4, A_5	15
A_7	A_2, A_5	12
A_8	A_6, A_7	8

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. найти критический путь;

3. определить, реально ли начать работу по строительству здания турбазы через год после принятия решения о начале проекта;
4. определить сроки свершения события, , пользуясь четырехсекторной схемой;
5. определить сроки выполнения работ и их резервы времени.

Вариант 8

Проект подготовки нового экскурсионного тура состоит из восьми работ (табл.)

Таблица 8

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	1
A_2	-	5
A_3	A_1	4
A_4	A_1	3
A_5	A_2	6
A_6	A_4, A_5	5
A_7	A_4, A_5	6
A_8	A_3, A_6	4

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить можно ли отложить выполнение работы A_3 на без отсрочки завершения проекта в целом;
5. определить, на сколько месяцев можно отложить выполнение работы A_6 без отсрочки завершения проекта в целом.

Вариант 9

Проект разработки и внедрения нового вида продукции включает в себя следующие работы (табл.).

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	5
A_2	-	8
A_3	A_1	4
A_4	A_2, A_3	5
A_5	A_4	3
A_6	A_5	3
A_7	A_2, A_3	9
A_8	A_6, A_7	12

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5. построить линейный график выполнения работ проекта.

Вариант 10

Подготовка и проведение экскурсионного тура требует выполнения следующих работ (табл.)

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	-	5
A_2	-	9
A_3	-	3
A_4	A_1	5
A_5	A_1	7
A_6	A_3	6
A_7	A_3	3
A_8	A_2, A_5,A_6	4
A_9	A_2, A_5,A_6	4
A_{10}	A_4, A_8,	2

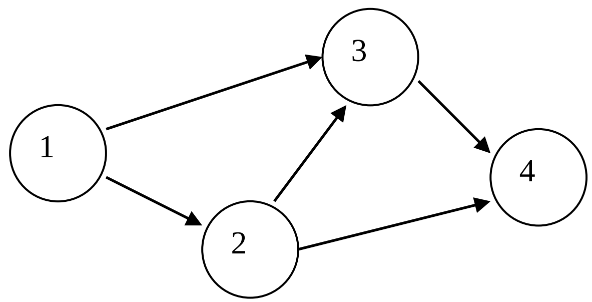
Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. определить:
   а) сколько времени потребуется для завершения проекта;
   б) можно ли отложить выполнение работы A_4 на без отсрочки завершения проекта в целом;
   в) на сколько месяцев можно отложить выполнение работы A_3 без отсрочки завершения проекта в целом.

Практическая работа №7
Оптимизация проекта по времени.

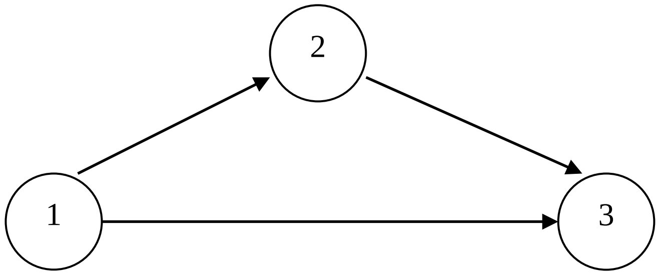
Проект представлен сетевым графиком (рис.). Продолжительность работ t_{ij} и минимальное время их выполнения d_{ij}, а также технологические коэффициенты использования дополнительных средств A_j приведены в табл.

Необходимо определить величину дополнительных вложений в каждую работу, при которых время выполнения комплекса работ не превышает t_0, а сумма дополнительных вложений минимальна.



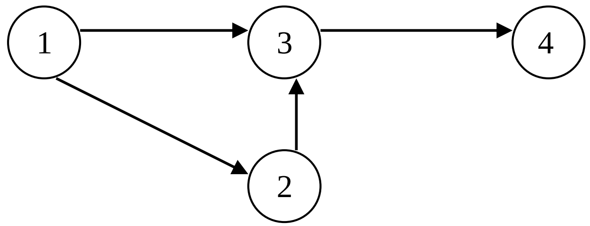
Номер	Параметры	Работа	Работа	Работа	Работа	Работа	Срок выполнения

ва-ри-анта		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	
1	t_{ij}	10	20	15	10	25	35
	d_{ij}	7	10	9	5	14	
	k_{ij}	0.05	0.3	0.4	0.1	0.2	
2	t_{ij}	10	20	0	10	25	30
	d_{ij}	7	10	0	5	14	
	k_{ij}	0.05	0.3	0	0.1	0.2	



Номер варианта	Параметры	Работа (1,2)	Работа (1,3)	Работа (2,3)	Срок выполнения
3	t_{ij}	7	5	4	8
	d_{ij}	4	2	3	
	k_{ij}	0.3	0.4	0.7	
4	t_{ij}	10	20	8	11
	d_{ij}	6	7	2	
	k_{ij}	0.1	0.2	0.3	
5	t_{ij}	14	25	10	21
	d_{ij}	12	7	8	
	k_{ij}	0.1	0.4	0.2	
6	t_{ij}	15	17	9	20
	d_{ij}	10	14	5	
	k_{ij}	0.1	0.7	0.4	
7	t_{ij}	11	15	19	23
	d_{ij}	4	6	12	

	k_{ij}	0.2	0.3	0.1	



Номер варианта	Параметры	Работа (1,2)	Работа (1,3)	Работа (2,3)	Работа (3,4)	Срок выполнения
8	t_{ij}	20	10	0	7	190
	d_{ij}	11	6	0	4	
	k_{ij}	0.1	0.8	0	0.4	
9	t_{ij}	11	17	0	9	210
	d_{ij}	5	8	0	4	
	k_{ij}	0.07	0.02	0	0.05	
10	t_{ij}	9	12	0	17	210
	d_{ij}	4	8	0	5	
	k_{ij}	0.08	0.1	0	0.06	

Практическая работа №8

Составление математических моделей. Графический способ оптимизации

Теоретическая часть:

1. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?
2. Какой геометрический объект определяется линейным уравнением, линейным неравенством?
3. Как построить прямую, полуплоскость в прямоугольной системе координат?

4. Как строится направляющий вектор С?
5. Что определяет направляющий вектор?
6. Как находится экстремальное значение функции цели при графическом решении задачи линейного программирования?
7. Какова последовательность графического решения задачи линейного программирования?
8. Как определить отсутствие решения задачи линейного программирования при графическом методе решения?
9. Что такое альтернативный оптимум?
10. Как найти точное решение задачи линейного программирования при графическом решении?

Практическая часть:

Задание 1

Требуется:

1. свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;
2. составить математическую модель задачи;
3. найти оптимальное решение задачи графическим методом.

Задание 2

Требуется:

Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Найти максимальное и минимальное значение целевой функции.

Вариант 1.

1. Продукция может производиться двумя технологическими способами T1 и T2. На производство продукции затрачиваются ресурсы трех видов R1; R2; R3, запасы которых равны: 15; 18; 8. Расход ресурсов на производство всей продукции по первому технологическому способу составляет 2; 4; 0, а по второму - 3; 2; 2. Выход продукции по способу T1 равняется 10 единицам, по

T2 - 8. Определить с какой интенсивностью нужно применять каждый технологический способ, чтобы при этих запасах иметь максимум продукции.

2.
$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97 \\ x_1 + 7x_2 \ge 77 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Предприятие выпускает два вида изделий П1 и П2, на изготовление которых идет 3 вида сырья: S1; S2; S3, запасы которых равны 200, 110, 120 ед. Расход сырья на 1000 ед. продукции составляет: S1 – 20, 10; S2 – 15, 5; S3 – 10, 10. Оптовая цена за 1000 шт. изделий составляет: 15; 17 тыс. рублей. Себестоимость производства 1000 шт. изделий составляет 12 и 15 тыс. рублей. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, предполагая, что сбыт неограничен.

2.
$$f(x) = x_1 + 5x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50 \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Из двух сортов бензина составляют две смеси А и Б. Смесь А содержит 60% бензина первого сорта и 40% - второго. Смесь Б содержит 80% бензина первого сорта, 20% - второго.

Продажная цена 1 кг смеси А – 10 тыс. руб.; смеси Б - 12 тыс. руб. Составить план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии 48 т бензина 1-го сорта и 20 т – 2-го.

2. $$f(x) = 9x_1 + 2x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 4.

1. Предприятие имеет три производственных фактора в количестве 5; 6; 7 тыс. единиц и может организовать производство двумя различными способами. Расход производственных факторов по первому способу производства составляет 1; 4; 1 тыс. единиц, по второму - 1; 1; 3 тыс. По первому способу за ед. времени предприятие выпускает в месяц 3 тыс. изделий, по второму - 2 тыс. изделий. Сколько времени предприятие должно работать каждым способом, чтобы получить максимум продукции?

2. $$f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17 \\ x_1 + 2x_2 \le 34 \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 5.

1. На каждую автоколонну из 10 машин, направленных для вывоза груза из района А, выделяется 4 авторемонтных мастерских, 3 машины тех. помощи, 2 мотоцикла. На такую же автоколонну для вывоза груза из района В выделяется 3 авторемонтных мастерских, 1 машина тех. помощи. Одна колонна из района А вывозит 2 тыс. тонн груза, из района Б - 1 тыс. тонн груза. Какое количество автоколонн следует направить в каждый район, чтобы обеспечить максимальный вывоз груза, если имеется 200 машин, 20 авторемонтных мастерских, 10 машин техпомощи, 16 мотоциклов?

2. $$f(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \\ x_1 + 4x_2 \ge 26 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 6.

1. Предприятие выпускает два вида изделий П1 и П2, используя 4 группы станков (А, Б, В, Г), фонды рабочего времени которых (час.) составляют 32; 27; 20; 30 часов. На производство одного изделия П1 каждая группа станков тратит (соответственно): 4; 0; 1; 3 ч. Для П2 - 2; 3; 2; 2 ч. Прибыль от реализации каждого изделия П1 равна 2 тыс. рубля; П2 - 3 тыс. рубля. Найти план производства, дающий максимальную прибыль.

2. $$f(x) = 9x_1 + 2x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \ge 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 110 \\ -2x_1 + 7x_2 \ge 15 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 7.

1. В животноводческом совхозе на производство одного центнера молока тратится 25 рублей, из них на трудовые затраты - 10 рублей, на материальные - 15 рублей; производство 1 центнера мяса обходится в 180 рублей, из которых 100 рублей – трудовые затраты, 80 рублей - материальные. Государственные закупочные цены за 1 центнер молока - 35 тыс. руб., а за 1 центнер мяса – 200 тыс. руб. Определить оптимальный план производства молока и мяса, если на животноводство выделено 190000 рублей. Фонд зарплаты - 100000 рублей, остальное - на оборудование.

2.
$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 8.

1. Из Минска в Гродно необходимо перевезти оборудование трех типов. I типа - 84 ед.; II - 80 ед.; III - 150 ед., для чего используют два вида транспорта А и Б. Количество оборудования каждого типа на транспорт А составляет: 3; 4; 3 ед., - транспорт Б: 2; 1; 13 ед. Затраты на перевозку транспортом А равны 8 ед., Б - 12 ед. Составить такой план перевозок, чтобы транспортные расходы были минимальными.

2.
$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 37 \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 9.

1. Трикотажная фабрика производит свитеры и кофточки, используя шерсть, силон и нитрон, запасы которых соответственно равны 900; 400; 300 кг. Количество которых соответственно равны 900; 400; 300 кг. Количество каждой пряжи на изготовление 10 свитеров составляет: 4; 2; 1 кг, а 10 кофточек: 2; 1; 1 кг. Прибыль от реализации 10 ед. продукции: 6 и 5 рублей. Найти план выпуска, максимизирующий прибыль.

2.
$$f(x) = 5x_1 + x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53 \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 10.

1. Для кондитерской фабрики требуется рассчитать оптимальный план выпуска карамели. Весь ассортимент карамели разделён на 2 однородные группы, условно обозначенные Kl и K2. Для производства карамели требуется сахарный песок, патока, фруктовое пюре. Запасы этих видов сырья равны соответственно 700, 300 и 150 т. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. Расход сырья на 1т карамели группы Kl составляет: 0,6 сахарного песка и 0,2 патоки; группы K2: 0,5 сахарного песка, 0,3 патоки и 0,3 фруктового пюре. Уровень прибыли на единицу каждого вида выпускаемой карамели (в ден. ед. за 1т): для Kl - 1000, K2 - 1500. Определить оптимальный план выпуска карамели, чтобы фабрика получила максимальную прибыль.

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr}$$

2. $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 157 \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 16 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 11.

1. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприёмников, причём каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объём производства первой линии - 60 изделий, второй линии -75 изделий. На радиоприёмник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприёмник второй модели 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыли от реализации одного приёмника первой и второй моделей равны 30 и 20 долл. соответственно. Определите оптимальные суточные объёмы производства 2-х видов моделей.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \text{extr}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 12.

1. Небольшая фабрика изготавливает два вида красок для внутренних (1) и наружных работ (2). Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта - А и В. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 т соответственно. Расход продуктов на 1 т краски 1 составляет 2 и 1 ед., для краски 2 – 1 и 2.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 1 никогда не превышает спроса на краску 2 более чем на 1т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 1 никогда не превышает 2т в сутки.

Оптовая цена 1 т краски 1 равна 2 тыс. долл., краски 2 - 3 тыс. долл.

Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

$$f(x) = x_1 + 4x_2 \to \text{extr}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ -x_1 + 5x_2 \leq 33 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 13.

1. Фирма производит два вида продукции - А и В. Объём сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объёма реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используются два вида сырья, суточный запас которых ограничен величиной 140 и 80 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет: 1-го вида - 2 фунта, 2- го – 2 фунта; а на единицу продукции В – 4 и 1. Цены продукции А и В равны 20 и 40 долл. соответственно. Определите оптимальный выпуск продукции, обеспечивающий максимальный доход.

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \text{extr}$$

2. $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 38 \\ 2x_1 - x_2 \ge -1 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 14.

1. Фирма выпускает ковбойские шляпы двух фасонов. Трудоёмкость изготовления шляпы фасона 1 вдвое выше трудоёмкости изготовления шляпы фасона 2. Если бы фирма выпускала только шляпы фасона 1, суточный объём производства мог бы составить 500 шляп. Суточный объём сбыта шляп обоих фасонов ограничен диапазоном от 150 до 210 штук. Прибыль от продажи шляпы фасона 1 равна 8 долл., а от фасона 2 - 5долл. Определите, какое количество шляп каждого фасона следует изготовить, чтобы максимизировать прибыль.

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \text{extr}$$

2. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 15.

1. Фирме «Иерихонская сталь» предстоит решить, какое количество x1 чистой стали и какое количество x2 металлолома следует использовать для приготовления (из соответствующею сплава) литья для одного, из своих заказчиков. Пусть производственные затраты в расчете на 1т чистой стали равняются 3 усл.ед., а затраты на 1т металлолома - 5 усл.ед. (последняя цифра больше предыдущей, так как использование металлолома сопряжено с его предварительной очисткой). Заказ предусматривает поставку не менее 5т литья; при этом заказчик готов купить и большее количество литья, если фирма «Иерихонская сталь» поставит перед ним такие условия.

Предположим, что запасы чистой стали ограничены и не превышают 4т, а запасы металлолома не превышают 6т. Отношение веса металлолома к весу чистой стали в процессе получения сплава не должно превышать 7:8. Производственно-технологические, условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 19ч; при этом на 1т стали уходит 3ч, а на 1т металлолома - 1ч производственного времени.

$$f(x) = 2x_1 + 6x_2 \to \text{extr}$$

2. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 16.

1. В опытном хозяйстве установили, что откорм животных выгоден тогда, когда животное будет получать в дневном рационе не менее 6 ед. питательного вещества A, не менее 12 ед. вещества B и не менее 4 ед. вещества C. Для кормления животных используются два вида корма. 1кг корма I содержит 2 ед. A и 2 ед. B, 1 кг корма II – 1, 4 и 4 ед. Цена 1кг корма I равна 50ед., корма II - 60ед.

Составить математическую модель задачи и на её основе установить, сколько каждого корма необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на него были минимальными.

$f(x) = 6x_1 - 2x_2 \to \text{extr}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

Вариант 17.

1. Предприятие производит сборку автомашин двух марок: А1 и А2. Для этого требуются следующие материалы: S1 - комплекты заготовок металлоконструкций в количестве b1 = 17 шт., необходимые для сборки автомашин марок А1 и А2 (соответственно 2 и 3 ед.); S2 - комплекты резиновых изделий в количестве b2 = 11 шт. (соответственно 2 и 1 ед.); S3 - двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b3 = 6 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки А1; S4 - двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b4 = 5 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки А2. Стоимость автомашины марки А1 - c1 = 7 тыс. ден. ед., а автомашины А2 - c2=5 тыс. ден. ед. Определить план выпуска, доставляющий максимальную выручку.

$f(x) = 4x_1 + 4x_2 \to \text{extr}$

2. $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \le 13 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 21 \\ 7x_1 + 2x_2 \le 49 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

Вариант 18.

1. Из двух видов сырья необходимо составит смесь, в состав которой должно входить не менее 6 единиц химического вещества К, не менее 12 единиц вещества L и не менее 4 единиц вещества М. Количество единиц химических веществ, содержащихся в 1 кг смеси 1-го вида: 2, 2 и 3; 2-го вида: 1, 4 и 4 указано в приведённой ниже таблице.

Известно, что цена 1 вида сырья за 1 кг равна 5 единицам, а цена 2 вида -6 единицам за 1 кг. Составить смесь, содержащую необходимое количество веществ данного вида и имеющую минимальную себестоимость.

$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \text{extr}$

2. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 29 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 19 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

Вариант 19.

1. При перевозке 300 контейнеров 1 типа, 500 контейнеров 2 типа и 30 контейнеров 3 типа используется 2 вида автомашин А и В. На автобазе имеется 6 автомашин вида А и 10 - вида В. Автомашина вида А вмещает 50 контейнеров 2 типа и 9 контейнеров 3 типа; автомашина вида В – 100 – 1 типа, 100 – 2 типа и 3 – 3 типа.

На один рейс по определённому маршруту затраты составляют: при использовании машин А и В соответственно - 2 денежных единиц и 1,8 денежных единиц. Требуется определить необходимое количество автомашин вида А и В, чтобы стоимость перевозки контейнеров всех типов была минимальной.

$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 78 \\ 2x_1 \ge 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

Вариант 20.

1. Фирма по переработке картофеля производит три вида продукции: картофельные дольки, кубики и хлопья. Анализ загруженности оборудования и спроса на рынке показывает возможность произвести и сбыть до 1.8 т долек, 1.2 т кубиков и 2.4 т хлопьев. Необходимый для переработки картофель фирма закупает у двух поставщиков. Из 1т картофеля, закупленного у 1-го поставщика, получается: долек – 0,2; кубиков – 0,2; хлопьев – 0,3. Из 1т картофеля, закупленного у 2-го поставщика, получается: долек – 0,3; кубиков – 0,1; хлопьев – 0,3.

Прибыль (доход от реализации готовой продукции за вычетом стоимости сырья) от продажи продукции, произведенной из картофеля от 1-го поставщика, составляет 5 ден.ед. за 1т; от продажи продукции, произведенной из картофеля от 2-го поставщика, 6 ден.ед.

Требуется определить, какое количество картофеля надо приобрести у каждого поставщика, чтобы обеспечить наибольшую относительную прибыль с учетом возможности сбыта готовой продукции.

2. $$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \text{extr}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 21.

1. Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять не менее 120 у.е. белков, не менее 70 у.е. жиров и не менее 10 у.е. витаминов. Содержание их в продуктах Р1 и Р2 соответственно равно 0.2, 0.75, 0; 0.1, 0.1, 0.1. Стоимость одной единицы продукта Р1 – 2 у.е., Р2 – 3 у.е. Требуется организовать таким образом питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получал необходимое количество питательных веществ.

2. $$f(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \text{extr}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \ge 28 \\ 7x_1 + x_2 \le 28 \\ -4x_1 + x_2 \le -5 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 23.

1. Изготавливается продукция двух видов, для которых требуются четыре вида сырья. Запасы каждого вида сырья ограничены и составляют соответственно 18, 15, 13, 19 единиц. Для изготовления единицы продукции 1-го вида необходимо 0, 3, 1, 3 ед. сырья каждого вида; для единицы продукции 2-го вида – 3, 0, 2, 2.

Доход предприятия от реализации одной единицы продукции каждого вида 5 и 7.

Составить такой план выпуска продукции, при котором доход от реализации всей продукции оказался бы максимальным.

2. $$f(x) = 2x_1 + 9x_2 \to \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ 4x_1 \ge 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 22.

1. В овощной магазин привозят одним видом транспорта картофель из двух колхозов соответственно по 40 и 30 ден. ед. за 1 кг. На разгрузку и складирование 1т картофеля с помощью ленточного транспортёра требуется времени: из первого колхоза - 4 мин, из второго - 3 мин. Чтобы без задержек удовлетворять потребности покупателей, надо на 12 т картофеля, заказываемых ежедневно магазином, затрачивать не более 40 мин.

Составить математическую модель задачи и с её помощью установить, сколько картофеля надо привозить в магазин из каждого колхоза, чтобы общая стоимость картофеля была минимальной. Известно, что первый колхоз может ежедневно поставлять не более 10, второй - не более 8т картофеля.

2. $$f(x) = 5x_1 + 2x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 24.

1. Имеется земельный участок площадью 250 га. на котором сеют пшеницу и рожь. Урожайность пшеницы с 1 га составляет 20 ц, ржи – 35 ц. Данные об урожайности приведены в таблице.

По плану должно быть собрано не менее 1000ц пшеницы и 2500ц ржи. Цена 1ц пшеницы - 6 денежных единиц, ржи - 5 денежных единиц. Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и ржи, если критерием оптимальности служит максимум валовой продукции в денежном выражении.

2. $$f(x) = 4x_1 + 6x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -3 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 25.

1. Завод выпускает изделия двух моделей (1, 2). Для их изготовления используются два вида ресурсов (A и B), запасы которых составляют 4000 и 5200 единиц. Расход ресурсов на одно изделие 1-ой модели – 2 и 4, 2-ой модели – 5 и 7. Анализ условий сбыта показывает, что минимальный спрос на продукцию завода составляет 200 и 150 изделий моделей 1 и 2 соответственно. Однако соотношение выпуска изделий моделей 1 и 2 должно быть равно 3:2. Удельные прибыли от реализации изделий составляют 30 и 20 долл. соответственно. Сформулируйте для данных условий задачу определения объёмов выпуска изделие каждой модели, при которых прибыль будет максимальной.

2. $$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr}$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 4x_1 + x_2 \ge 14 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 42 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Практическая работа №9
Оптимизация целевой функции с помощью двухфазного симплекс метода.

Теоретическая часть:

1. Каков порядок решения задачи симплексным методом?
2. Какова структура симплексной таблицы?
3. Что такое опорное решение системы линейных уравнений?
4. Сформулировать алгоритм нахождения опорного решения задачи.
5. Сформулировать алгоритм нахождения оптимального решения задачи.
6. Как определяется отсутствие решения задачи линейного программирования в процессе её решения симплексным методом. Как определяется существование альтернативного оптимума в задаче линейного программирования при её решении симплексным методом?

7. Сформулировать алгоритм решения общей задачи линейного программирования.
8. Вырожденные задачи линейной оптимизации. Способы ликвидации вырожденности.

Практическая часть:

1. Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск: 90 ед. изделия I, 70 ед. изделия II и 60 ед. изделия III. Суточные ресурсы: 780 ед. производственного оборудования (станки, машины и т. п.), 850 ед. сырья (метал и т. п.) и 790 ед. электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в табл.1. Стоимость изделия I – 8 ден. ед., изделия II – 7 ден. ед., изделия III – 6 ден. ед. Сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной?

Таблица 1

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

2. Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение автомашин выделено 600 тыс. ден. ед. Можно заказать машины трех марок – А, Б и В, характеризующиеся данными, приведенными в табл. 2. Количество машин не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не более 144 человек. Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность (т/км) в расчете на одни сутки? Считать, что каждая машина будет использоваться в течение всех трех смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

Таблица 2

Марка автомашины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Количество водителей, обслуживающих машину за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность машины за смену, т/км
А	10	1	3	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	2	3	3780

3. Найти оптимальное сочетание посевов трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в табл.3. производственные ресурсы: 6000 га пашни, 5000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Таблица 3.

Показатель	Пшеница	Гречиха	Картофель
Урожайность, ц	20	10	100
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	0,5	1	5
Затраты ручного труда, чел.-дней	0,5	0,5	20
Прибыль от реализации 1ц продукции, ден.ед.	4	10	3

4. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 450 тыс. л бензина прямой перегонки и 200 тыс. л изопентона. В результате смешения этих четырех компонентов в отношении 2:3:5:2 образуется бензин А стоимостью 120 ден.ед. за 1 тыс. л; в отношении 3:1:2:1 – бензин Б стоимостью 100 ден.ед. за 1 тыс.л; в отношении 2:2:1:3 – бензин В стоимостью 150 ден.ед. за 1 тыс.л. Составить план, при котором стоимость всей выпущенной продукции будет максимальной.

5. Для изготовления обуви четырех моделей на фабрике используются два сорта кожи. Ресурсы рабочей силы и материала, затраты труда и материала для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в табл. 4. Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

Таблица 4.

6. Автопогрузчики АП-1 и АП-2 заняты работами на площадках П1 и П2. Не более чем за 24 ч на площадке П1 необходимо погрузить 230 т груза, на площадке П2 – 168 т. Количество груза, которое может погрузить каждый автопогрузчик за один час на той или иной площадке, а также стоимость погрузки одной тонны груза приведены в табл. 5. Установить, сколько тонн должен погрузить каждый автопогрузчик на той или другой площадке так, чтобы своевременно выполнить задание с минимальными затратами.

Таблица 5.

Автопогрузчик	Мощность на площадке		Стоимость работ на площадке	
	П1	П2	П1	П2
АП-1	10	12	8	7
АП-2	13	13	12	13

7. Производственные участки У1 и У2 получили заказ на изготовление 32 изделий И1 и 4 изделий И2. Производительность участков по изделиям и фонд рабочего времени участков приведены в табл.6, а затраты, связанные с производством единицы каждого изделия, - в табл.7. Найти оптимальный план размещения заказа по участкам, минимизирующий затраты, при условии, что фонд рабочего времени участка У2 будет использован полностью.

Таблица 6.

	И1	И2	Фонд
У1	4	2	9,5
У2	1	3	4

Таблица 7.

	И1	И2
У1	9	20
У2	15	30

8. Из листов стального проката размером 6×13 м необходимо выкроить 800 заготовок А размером 4×5 м и 400 заготовок Б размером 2×3 м. Раскрой можно производить четырьмя способами. В табл.8 указано количество заготовок каждого типа, получаемых при раскрое одного листа различными способами. Составить такой план раскроя, чтобы расход материала был минимальным.

Таблица 8

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты ресурсов на одну пару обуви по моделям			
		№1	№2	№3	№4
Рабочее время, чел.-ч	1000	1	2	2	1
Кожа 1-го сорта	500	2	1	0	0
Кожа 2-го сорта	1200	0	1	4	1
Прибыль, ден.ед.		2	40	10	15

Заготовка	Количество заготовок при способе раскроя			
	I	II	III	IV
А	3	2	1	0
Б	1	6	9	13

9. Имеющийся фонд материалов Mi (i=$\overline{1,3}$) нужно распределить между изготовителями продукции Пj (j=$\overline{1,5}$) так, чтобы получить максимальную прибыль от реализации всей продукции, произведенной из имеющихся материалов. Нормы расхода на единицу продукции, запас материалов и прибыль, получаемая от реализации единицы готовой продукции, приведены в табл.9.

Таблица 9.

Материал	Фонд материалов	Продукция				
		П1	П2	П3	П4	П5
М1	50000	0,7	0,9	1,5	2,3	1,8
М2	28000	1,4	0,3	0,7	2,5	2,0
М3	40000	0,5	2,1	1,8	0,7	2,0
Прибыль		5	7	6	9	8

10. Предприятие может выпускать продукцию П1, П2, П3, и П4, сбыт любого количества которой обеспечен. При производстве продукции расходуются различные ресурсы, запасы которых и удельные затраты приведены в табл.10, там же указана и цена продукции. Найти оптимальный план выпуска продукции, максимизирующий выручку предприятия от реализованной продукции.

Таблица 10.

Ресурсы	Запас ресурса	Расход ресурса на единицу продукции			
		П1	П2	П3	П4
Трудовые ресурсы, чел-ч	4800	4	2	2	8
Полуфабрикаты, кг	2400	2	10	6	0
Станочное оборудование, станко-ч	1500	1	0	2	1
Цена единицы продукции, ден.ед.		65	70	60	120

11. На предприятии освоены четыре технологии производства основной продукции. В табл.11 указаны запасы потребляемых ресурсов, затраты их в течение месяца и объемы выпуска готовой продукции при каждой технологии за тот же период. Установить такое время работы предприятия по каждой технологии, при котором выпуск продукции будет максимальным, а расход ресурсов не превысит их наличия.

Таблица 11.

Ресурсы	Запас ресурса	Расход ресурса при технологии			
		I	II	III	IV
Р1	34	2	4	1	5
Р2	16	4	1	4	1
Р3	22	2	3	1	2
Объем выпуска продукции		7	3	4	2

12. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 30 тыс. ден.ед. и помещение площадью в 45 м2. Участок может быть оснащен машинами трех типов, характеристики которых приведены в табл.12. Найти оптимальный план приобретения машин, обеспечивающий новому производственному участку максимальную производительность.

Таблица 12.

Машина	Стоимость машины, тыс. ден.ед.	Занимаемая площадь, м2	Производительность за смену, тыс. ден.ед.
М1	6	9	8
М2	3	4	4
М3	2	3	3

13. Торговое предприятие реализует товары Т1, Т2 и Т3, используя при этом площади торговых залов и время обслуживающего персонала. Затраты указанных ресурсов на продажу одной партии товара каждого вида, их объемы и прибыль, получаемая от реализации каждой партии товара, приведены в таб.13. Найти оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую предприятию максимальную прибыль.

Таблица 13.

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты ресурсов по товарам		
		Т1	Т2	Т3
Время, чел.-ч	370	0,5	0,7	0,6
Площадь, м2	90	0,1	0,3	0,2
Прибыль, ден.ед.		5	8	6

14. Механический завод при изготовлении деталей Д1 иД2 использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку деталей можно вести по технологиям I и II. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станкочасах), затраты времени изготовления детали (в часах) и прибыль от выпуска каждой детали приведены в табл.14. Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Таблица 14.

Оборудование	Фонд времени, ч	Деталь			
		Д1		Д2	
		Технология			
		I	II	I	II
Токарное	37	3	1	1	2
Фрезерное	20	2	2	3	0
Сварочное	30	0	1	1	4
Прибыль, ден.ед.		11	6	9	6

15. Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома каждого проекта приведены в табл.15. Определить, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

Таблица 15.

Стройматериалы	Расход стройматериалов	Запас строймате-

	(м3) на один дом		риалов, м3
	I проекта	II проекта	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650
Полезная площадь, м2	60	50	

16. Сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы марок М1 и М2 для выполнения работ Р1, Р2 и Р3. Производительность тракторов при выполнении указанных работ, общий объем работ и стоимость каждого трактора приведены в табл.16. Найти оптимальный вариант приобретения тракторов, обеспечивающий выполнение всего комплекса работ при минимальных денежных затратах на технику.

Таблица 16.

Вид работ	Объем работ, га	Производительность трактора марки	
		М1	М2
Р1	60	4	3
Р2	40	8	1
Р3	30	1	3
Стоимость трактора, ден.ед.		7	2

17. На заготовительный участок поступили стальные прутья длиной 111 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 19, 23 и 30 см, которых требуется соответственно 311, 215 и 190 шт. Построить модель, на основе которой можно решить задачу выбора варианта выполнения этой работы, при котором число разрезаемых прутьев минимально.

18. На заготовительный участок поступило 69 металлических прутьев длиной 107 см. Их необходимо разрезать на заготовки по 13, 15 и 31 см в комплектности, задаваемой отношением 1:4:2. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу максимизации комплектов заготовок. Найти оптимальный план.

19. На заготовительный участок мебельной фабрики поступили листы фанеры размерами 152×152 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 105×31, 47×90 и 30×51 см. Потребность в них – соответственно 315, 215 и 416 шт. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу выбора варианта раскроя, при котором количество разрезаемых листов минимально.

20. На заводе ежемесячно скапливается около 14 т отходов металла, из которого можно штамповать большие и малые шайбы. Месячная потребность завода в больших шайбах – 600 тыс. шт., в малых – 1100 тыс. шт. (недостающее количество шайб закупается на специализированном предприятии). Оптовая цена больших шайб – 1,9 ден.ед. (за тысячу штук), малых – 5,2 ден.ед. Расход металла на тысячу больших шайб – 22 кг, на тысячу малых – 8 кг. Для изготовления шайб используются два пресса холодной штамповки. Производительность каждого за смену – 9 тыс. шт. больших шайб либо 11,5 тыс. шт. малых. Завод работает в две смены. Построить модель, на основе которой можно решить задачу определения плана производства шайб (из отходов), обеспечивающего максимальную долю в валовой продукции предприятия. За плановый период принять год. Найти оптимальный план.

21. Предприятие изготавливает приборы типа А,В и С, которые реализует соответственно по 6000, 7000 и 11500 ден.ед. за изделие. Трудоемкость их производства задана отношением 1:2:3 . Ранее предприятие изготавливало только прибор типа А в количестве 900 шт. за сутки. Однако изменение объема поставок экранированного провода (при сборке приборов каждого типа расходуется одинаковое количество этого материала) в планируемом году позволит выпускать за сутки 1000 приборов. Для укомплектования каждого прибора необходим датчик того же типа, что и тип прибора. Их предполагается получать по кооперированным поставкам в количестве, обеспечивающем в сутки сборку не более 400, 500 и 200 приборов типа А,В и С соответственно. Построить модель, на основе которой можно решить задачу определения напряженных месячных планов по объему

реализации и ассортименту выпускаемой продукции. Найти оптимальные планы.

22. Предприятие располагает ресурсами сырья трех видов: С1, С2, С3. Используя это сырье, оно выпускает четыре вида продукции: П1, П2, П3 и П4. В таблице указаны затраты каждого вида и объем ресурсов сырья. Прибыль получаемая от реализации 1 тонны продукции равна: П1 - 48, П2 - 25, П3 – 56, П4 – 30. Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором прибыль будет максимальной, при условии, что продукции П2 необходимо выпустить не менее 8 т, продукции П4 не более 5т, а продукции П1 и П3 в отношении 3:1.

Таблица 17

Виды сырья	Затраты сырья на 1т продукции				Объем ресурсов
	П1	П2	П3	П4	
С1	4	5	2	3	60
С2	30	14	18	22	400
С3	16	14	8	10	128

23. Фабрика выпускает кожаные брюки, куртки и пальто специального назначения в ассортименте, заданном отношением 2:1:3. В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка: дубильный, раскройный и пошивочный. Фабрика имеет практически неограниченную сырьевую базу, однако сложная технология предъявляет высокие требования к квалификации рабочих. Время обработки изделий на каждом участке, их плановая себестоимость, оптовая цена предприятия приведены в табл.18

Таблица 18

Показатель	Изделие		
	Брюки	Куртки	Пальто
Норма времени на участках, чел.-ч:			
дубильном	0,3	0,4	0,6
раскройном	0,4	0,4	0,7
пошивочном	0,5	0,4	0,8
Полная себестоимость, ден.ед.	15	40,5	97,8
Оптовая цена предприятия, ден.ед.	17,5	42,0	100,0

Ограничения на фонд времени для дубильного, раскройного и пошивочного участков составляют соответственно 3360, 2688 и 5040 ч. Учитывая заданный ассортимент, построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу определения напряженного месячного плана по прибыли от реализованной продукции. Найти оптимальный план.

24. В сплав может входить не менее 4% никеля и не более 80% железа. Для составления сплава используются три вида сырья, содержащего никель, железо и прочие вещества. Стоимость различных видов сырья и процентное содержание в нем соответствующих компонентов сплава представлены в табл. Определить состав шихты таким образом, чтобы стоимость 1 кг сплава была минимальной.

Таблица 19

Компоненты сплава	Содержание компонентов (%) для сырья вида		
	I	II	III
Железо	70	90	85
Никель	5	2	7
Прочие	25	8	8
Стоимость 1 кг, ден.ед.	6	4	5

25. Металлургический цех выпускает три вида продукции: А, Б и В. Прибыль от тонны производственной продукции каждого вида составляет соответственно 35, 25 и 40 ден.ед. Цех располагает необходимым оборудованием, каждый тип которого имеет свой фонд рабочего времени и производительность (табл.). Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли.

Таблица 20

Оборудование	Фонд времени, ч	Производительность (т/ч) по видам		
		А	Б	В
Печь обжига	2766	3,5	2,8	-
Травильный агре-	624	0,083	0,083	0,104
гат	416	0,067	0,1	0,083
Прокатный стан	250	1	-	-

Отделочный стан №1	1250	-	1	-
Отделочный стан №2	1500	-	-	1
Отделочный стан №3				

26. Предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: требуется не более чем за 6 единиц времени выпустить 30 единиц продукции П1 и 96 единиц продукции П2. Каждый из видов продукции может производиться машинами А и Б, значения мощностей которых и затраты, вызванные изготовлением каждого из видов продукции на той или иной машине, заданы табл.. Требуется составить оптимальный план работы машин, а именно: найти, сколько времени каждая из машин А и Б должна быть занята изготовлением каждого из видов продукции П1 и П2, чтобы стоимость всей продукции предприятия оказалась минимальной и в то же время был бы выполнен заданный план как по времени, так и по номенклатуре.

Таблица 21

Машина	Мощность машины по видам продукции		Затраты на производство продукции	
	П1	П2	П1	П2
А	6	24	4	47
Б	13	13	13	26

27. Сельскохозяйственное предприятие отвело три земельных массива площадью в 5000, 8000 и 9000 га под посевы ржи, пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по массивам указана в табл.. За 1ц ржи предприятие получает 2 ден.ед. прибыли, за 1ц пшеницы – 2,5 ден.ед.,за 1ц кукурузы -1,4 ден.ед.. Сколько гектаров и на каких массивах следует отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную прибыль, если по плану необходимо сдать не менее 1900т ржи, 15 800т пшеницы и 30 000т кукурузы?

Таблица 22

Культура	Средняя урожайность (ц/га) массива		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	15	22
Кукуруза	30	35	25

28. Три типа самолетов следует распределить между двумя авиалиниями. В табл. Заданы количество самолетов каждого типа, месячный объем перевозок каждым самолетом на каждой авиалинии и соответствующие эксплуатационные расходы. Требуется распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из них соответственно не менее 300 и 200 ед. груза.

Таблица 23

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям		Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям	
		I	II	I	II
1	50	15	10	15	20
2	20	30	25	70	28
3	30	25	50	40	70

29. Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. шт. в год, цех по сборке мотоциклов – 30 тыс. шт. в год. Механические цеха завода оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. велосипедов, либо детали для 40 тыс. мотоциклов, либо любую комбинацию, ограниченную этими данными. Другая группа механических цехов может выпускать детали либо для 80 тыс. велосипедов, либо для 60 тыс. мотоциклов, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тысячи велосипедов завод получает прибыль в 2 тыс. ден.ед., а каждой тыс. мотоциклов – 3 тыс. ден.ед.. Найти такое сочетание объемов выпуска продукции, которое даст наибольшую сумму прибыли.

30. На кондитерской фабрике весь ассортимент выпускаемой карамели разделен на три однородные группы, условно обозначенные К1, К2, К3. Расход основного сырья и его запас указаны в таблице. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли.

Таблица 24

Виды основного сырья	Расход сырья на 1 т			Общий запас сырья
	К1	К2	К3	
I (сахар-песок)	0,7	0,7	0,7	700
II (патока)	0,3	0,3	0,2	300
III (фруктовое пюре)	0	0,2	0,3	150
Уровень прибыли	100	110	120	

Практическая работа №10
Решение двойственных задач. Экономическая интерпретация задач линейного программирования.

На предприятии имеется возможность выпускать n видов продукции Π_j (j=1..n). При её изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3. Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами b_1, b_2, b_3. Расход ресурса i-го (i=1..3) вида на единицу продукции j-го вида составляет a_{ij} единиц. Цена единицы продукции j-го вида равна c_j ден. ед. Требуется:

1. симплексным методом найти план выпуска продукции по видам с учётом имеющихся ограниченных ресурсов, который

обеспечивал бы предприятию максимальный доход. Дать содержательный ответ, вскрыв экономический смысл всех переменных, участвующих в решении задачи;

2. сформулировать в экономических терминах двойственную задачу и составить её математическую модель;

3. используя решение исходной задачи и соответствие между двойственными переменными, найти компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки y_i^* (i=1..3);

4. указать наиболее дефицитный и недефицитный ресурс, если он имеется;

5. сформулировать в экономических терминах значения двойственных переменных и дополнительных двойственных оценок.

Вариант 1.

n=4

	$a_{11} = 2$	$a_{21} = 3$
$b_1 = 20$	$a_{12} = 2$	$a_{22} = 1$
$b_2 = 32$	$a_{13} = 3$	$a_{23} = 1$
$b_3 = 29$	$a_{14} = 0$	$a_{24} = 2$
	$a_{31} = 0$	$c_1 = 11$
	$a_{32} = 1$	$c_2 = 6$
	$a_{33} = 1$	$c_3 = 9$
	$a_{34} = 4$	$c_4 = 6$

Вариант 2.

n=3

$b_1 = 140$	$a_{11} = 2$	$a_{21} = 1$
$b_2 = 180$	$a_{12} = 3$	$a_{22} = 4$
$b_3 = 120$	$a_{13} = 5$	$a_{23} = 5$
	$a_{31} = 4$	$c_1 = 8$
	$a_{32} = 4$	$c_2 = 7$
	$a_{33} = 2$	$c_3 = 6$

Вариант 3.

n=4

	$a_{11} = 2$	$a_{21} = 1$
$b_1 = 280$	$a_{12} = 1$	$a_{22} = 0$
$b_2 = 80$	$a_{13} = 1$	$a_{23} = 1$
$b_3 = 250$	$a_{14} = 1$	$a_{24} = 1$
	$a_{31} = 1$	$c_1 = 4$
	$a_{32} = 2$	$c_2 = 3$
	$a_{33} = 1$	$c_3 = 6$
	$a_{34} = 0$	$c_4 = 7$

Вариант 4.

n=4

	$a_{11} = 2$	$a_{21} = 4$
$b_1 = 34$	$a_{12} = 4$	$a_{22} = 1$
$b_2 = 16$	$a_{13} = 1$	$a_{23} = 4$
$b_3 = 22$	$a_{14} = 5$	$a_{24} = 1$
	$a_{31} = 2$	$c_1 = 7$
	$a_{32} = 3$	$c_2 = 3$
	$a_{33} = 1$	$c_3 = 4$
	$a_{34} = 2$	$c_4 = 2$

Вариант 5.

n=3

$b_1 = 600$	$a_{11} = 10$	$a_{21} = 1$
$b_2 = 30$	$a_{12} = 20$	$a_{22} = 1$
$b_3 = 144$	$a_{13} = 18$	$a_{23} = 1$
	$a_{31} = 3$	$c_1 = 35$
	$a_{32} = 6$	$c_2 = 60$
	$a_{33} = 6$	$c_3 = 63$

Вариант 6.

n=3

$b_1 = 24$	$a_{11} = 4$	$a_{21} = 3$
$b_2 = 10$	$a_{12} = 7$	$a_{22} = 2$
$b_3 = 6$	$a_{13} = 1$	$a_{23} = 1$
	$a_{31} = 2$	$c_1 = 18$
	$a_{32} = 1$	$c_2 = 12$
	$a_{33} = 1$	$c_3 = 8$

Вариант 7.

n=3

$b_1 = 500$ $\quad a_{11} = 2$ $\quad a_{21} = 0$

$b_2 = 550$ $\quad a_{12} = 1$ $\quad a_{22} = 2$

$b_3 = 200$ $\quad a_{13} = 0$ $\quad a_{23} = 1$

$a_{31} = 0$ $\quad c_1 = 3$

$a_{32} = 1$ $\quad c_2 = 4$

$a_{33} = 0$ $\quad c_3 = 1$

Вариант 8.

n=4

$a_{11} = 2{,}5$ $\quad a_{21} = 4$

$b_1 = 200$ $\quad a_{12} = 2{,}5$ $\quad a_{22} = 10$

$b_2 = 260$ $\quad a_{13} = 2$ $\quad a_{23} = 4$

$b_3 = 380$ $\quad a_{14} = 1{,}5$ $\quad a_{24} = 2$

$a_{31} = 8$ $\quad c_1 = 40$

$a_{32} = 2$ $\quad c_2 = 50$

$a_{33} = 4$ $\quad c_3 = 100$

$a_{34} = 6$ $\quad c_4 = 80$

Вариант 9.

n=3

$b_1 = 360$ $\quad a_{11} = 18$ $\quad a_{21} = 6$

$b_2 = 192$ $\quad a_{12} = 10$ $\quad a_{22} = 4$

$b_3 = 180$ $\quad a_{13} = 12$ $\quad a_{23} = 8$

$a_{31} = 5$ $\quad c_1 = 9$

$a_{32} = 3$ $\quad c_2 = 10$

$a_{33} = 3$ $\quad c_3 = 16$

Вариант 10.

n=3

$b_1 = 180$ $\quad a_{11} = 4$ $\quad a_{21} = 3$

$b_2 = 210$ $\quad a_{12} = 2$ $\quad a_{22} = 1$

$b_3 = 244$ $\quad a_{13} = 1$ $\quad a_{23} = 3$

$a_{31} = 1$ $\quad c_1 = 10$

$a_{32} = 2$ $\quad c_2 = 14$

$a_{33} = 5$ $\quad c_3 = 12$

Вариант 11.

n=4

$a_{11} = 1$ $\quad a_{21} = 0$

$b_1 = 2$ $\quad a_{12} = 1$ $\quad a_{22} = 1$

$b_2 = 2$ $\quad a_{13} = 0$ $\quad a_{23} = 1$

$b_3 = 2$ $\quad a_{14} = 2$ $\quad a_{24} = 0$

$a_{31} = 1$ $\quad c_1 = 3$

$a_{32} = 0$ $\quad c_2 = 7$

$a_{33} = 1$ $\quad c_3 = 4$

$a_{34} = 0$ $\quad c_4 = 2$

Вариант 12.

n=5

	$a_{11}=1$	$a_{21}=0$
	$a_{12}=1$	$a_{22}=1$
$b_1=3$	$a_{13}=1$	$a_{23}=1$
$b_2=2$	$a_{14}=2$	$a_{24}=1$
$b_3=2$	$a_{15}=2$	$a_{25}=2$
	$a_{31}=1$	$c_1=5$
	$a_{32}=1$	$c_2=2$
	$a_{33}=0$	$c_3=8$
	$a_{34}=2$	$c_4=3$
	$a_{35}=1$	$c_5=6$

Вариант 13.

n=3

$b_1=400$	$a_{11}=6$	$a_{21}=7$
$b_2=245$	$a_{12}=4$	$a_{22}=7$
$b_3=200$	$a_{13}=6$	$a_{23}=7$
	$a_{31}=4$	$c_1=120$
	$a_{32}=4$	$c_2=100$
	$a_{33}=8$	$c_3=150$

Вариант 14.

n=3

$b_1=60$	$a_{11}=1$	$a_{21}=2$
$b_2=50$	$a_{12}=1$	$a_{22}=1$
$b_3=90$	$a_{13}=1$	$a_{23}=5$
	$a_{31}=2$	$c_1=8$
	$a_{32}=2$	$c_2=10$
	$a_{33}=10$	$c_3=30$

Вариант 15.

n=3

$b_1=12$	$a_{11}=1$	$a_{21}=5$
$b_2=29$	$a_{12}=4$	$a_{22}=3$
$b_3=16$	$a_{13}=3$	$a_{23}=2$
	$a_{31}=4$	$c_1=5$
	$a_{32}=0$	$c_2=2$
	$a_{33}=4$	$c_3=3$

Вариант 16.

n=4

	$a_{11}=1$	$a_{21}=2$
$b_1=100$	$a_{12}=2$	$a_{22}=1$
$b_2=50$	$a_{13}=3$	$a_{23}=0$
$b_3=120$	$a_{14}=1$	$a_{24}=0$
	$a_{31}=0$	$c_1=2$
	$a_{32}=1$	$c_2=40$
	$a_{33}=4$	$c_3=10$
	$a_{34}=1$	$c_4=15$

Вариант 17.

n=5

	$a_{11}=1$	$a_{21}=2$
	$a_{12}=2$	$a_{22}=3$
$b_1=3$	$a_{13}=3$	$a_{23}=1$
$b_2=5$	$a_{14}=6$	$a_{24}=6$
$b_3=4$	$a_{15}=2$	$a_{25}=0$
	$a_{31}=3$	$c_1=3$
	$a_{32}=1$	$c_2=4$
	$a_{33}=2$	$c_3=1$
	$a_{34}=6$	$c_4=3$
	$a_{35}=4$	$c_5=2$

Вариант 18.

n=4

	$a_{11}=1$	$a_{21}=2$
$b_1=4$	$a_{12}=3$	$a_{22}=1$
$b_2=3$	$a_{13}=0$	$a_{23}=0$
$b_3=3$	$a_{14}=1$	$a_{24}=0$
	$a_{31}=0$	$c_1=2$
	$a_{32}=1$	$c_2=1$
	$a_{33}=4$	$c_3=1$
	$a_{34}=1$	$c_4=4$

Вариант 19.

n=4

	$a_{11}=1$	$a_{21}=4$
$b_1=24$	$a_{12}=2$	$a_{22}=5$
$b_2=12$	$a_{13}=4$	$a_{23}=1$
$b_3=35$	$a_{14}=5$	$a_{24}=0$
	$a_{31}=6$	$c_1=4$
	$a_{32}=0$	$c_2=2$
	$a_{33}=3$	$c_3=5$
	$a_{34}=1$	$c_4=8$

Вариант 20.

n=3

$b_1=12$	$a_{11}=2$	$a_{21}=3$
$b_2=27$	$a_{12}=1$	$a_{22}=3$
$b_3=6$	$a_{13}=6$	$a_{23}=9$
	$a_{31}=2$	$c_1=14$
	$a_{32}=1$	$c_2=6$
	$a_{33}=2$	$c_3=22$

Вариант 21.

n=3

$b_1 = 8$ $a_{11} = 4$ $a_{21} = 6$
$b_2 = 18$ $a_{12} = 1$ $a_{22} = 1$
$b_3 = 6$ $a_{13} = 2$ $a_{23} = 3$
$a_{31} = 6$ $c_1 = 24$
$a_{32} = 1$ $c_2 = 4$
$a_{33} = 1$ $c_3 = 8$

Вариант 22.

n=3

$b_1 = 5$ $a_{11} = 0$ $a_{21} = 2$
$b_2 = 4$ $a_{12} = 2$ $a_{22} = 4$
$b_3 = 2$ $a_{13} = 5$ $a_{23} = 2$
$a_{31} = 1$ $c_1 = 20$
$a_{32} = 0$ $c_2 = 8$
$a_{33} = 1$ $c_3 = 30$

Вариант 23.

n=3

$\mathrm{b}_1 = 1$ $a_{11} = 1$ $a_{21} = 1$
$\mathrm{b}_2 = 2$ $a_{12} = 2$ $a_{22} = 1$
$\mathrm{b}_3 = 4$ $a_{13} = 0$ $a_{23} = 2$
$a_{31} = 2$ $c_1 = 3$
$a_{32} = 0$ $c_2 = 1$
$a_{33} = 3$ $c_3 = 4$

Вариант 24.

n=3

$b_1 = 4$ $a_{11} = 1$ $a_{21} = 1$
$b_2 = 7$ $a_{12} = 3$ $a_{22} = 0$
$b_3 = 12$ $a_{13} = 0$ $a_{23} = 2$
$a_{31} = 1$ $\mathrm{c}_1 = 8$
$a_{32} = 3$ $\mathrm{c}_2 = 3$
$a_{33} = 2$ $\mathrm{c}_3 = 5$

Вариант 25.

n=3

$b_1 = 18$ $a_{11} = 1$ $a_{21} = 2$
$b_2 = 16$ $a_{12} = 2$ $a_{22} = 1$
$b_3 = 8$ $a_{13} = 1$ $a_{23} = 1$
$a_{31} = 1$ $c_1 = 3$
$a_{32} = 1$ $c_2 = 4$
$a_{33} = 0$ $c_3 = 2$

Вариант 26.

n=4

$a_{11} = 2$ $a_{21} = 7$

$b_1 = 12$ $a_{12} = 4$ $a_{22} = 2$

$b_2 = 8$ $a_{13} = 0$ $a_{23} = 2$

$b_3 = 48$ $a_{14} = 8$ $a_{24} = 6$

$a_{31} = 5$ $c_1 = 3$

$a_{32} = 8$ $c_2 = 4$

$a_{33} = 4$ $c_3 = 3$

$a_{34} = 3$ $c_4 = 1$

Вариант 27.

n=3

$b_1 = 2$ $a_{11} = 1$ $a_{21} = 1$

$b_2 = 3$ $a_{12} = 1$ $a_{22} = 0$

$b_3 = 4$ $a_{13} = 0$ $a_{23} = 2$

$a_{31} = 1$ $c_1 = 1$

$a_{32} = 1$ $c_2 = 1$

$a_{33} = 1$ $c_3 = 1$

Практическая работа №11
Решение транспортных задач.

Найти оптимальные планы перевозок ТЗ, условия которых даны в таблицах:

1.

Поставщики	Потребители			Запас груза ai
	B1	B2	B3	
A1	1	3	2	50
A2	4	5	7	100
A3	6	2	4	130
Потребность в грузе bj	70	100	110	

2.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	4	7	2	3	30
A2	3	1	0	4	190
A3	5	6	3	7	250
Потребность в грузе bj	70	120	150	130	

3.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	5	1	2	3	300
A2	6	3	7	1	200
A3	4	5	3	2	500
A4	2	4	6	4	700
Потребность в грузе bj	230	420	650	400	

4.

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	3	1	5	4	2	200
A2	6	4	2	7	3	450
A3	5	2	3	4	6	500
Потребность в грузе bj	300	400	200	100	150	

5.

Поставщики	Потребители						Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	5	3	1	4	2	6	1780
A2	4	2	3	6	1	3	2000
A3	1	3	7	4	5	2	1530
A4	3	4	6	7	1	5	2860
Потребность в грузе bj	850	1870	1950	1670	1000	830	

6.

Поставщики	Потребители						Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	2	4	3	1	6	3	3000

A2 A3 A4	5 3 1	7 6 3	4 1 2	5 4 6	2 3 4	1 7 5	5000 1250 7300
Потребность в грузе bj	2300	3200	4000	1760	1500	2220	

7.

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	4	1	2	5	6	100
A2	7	3	4	2	5	70
A3	6	4	7	1	8	130
A4	2	5	6	4	7	150
Потребность в грузе bj	80	120	70	130	50	450

8.

Поставщики	Потребители							Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	
A1	5	1	4	3	6	7	2	1040
A2	4	2	6	5	1	8	3	2700
A3	7	3	1	4	2	5	6	1885
A4	2	5	7	1	4	3	4	1457
Потребность в грузе bj	590	740	875	1537	1200	1500	640	

9.

Поставщики	Потребители						Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	7	1	4	6	5	8	600
A2	1	3	5	2	4	6	800
A3	4	5	6	3	1	7	550
A4	5	3	7	2	8	4	730
A5	2	4	3	5	6	3	900
Потребность в грузе bj	750	580	440	620	550	640	

10.

Поставщики	Потребители	Запас груза ai

	B1	B2	B3	B4	
A1	6	4	2	7	40
A2	8	10	14	12	36
A3	16	12	6	13	24
Потребность в грузе bj	24	20	30	26	

11.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	8	4	6	2	40
A2	4	10	5	6	25
A3	6	7	8	5	28
A4	10	12	8	9	32
Потребность в грузе bj	28	32	20	45	

12.

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	9	6	8	11	10	100
A2	6	9	13	15	12	80
A3	8	7	12	5	9	40
Потребность в грузе bj	60	50	40	35	35	

13.

Поставщики	Потребители						Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	9	3	4	8	10	12	36
A2	4	6	7	11	13	9	34
A3	5	8	8	4	12	10	32
A4	6	2	15	9	6	8	30
Потребность в грузе bj	20	15	25	27	30	15	

14.

Поставщики	Потребители						Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	5	10	15	6	14	13	120
A2	14	9	8	12	11	10	60
A3	7	12	13	15	9	14	150

Потребность в грузе bj	45	52	48	55	70	60	

15.

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	7	5	9	8	6	150
A2	8	10	4	11	12	170
A3	4	3	15	13	14	200
Потребность в грузе bj	120	80	140	70	110	

16.

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	7	6	8	10	12	50
A2	9	5	7	4	6	60
A3	6	8	4	9	7	40
Потребность в грузе bj	30	20	55	20	25	

17.(открытая)

Поставщики	Потребители			Запас груза ai
	B1	B2	B3	
A1	4	6	7	40
A2	3	5	8	60
A3	9	10	6	50
Потребность в грузе bj	30	40	60	

18.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	12	15	14	10	30
A2	16	20	18	17	50
A3	19	21	16	13	45
Потребность в грузе bj	20	25	35	40	

19.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	15	17	14	12	60
A2	16	12	10	9	45
A3	13	18	11	15	130
Потребность в грузе bj	50	70	60	80	

20.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	17	15	10	14	70
A2	20	16	18	13	100
A3	18	17	19	20	60
A4	16	12	15	18	80
Потребность в грузе bj	90	80	50	100	

21.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	12	9	10	15	1500
A2	14	8	13	17	500
A3	18	19	20	14	700
A4	17	15	18	21	900
Потребность в грузе bj	1000	600	800	1100	

22.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	25	23	19	21	40
A2	12	18	20	24	50
A3	19	22	23	17	60
Потребность в грузе bj	35	30	45	32	

23.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	15	17	20	22	10
A2	24	18	19	21	12
A3	23	16	17	20	18

Потребность в грузе bj	9	10	12	15	

24.

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	7	2	11	5	9	150
A2	8	4	3	6	1	170
A3	3	5	10	7	8	110
Потребность в грузе bj	110	120	80	50	70	

25.

Поставщики	Потребители							Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	
A1	7	5	3	4	2	1	8	135
A2	9	4	5	10	3	6	5	270
A3	6	2	8	7	1	4	3	120
Потребность в грузе bj	80	93	56	100	125	98	73	

26.

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	7	1	4	5	2	85
A2	13	4	7	6	3	112
A3	3	8	0	18	12	72
A4	9	5	3	4	7	120
Потребность в грузе bj	75	125	64	65	60	

27.

Поставщики	Потребители						Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	3	7	6	1	4	9	28
A2	8	2	5	10	7	3	30
A3	4	9	10	3	6	5	40
A4	2	4	7	8	3	1	35

Потребность в грузе bj	18	10	20	37	10	38	

28.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	3	2	4	1	40
A2	2	3	1	5	50
A3	3	2	4	4	30
Потребность в грузе bj	35	40	40	30	

29.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	4	7	1	3	50
A2	5	9	6	2	70
A3	8	2	9	11	40
Потребность в грузе bj	30	60	45	25	

30.

Поставщики	Потребители				Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	4	10	5	3	60
A2	6	7	2	8	100
A3	8	9	12	11	70
Потребность в грузе bj	50	55	70	45	

Практическая работа №12
Дополнительные условия в транспортных задачах

1.Пять автопарков (АП) города с ежемесячной потребностью в бензине соответственно в 40, 30, 80, 60 и 50 т снабжаются четырьмя бензохранилищами (БХ) вместимостью 55, 70, 35 и 100 т соответственно. Доставка горючего из бензохранилищ осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1т приведены в таблице. Требуется составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты при следующих условиях: из бензохранилища БХ2 весь запас бензина поставляется в автопарк АП3; потребность автопарка АП1 удовлетворяется полностью; в бензохранилище БХ3 остаётся резервный запас в 20 т бензина для чрезвычайных нужд.

Таблица 1

Бензохранилище	Автопарк				
	АП1	АП2	АП3	АП4	АП5
БХ1	6	5	9	7	4
БХ2	10	11	8	3	2
БХ3	12	8	7	9	6
БХ4	10	7	12	3	5

2.Заводы З1, З2 и З3 выпускают однородную продукцию в количествах 40, 20 и 50 ед. себестоимостью 1, 3 и 7 ден. ед. соответственно. Продукция поставляется в пункты А, Б и В в количествах соответственно 30, 25 и 45 ед. с тарифами, приведенными в матрице

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 13 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Пятнадцать единиц продукции завода З3 предназначено для пункта Б. Продукцию завода, где себестоимость ее наименьшая, распределить полностью. Составить наиболее экономный план удовлетворения потребностей в продукции, учитывающий затраты на ее производство и доставку.

3.Завод имеет три цеха А, Б и В и четыре склада № 1, 2, 3 и 4. Цех А производит 30 тыс. изделий, цех Б – 40, цех В – 20 тыс. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад №1 – 25 тыс. изделий, склад №2 -30, склад №3 – 35, склад №4 – 15 тыс. Стоимость перевозки из цеха А соответственно на склады № 1, 2, 3 и 4 одной тысячи изделий равна 2; 3;0,5 и 4 ден. ед., из цеха Б – 3; 2; 5 и 1 ден. ед., а из цеха В - 4; 3; 2 и 6 ден. ед. Составить план перевозки изделий на склады, минимизирующий транспортные расходы. При этом необходимо учесть, что на складах № 1 и 4 со-

зданы лучшие условия для хранения готовой продукции, а поэтому их следует загрузить полностью.

4.Имеются 4 трактора марки А, 20 – марки Б, 10 – марки В и 4 – марки Г. Распределить сельскохозяйственные работы по маркам тракторов таким образом, чтобы общие затраты на выполнение работ были минимальными. При этом необходимо учесть, что на культивации пропашных и сенокошении нельзя использовать трактор марки А, на культивации пропашных – трактор марки Б. Все необходимые данные приведены в табл.2

Таблица 2

Вид работ	Объём работ, га условной пахоты	Себестоимость 1 га работ (ден. ед.) для трактора марки			
		А	Б	В	Г
Культивация пара	3300	0,8	1	0,9	0,9
Пахота пара	6000	2,4	3	3,4	3,2
Культивация пропашных	1250	-	-	1	0,95
Боронование в один след	1600	0,2	0,27	0,25	0,27
Сенокошение	1850	-	0,8	0,75	0,85
Сезонная норма выработки на каждый трактор, га условной пахоты		500	385	310	300

5.На три базы А1, А2, А3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 6, 8, 10 ед. Этот груз требуется перевезти в четыре магазина В1, В2, В3 и В4 соответственно в количествах 4, 6, 8, 8 ед. Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана таблицей тарифов (тыс. руб. за ед. груза):

Таблица 3

	В1	В2	В3	В4
А1	1	2	4	3
А2	4	3	8	5

А3	2	7	6	3

Надо составить план перевозок однородного груза с минимальными транспортными издержками.

6.Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из А1 а В1 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из А3 в В5 – не менее 60 ед., а из А2 в В4 – не более 40 ед. груза.

Таблица 4

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	5	3	2	4	8	160
А2	7	6	5	3	1	90
А3	8	9	4	5	2	140
Потребности	90	60	80	70	90	390

7.Составьте оптимальный план перевозки лекарств с минимальными затратами из аптечных складов в пять аптек города: больница № 15, городские клинические больницы № 7, № 23, № 50 и институт им. Бурденко. Запасы лекарств на складах, заявки потребителей и тарифы перевозок представлены в таблице 5.

Таблица 5

Склады	Аптеки больниц					Запасы
	№ 15	№7	№ 23	№50	Бурденко	
АС №1	10	11	6	7	8	300
Фарма К.	10	11	8	9	12	150
ПРОТЕК	12	12	10	12	14	200
Заказы	50	200	60	100	40	

8.Студенческие отряды заняты уборкой картофеля в трёх хозяйствах. Картофель выращивается в этих хозяйствах на площадях в 20, 60, и 40 га, а урожайность составила соответственно 150, 200 и 180 ц/га. Предполагается поставить Минску 1100т, ближайшему спиртзаводу 420т, а 800т. необходимо доставить на железнодорожную станцию для последующей отправки за пре-

делы республики. Расстояния от упомянутых хозяйств до указанных пунктов сдачи картофеля приведены в таблице. Спланировать перевозки так, чтобы по-возможности выполнить план поставок картофеля при минимальных затратах (в т/км).

Таблица 6

Хозяйство	Расстояние, км		
	до Минска	до спиртзавода	до железнодорожной станции
№1	80	20	40
№2	100	30	20
№3	70	10	30

9.Механизмы М1,М2 и М3, имеющиеся в количествах 10, 5 и 15 ед., могут использоваться для работ на участках У1,У2,У3 и У4, с которых поступили заявки соответственно на 7, 12, 14 и 13 механизмов. Производительность каждого механизма на соответствующем участке приведена в матрице

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 8 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Распределить механизмы согласно заявкам так, чтобы общий объем выполненной работы был максимальным при непременном условии, что заявка участка У2 удовлетворена полностью.

10.В резерве трех железнодорожных станций А, Б и В находится соответственно 60, 80 и 70 вагонов. Составить Оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки зерна, если пункту №1 требуется 40 вагонов, пункту №2 – 60, пункту №3 – 80, а пункту №4 – 60 вагонов. При этом следует учесть, что в пунктах №2 и 3 нет условий для длительного хранения зерна, а поэтому его необходимо вывезти из этих пунктов полностью. Стоимость перегона одного вагона со станции А в указанные пункты равна соответственно 11, 12, 15 и 14 ден. ед., со станции Б – 14, 13, 12 и 11 ден. ед., со станции В – 15, 12, 14 и 16 ден. ед..

Практическая работа №13
Метод Гомори для решения задачи целочисленного линейного программирования.

Теоретическая часть:

1. Когда формулируется задача целочисленного линейного программирования?
2. Почему решение задачи целочисленного линейного программирования нельзя получить из решения задачи линейного программирования округлением до целого?
3. Что такое целая часть числа?
4. Что такое дробная часть числа?
5. Как формулируется условие отсечения нецелочисленного решения?
6. Каков порядок решения задачи целочисленного линейного программирования методом Гомори?

Практическая часть:

Вариант 1

$$\max Z = 3x_1 + x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 11x_2 \le 44, \\ x_1 \le 5, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 2

$$\max Z = x_1 + x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} 8x_1 - 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 3

$$\max Z = 2x_1 - 8x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 \le 17, \\ x_2 \le 4, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 4

$$\max Z = 7x_1 - 9x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 5, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 5

$$\max Z = x_1 - 7x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 3x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 6, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 6

$$\max Z = x_1 - 7x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} 7x_1 - x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 11, \\ x_2 \le 5, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 7

$$\max Z = x_1 + 5x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 7, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 \le 6, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 8

$$\max Z = x_1 + 2x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_2 \le 6, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 9

$$\max Z = 2x_1 + 5x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \le 25, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 \le 5, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Вариант 10

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ 4x_1 - x_2 \le 15, \\ x_1 + 3x_2 \le 16, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Практическая работа №14
Динамическое программирование.

Теоретическая часть:

1. Что лежит в основе метода ДП?
2. Что такое рекуррентное соотношение?
3. Как формулируется задача оптимального распределения инвестиций?
4. Запишите функциональные уравнения Беллмана, используемые на каждом шаге управления в задаче оптимального распределения инвестиций.

Практическая часть:

1. Производственному объединению из четырех предприятий выделяется банковский кредит в сумме 60 млн. ден. ед. для реконструкции и модернизации производства с целью увеличения выпуска продукции. Значения $g_i(x_i)$ $(i = 1 \dots 4)$ дополнительного дохода, получаемого на предприятиях объединения в

зависимости от выделенной суммы x_i, приведены в таблице. Распределить выделенный кредит между предприятиями так, чтобы дополнительный доход объединения был максимальным.

Выделенные средства x_i, млн. ден ед.	Предприятие			
	№ 1	*№ 2*	*№ 3*	*№ 4*
	Получаемый доход, млн. ден. ед.			
	$g_1(x_i)$	$g_2(x_i)$	$g_3(x_i)$	$g_4(x_i)$
20	9	11	16	13
40	18	19	32	27
60	24	30	40	44

2. Имеются 4 предприятия, между которыми распределяется 100 тыс. ден. ед. Значения прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы приведены в таблице. Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

2.1

Средства x_i,тыс.ден.ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост,тыс.ден.ед.			
	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
20	9	11	16	13
40	18	19	32	27
60	24	30	40	44
80	38	44	57	69
100	50	59	70	73

2.2

Средства x_i,тыс.ден.ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост,тыс.ден.ед.			
	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
20	7	9	17	16
40	29	19	27	30
60	37	28	37	42
80	41	37	48	65
100	59	46	66	81

2.3

Средства x_i,тыс.ден.ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост,тыс.ден.ед.			
	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
20	11	13	10	10
40	21	20	22	27
60	40	42	34	33
80	54	45	55	57
100	62	61	60	69

2.4

Средства x_i,тыс.ден.ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост,тыс.ден.ед.			
	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
20	12	16	9	15
40	26	21	17	25
60	40	36	35	51
80	60	49	51	62
100	72	63	65	76

2.5

Средства x_i,тыс.ден.ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост,тыс.ден.ед.			
	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
20	9	8	12	7
40	18	19	25	15
60	29	30	51	52
80	41	47	58	59
100	60	58	69	60

2.6

Средства x_i,тыс.ден.ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост,тыс.ден.ед.			
	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
20	14	12	13	33
40	24	30	25	33
60	37	42	45	46
80	45	58	62	60
100	58	71	70	68

Практическая работа №15
Решение матричных игр в чистых стратегиях

Решение матричной игры:

1 показать существование или отсутствие чистых оптимальных стратегий

2 выполнить возможные упрощения платёжных матриц

Вариант 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 7 & 5 & 6 & 12 \\ 9 & 10 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 13

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 \\ 2 & 3 & 11 & 12 \\ 1 & 6 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 15

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 10 \\ 4 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант 16

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 17

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 18

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 19

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 20

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 21

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 22

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 23

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 24

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 25

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Практическая работа №16
Графический метод решения матричных игр.

Произвести возможные упрощения следующих платёжных матриц и найти решения игр, используя графический метод решения.

Вариант 1

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 13

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 14

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 15

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 16

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 17

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 18

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 19

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 20

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 21

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 22

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 23

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 24

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 25

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 26

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 27

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 28

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 29

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 30

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Практическая работа №17
Приближенный метод решения матричных игр

Задание: В матричной игре получить приближения цены игры и оптимальных смешанных стратегий, выполнив 20 итераций.

Вариант 1

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Вариант 2

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Вариант 3

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Вариант 4

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 11 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

Вариант 5

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Вариант 6

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Вариант 7

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Вариант 8

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 & -5 \\ 3 & 0 & 6 & -1 \\ 9 & 5 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

Вариант 9

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Вариант 10

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Лабораторная работа №1
Построение остовного дерева минимального веса

Составить программу нахождения остовного дерева минимального веса по алгоритмам Прим и Краскал.

Указание: для написания программы целесообразно использовать теоретический материал и программную реализацию изложенную ниже.

Каркас минимального веса. Метод Дж. Краскала.

Дано. Связный неориентированный граф G=<V,E>. Ребра имеют вес. Граф описывается перечнем ребер с указанием их веса. Массив P (Array[1..3,1..N*(N-1) Div 2] Of Integer). Результат. Каркас с минимальным суммарным весом Q=<V,T>, где T<zE.

Пример. Граф и процесс построения каркаса по методу Крас-кала.

Шаг 1. Начать с графа Q, содержащего N вершин и не имеющего ребер.

Шаг 2. Упорядочить ребра графа G в порядке неубывания их

весов.

Шаг 3. Начав с первого ребра в этом перечне, добавлять ребра в граф Q, соблюдая условие: добавление не должно приводить к появлению цикла в Q.

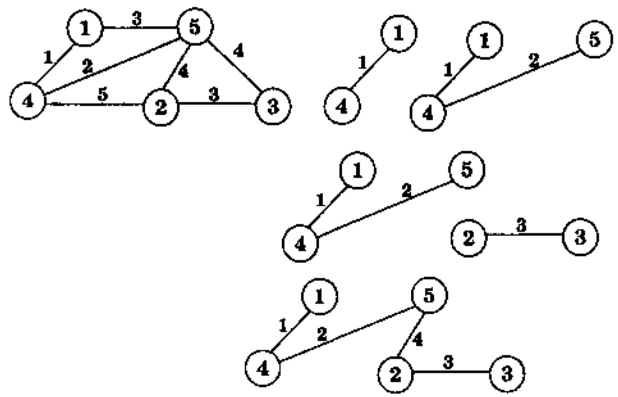


рис.1

Шаг 4. Повторять шаг 3 до тех пор, пока число ребер в Q не станет равным N-1. Получившееся дерево является каркасом минимального веса.

Какие структуры данных требуются для реализации шага 3? Стандартным в программировании методом является введение массива меток вершин графа (Mark:Array[1..N] Of Integer). Начальные значения элементов массива равны номерам соответствующих вершин (Mark[i]=i для i от 1 до N). Ребро выбирается в каркас в том случае, если вершины, соединяемые им, имеют разные значения меток. В этом случае циклы не образуются. Для примера, приведенного выше, процесс изменения Mark показан в таблице 1.

Таблица 1

Номер итерации	Ребро	Значения элементов Marк
Начальное значение	-	[1,2,3,4,5]
1	<1,4>	[1,2,3,1,5]
2	<4,5>	[1,2,3,1,1]
3	<2,3>	[1,2,2,1,1]
4	<2,5>	[1,1,1.1,1]

И логика этого фрагмента.

```
Procedure Chang_Mark (1 ,т: Integer) ;
{*Массив Mark глобальный.*}
 Var ift:Integer;
 Begin
If m<l Then
Begin t:=l;l :=m;m:=t
End;
 For i:=l To N Do If Mark[i]=m
 Then Mark[i] :=1;
End;
```

Фрагмент основной части логики.

```
Program Tree;
 Const N=..;
Var     P:Array[1. . 3,1. .N* (N-1) Div 2]
Of  Integer;  Mark:Array[1..N]  Of  Integer;
k,i,t:Integer;
M:Integer;{*Количество ребер графа.*}
Begin
<ввод описания графа - массив P>;
<сортировка  массива  P  по  значениям  весов
ребер>;
 For i:=l To N Do
 Mark[i] :=i; k:=0;t:=M;
 While k<N-l Do
Begin i:=l;
While    (i<=t)    And    (Mark[P[1,i]]
=Mark[P[2,i]])And <P[l,i]<>0) Do
 Inc(i); Inc (k) ;
<Запоминание ребра каркаса>;
Change_Mark(Mark[P[l,i]],Mark[P[2,i}]); End;
 End;
```

Каркас минимального веса. Метод Р. Прима.

Дано. Связный неориентированный граф G=<V,E>. Ребра имеют вес. Граф описывается матрицей смежности A (Array [1..N,1..N] Of Integer). Элемент матрицы, не равный нулю,определяет вес ребра.

Результат. Каркас с минимальным суммарным весом Q=(V,T), где T E.

Отличие от метода Краскала заключается в том, что на каждом шаге строится дерево, а не ациклический граф, т. е. добавляется ребро с минимальным весом, одна вершина которого принадлежит каркасу, а другая нет. Такой принцип «добавления» исключает возможность появления циклов. Для реализации метода необходимы две величины множественного типа SM и SP (Set Of 1..N). Первоначально значением SM являются все вершины графа, а SP пусто. Если ребро <i,j> включается в 7\ то один из номеров вершин i и / исключается из SM и добавляется в SP (кроме первого шага, на котором оба номера переносятся в SP).

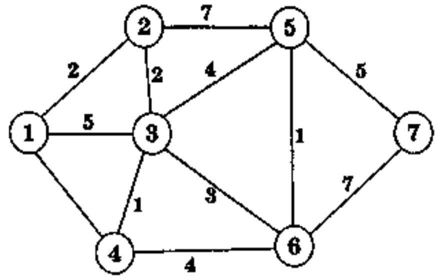
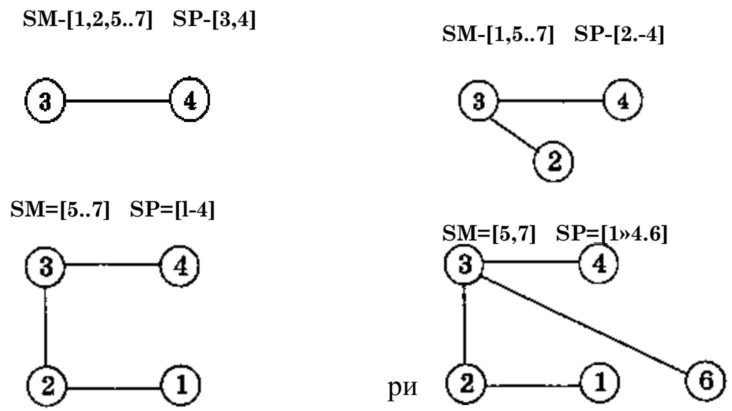
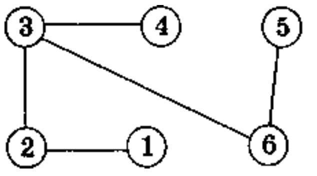


рис.2

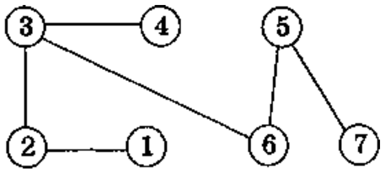
Пример. На рисунке 2 приведен граф, для которого последовательно строится каркас. Процесс построения (изменения SM, SP) показан на следующих рисунках.



SM-[7] SP-[1..6]



SM=[] SP~[1..7]



Логика построения каркаса.

```
   Procedure Tree; { *A - глобальная структура
данных. *}
    Var     SM,SP:Set Of 1. .N;
   min,i,j,1,k,t:Integer;
   Begin
   min:=maxint; SM:=[1..N];
   SP:=[];
   {*Включаем первоеребро в каркас. *}
   For i:=l To N-l Do
    For j:=i+l To N Do
         If (A[i,j]<min) And (A[i,j]<>0) Then
            Begin
                     min:=A[i,j];1:=i;t:=j;
            End;
   SP: = [l,t] ;SM:=SM-[l,t]   <выводим или-
запоминаем ребро <l,t»;
   {^Основной цикл. *} While SM<>[] Do Begin
min:=maxint;l:=0;t:=0; For i:=l To N Do If Not
(i In SP) Then For j : =1 To N Do If (j In SP)
And (A[i,j]<min) And (A[i,j]<>0) Then
   Begin      min:=A[j,k];      1:=i;t:=j;End;
SP:=SP+[1];SM:=SM-[1]; <выводим или запоминаем
ребро <lft»;
   End;
    End;
```

Кратчайшие пути

Постановка задачи. Вывод пути

Дан ориентированный граф G=<V,E>,

веса дуг — A[i,j] (i,j=l..N, где N — количество вершин графа), начальная и конечная вершины — s, t$\in$V. Веса дуг записа-

ны в матрице смежности A, если вершины i и j не связаны дугой, то A[i,,j]=∞. Путь между s и t оценивается $\sum_{i,j \in пути} A[i, j]$. Необходимо найти путь с минимальной оценкой.

Пример. Кратчайший путь из 1 в 4 проходит через 3-ю и 2-ю вершины и имеет оценку 6 (см. рис 4.23)

Особый случай — контуры с отрицательной оценкой.

Пример. При s=l и t=5, обходя контур 3→4→2→3 (см. рис. 4.) достаточное число раз, можно сделать так, что оценка пути между вершинами 1 и 5 будет меньше любого целого числа. Оценку пути назовем его весом или длиной. Будем рассматривать только графы без контуров отрицательного веса.

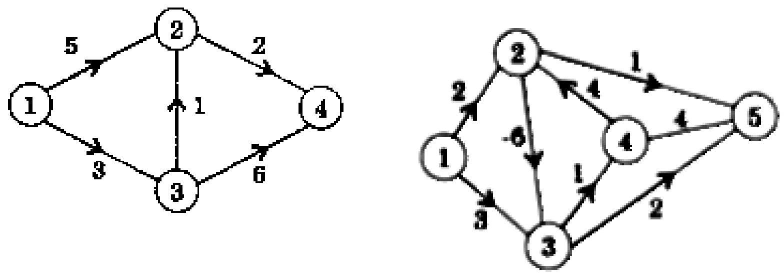


рис.4

Необходимо найти кратчайший путь, т. е. путь с минимальным весом, между двумя вершинами графа. Эта задача разбивается на две подзадачи: сам путь и значение минимального веса.

Обозначим ее через D[s, t]. Неизвестны алгоритмы, определяющие только D[s,t], все они определяют оценки от вершины s до всех остальных вершин графа. Определим D как Array[1..N] Of Integer. Предположим, что мы определили значения элементов массива D — решили вторую подзадачу. Определим сам кратчайший путь. Для s и t существует такая вершина v, что D[t]=D[v]+A[v,t]. Запомним v (например, в стеке). Повторим процесс поиска вершины и, такой, что D[v]=D[u]+A[u,v], и так до тех пор, пока не дойдем до вершины с номером s. Последовательность t, v, u, ..., s дает кратчайший путь.

```
Procedure Way(s,t:Integer);
{*D, A - глобальные
структуры данных. St - локальная структура
данных для хранения номеров вершин. *)
 Var v,u:Integer;
Procedure Print; {*Выводит содержимое St.*}
 Begin
…
End
Begin
<почистить St>;
<Занести вершину с номером t в St>; v:=t;
While v<>s Do
    Begin u:=<номер вершины, для которой
D[v] =D[u] +A[u,v]>;
 <занести вершину с номером v в St>;
V:=u;
End;
End;
```

Итак, путь при известном D находить мы умеем. Осталось научиться определять значения кратчайших путей, т. е. элементы массива D. Идея всех известных алгоритмов заключается в следующем. По данной матрице весов A вычисляются первоначальные верхние оценки. А затем пытаются их улучшить до тех пор, пока это возможно. Поиск улучшения, например для D[v], заключается в нахождении вершин u, таких, что D[u]+A[u,v]<D[v]. Если такая вершина u есть, то значение D[v] можно заменить на D[u]+A[u,v].

Лабораторная работа №2

Кратчайшее расстояния от заданной вершины до всех остальных вершин графа.

Составить программу нахождения найкратчайшего расстояния от заданной вершины до всех остальных вершин графа по алгоритму Дийкстры.

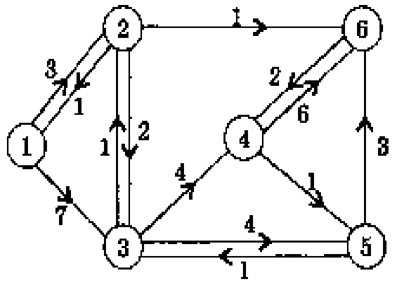
Алгоритм Дийкстры.

Пуст дан ориентированный граф G=<V,E>, s — вершина-источник; матрица смежности A (Array[1..N, 1..N] Of Integer);

для любых u, $v \in V$ вес дуги неотрицательный ($A[u,v] \geq 0$). Результат — массив кратчайших расстояний D.

В данном алгоритме формируется множество вершин T, для которых еще не вычислена оценка расстояние и, во-вторых, минимальное значение в D по множеству вершин, принадлежащих T, считается окончательной оценкой для вершины, на которой достигается этот минимум. С точки зрения здравого смысла этот факт достаточно очевиден. Другой «заход» в эту вершину возможен по пути, содержащему большее количество дуг, а так как веса неотрицательны, то и оценка пути будет больше.

Пример. Дан граф и его матрица смежности (см. рис. 5).



$$A=\begin{array}{cccccc} \infty & 3 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 1 & \infty & 4 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \end{array}$$

рис.5

В таблице 2 приведена последовательность шагов (итераций) работы алгоритма. На первом шаге минимальное значение D достигается на второй вершине. Она исключается из множества T, и улучшение оценки до оставшихся вершин (3, 4, 5, 6) ищется не по всем вершинам, а только от второй.

Таблица 2

№ итерации	D[1]	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]	D[6]	T
1	0	3	7	∞	∞	∞	[2,3,4,5,6]
2	0	3	5	∞	∞	4	[3,4,5.6]
3	0	3	5	6	∞	4	[3,4,5]
4	0	3	5	6	9	4	[4,5]
5	0	3	5	6	7	4	[5]

```
Procedure Dist;(*A, D, s, N - глобальные
величины. *}
   Var   i,u; Integer;
         T:Set Of 1. .N;
```

```
   Begin
   For i:=1 To N Do D[i] :=A[s, i] ;
    D[s]:=0;
    T:-[l..N]-[s];
    While T<>[] Do
   Begin  u:=< то  значение  1,  при  котором  до-
стигается
   min(D[l])>;
    T:=T-[u];
    For i: =1 To N Do
   If  i  In  T  Then  D[i]  :=min  (D[i]  ,D[u]+A[u,
i}) ; End;
    End;
```

Время работы алгоритма t^O(N2).

Пути в бесконтурном графе.

Пусть дан ориентированный граф G=<V,E> без контуров, веса дуг произвольны. Результатом является — массив кратчайших расстояний (длин) D от фиксированной вершины s до всех остальных. Утверждение — в произвольном бесконтурном графе вершины можно перенумеровать так, что для каждой дуги (i, j) номер вершины i будет меньше номера вершины j.

Пример. Введем следующие структуры данных:

массив NumIn, NumIn[i] определяет число дуг, входящих в вершину с номером i;

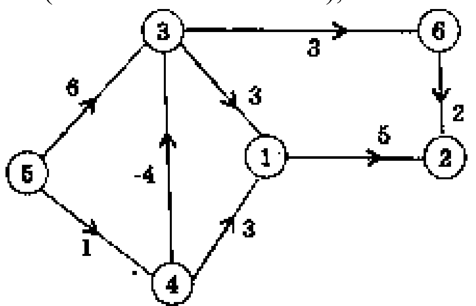
массив Num. Num[i] определяет новый номер вершины i;

массив St, для хранения номеров вершин, в которые заходит нулевое количество дуг. Работа с массивом осуществляется по принципу стека;

переменная nm, текущий номер вершины.

Идея алгоритма.

Вершина i, имеющая нулевое значение NumIn (а такая вершина на начальном этапе обязательно есть в силу отсутствия контуров в графе), заносится в St, ей присваивается текущее значение nm (запоминается в Num), и изменяются значения элементов NumIn для всех вершин, связанных с i. Процесс продолжается до тех пор, пока St не пуст.



На рисунке 6 приведен пример графа, а в таблице 3 представлены результаты трассировки работы алгоритма для этого примера.

Рис. 6

Таблица 3

№ итераций	Numln	Num	St	Nm
начальная	[2,2,2,1,0,1]	[0,0,0,0,0,0]	[5]	0
1	12.2.1.0,0,1]	[0,0,0,0.1,0]	[4]	1
2	[1.2,0,0.0,1]	[0,0,0,2,1,0]	[3]	2
3	[0.2,0,0,0,0]	[0,0,3.2.1,0]	[6,1]	3
4	[0,1,0,0,0,0]	[0.0,3,2.1,4]	[1]	4
5	[0,0,0,0,0,01	[5,0,3,2,1,4]	[2]	5
6	[0,0,0,0,0,0]	[5,6,3,2,1.4]	[]	6

```
Procedure Change_Num; { *A, Num — глобальные
струк       туры данных. *}
Var NumIn,St:Array[1..N] Of Integer;
      i,j,u,nm,yk:Integer;
 Begin
   FillChar (Numln,SizeOf (Numln) ,0) ;
 For i:=2 To N Do
   For j:-1 To N Do
      If A[i,j]<>0 Then Inc (Numln (j}) ;
      nm:=0;yk:=0;
     For To N Do
```

```
       If Numln [i]=0
Then
   Begin Inc (yk);Stack[yk]:=i; End;
While yk<>0 Do
   Begin

u:=Stack[yk];Dec[yk];Inc(nm);Num[u]:=nm;
      For i:=1 To N Do
        If A[u,i]<>0 Then
           Begin
              Dec(Numln[i]);
                If Numln [i] =0 Then
                   Begin Inc(yk); Stack (yk}
;=i; End;
                  End;
          End;
```

End;

Итак, пусть для графа G выполнено условие утверждения (вершины перенумерованы) и нам необходимо найти кратчайшие пути (их длины) от первой вершины до всех остальных. Пусть мы находим оценку для вершины с номером i. Достаточно просмотреть вершины, из которых идут дуги в вершину с номером i. Они имеют меньшие номера, и оценки для них уже известны. Остается выбрать меньшую из них.

```
Procedure Dist;(*D, A - глобальные величины.*}
 Var i, j : Integer;
 Begin
   D[1]:=0;
   For i:=2 To N Do D[i] : =MaxInt-
<максимальное значение в матрице смежности
A>;{*Определите, с какой целью вычитается из
Maxlnt максимальный элемент матрицы А. *}
  For i:=2 To N Do
      For j :=1 To i-1 Do
           If A[j,i]<>∞
               Then D[i] :=Min (D[i] ,D[j]
+A[j, i]) ;
 End;
```

Процедура написана в предположении о том, что i и j — новые номера вершин и A[i,j] соответствует этим номерам. Однако

это не так. Новые номера по результатам работы предыдущей процедуры хранятся в массиве Num. Требуется «стыковка» новых номеров и матрицы А.

Лабораторная работа №3
Кратчайшие пути между всеми парами вершин графа.

Составить программу нахождения кратчайшего пути между всеми порами вершин графа по алгоритму Флойда.

Алгоритм Флойда.

Дан ориентированный граф G=<V,E> с матрицей весов A(Array [1..N,1..N] Of Integer).

В результате должна быть сформирована матрица D кратчайших расстояний между всеми парами вершин графа и кратчайшие пути.

Идея алгоритма. Обозначим через Dm[i,j] оценку кратчайшего пути из i в j с промежуточными вершинами из множества [1..т]. Тогда имеем:

D°[i,j]:=A[i,j] и

D(m+1)[i,j]= Min{Dm[i,j],Dm[i,m+1] +Dm[m+1,j].

Второе равенство требует пояснения. Пусть мы находим кратчайший путь из i в j с промежуточными вершинами из множества [1..(т+1)]. Если этот путь не содержит вершину (m+1), то D(m+1)[i,j]=Dm[i,j]. Если же он содержит эту вершину, то его можно разделить на две части: от i до (m+1) и от (m+1) до j.

```
Procedure Dist; (*A, D - глобальные структуры
данных. *} Var m,i,j:Integer;
 Begin
   For i: =1 To N Do
       For j:=1 To N Do D[i,j] :=A[i,j] ;
  For i:=1 To N Do D[i,i]:=0;
  For m:=1 To N Do
       For i : = 1 To N Do
          For j:=1 To N Do D[i,j] : =Min {D[i
,j] , D[i,m]+D[m,j] };
End;
```

Пример. На рисунке 7 представлены графа и значения матриц типа D при работе процедуры.

Верхний индекс у D (см. рис.8) указывает номер итерации (значение m в процедуре Dist).

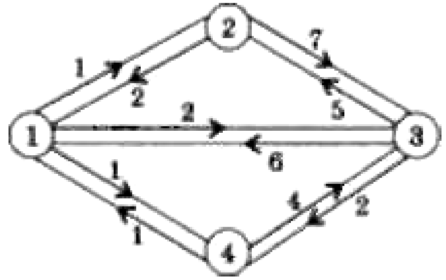


Рис.7

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0\,1\,2\,1 \\ 2\,0\,7\,\infty \\ 6\,5\,0\,2 \\ 1\,\infty\,4\,0 \end{bmatrix}; D^1 = \begin{bmatrix} 0\,1\,2\,1 \\ 2\,0\,4\,3 \\ 6\,5\,0\,2 \\ 1\,2\,3\,0 \end{bmatrix}; D^2 = D^1;\ D^3 = D^2;\ D^4 = \begin{bmatrix} 0\,1\,2\,1 \\ 2\,0\,4\,3 \\ 3\,4\,0\,2 \\ 1\,2\,3\,0 \end{bmatrix}$$

Рис. 8

Расстояния между парами вершин дает D. Для вывода самих кратчайших путей введем матрицу M того же типа, что и D. Элемент M[i,j] определяет предпоследнюю вершину кратчайшего пути из i в j.

Процедура Dist претерпит небольшие изменения. В том случае, когда D[i,j] больше D[i,m]+D[m,j], изменяется не только D[i,j], но и M[i,j]. M[i,j] присваивается значение M[m,j]. Для нашего примера изменения M отражены на рис.9.

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 2\,2\,2\,2 \\ 3\,3\,3\,3 \\ 4\,4\,4\,4 \end{bmatrix}; M^1 = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 2\,2\,1\,1 \\ 3\,3\,3\,3 \\ 4\,1\,1\,4 \end{bmatrix}; M^2 = M^1;\ M^3 = M^2;\ M^4 = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 2\,2\,1\,1 \\ 4\,1\,3\,3 \\ 4\,1\,1\,4 \end{bmatrix}$$

Рис.9

Например, необходимо вывести кратчайший путь из 3-й вершины во 2-ю. Элемент M[3,2] равен 1, поэтому смотрим на элемент M[3,1]. Он равен четырем. Сравниваем M[3,4] с 3-й. Есть совпадение, мы получили кратчайший путь: 3→4→1→2.

```
Procedure All_Way (i, j : Integer) ;{*Вывод
пути между вершинами i и j . *}
Begin
If M(i,j]=i Then
  If i=j Write(i) Else Write (i, '-' ,j)
                                   Else
   Begin All_Way (i ,M[i, j] ) ;All_Way (M[i ,
j ] , j) ;
   End;
End;
```

Лабораторная работа №4
Построение потока максимальной мощности.

Составить программу построения потока максимальной мощности по алгоритму Форда-Фалкерсона.

Потоки в сетях.

Постановка задачи

Одной из задач теории графов является задача определения максимального потока, протекающего от некоторой вершины s графа (источника) к некоторой вершине t (стоку). При этом каждой дуге (граф ориентированный) (ij) приписана некоторая пропускная способность C(i,j), определяющая максимальное значение потока, который может протекать по данной дуге. Содержательных интерпретаций задачи достаточно много, и, безусловно, они усилят и сделают более понятными сложные занятия по этой проблематике.

Метод решения задачи о максимальном потоке от s к t был предложен Фордом и Фалкерсоном, и их «техника меток» составляет основу других алгоритмов решения многочисленных задач, являющихся обобщениями или расширениями указанной задачи.

Одним из фундаментальных фактов теории потоков в сетях является классическая теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Разрезом называют множество дуг, удаление которых из сети приводит к «разрыву» всех путей, ведущих из s в t. Пропускная способность разреза — это суммарная пропускная способность дуг, его составляющих. Разрез с минимальной пропускной способностью называют минимальным разрезом.

Теорема (Форд и Фалкерсон). Величина каждого потока из s в t не превосходит пропускной способности минимального разреза, разделяющего s и t, причем существует поток, достигающий этого значения.

Теорема устанавливает эквивалентность задач нахождения максимального потока и минимального разреза, однако не определяет метода их поиска.

Пример. Показана сеть (рис.10), источник — вершина 1, сток — вершина 6, в скобках у дуг указаны их пропускные способности. Минимальный разрез — дуги (1, 2) и (3, 4), следовательно, согласно теореме максимальный поток равен 4. Разрез определен путем простого перебора. Логика его «лобового» поиска очевидна. Осуществляем перебор по дугам путем генерации всех возможных подмножеств дуг. Для каждого подмножества дуг проверяем, является ли оно разрезом. Если является, то вычисляем его пропускную способность и сравниваем ее с минимальным значением. При положительном результате сравнения запоминаем разрез и изменяем значение минимума. Удачный выбор данных позволяет сделать программный код компактным, но очевидно, что даже при наличии различных отсечений в переборе метод применим только для небольших сетей. Однако, как найти максимальный поток, т. е. его распределение по дугам, попрежнему открытый вопрос.

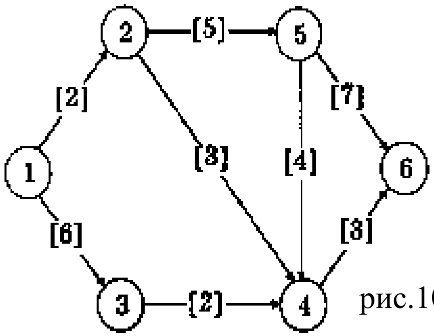


рис.10

«*Техника меток*» Форда и Фалкерсона заключается в последовательном (итерационном) построении максимального потока путем поиска на каждом шаге увеличивающейся цепи, то есть пути (последовательности дуг), поток по которой можно увеличить. При этом узлы (вершины графа) специальным образом помечаются. Отсюда и возник термин «метка».

Пример. Рядом с пропускными способностями дуг указаны потоки, построенные на этих дугах. На рисунке поток через сеть равен 10 и найдена увеличивающаяся цепочка, выделенная «жирными» линиями. Обратите внимание на ориентацию дуг, входящих в цепочку. По данной цепочке можно пропустить поток, равный 1, пропускная способность дуги (5, 6). Изменяем суммарный поток, его значение становится равным 11. Поток увеличен, необходимо продолжить поиск увеличивающихся цепочек; если окажется, что построить их нельзя, то результирующий поток максимален. Заметим, что для данного примера это значение потока окончательное. Обратите внимание на то, как изменен поток на дугах сети в зависимости от их ориентации.

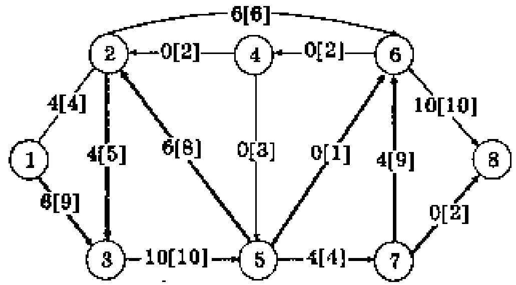


рис.11

Метод построения максимального потока в сети.

Рассмотрим метод на примере (рис.12). Пусть дана сеть G=(V,E), узлом-источником является вершина 1, узлом-стоком — вершина 6. Построим максимальный поток (F) между этими вершинами. Начальное значение F нулевое. Очевидно, что структурой данных для описания F является матрица того же типа, что и матрица C, в которой определены пропускные способности дуг.

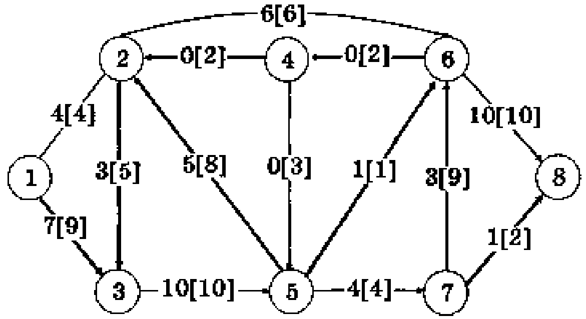


рис.12

Первая итерация(см. рис.13). Присвоим вершине 1 метку [1,@].

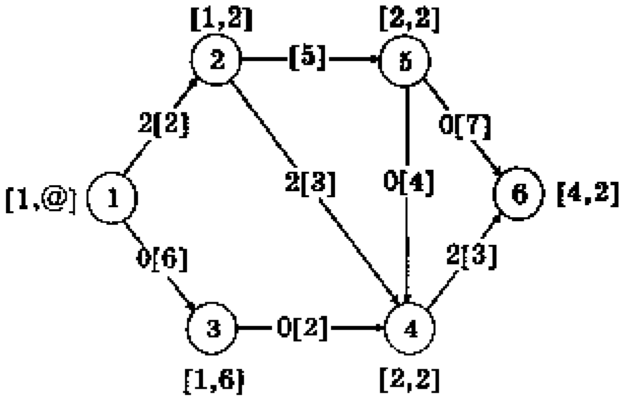


рис.13

Шаг 1. Рассмотрим дуги, началом которых является вершина 1 — дуги (1,2) и (1,3). Вершины 2 и 3 не помечены, поэтому присваиваем им метки, для 2-й — [1,2] и 3-й — [1,6]. Что представляют из себя метки? Первая цифра — номер вершины,из которой идет поток, вторая цифра – численное значение потока, который можно передать по этой дуге.

Шаг 2. Выберем помеченную, но непросмотренную вершину. Первой в соответствующей структуре данных записана вершина 2. Рассмотрим дуги, для которых она является началом — дуги (2,4) и (2,5). Вершины 4 и 5 не помечены. Присвоим им метки — [2,2] и [2,2]. Итак, на втором шаге вершина 2 просмотрена, вершины 3, 4, 5 помечены, но не просмотрены, остальные вершины не помечены.

Шаг 3. Выбираем вершину 3. Рассмотрим дугу (3,4). Вершина 4 помечена. Переходим к следующей вершине — четвертой, соответствующая дуга — (4,6). Вершина 6 не помечена. Присваиваем ей метку [4,2]. Мы достигли вершины-стока, тем самым найдя путь (последовательность дуг), поток по которым можно увеличить. Информация об этом пути содержит метки вершин. В данном случае путь или увеличивающаяся цепочка 1—>2—>4—>6. Максимально возможный поток, который можно передать по дугам этого пути, определяется второй цифрой метки вершины стока, то есть 2. Поток в сети стал равным 2.

Вторая итерация.

Шаг 1. Присвоим вершине 1 метку Рассмотрим дуги, началом которых является помеченная вершина 1. Это дуги (1,2) и (1,3). Вершина 2 не может быть помечена, так как пропускная способность дуги (1,2) исчерпана. Вершине 3 присваиваем метку [1,6].

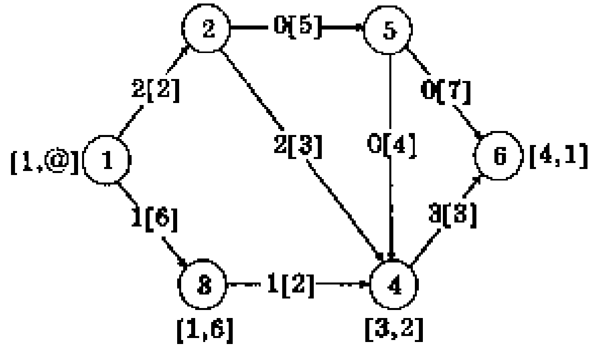
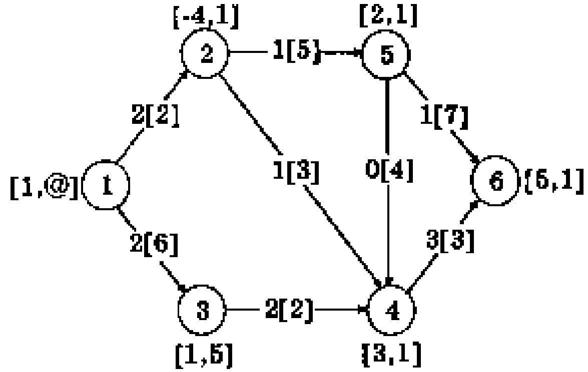


рис.14

Шаг 2. Выберем помеченную, но не просмотренную вершину. Это вершина 3. Повторяем действия. В результате вершина 4 по-



лучает метку [3,2].

Шаг 3. Выбираем вершину 4, только она помечена и не просмотрена. Вершине 6 присваиваем метку [4,1]. Почему только одна единица потока? На предыдущей итерации израсходованы две единицы пропускной способности данной дуги, осталась только одна. Вершина-сток достигнута. Найдена увеличивающая поток цепочка, это 1—>3—»4-»6, по которой можно «протащить» единичный поток. Результирующий поток в сети равен 3.

Третья итерация.

рис.15

Вершине 1 присваиваем метку [1,@].

Шаг 1. Результат — метка [1,5] у вершины 3.

Шаг 2. Метка [3,1] у вершины 4.

Шаг 3. Пропускная способность дуги (4,6) израсходована полностью. Однако есть обратная дуга (2,4), по которой передается поток, не равный нулю (обратите внимание на текст, выделенный курсивом — «изюминка» метода). Попробуем перераспределить поток. Нам необходимо передать из вершины 4 поток, равный единице (зафиксирован в метке вершины). Задержим единицу потока в вершине 2, то есть вернем единицу потока из вершины 4 в вершину 2. Эту особенность зафиксируем в метке вершины 2 — [-4,1]. Тогда единицу потока из вершины 4 мы передадим по сети вместо той, которая задержана в вершине 2, а единицу потока из вершины 2 попытаемся «протолкнуть» по сети, используя другие дуги. Итак, вершина 4 просмотрена, вершина 2 помечена, вершины 5 и 6 не помечены. Четвертый и пятый шаги очевидны. Передаем единицу потока из вершины 2 в вершину 6 через вершину 5. Вершина-сток достигнута, найдена цепочка 1→3→4→2→5→6, по которой можно передать поток, равный единице. При этом по прямым дугам поток увеличивается на единицу, по обратным — уменьшается. Суммарный поток в сети — 4 единицы.

Четвертая итерация. Вершине 1 присваиваем метку

Шаг 1.

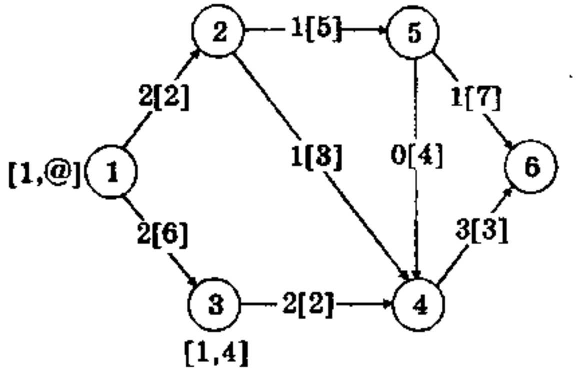


рис.16

Помечаем вершину 3 — [1,4].

Шаг 2. Рассматриваем помеченную, но не просмотренную вершину 3. Одна дуга — (3,4). Вершину 4 пометить не можем — пропускная способность дуги исчерпана.

Помеченных вершин больше нет, и вершина-сток не достигнута. Увеличивающую поток цепочку построить не можем. Найден максимальный поток в сети. Можно заканчивать работу.

Итак, в чем суть «техники меток» Форда и Фалкерсона? Первое. На каждой итерации вершины сети могут находиться в одном из трех состояний: вершине присвоена метка, и она просмотрена; вершине присвоена метка, и она не просмотрена, то есть не все смежные с ней вершины обработаны; вершина не имеет метки. Второе. На каждой итерации мы выбираем помеченную, но не просмотренную вершину v и пытаемся найти вершину и, смежную с о, которую можно пометить. Помеченные вершины, достижимые из вершины-источника, образуют множество вершин сети С. Если среди этих вершин окажется вершина-сток, то это означает успешный результат поиска цепочки, увеличивающей поток, при неизменности этого множества работа заканчивается — поток изменить нельзя.

Алгоритм. Входные данные. Описание сети G=(V.E) матрицей пропускных способностей C[l.Jf,I~N], где N —.количество вершин. Вершина-источник s я вершина-сток t. Выходные дан ные. Поток, описываемый матрицей F[1.JJ.1 .JfJ. Рабочие переменные. Структура данных для хранения меток — P[1..N,1..2J. Элемент P[i,l] — номер вершины, из которой можно передать поток, равный P[t,2], в вершину с номером i. Логическая переменная Lg, значение True — есть цепочка, увеличивающая поток. False — нет.

Основная логика. Begin

<ввод данных и инициализация переменных (Lg:=True) >; While Lg Do Begin

FillChar (P,SizeOf (P) ,0) ;

<процедура расстановки меток (Mark), если вершину t не смогли пометить, то Lg:=False; результат работы - значение P (метки вершин) >;

If Lg Then <процедура Stream(t) - изменение потока по дугам найденной цепочки от вершины-стока t до вершины-источника s; входные данные - массив P, результат - измененный массив F>; End;

<вывод потока F>; End.{конец обработки}

Уточним логику расстановки меток (не лучший вариант).

```
   Procedure Mark; Var M:Set Of 1. . N;
   i,l:integer; Begin
   M: = [1..N];   (^Непросмотренные вершины.*}
P(s,l]:=s;P[s,2]:=maxint;{*Присвоим метку вер-
шине-источнику. *}
   l:=s;
   While (P(t,l]=0) And Lg Do Begin For i:=l
To N Do {*Поиск непомеченной вершины. *} If
(P[i,l]=0) And ((C[l,i]<>0) Or (C[i,l]<>0))
Then
If F[l,i]<C[l,i] Then Beginf *Дуга прямая?*}
P[ifl}:=l;
If P[l,2]<C[l,i]-F[l,i] Then P[i,2) :=P[1,2]
Else P[i,2]:=C[l,i]-F[l,i];
End Else
```



```
If F[i,l]>0 Then Begin(*Дуга обратная?*)
P[ifl}:=-1;
If P[l,2}<F[i,l} Then P[i,2]:=P{1,2] Else
P[i,2]:=F[i,l]; End;
M:=M-[1];{*Вершина с номером 1 просмотрена.*}
1 :ml ; {*Иаходим помеченную и непросмотренную
вершину. *}
Repeat Inc(l)
Until   (1>N) Or ((P[1,1J<>0) And (1 In M)) ;
If 1>N Then Lg:=False; End; End;
Логика изменения потока F имеет вид:
Procedure Stream(q:Integer);
Begin {*Определяем тип дуги ~ прямая или об-
ратная, знак минус у номера вершины - признак
обратной дуги. *)
If P[q,D>0 Then F[P(q,l] ,q]:=F(P[q, 1]
,q]+P[t,2] Else
F{q,abs(P[q,l))]:=F[q,abs(P[q,l]) ]-P(t,2]; If
Abs(P{q,1])<>s Then Begin{*Если не
вершина-источник, то переход к предыдущей вер-
шине цепочки. *} g:-Abs(P[q,lJ); Stream(q);
End; End;
```

Итак, рассмотрение метода построения максимального потока в сети завершено.

Лабораторная работа №5
Симплекс метод

Напишите программу, реализующую симплекс-метод по следующему алгоритму:

1. Начало программы
2. Процедура ввода данных
3. Процедура привидения к каноническому виду
4. Процедура построения симплекс таблицы
5. Функция поиска ключевого столбца
6. Функция поиска ключевой строки
7. Проверка условия: Если в главной строке нулевой элемент.
8. Процедура переноса в следующую итерацию главной строки.

9. Проверка условия: Если в главном столбце нулевые элементы.
10. Процедура переноса столбца в следующую итерацию.
11, 12. Процедура расчета остальных элементов по формуле.
13, 14. Функция исследования на max.
15, 16. Функция исследования на min.
17. Процедура вывода оптимального решения.
18. Конец программы.

Лабораторная работа №6
Транспортная задача

Постановка задачи.

Имеется m пунктов отправления $A1, A2, ..., Am$, в которых сосредоточены запасы каких-то однородных грузов в количестве соответственно $a1, a2, ..., am$ единиц. Имеется n пунктов назначения $B1, B2, ..., Bn$ подавшие заявки соответственно на $b1, b2, ..., bn$ единиц груза. Известны стоимости Ci,j перевозки единицы груза от каждого пункта отправления Ai до каждого пункта назначения Bj. Все числа Ci,j, образующие прямоугольную таблицу заданы.

Требуется составить такой план перевозок (откуда, куда и сколько единиц поставить), чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок была минимальна.

Составить программу, которая бы вычисляла оптимальный план перевозки (потенциальный план).

Программа на языке Pascal:

```
Program transportnaj_zadatsha;
Uses Crt;
Label l1;
Const N=6;
      n1=7; n2=7;
      Sa:longint=0;
      Sb:longint=0;
Type predpr=Array [1..N] of longint;
     rasp=Array [1..N,1..N] of longint;
Var A,B,alfa,betta,B_d,x:predpr;
    c,p:rasp;
    f,f0,x_min,Sp:longint;
    Nt,x_p,r,r_min,ki,kj,Na,Nb,h,l,i,j:byte;
    d:char;
```



```
    u:Array[1..N*N] of byte;

Procedure Nul (var a:predpr);  {обнуляет мас-
сив}
var i:byte;
Begin
     for i:=1 to N do a[i]:=0;
End;

Procedure PrintS (x,y:byte; s:string; c:byte);
Begin                    {вывод строки s}
     TextColor(c);
     GotoXY(x,y);
     Write(s);
End;

Procedure Print (x,y:byte; n:byte; a:longint;
c:byte);
Begin                    {вывод числа a}
     TextColor(c);
     GotoXY(x,y); Write(' ':n);
     GotoXY(x,y); Write(a);
End;

Procedure Rid (var x:longint; y:byte); {просе-
дура ввода числа x}
var i:integer;
    s:string;
    c:char;
    j,k:byte;
Begin
     s:=''; i:=1;
     TextColor(11);
     Repeat
           c:=ReadKey;
           Case ord(c) of
48..57:         begin s:=s+c;
                      Write(c);
                      inc(i);
                end;
```

```
8:              if i>1 then begin dec(i);
                      Delete(s,i,1);
                      Write(chr(8),'
',chr(8));
                end;
           end;
           j:=WhereX;
           GotoXY(60,1); ClrEOL;
           if i>y then begin
              TextColor(4);
              Write('Не более ');
              for k:=1 to y-1 do Write('9');
              TextColor(11);
           end;
           GotoXY(j,1);
     Until (ord(c)=13) and (i<y+1);
     val(s,x,i);
End;

Procedure goriz (a,b,c,d,e:char);        {Про-
цедуры goriz, wertic}
var i,j:byte;                            {и
Tabl выводят таблицу}
Begin
     Write(a);
     for i:=1 to n2 do Write(b);
     Write(c);
     for i:=1 to Nb do begin
         for j:=1 to n1 do Write(b);
         if i<>Nb then Write(d) else Write(c);
     end;
     for i:=1 to 4 do Write(b);
     Write(e);
End;

Procedure wertic;
var i:byte;
Begin
     Write('¦',' ':n2,'¦');
     for i:=1 to Nb-1 do Write(' ':n1,'¦');
```



```
     WriteLn(' ':n1,'¦',' ' :4,'¦');
End;

Procedure Tabl;
Begin
    ClrScr;
    TextColor(1);
    h:=6+Na*3;
    l:=14+Nb*7;
    GotoXY(1,3);
    for i:=3 to h do wertic;
    GotoXY(1,2);
    goriz('+','-','-','-','+');
    for i:=1 to Na+1 do begin
        GotoXY(1,i*3+2);
        if (i=1) or (i=Na+1)
           then goriz('¦','-','+','+','¦')
           else goriz('+','-','+','+','¦');
    end;
    GotoXY(1,h+1);
    goriz('+','-','-','-','+');
    TextColor(9);
    for i:=1 to Na do begin
        GotoXY(5,i*3+3);
        Write('A',i);
    end;
    for i:=1 to Nb do begin
        GotoXY(i*(n1+1)+n2-2,3);
        Write('B',i);
    end;
    l:=Nb*(n1+1)+n2+3;
    h:=Na*3+6;
    PrintS(4,3,'\Bj',9);
    PrintS(4,4,'Ai\',9);
    PrintS(1,1,'Таблица N1',14);
    PrintS(l,4,'alfa',9);
    PrintS(3,h,'betta',9);
End;
```

```
Procedure W_W (var a:predpr; b:byte; c:char);
{Ввод в таблицу}
var i,l,m:byte;
{кол-ва продукции}
Begin
{поставщ. и потреб.}
     for i:=1 to b do begin
         TextColor(3);
         GotoXY(32,1);
         ClrEOL;
         Write(c,i,'=  ');
         Rid(a[i],n1);
         TextColor(14);
         Case c of
'A':     GotoXY(n2-
trunc(ln(a[i])/ln(10)),i*3+4);
'B':     GotoXY(n2+i*(n1+1)-
trunc(ln(a[i])/ln(10)),4);
         end;
         Write(a[i]);
     end;
End;

Function FF:longint;         {Вычисление стои-
мости плана}
var i,j:byte;
    f:longint;
Begin
     f:=0;
     for i:=1 to Na do
         for j:=1 to Nb do
             if p[i,j]>0 then
inc(f,c[i,j]*p[i,j]);
     GotoXY(65,Nt+2);
     TextColor(10);
     Write('F',Nt,'=',f);
     FF:=f;
End;
```



```
Function a_b:boolean;      {Расчет
потенциалов}
var k,i,j:byte;            {alfa и betta}
    Z_a,Z_b:predpr;
    d:boolean;
Begin
     Nul(Z_a); Nul(Z_b);
     alfa[1]:=0; Z_a[1]:=1; k:=1;
     Repeat
           d:=1=1;
           for i:=1 to Na do
               if Z_a[i]=1 then
                  for j:=1 to Nb do
                      if (p[i,j]>-1) and
(Z_b[j]=0) then begin
                         Z_b[j]:=1;
                         betta[j]:=c[i,j]-
alfa[i];
                         inc(k);
                         d:=1=2;
                      end;
           for i:=1 to Nb do
               if Z_b[i]=1 then
                  for j:=1 to Na do
                      if (p[j,i]>-1) and
(Z_a[j]=0) then begin
                         Z_a[j]:=1;
                         alfa[j]:=c[j,i]-
betta[i];
                         inc(k);
                         d:=1=2;
                      end;
     Until (k=Na+Nb) or d;
     if d then begin
        i:=1;
        While Z_a[i]=1 do inc(i);
        j:=1;
        While Z_b[j]=0 do inc(j);
        p[i,j]:=0;
```

```
        Print((j+1)*(n1+1)+n2-
8,i*3+4,1,p[i,j],7);
     end;

     a_b:=d;
End;

Procedure W_p;          {Вывод плана распреде-
ления}
var i,j,h,l,k:byte;
    c_max:longint;
Begin
     k:=0;
     for i:=1 to Na do begin
         h:=i*3+4;
         for j:=1 to Nb do begin
             l:=j*(n1+1)+n2-5;
             GotoXY(l,h);
             Write(' ':n1);
             if p[i,j]>0 then begin
                inc(k);
                Print(l-
trunc(ln(p[i,j])/ln(10))+5,h,1,p[i,j],14);
             end
             else if p[i,j]=0 then begin
                     Print(l+n1-
2,h,1,p[i,j],14);
                     inc(k);
             end;
         end;
     end;

     While a_b do inc(k);

     if k>Na+Nb-1 then PrintS(40,1,'k > n+m-
1',12);
End;

Function kkk(var ki,kj:byte):integer; {Расчет
коэф. k}
```



```
var i,j:byte;                           {в сво-
бодных клетках}
    k,k_min:integer;
    b:boolean;
Begin
     b:=1=1;
     for i:=1 to Na do
         for j:=1 to Nb do
             if p[i,j]=-1 then begin
                k:=c[i,j]-alfa[i]-betta[j];
                if b then begin
                   b:=1=2;
                   ki:=i; kj:=j; k_min:=k;
                end else
                    if k<k_min then begin
                       k_min:=k;
                       ki:=i; kj:=j;
                    end;
                TextColor(6);
                GotoXY(j*(n1+1)+n2-5,i*3+4);
                Write('(',k,')');
             end;
     if k_min<0 then
PrintS(kj*(n1+1)+n2,ki*3+4,'X',12);
     kkk:=k_min;
End;

Procedure div_mod(c:byte; var a,b:byte);
{Перевод}
Begin
{одномерного массива}
     b:=c mod Nb; a:=c div Nb +1;          {в
двумерный}
     if b=0 then begin
        b:=Nb; dec(a);
     end;
End;

Procedure Rek(Xi,Yi:byte; var z:boolean; var
c:byte);
```

```
var i,j:byte;
Begin                   {Рекурсивная процеду-
ра.}
   z:=1=2;              {Определяет контур
перемещения}
   Case c of
1:   for i:=1 to Na do
         if i<>Xi then
            if p[i,Yi]>-1 then begin
               if u[(i-1)*Nb+Yi]=0 then begin
                  u[(Xi-1)*Nb+Yi]:=(i-
1)*Nb+Yi;
                  c:=2;
                  Rek(i,Yi,z,c);
                  if z then exit;
               end;
            end
            else if (i=ki) and (Yi=kj) then
begin
                    u[(Xi-1)*Nb+Yi]:=(ki-
1)*Nb+kj;
                    z:=not z;
                    exit;
            end;
2:   for i:=1 to Nb do
         if i<>Yi then
            if p[Xi,i]>-1 then begin
               if u[(Xi-1)*Nb+i]=0 then begin
                  u[(Xi-1)*Nb+Yi]:=(Xi-
1)*Nb+i;
                  c:=1;
                  Rek(Xi,i,z,c);
                  if z then exit;
               end;
            end
            else if (Xi=ki) and (i=kj) then
begin
                    u[(Xi-1)*Nb+Yi]:=(ki-
1)*Nb+kj;
                    z:=not z;
```



```
                         exit;
                 end;
         end;
   u[(Xi-1)*Nb+Yi]:=0;
   c:=c mod 2 +1;
End;

Procedure kontur;        {Определяет контур пе-
ремещения}
var i,j,k,mi,mj,l:byte;
    z:boolean;
    p_m:longint;
Begin
     for i:=1 to N*N do u[i]:=0;
     l:=1;
     Rek(ki,kj,z,l);
     i:=ki; j:=kj;
     k:=u[(i-1)*Nb+j];
     div_mod(k,i,j);
     mi:=i; mj:=j; l:=1;
     Repeat
           inc(l);
           k:=u[(i-1)*Nb+j];
           div_mod(k,i,j);
           if l mod 2=1 then
              if p[i,j]<p[mi,mj] then begin
                 mi:=i; mj:=j;
              end;
     Until (i=ki) and (j=kj);

     i:=ki; j:=kj; l:=0;
     p_m:=p[mi,mj];
     Repeat
           if l mod 2=0 then begin
              inc(p[i,j],p_m);
              PrintS((n1+1)*j+n2-
1,i*3+3,'(+)',12);
           end else begin
               dec(p[i,j],p_m);
```

```
               PrintS((n1+1)*j+n2-1,i*3+3,'(-
)',12);
           end;
           if l=0 then inc(p[i,j]);
           k:=u[(i-1)*Nb+j];
           div_mod(k,i,j);
           inc(l);
     Until (i=ki) and (j=kj);
     p[mi,mj]:=-1;
End;

Procedure Pauza;
var d:char;
Begin
     TextColor(6);
     GotoXY(40,1);
     Write('Нажмите любую клавишу');
     d:=ReadKey;
     GotoXY(40,1);
     ClrEOL;
End;

BEGIN
    Nul(alfa); Nul(betta);
    Nt:=1;
    ClrScr;
    TextColor(10);
    Repeat
       Write('Введите количество поставщиков
(2<=Na<=',N-1,')    ');
       ReadLn(Na);
       Write('Введите количество потребителей
(2<=Nb<=',N-1,')    ');
       ReadLn(Nb);
    Until (Na>1) and (Na<=N-1) and (Nb>1) and
(Nb<=N-1);
    Tabl;

(****************** ввод начальных данных
*****************)
```



```
    PrintS(1,1,'Введите количество продук-
ции:',3);
    W_W(A,Na,'A');
    W_W(B,Nb,'B');
    TextColor(3);
    GotoXY(1,1); ClrEOL;
    Write('Введите стоимость перевозки');
    for i:=1 to Na do
        for j:=1 to Nb do begin
            TextColor(3);
            GotoXY(29,1); ClrEOL;
            Write('A',i,' - B',j,'  ');
            Rid(c[i,j],5);
            Print((n1+1)*j+n2-
4,i*3+3,1,c[i,j],11);
        end;
(*********************************************
************)

    GotoXY(1,1);
    ClrEOL;
    TextColor(14);
    Write('Таблица N1');

    for i:=1 to Na do Sa:=Sa+A[i];
    for i:=1 to Nb do Sb:=Sb+B[i];
    if Sa<>Sb then begin     {если задача яв-
ляется открытой}
       PrintS(20,1,'Открытая задача (Нажмите
любую клавишу)',7);
       d:=ReadKey;
       if Sa>Sb then begin
          inc(Nb);
          B[Nb]:=Sa-Sb;
          for i:=1 to Na do c[i,Nb]:=0;
       end else begin
           inc(Na);
           A[Na]:=Sb-Sa;
           for i:=1 to Nb do c[Na,i]:=0;
       end;
```

```
       Tabl;
       for i:=1 to Na do
           for j:=1 to Nb do
Print((n1+1)*j+n2-4,i*3+3,1,c[i,j],11);
       for i:=1 to Na do
           Print(n2-
trunc(ln(A[i])/ln(10)),i*3+4,1,A[i],14);
       for i:=1 to Nb do
           Print(n2+i*(n1+1)-
trunc(ln(B[i])/ln(10)),4,1,B[i],14);
       PrintS(20,1,'Открытая задача',7);
    end
       else PrintS(20,1,'Закрытая задача',7);

(************** составление опорного плана
***************)
    for i:=1 to Nb do B_d[i]:=B[i];
    for i:=1 to Na do begin
        for j:=1 to Nb do x[j]:=j;
        for j:=1 to Nb-1 do begin
            x_min:=c[i,x[j]];
            r_min:=j;
            for r:= j+1 to Nb do
                if (x_min>c[i,x[r]]) or
                 ((x_min=c[i,x[r]]) and
(B[x[r]]>b[x[r_min]])) then
                begin
                   x_min :=c[i,x[r]];
                   r_min:=r;
                end;
            x_p:=x[r_min];
            x[r_min]:=x[j];
            x[j]:=x_p;
        end;
        Sp:=0;
        for j:=1 to Nb do begin
            p[i,x[j]]:=B_d[x[j]];
            if p[i,x[j]]>A[i]-Sp then
p[i,x[j]]:=A[i]-Sp;
            inc(Sp,p[i,x[j]]);
```



```
                 dec(B_d[x[j]],p[i,x[j]]);
             end;
         end;
(*********************************************
**************)

    for i:=1 to Na do
        for j:=1 to Nb do if p[i,j]=0 then
p[i,j]:=-1;
    W_p;
    f:=FF; f0:=F;

    While a_b do;
    for i:=1 to Na do
Print(l+1,i*3+3,3,alfa[i],14);
    for i:=1 to Nb do Print(i*(n1+1)+n2-
4,h,6,betta[i],14);
    Pauza;
(******* постепенное приближение плана к опти-
мальному ******)
    While kkk(ki,kj)<0 do begin
          kontur;
          pauza;
          for i:=1 to Na do
             for j:=1 to Nb do
PrintS((n1+1)*j+n2-1,i*3+3,'   ',14);
          inc(Nt);
          GotoXY(1,1);
          Write('Таблица N',Nt);
          W_p;
          f0:=f; f:=FF;
          if a_b then Goto l1;
          for i:=1 to Na do
Print(l+1,i*3+3,3,alfa[i],14);
          for i:=1 to Nb do Print(i*(n1+1)+n2-
4,h,6,betta[i],14);
          Pauza;
    end;
(*********************************************
**************)
```

```
    PrintS(40,1,'Решение оптимально',12);
    PrintS(60,1,'(any key)',6);
    for i:=1 to Na do
        for j:=1 to Nb do if p[i,j]=-1 then
begin
            h:=i*3+4;
            l:=j*(n1+1)+n2-5;
            GotoXY(l,h);
            Write(' ':n1);
        end;
    GotoXY(40,1);
l1: d:=ReadKey;
END.
```

Список литературы

1 Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование: Учеб. пособие/А. В. Кузнецов, Сакович В.А, Н.И. Холод и др.; Под общ. ред. А. В. Кузнецова, Р.А. Рутковского. — 2-е изд. - Мн.: Выш. шк., 2002. — 447 с.: ил.

2 Руководство к решению задач по математическому программированию: Учеб. пособие/ А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич; Под общ. ред. А.В.Кузнецова. – 2-е изд. – Мн.: Выш. шк.,2001. – 448 с.: ил.

3 Высшая математика: Мат. программир.: Учеб. / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; Под общ. ред. А.В.Кузнецова. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 286 с.: ил.

4 Программирование в алгоритмах / С.М.Окулов. – 2-е изд. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 283 с.: ил.

5 Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие /Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар и др.; Под общ. ред. А.В Кузнецова. 2-е изд. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412 с.

6 Костевич Л.С. Математическое программирование: Информ. технологии оптимальных решений: Учеб. пособие /Л.С. Костевич. – Мн.: Новое знание, 2003. – 424 с.: ил.

7 Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах, программах. – М.: Радио и связь, 1984. – 184 с., ил.

8 Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб. для вузов. 2-е изд. /Под ред. В.С. Зарубина, А.П.Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 436 с.

9 Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. - М.: Наука, 1997.

10 Методическое пособие, “Экстремальные задачи теории графов”.-Мн.: БГУ, 2000.