Практическая работа № 1

Тема: **Решение задачи линейного программирования на определение максимума (минимума) целевой функции графическим способом.**

Цель: Изучить решение задачи линейного программирования графическим способом.

Ход работы

1. Этапы решения графического метода задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, т. е. ограничения содержат две переменные.

Если в ЗЛП ограничения заданы в виде неравенств с двумя переменными, она может быть решена графически. Графический метод решения ЗЛП состоит из следующих этапов.

Этап 1.

Сначала на координатной плоскости x_1Ox_2 строится допустимая многоугольная область (область допустимых решений, область определения), соответствующая ограничениям:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Не приводя строгих доказательств, укажем те случаи, которые тут могут получится.

1. **Основной случай** - получающаяся область имеет вид ограниченного выпуклого многоугольника (рис. 3а)).
2. **Неосновной случай –** получается неограниченный выпуклый многоугольник, имеющий вид, подобный изображенному на рис. 3.б.

Рис. 3

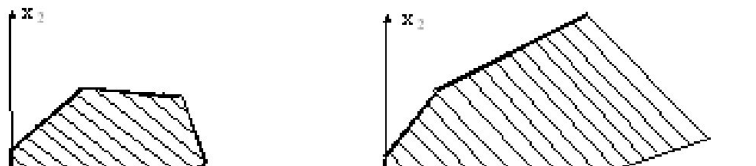

Рис. 6 **а)** Рис. 7 **б)**

Наконец, возможен случай, когда неравенства (1) **противоречат друг другу**, и допустимая область вообще **пуста**.

Рассмотрим теорию на конкретном примере:

Найти допустимую область задачи линейного программирования, определяемую ограничениями

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

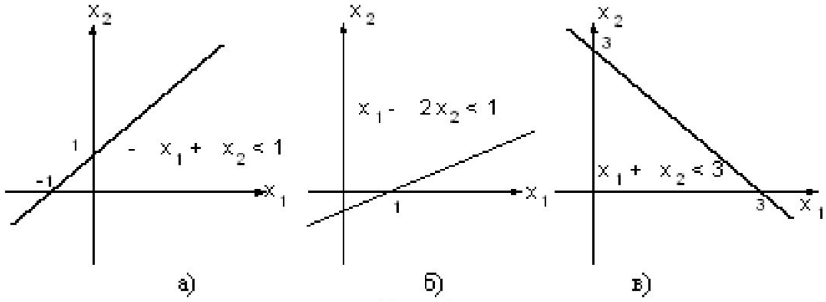

Рис. 4

Решение:

1. Рассмотрим прямую $-x_1 + x_2 = 1$. При $x_1 = 0$ $x_2 = 1$, а при $x_2 = 0$ $x_1 = -1$. Таким образом, эта прямая проходит через точки (0,1) и (-1,0). Беря $x_1 = x_2 = 0$ получим, что -0+0<1 и поэтому интересующая нас полуплоскость лежит ниже прямой, изображенной на рис. 4.а.
2. Рассмотрим прямую $x_1 - 2x_2 = 1$. При $x_1 = 0$ $x_2 = -1/2$, а при $x_2 = 0$ $x_1 = 1$. Таким образом, эта прямая проходит через точки (0, -1/2) и (1,0). так как $0 - 2 \cdot 0 < 1$ (4.б).
3. Наконец, рассмотрим $x_2 = 0$ $x_1 = 1$ прямую $x_1 + x_2 = 3$. Она проходит через точки (0,3) и (3,0) и так как 0+0<3, то интересующая нас полуплоскость лежит ниже прямой, изображенной на рис. 4.в.

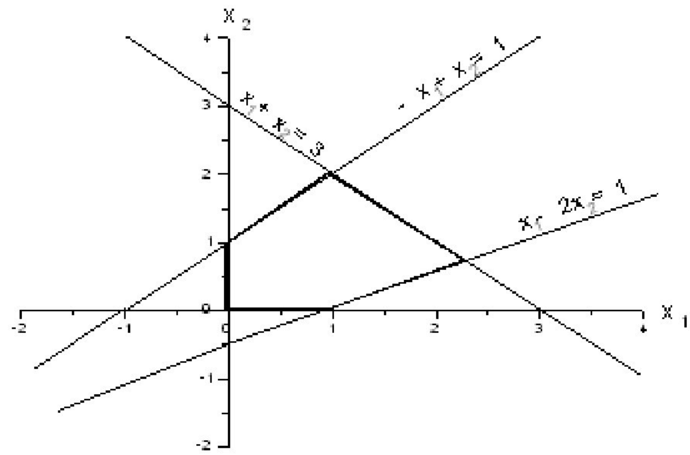

Рис. 5

Сводя все вместе и добавляя условия $x_1 \ge 0,$ $x_2 \ge 0$ получим рисунок 5, где выделена область, в которой выполняются одновременно все ограничения (2). Обратите внимание на то, что получившаяся область имеет вид **выпуклого многоугольника**.

Этап 2.

Вернёмся теперь к исходной задаче линейного программирования. В ней, кроме системы неравенств, есть еще **целевая функция** $c_1 x_1 + c_2 x_2 \Rightarrow \max$.

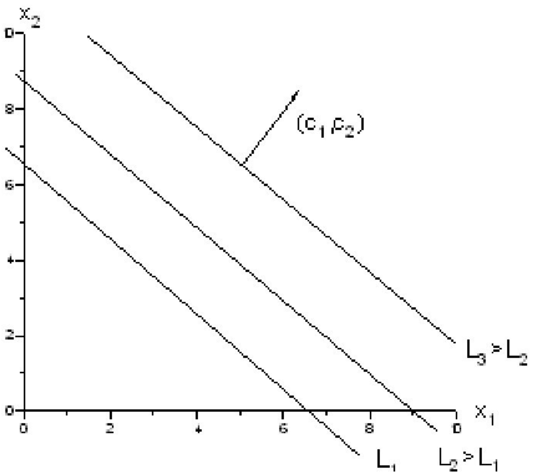

Рис. 6

Рассмотрим прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Будем увеличивать L. Что будет происходить с нашей прямой?

Легко догадаться, что прямая будет двигаться параллельно самой себе в том направлении, которое дается вектором (c_1, c_2), так как это – вектор нормали к нашей прямой . А теперь сведем всё вместе. Итак, надо решить задачу

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow \max\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Ограничения задачи вырезают на плоскости некоторый многоугольник. Пусть при некотором *L* прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = L$ пересекает допустимую область. Это пересечение дает какие-то значения переменных (x_1, x_2), которые являются планами.

Этап 3

Увеличивая *L* мы начнем двигать нашу прямую и её пересечение с допустимой областью будет изменяться (см. рис. 7). В конце концов эта прямая выйдет на границу допустимой области – как правило, это будет одна из **вершин многоугольника**. Дальнейшее увеличение *L* приведёт к тому, что пересечение

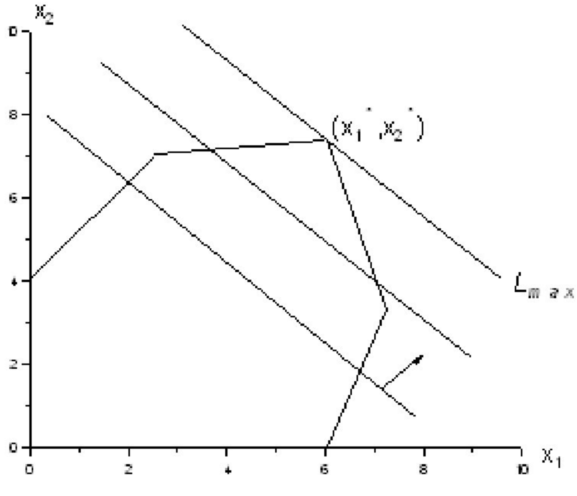

Рис. 7

прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = L$ с допустимой областью будет пустым. Поэтому то положение прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, при котором она вышла на граничную точку допустимой области, и даст решение задачи, а соответствующее значение *L* и будет оптимальным значением целевой функции.

2. Примеры задач, решаемых графическим методом.

Пример1:

Решить задачу

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max \\
&-x_1 + x_2 \le 1, \\
&x_1 - 2x_2 \le 1, \\
&x_1 + x_2 \le 3, \\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3)}
$$

Решение

Допустимую область мы уже строили – она изображена на рис. 5.

Повторим еще раз этот рисунок, оставив только допустимую область и нарисовав дополнительно прямые $c_1x_1 + c_2x_2 = L$ (см. рис. 6).

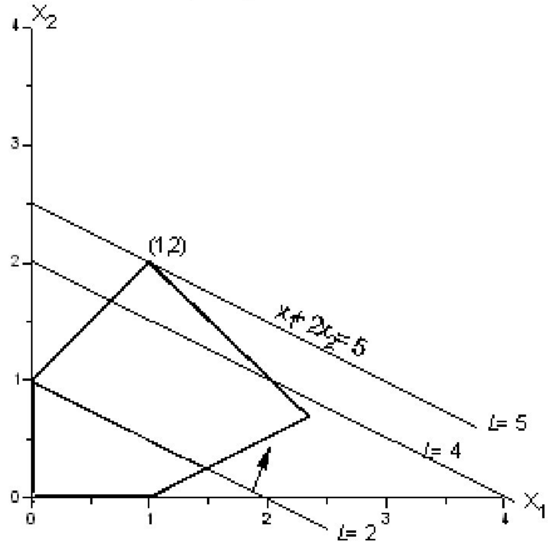

Рис. 6

Пусть, например, *L*=2. Тогда прямая $x_1 + 2x_2 = 2$ проходит через точки (2,0) и (0,1) и изображена на рис. 8. Будем теперь увеличивать *L*. Тогда прямая начнёт двигаться параллельно самой себе в направлении, указанном стрелкой. Легко догадаться, что максимальное значение *L* получится тогда, когда прямая пройдет через вершину многоугольника, указанную на рисунке, и дальнейшее увеличение *L* приведет к тому, что прямая выйдет за пределы многоугольника и её пересечение с допустимой областью будет пустым.

Выделенная вершина лежит на пересечении прямых

$$-x_1 + x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

и поэтому имеет координаты $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Это и есть решение нашей задачи, т.е. $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ есть оптимальный план задачи (3). При этом значение целевой функции $L = 1 + 2 \cdot 2 = 5$, что и дает её максимальное значение.

Подводя итог этим примерам, можно сформулировать следующие положения:

1. допустимая область – это выпуклый многоугольник;
2. оптимум достигается в вершине допустимой области (если допустимая область ограничена и не пуста);
3. ограниченность целевой функции в допустимой области является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи.

Пример2: Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. штук в год, цех по сборке мотоциклов – 30 тыс. Механические цеха оснащены оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. велосипедов, либо для 40 тыс мотоциклов. Другая группа цехов может производить либо детали для 80 тыс. велосипедов, либо для 60 тыс мотоциклов. В результате реализации каждой тысячи велосипедов завод получает прибыль в 2 тыс. ден.ед., а каждой тысячи мотоциклов – 3 тыс. ден.ед. Найти такое сочетание объемов выпуска продукции, которое дает наибольшую сумму прибыли.

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количества велосипедов и мотоциклов, выпускаемых заводом в год (в тыс. шт.). Математическая модель задачи имеет вид:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \le 100; \\ x_2 \le 30; \\ \dfrac{1}{120}x_1 + \dfrac{1}{40}x_2 \le 1; \\ \dfrac{1}{80}x_1 + \dfrac{1}{60}x_2 \le 1; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Областью допустимых решений будет многоугольник OABCD . Вектор $\vec{c}$ имеет координаты $\vec{c} = (2; 3)$. (Поскольку вектор $\vec{c}$ нам необходим лишь для выяснения направления, то, сообразуясь с масштабом чертежа, можно для больней наглядности построить вектор $\overrightarrow{\lambda c}$ $(\lambda > 0)$. В данном случае построен вектор $5\vec{c}$.)

Параллельным перемещением вспомогательной прямой $f = 0$, перпендикулярной вектору $5\vec{c}$, находим точку C, в которой функция f достигает наибольшего значения. Решая совместно уравнения граничных прямых BC и CD: $\frac{1}{120}x_1 + \frac{1}{40}x_2 = 1$ и $\frac{1}{80}x_1 + \frac{1}{60}x_2 = 1$, находим координаты точки C: $x_1^* = 48;$ $x_2^* = 24$; при этом $f_{\max} = 168$.

Итак, выпускать следует 48 тыс. велосипедов и 24 тыс. мотоциклов; максимальная прибыль завода по этим видам продукции составит 168 тыс. ден. ед.

Задания для самостоятельного решения.

Задание 1. Построить на плоскости область решений системы линейных неравенств и найти наименьшее и наибольшее значения линейной функции f в этой области: $f = 3x_1 + 2x_2$;

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29; \\ 3x_1 - x_2 \le 14; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38. \end{cases}$$

Задание 2. Автомобильный завод выпускает машины типов А и Б. Значения производственных мощностей отдельных цехов и участков приведены в табл.1. Составить наиболее рентабельную производственную программу при условии, что прибыль от выпуска одной машины типов А и Б равна 2000 и 2400 ден.ед. соответственно.

Наименование цехов и участков	Пропускная способность по машинам типа	
	А	**Б**
Подготовка производства автомобилей	130	180
Кузовной	100	220
Производство шасси	110	110
Производство двигателей	200	120
Сборочный	160	80
Участок испытаний	280	70