# Основные понятия теории графов

Лекции 11-12

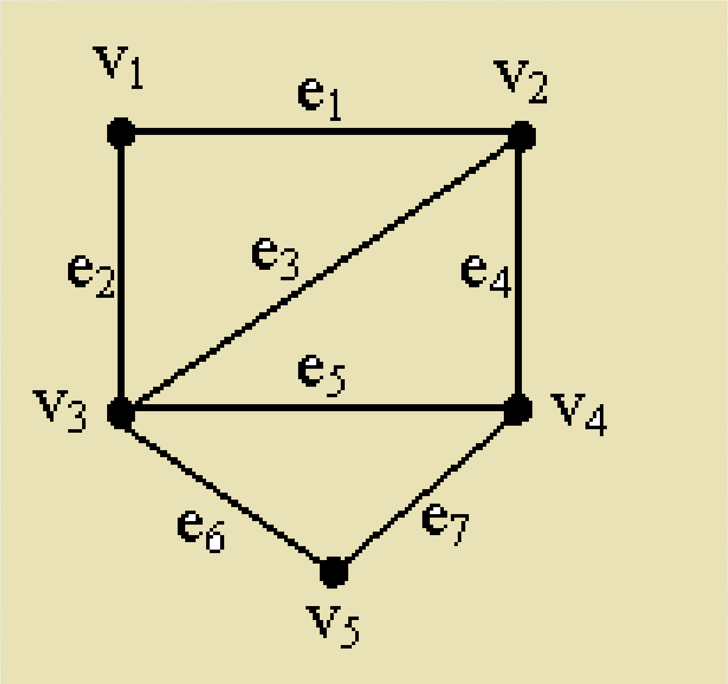
Н.В. Белоус

Факультет компьютерных наук

Кафедра ПО ЭВМ, ХНУРЭ

# Основные понятия

***Граф*** $G=(V,E)$ состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых ***вершинами***, и конечного множества элементов, называемых ***ребрами***.




Граф $G=(V, E)$

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ;

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

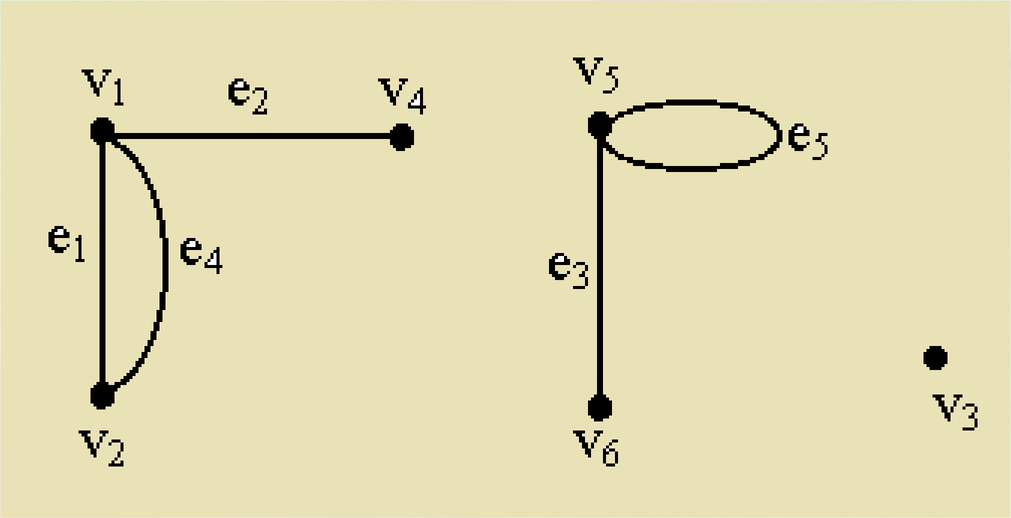
# Основные понятия

Вершины $v_i$ и $v_j$, определяющие ребро $e_k$, называются ***концевыми вершинами*** ребра $e_k$.

Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются ***параллельными*** ($e_1$,$e_4$ ).

***Петля***– замкнутое ребро($e_5$).

Ребро, принадлежащее вершине, называется ***инцидентным*** (ребро $e_1$ инцидентно вершинам $v_1$ и $v_2$).

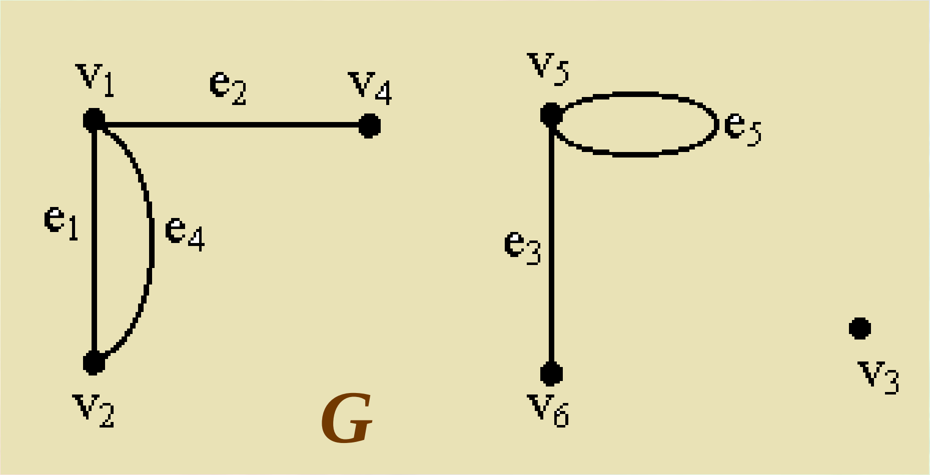


# Основные понятия

***Изолированная вершина*** не инцидентна ни одному ребру ($v_3$).

Две вершины ***смежны***, если они являются концевыми вершинами некоторого ребра ($v_1$, $v_4$).

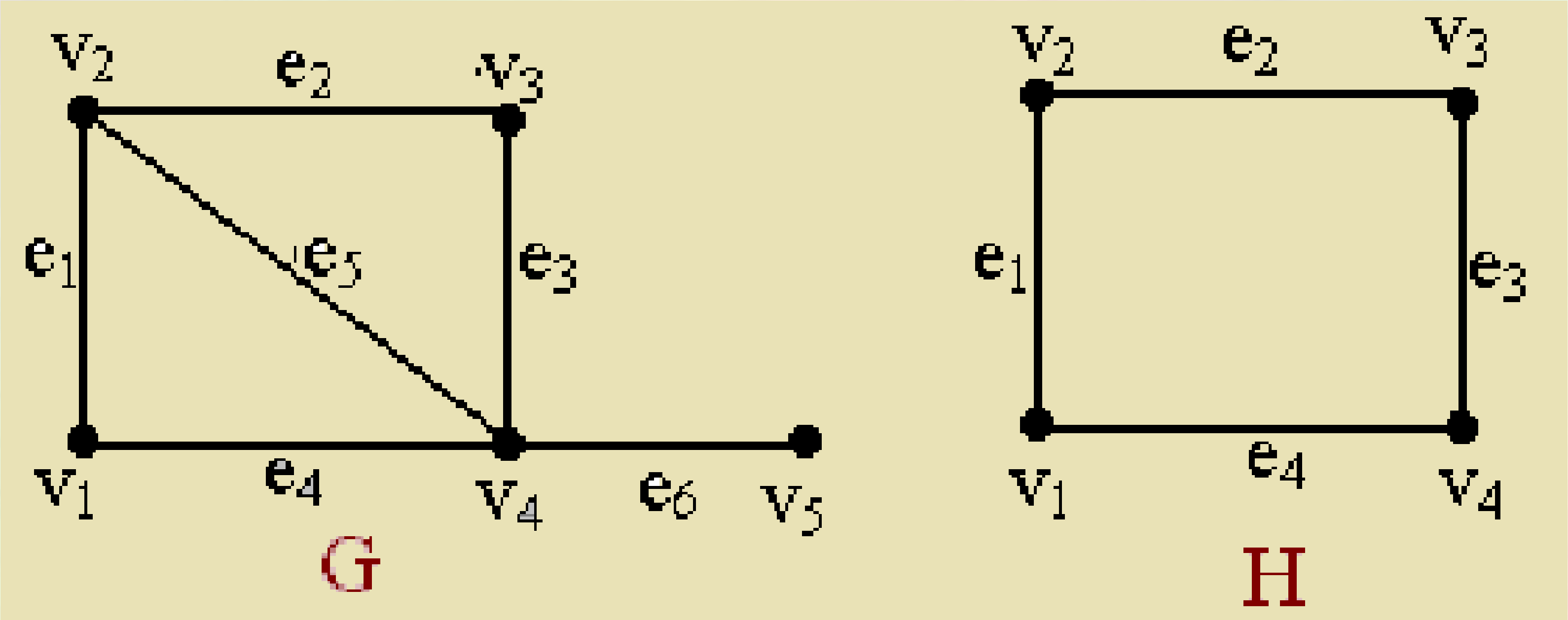
Если два ребра имеют общую концевую вершину, они называются ***смежными*** ($e_1$, $e_2$).




✓Демонстрация

# Основные понятия

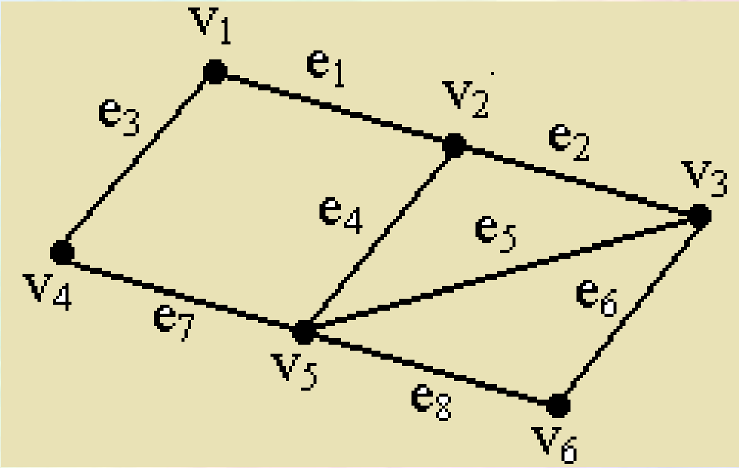
***Подграф*** – любая часть графа, сама являющаяся графом.



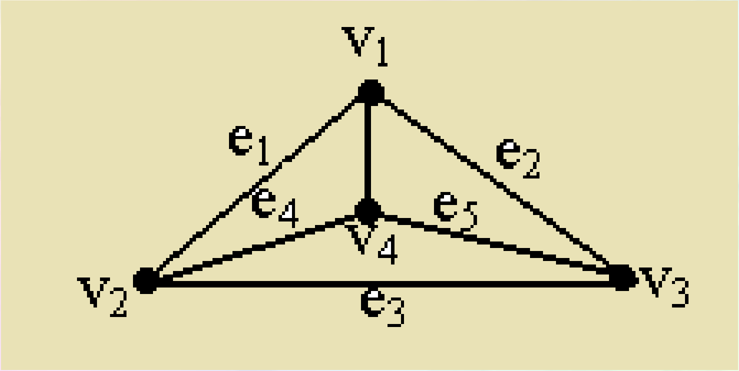

Подграф ***H*** графа ***G***

# Виды графов

Граф ***G=(V,E)*** называется ***простым,*** если он не содержит петель и параллельных ребер.

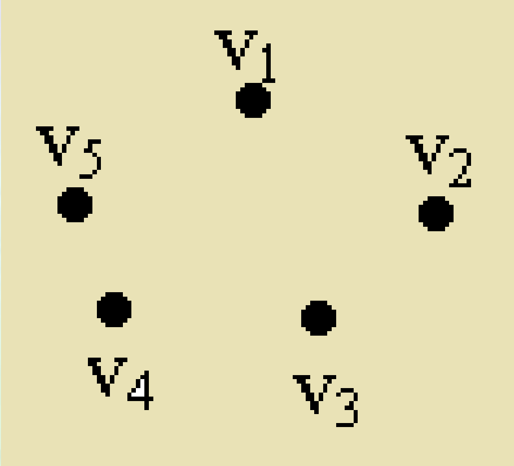



Граф ***G=(V,E)*** называется ***полным***, если он простой и каждая пара вершин смежна.

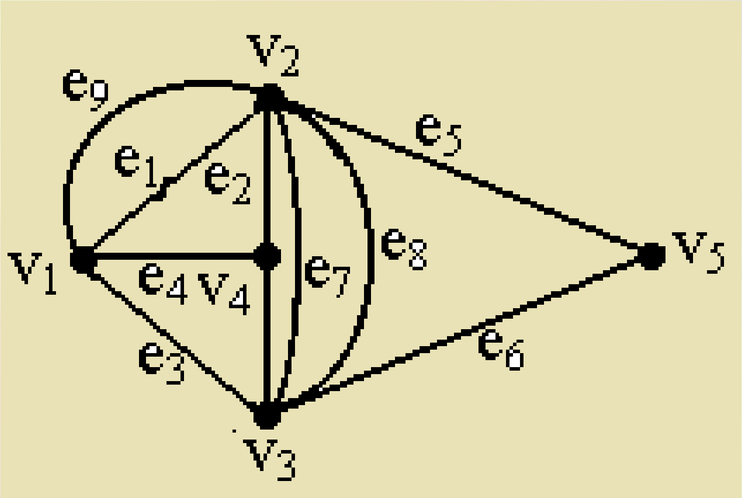


# Виды графов

***Ноль-граф*** - граф, множество ребер которого пусто.

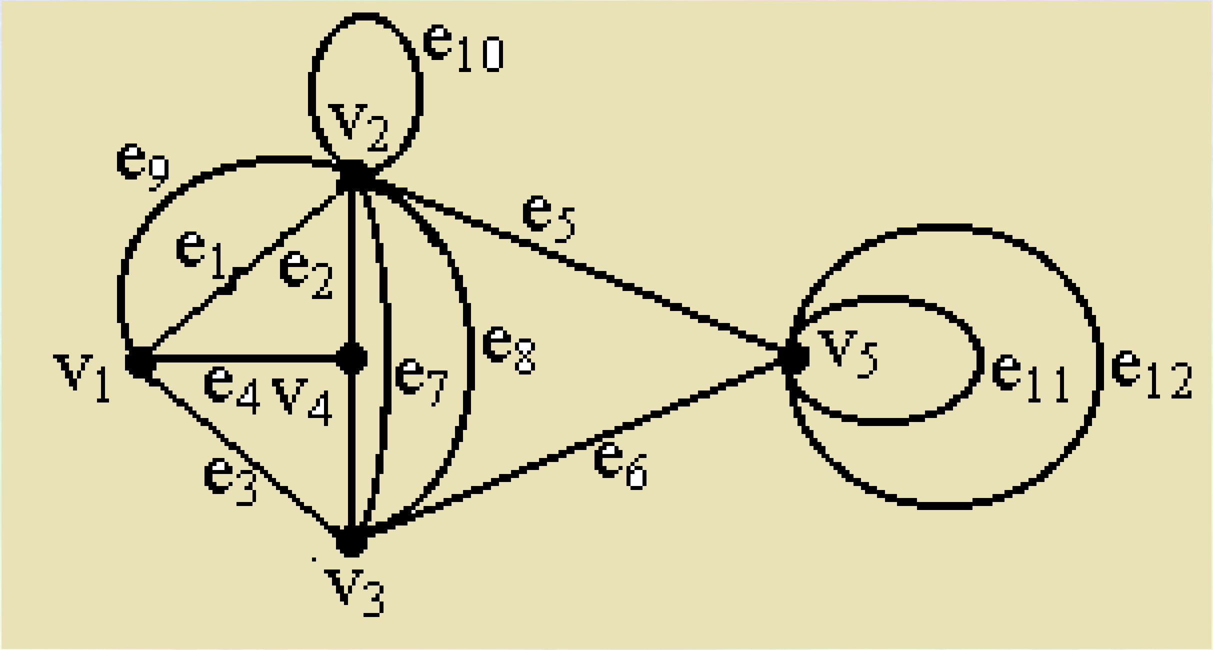



Граф **G** с кратными ребрами называется ***мультиграф.***



# Виды графов

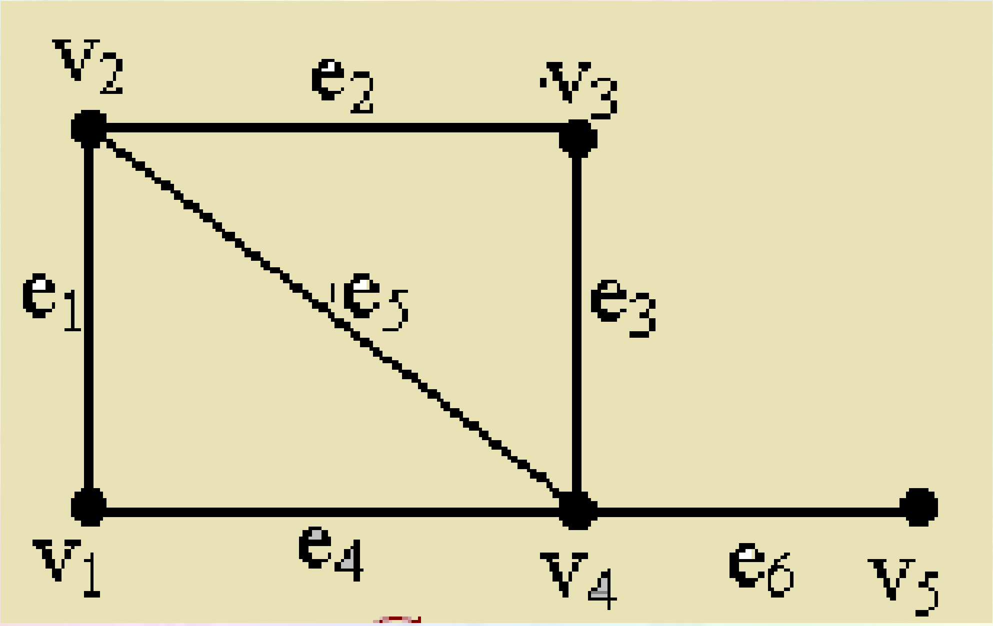
Граф $G$ с петлями и кратными ребрами называется ***псевдограф***.




Демонстрация

# *Неориентированный граф*

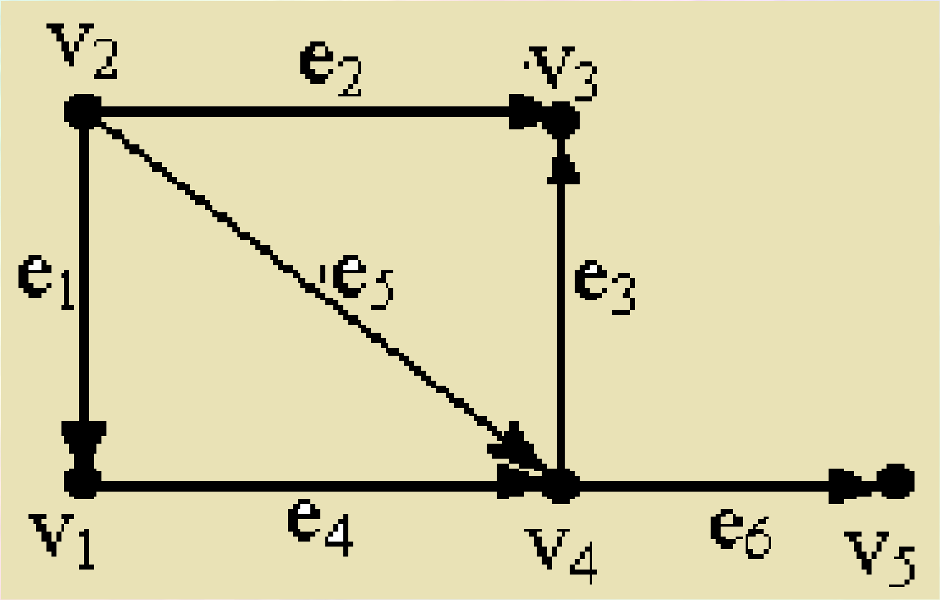
Граф **G**, рёбра которого не имеют определённого направления, называется ***неориентированным.***



# Ориентированный граф

Граф **G**, имеющий определённое направление, называется ***ориентированным графом или орграфом***.

Ребра, имеющие направление, называются ***дугами***.




✓Демонстрация

# Способы задания графов

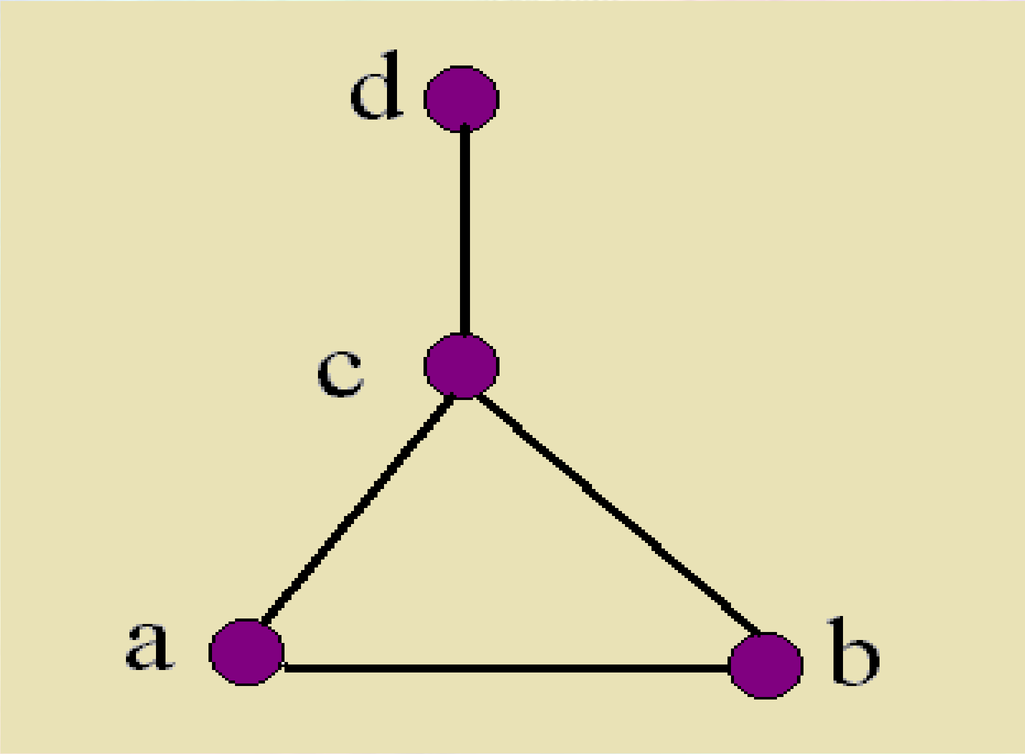
1) Явное задание графа как алгебраической системы.

Чтобы задать граф, достаточно для каждого ребра указать двухэлементное множество вершин – его мы и будем отождествлять с ребром.

$$\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{c,d\}\}$$

# Способы задания графов

2) Геометрический.



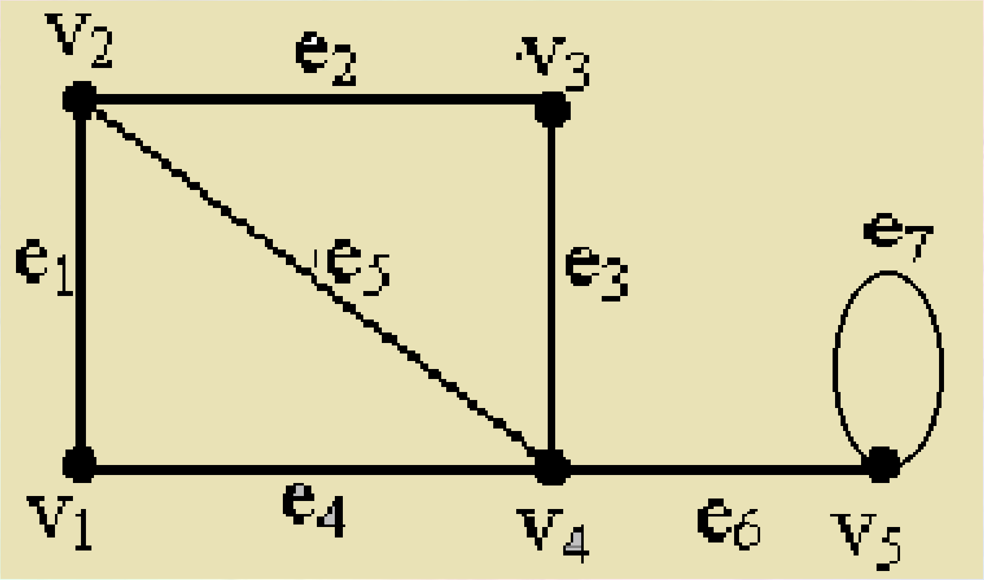
# Способы задания графов

3) Матрица смежности.

Элементы $A_{ij}$ матрицы смежности $A$ равны количеству ребер между рассматриваемыми вершинами.

# Матрица смежности неорграфа

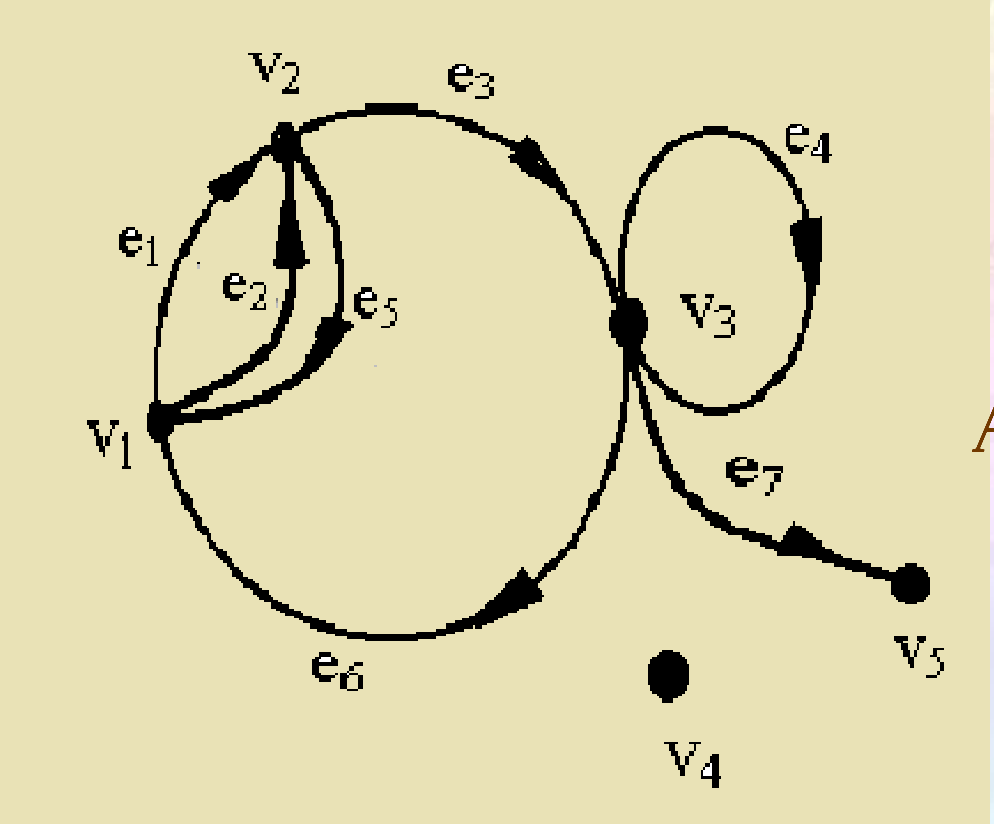
Для неорграфа **G**, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:




$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

# Матрица смежности орграфа

Для орграфа **G**, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:




$$A_0 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

# Способы задания графов

4) Матрица инцидентности.

***Матрица инцидентности В*** –это таблица, строки которой соответствуют вершинам графа, а столбцы - ребрам.

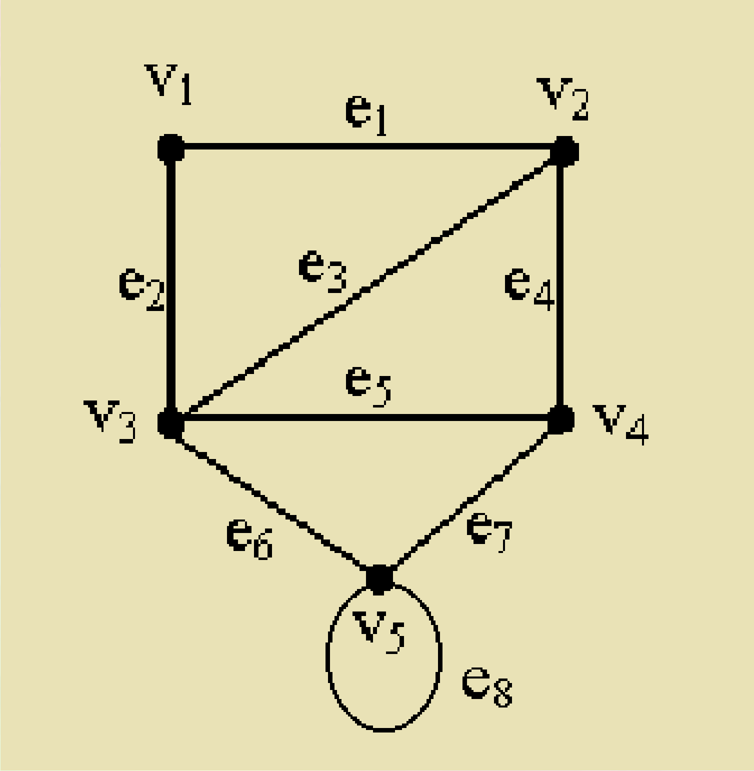
Элементы матрицы определяются следующим образом:

✓Демонстрация

# Способы задания графов

1) для неорграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ \mathbf{0}, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

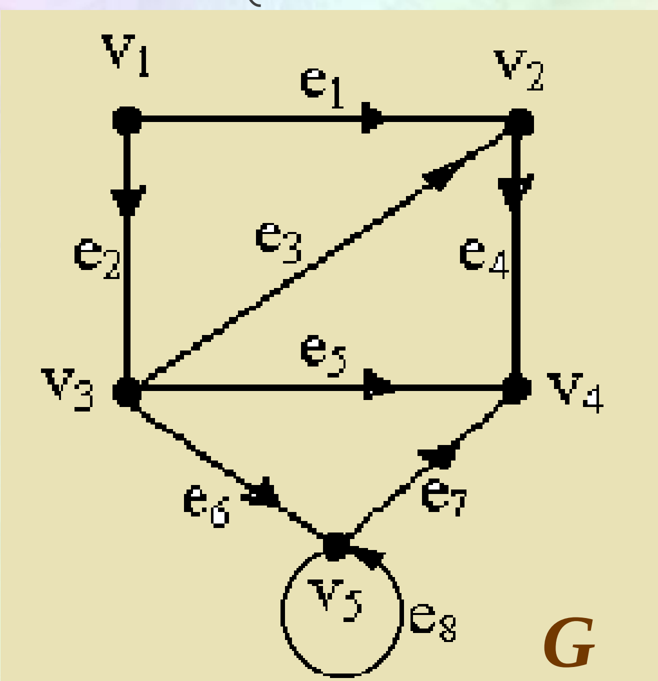



$$B = \begin{array}{c|cccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

# Матрица инцидентности орграфа

2) для орграфа

$$b_{ij}=\begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ входит в вершину } v_i\ ; \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ выходит из вершины } v_i\ ; \\ 2, & \text{если ребро } e_j \text{ –петля из вершины } v_i\ ; \\ 0, & \text{если } e_j \text{ и } v_i \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$




$$B=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}$$

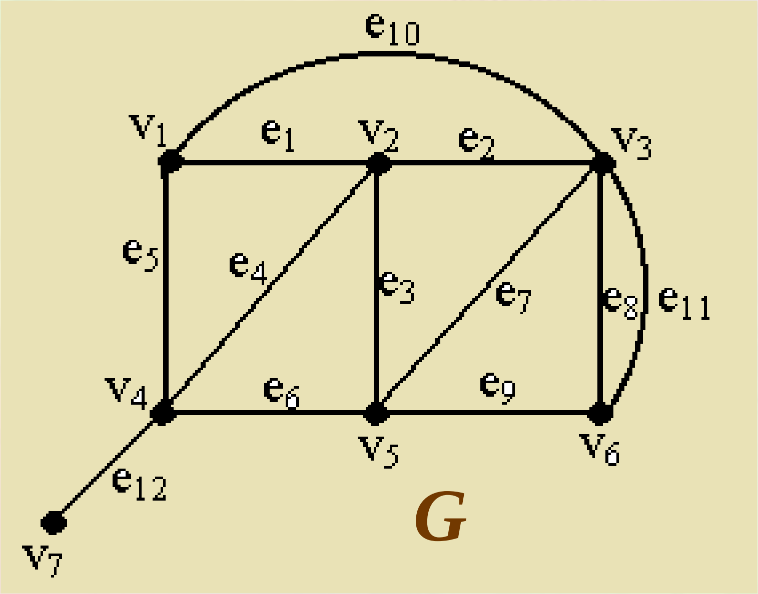
# Маршрут

***Маршрут*** в графе $G=(V,E)$ — конечная чередующееся последовательность вершин и ребер $v_0$, $e_1$, $v_1$, $e_2,\ldots,v_{k-1}$, $e_k$, $v_k$, которая начинается и заканчивается на вершинах, причем $v_{i-1}$ и $v_i$ являются концевыми вершинами ребра $e_i$, $1 \le i \le k$.

# Маршрут

Маршрут называется ***открытым***, если его концевые вершины различны ($v_1$, $e_1$, $v_2$, $e_2$, $v_3$, $e_3$, $v_6$, $e_9$, $v_5$, $e_7$, $v_3$, $e_{11}$, $v_6$).

Маршрут называется ***замкнутым***, если его концевые вершины совпадают ($v_1$, $e_1$, $v_2$, $e_2$, $v_3$, $e_7$, $v_5$, $e_3$, $v_2$, $e_4$, $v_4$, $e_5$, $v_1$).

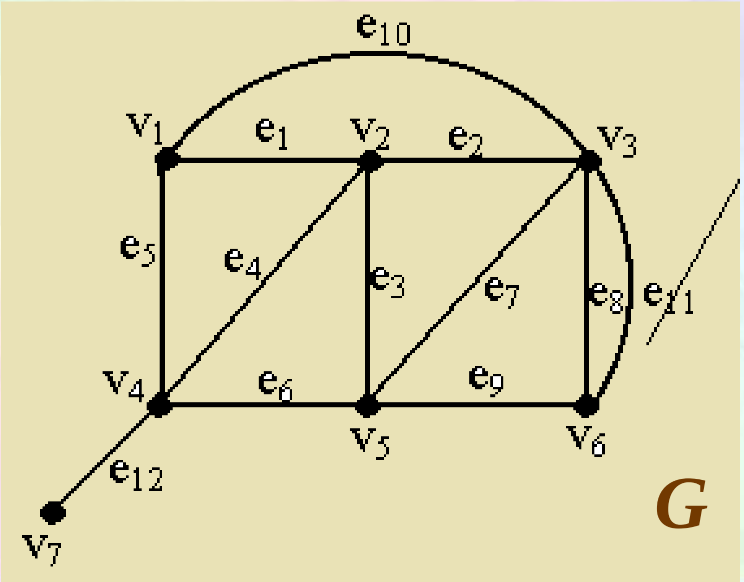


# Цепь

Маршрут называется ***цепью***, если все его ребра различны.

Цепь называется ***простой***, если ее концевые вершины различны($v_1$, $e_1$, $v_2$, $e_2$, $v_3$, $e_8$, $v_6$, $e_{11}$, $v_3$).

Цепь называется ***замкнутой***, если ее концевые вершины совпадают ($v_1$,$e_1$,$v_2$,$e_2$,$v_3$,$e_7$,$v_5$,$e_3$,$v_2$,$e_4$,$v_4$,$e_5$,$v_1$).

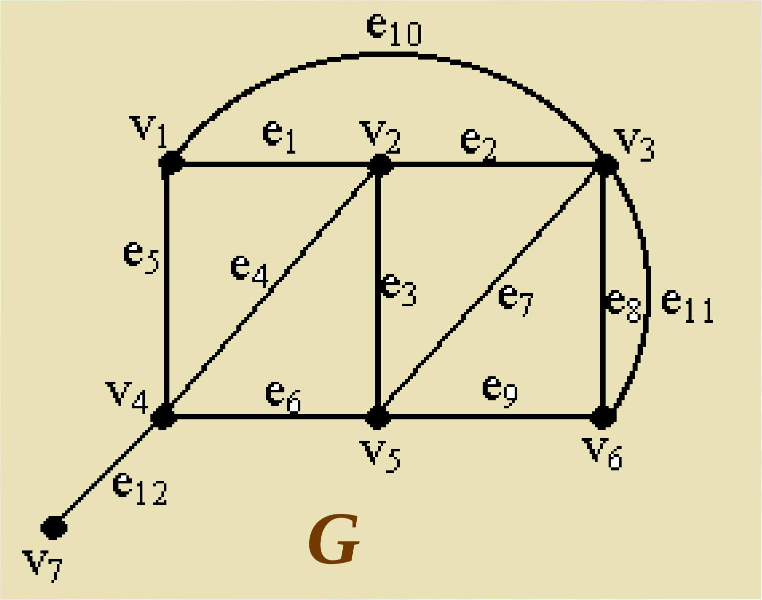


# Путь, цикл

Открытая цепь называется ***путем***, если все ее вершины различны ($v_1, e_1, v_2, e_2, v_3$).

***Цикл*** – это замкнутая цепь ( ***простой цикл***, если цепь простая) ($v_1, e_1, v_2, e_3, v_5, e_6, v_4, e_5, v_1$).

Число ребер в пути называется ***длиной пути***. Аналогично определяется ***длина цикла***.



# Свойства путей и циклов

1. Степень каждой неконцевой вершины пути равна 2, концевые вершины имеют степень, равную 1.

2. Каждая вершина цикла имеет степень 2 или другую четную степень. Обращение этого утверждения, а именно то, что ребра подграфа, в котором каждая вершина имеет четную степень, образуют цикл, — неверно.

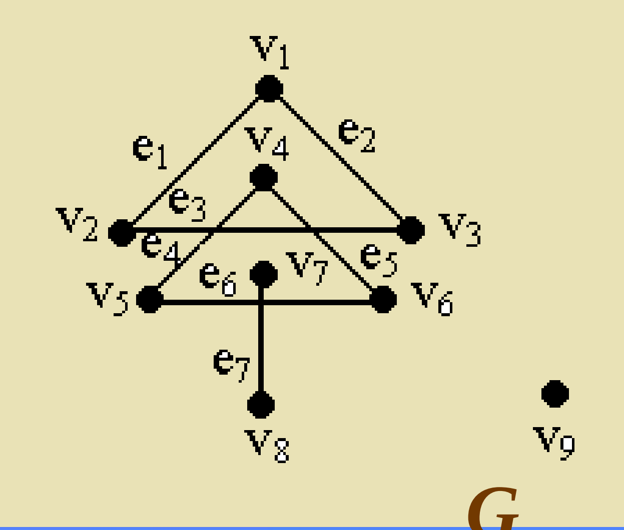
3. Число вершин в пути на единицу больше числа ребер, тогда как в цикле число ребер равно числу вершин.

# *Связность графов, компонента связности*

Две вершины $v_i$ и $v_j$ называются ***связанными*** в графе $G$, если в нем существует путь $v_i—v_j$. Вершина связана сама с собой.

Граф называется ***связным***, если в нем существует путь между каждой парой вершин.

***Компонента связности*** – максимальный связный подграф в графе.




1 компонента связности: $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3\}$

2 компонента связности: $\{v_4, v_5, v_6, e_4, e_5, e_6\}$

3 компонента связности: $\{v_7, v_8, e_7\}$

4 компонента связности: $\{v_9\}$

✓Демонстрация

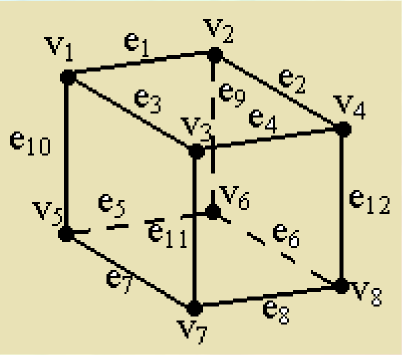
# Степень вершины

Степенью $deg(v_j)$ вершины $v_j$ называется число инцидентных ей ребер, т. е. вершин в ее окружении.

Максимальная и минимальная степени вершин графа $G$ обозначаются символами $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно:

$$\Delta(G) = \max_{v \in VG} \deg v \qquad \delta(G) = \min_{v \in VG} \deg v$$

Граф $G=(V,E)$ называется ***регулярным*** или ***однородным*** (степени $r$), если степени всех его вершин одинаковы. Степенью регулярного графа называется степень его вершин.



# Сумма степеней вершин графа

**Утверждение** («лемма о рукопожатиях»)

Сумма всех вершин графа – четное число, равное удвоенному числу ребер:

$$\sum_{v \in VG} \deg v = 2|EG|$$

Интерпретация леммы: поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки,то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно (при этом каждая рука учитывается столько раз, во скольких рукопожатиях она участвовала).

**Следствие**

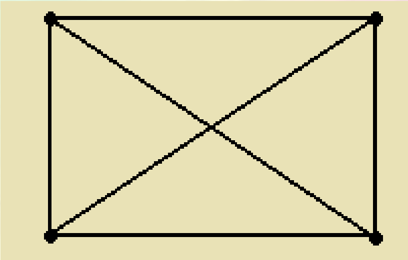
В любом графе число вершин нечетной степени четно

# Изоморфизм графов

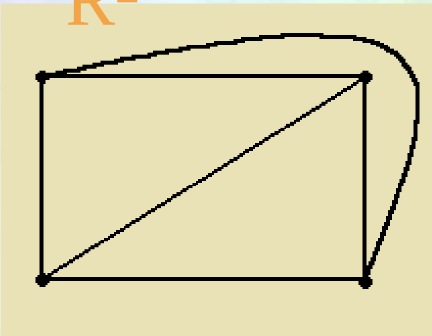
Два графа $G_1$ и $G_2$ ***изоморфны***, если существует такое взаимно-однозначное отображение между множествами их вершин и ребер, что соответствующие ребра графов $G_1$ и $G_2$ инцидентны соответствующим вершинам этих графов.

Если граф $G$ изоморфен геометрическому графу $G'$ в $R^n$, то $G'$ называется ***геометрической реализацией*** графа $G$ в пространстве $R^n$.

$R^3$



$R^2$



Граф $R^2$ является геометрической реализацией графа $R^3$

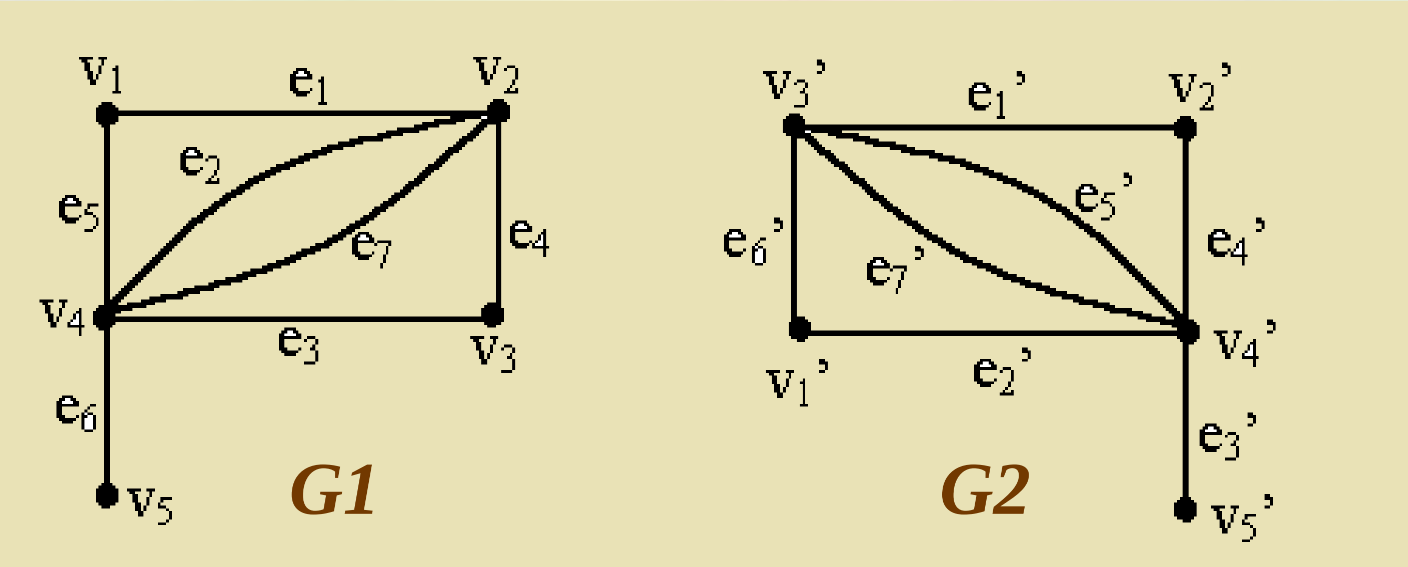
# Пример изоморфных графов

**Соответствие вершин:**

$v_1 \leftrightarrow v_2', v_2 \leftrightarrow v_3', v_3 \leftrightarrow v_1', v_4 \leftrightarrow v_4', v_5 \leftrightarrow v_5';$

**Соответствие ребер:**

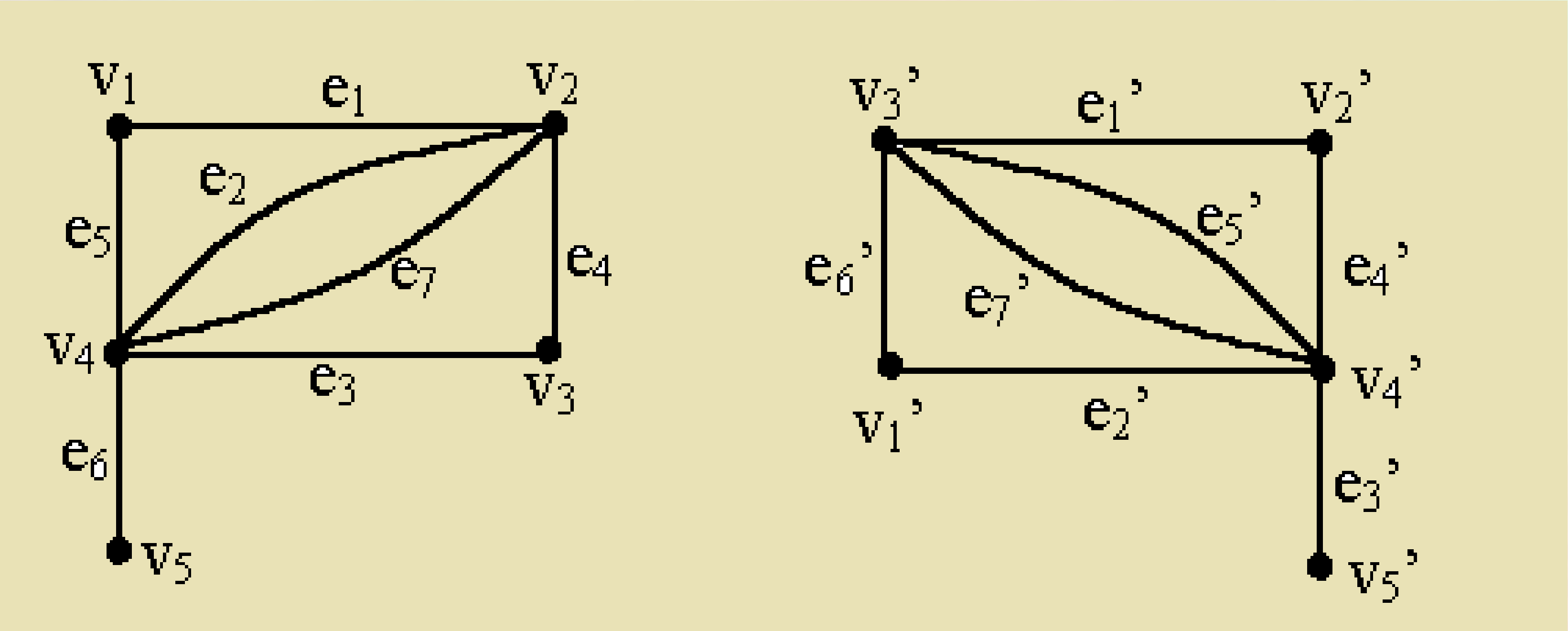
$e_1 \leftrightarrow e_1', e_3 \leftrightarrow e_2', e_5 \leftrightarrow e_4', e_2 \leftrightarrow e_5', e_4 \leftrightarrow e_6', e_6 \leftrightarrow e_3'.$




**G1** и **G2** – изоморфные графы

# Изоморфизм как отношение эквивалентности на множестве графов

Отношение изоморфизма является эквивалентностью, т.е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно.



# Помеченный и абстрактный графы

Граф порядка ***n*** называется ***помеченным***, если его вершинам присвоены некоторые метки (например номера ***1, 2, …, n***).

***Абстрактный*** (или ***непомеченный***) граф – это класс изоморфных графов.

Помеченные графы: