

Практическая работа № 8

Тема: Нахождение максимального потока и построение минимального разреза с использованием алгоритма Форда-Фалкерсона.

Цель: Изучить нахождение максимального потока и построение минимального разреза в сети.

Ход работы

Алгоритм Форда-Фалкерсона

1°. Построить некоторый начальный поток $X^0 = \{x_{ij}^0\}$ (например, поток, состоящий из нулевых компонент).

2°. Проверить, попала ли вершина S в множество вершин A , достижимых по ненасыщенным ребрам из вершины I . Если вершина S не попала в множество A (случай а), то построенный поток максимален и алгоритм завершается. Если вершина S попала в множество A (случай б), перейти к п. 3°.

3°. Выделить путь, состоящий из ненасыщенных ребер и ведущий из I в S , и увеличить поток через каждое ребро этого пути на величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$. Построить новый поток и перейти к п. 2°.

Заметим, что алгоритм может завершиться, только если на каком-нибудь шаге будет иметь место случай а). На каждом шаге, на котором реализовался случай б), алгоритм может быть продолжен. Вместе с тем на каждом шаге при выполнении п. 3° образуется по крайней мере одно новое насыщенное ребро (то самое ребро, на котором достигается минимум в Δ). А так как число ребер в сети конечно, то п. 3° может выполняться лишь конечное число раз, поэтому указанный алгоритм обязательно построит максимальный поток, и притом за конечное число шагов.

Покажем, как реализуется изложенный алгоритм на практике.

На рис. 1 изображена сеть, у каждого ребра которой в скобках указаны два числа: первое означает пропускную способность ребра в направлении возрастания номеров,

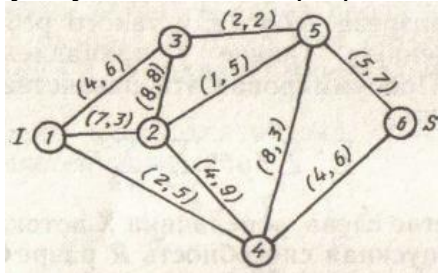


Рис. 1

что совпадает с общим направлением грузопотока от I к S ; второе — пропускная способность в противоположном направлении. В табл. 1 приведена матрица R пропускных способностей данной сети.

Табл. 1

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	7	4	2	0	0
2	3	0	8	4	1	0
3	6	8	0	0	1	0
4	5	9	0	0	8	4
5	0	5	2	3	0	5
6	0	0	0	6	7	0

В соответствии с п. 1° алгоритма на сети необходимо сформировать какой-либо начальный поток. Примем в качестве такового поток X^0 , в котором по пути 1 — 3 — 5 — 6 перемещаются 2 ед. (по ребру (3, 5) больше пропустить нельзя!); по пути 1 — 2 — 5 — 6 1 ед. (здесь лимитирующим является ребро (2, 5)); по пути 1 — 4 — 6 2 ед. (при этом ребро (1, 4) становится насыщенным). Матрица потока X^0 приведена в табл. 2.

В соответствии с формулой (2.4) мощность потока X^0

$$f = x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{46} + x_{56} = 1 + 2 + 2 = 2 + 3 = 5.$$

Приступая к выполнению п. 2° алгоритма, составим матрицу $R - X^0$ (табл. 3), элементы $r_{ij} - x_{ij}^0$ которой позволяют судить о насыщенности ребер сети. Насыщенным ребрам будут соответствовать нулевые элементы, а ненасыщенным — ненулевые. В нашем случае, например, ребро (1, 3) ненасыщенное, поэтому элемент $r_{13} - x_{13}^0 = 4 - 2 = 2 \neq 0$, а вот ребро (2, 5) насыщенное, поэтому $r_{25} - x_{25}^0 = 1 - 1 = 0$.

Т а б л и ц а 2

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	2	0	0
2	-1	0	0	0	1	0
3	-2	0	0	0	2	0
4	-2	0	0	0	0	2
5	0	-1	-2	0	0	3
6	0	0	0	-2	-3	0

Т а б л и ц а 3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	6	2	0	0	0
2	4	0	8	4	0	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	9	0	0	8	2
5	0	6	4	3	0	2
6	0	0	0	8	10	0

Зная матрицу $R - X^0$, можно сформировать подмножество A вершин, в которые можно попасть из истока I , двигаясь только по ненасыщенным путям (т. е. выполнить п. 2° алгоритма), а также выделить (если поток X^0 не максимален) эти пути и с их помощью увеличить мощность потока (т. е. выполнить п. 3° алгоритма).

Вершины подмножества A выделяют из всего множества вершин постепенно, начиная с истока I . С этой целью просматривают первую строку матрицы $R - X^0$ (строку 1) и выписывают номера вершин, соответствующих ненулевым элементам строки. Это и будут вершины, в которые можно попасть из истока I , перемещаясь по ненасыщенным ребрам. Далее рассматривают каждую из вершин, полученного списка и составляют для нее аналогичным образом свой список. При этом вершины, встречавшиеся в прежних списках, повторно не выписываются.

Если в этом процессе сток S не встретится, то поток максимален и задача решена; если же при составлении очередного списка в нем появится сток S , то поток не максимален и мощность его можно увеличить.

Обратимся к рассматриваемому примеру. В данном случае $I = 1, S = 6$. Построим подмножество A , последовательно составляя списки вершин, начиная с вершины 1. Судя по первой строке матрицы $R - X^0$ (табл. 3), в список вершины 1 войдут вершины 2 и 3, так как элементы второго и третьего столбцов этой строки отличны от нуля. Итак, запишем:

1: 2, 3. Теперь переходим к составлению списка вершины 2 как вершины, вошедшей в список вершины 1. Во второй строке матрицы три элемента отличны от нуля: 4, 8, 4. Но 4 и 8 соответствуют вершинам 1 и 3, которые уже значатся в подмножестве A , поэтому повторно их в списки не включаем. Элементу 4 четвертого столбца соответствует вершина 4, которая встречается впервые, а потому включаем ее в список вершины 2: 2: 4. Следующая вершина, для которой надлежит составить список, — это вершина 3. Однако в третьей строке матрицы $R - X^0$ ненулевым элементам 8 и 8 соответствуют вершины 1 и 2, которые уже встречались в списках.

Следовательно, список вершины 3 будет пустым: 3:. Далее аналогичным образом составляется список вершины 4: 4: 5, 6. В результате получили следующий набор списков:

$$1: 2,3; \quad 2: 4; \quad 3: ; \quad 4: 5,6 \quad (1)$$

Анализируя списки (1), замечаем, что сток 6 попал в подмножество A , поскольку оказался в списке одной из вершин подмножества A (в данном случае вершины 4). Значит, поток X^0 не максимален и существует путь из истока I в сток S (у нас из 1 в 6), состоящий из ненасыщенных ребер. Таким образом, необходимо переходить к выполнению п. 3° алгоритма — выделению ненасыщенного пути из 1 в 6 и преобразованию с его помощью имеющегося на сети потока в новый поток большей мощности.

Продолжим общие рассуждения. Построение ненасыщенного пути из I в S начинают с последнего ребра этого пути. Понятно, что им будет ребро (4, 6), где 4 — вершина, в список которой попал сток S . Далее выписывают ребро (2,4), затем ребро (1, 2).

Таким образом, путь из истока 1 в сток 6 по ненасыщенным ребрам пройдет через вершины 1, 2, 4 и 6.

После выделения ненасыщенного пути из истока I в сток S остается с помощью матрицы R — X^0 определить величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$ на которую нужно увеличить поток по каждому ребру (i, j) выделенного пути, чтобы получить новый поток X^1 мощности, большей на Δ единиц.

В нашем примере, как видно из табл.3, по ребру (1,2) дополнительно можно пропустить 6 ед., по ребру (2, 4) — 4 ед., а по ребру (4, 6) — только 2 ед., поэтому увеличить поток по всему пути 1—2—4—6, составленному из указанных ребер, можно лишь на 2 ед., так что $\Delta = \min_{1-2-4-6} (6,4,2) = 2$

Для построения матрицы нового потока X^1 к соответствующим элементам x_{ij}^0 матрицы X^0 прибавляется найденное значение Δ , после чего возвращаются к п. 2° алгоритма, и так до получения максимального потока.

В рассматриваемом примере на величину $\Delta = 2$ возрастут потоки x_{ij}^0 по ребрам (1, 2), (2, 4) и (4, 6), составляющим ненасыщенный путь. По остальным ребрам сети величины потоков не изменятся. Итак, приходим к матрице нового потока X^1 (табл.4), мощность которого равна 7 ед.

Табл. 5

Табл. 4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	3	2	2	0	0
2	-3	0	0	2	1	0
3	-2	0	0	0	2	0
4	-2	-2	0	0	0	4
5	0	-1	-2	0	0	3
6	0	0	0	-4	-3	0

$i \backslash j$		1	2	3	4	5	6
4	1	0	4	2	0	0	0
	2	6	0	8	2	0	0
	3	8	8	0	0	0	0
	4	7	11	0	0	8	0
	5	0	6	4	3	0	2
	6	0	0	0	10	10	0

Этот поток вновь надо исследовать на оптимальность, т. е. вернуться к п. 2° алгоритма. С этой целью, как и при исследовании потока X^0 , составляем матрицу $R — X^1$ (табл. 5), а по ней — списки вершин, достижимых из истока 1 по ненасыщенным путям:

1: 2,3; 2: 4; 3: ; 4: 5; 5: 6.

Из этих списков видно, что сток 6 оказался в подмножестве A , а путь, ведущий в него, состоит из ненасыщенных ребер (1,2), (2,4), (4,5), (5,6). Новый поток X^2 (табл.6) получается преобразованием потока X^1 (см. табл. 4), если увеличить на $\Delta = \min_{1-2-4-5-6} (4,2,8,2) = 2$

потоки по указанным ребрам найденного ненасыщенного пути.

Табл.6

$i \backslash j$		1	2	3	4	5	6
1	1	0	5	2	2	0	0
	2	-5	0	0	4	1	0
	3	-2	0	0	0	2	0
	4	-2	-4	0	0	2	4
	5	0	-1	-2	-2	0	5
	6	0	0	0	-4	-5	0

Табл.7

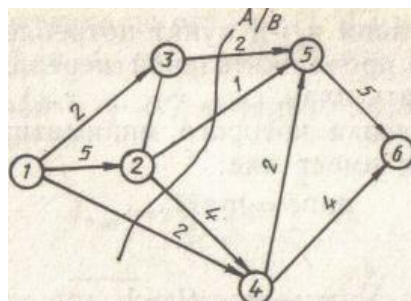
$i \backslash j$		1	2	3	4	5	6
1	1	0	2	2	0	0	0
	2	8	0	8	0	0	0
	3	8	8	0	0	0	0
	4	7	13	0	0	6	0
	5	0	6	4	5	0	0
	6	0	0	0	10	12	0

Мощность нового потока X^2 составляет 9 ед. Для исследования этого потока составлена матрица $R — X^2$ (табл.7), а по ней - списки 1: 2,3;2;3. (2)

из которых видно, что сток 6 не попал в подмножество A вершин, достижимых из истока 1 по ненасыщенным путям. Значит, поток X^2 максимален. Остается нанести его на сеть с указанием направления потоков по отдельным ребрам (рис.2).

Можно было и не строить матрицу $R — X^2$, если бы своевременно заметить, что потоки по ребрам (4, 6) и (5, 6) равны их пропускным способностям, т. е. эти ребра насыщены (см. табл. 6 и 7).

Используя списки (2), выделим подмножества A и B , на которые оказалось разбитым множество всех вершин: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$. А теперь можно выписать ребра, образующие разрез A/B минимальной пропускной способности: (1,4), (2,4), (2,5), (3,5).



Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Согласно своего варианта. На заданной сети указаны пропускные способности ребер. Предполагается, что пропускные способности в обоих направлениях одинаковы. Требуется:

- 1) сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S ;
- 2) выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

