

Практическая работа № 1

Решение задачи линейного программирования с использованием графического метода

Цель: научиться решать задачи линейного программирования графическим методом; уметь давать экономическую интерпретацию полученного решения.

Теоретическая часть

Задача

Найти X_1 и X_2 удовлетворяющие системе неравенств:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 &\leq b_r \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

условиям неотрицательности: $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$, (2)

для которых функция: $R = C_1X_1 + C_2X_2$ (3)

достигает максимума.

Решение.

Построим в системе прямоугольных координат X_1OX_2 область допустимых решений задачи. Для этого, заменяя каждое из неравенств (37) равенством, строим соответствующую ему граничную прямую $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ ($i=1,2,\dots,r$) (рис.17).

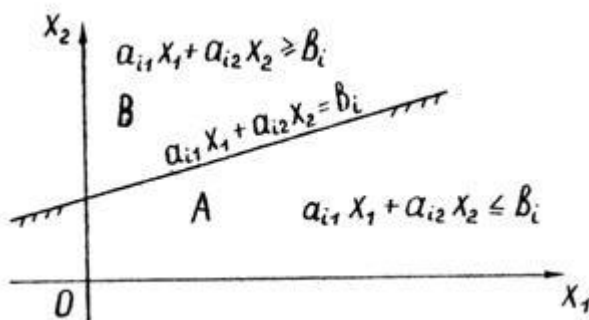


рис. 17

Эта прямая делит плоскость X_1OX_2 на две полуплоскости, для координат X_1, X_2 любой точки A одной полуплоскости выполняется неравенство: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$, а для координат X_1, X_2 любой точки B другой полуплоскости противоположное неравенство: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$.

Координаты любой точки граничной прямой удовлетворяют уравнению:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i.$$

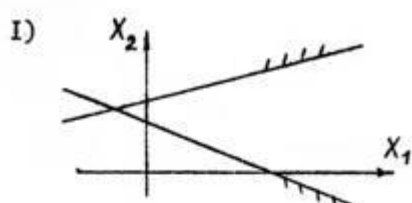
Для определения, по какую сторону от граничной прямой располагается полуплоскость, соответствующая заданному неравенству, достаточно "испытать"

одну какую-либо точку (проще всего точку $O(0,0)$). Если при подстановке ее координат в левую часть неравенства оно удовлетворяется, то полуплоскость обращена в сторону к испытываемой точке, если же неравенство не удовлетворяется, то соответствующая полуплоскость обращена в противоположную сторону. Направление полуплоскости показывается на чертеже (рис.17) штриховкой.

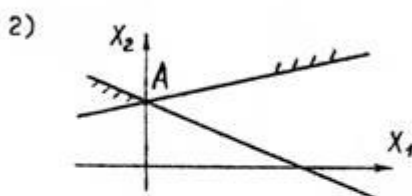
Неравенствам $X_1 \geq 0$ и $X_2 \geq 0$ также соответствуют полуплоскости, расположенные справа от оси ординат и над осью абсцисс.

На рисунке строим граничные прямые и полуплоскости, соответствующие всем неравенствам.

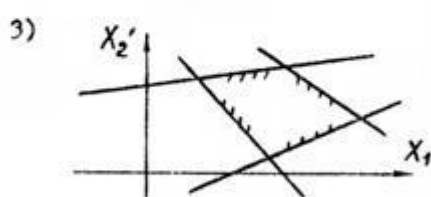
Общая часть (пересечение) всех этих полуплоскостей будет представлять собой область допустимых решений данной задачи. При построении области допустимых решений в зависимости от конкретного вида системы ограничений (неравенств) на переменные может встретиться один из четырех случаев (рис.18):



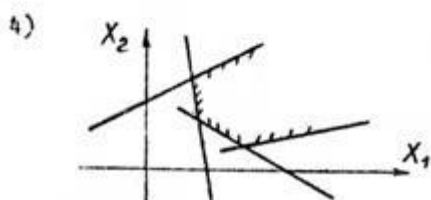
Область допустимых решений пустая, что соответствует несовместности системы неравенств; решения нет.



Область допустимых решений изображается одной точкой А, что соответствует единственному решению системы.



Область допустимых решений ограниченная, изображается в виде выпуклого многоугольника. Допустимых решений множество.



Область допустимых решений неограниченная, в виде выпуклой многоугольной области. Допустимых решений множество

Рис.18

Графическое изображение целевой функции $R = C_1X_1 + C_2X_2$ при фиксированном значении R определяет прямую, а при изменении R - семейство параллельных прямых с параметром R .

Вектор, перпендикулярный ко всем этим прямым, показывает направление возрастания R .

Для всех точек, лежащих на одной из прямых, функция R принимает одно определенное значение, поэтому указанные прямые называются линиями уровня для функции R (рис.19).



Рис.19.

Задача отыскания оптимального решения системы неравенств (37), для которого целевая функция R (39) достигает максимума, геометрически сводится к определению в области допустимых решений точки, через которую пройдет линия уровня, соответствующая наибольшему значению параметра R .

Если область допустимых решений есть выпуклый многоугольник» то экстремум функции R достигается по крайней мере в одной из вершин этого многоугольника.

Если экстремальное значение R достигается в двух вершинах, то же экстремальное значение достигается в любой точке на отрезке, соединяющем эти две вершины. В этом случае говорят, что задача имеет альтернативный оптимум.

В случае неограниченной области экстремум функции R либо не существует, либо достигается в одной из вершин области, либо имеет альтернативный оптимум.

Пример.

Найти X_1 и X_2 , удовлетворяющие системе неравенств:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 5x_2 &\leq 5 \\ x_1 - x_2 &\geq -4 \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

условиям неотрицательности: $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, для которых функция $R=2X_1+3X_2$ достигает максимума.

Решение.

1. Заменяем каждое из неравенств равенством и построим граничные прямые (рис.20)

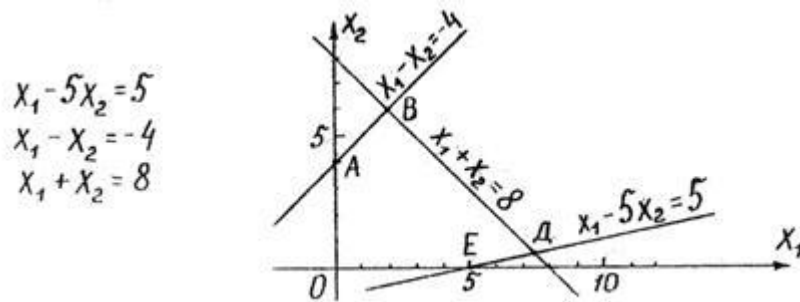


рис.20

2. Определим полуплоскости, соответствующие данным неравенствам (40) путем "испытания" точки (0,0). Покажем направления полуплоскостей штриховкой (рис.21). С учетом неотрицательности x_1 и x_2 получим область допустимых решений данной задачи в виде выпуклого многоугольника OABDE.

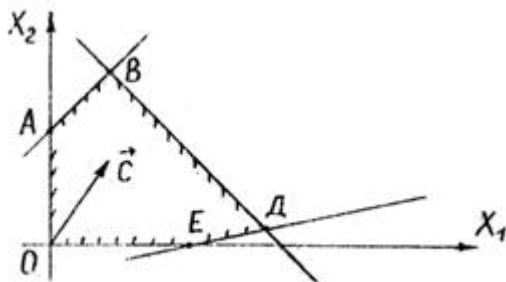


рис.21

3. В области допустимых решений находим оптимальное решение, строя вектор $\vec{C} = \{2, 3\}$ который показывает направление возрастания R (рис.21).

Оптимальное решение соответствует точке B, координаты которой можно определить либо графически, либо путем совместного решения двух уравнений, соответствующих граничным прямым AB и BD, т.е.

$$x_1 - x_2 = -4,$$

$$x_1 + x_2 = 8.$$

Ответ: $x_1=2, x_2=6, R_{\max}=22$.

Практическая часть

Номер варианта заданий соответствует списочному номеру студента

Задание № 1. Решить графически задачу линейного программирования

Решить графически ЗЛП: $Z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить графически ЗЛП: $Z = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить графически ЗЛП: $F(x) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить графически ЗЛП: $Z = x_1 - 10x_2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 0,5x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2. \end{cases}$$

Вариант 5

Решить графически ЗЛП: $Z = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить графически ЗЛП: $Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 7

Решить графически ЗЛП: $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 8

Решить графически ЗЛП: $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 9

Решить графически ЗЛП: $Z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 10

Решить графически ЗЛП: $Z = 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 11

Решить графически ЗЛП: $Z = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 12

Решить графически ЗЛП: $Z = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 13

Решить графически ЗЛП: $Z = 2x_1 - 10x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 14

Решить графически ЗЛП: $Z = x_1 - 10x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 15

Решить графически ЗЛП: $Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задание № 2. Составить экономико-математическую модель задачи. Решить задачу геометрически. Дать экономический анализ.

Вариант № 1

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	1	8
S_2	1	4	20
S_3	1	0	5
Прибыль (ден.ед)	1	2	

Вариант № 2

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	5	35
S_2	2	1	16
S_3	1	0	6
Прибыль (ден.ед)	2	3	

Вариант № 3

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	4	28
S_2	1	1	10
S_3	1	0	7
Прибыль (ден.ед)	3	5	

Вариант № 4

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	6	24
S_2	1	2	12
S_3	1	0	8
Прибыль (ден.ед)	1	1	

Вариант № 5

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	3	30
S_2	2	3	36
S_3	1	0	9
Прибыль (ден.ед)	2	4	

Вариант № 6

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	4	36
S_2	3	2	38
S_3	1	0	10
Прибыль (ден.ед)	1	1	

Вариант № 7

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	4	36
S_2	5	3	44
S_3	1	0	7
Прибыль (ден.ед)	2	3	

Вариант № 8

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	2	15
S_2	1	3	21
S_3	1	0	5
Прибыль (ден.ед)	2	5	

Вариант № 9

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	2	8	48
S_2	1	2	14
S_3	1	0	6
Прибыль (ден.ед)	2	7	

Вариант № 10

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	5	35
S_2	2	3	27
S_3	1	0	7
Прибыль (ден.ед)	1	1	

Вариант № 11

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	7	63
S_2	2	1	22
S_3	1	0	9
Прибыль (ден.ед)	2	3	

Вариант № 12

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	7	56
S_2	2	1	21
S_3	1	0	8
Прибыль (ден.ед)	2	3	

Вариант № 13

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	3	30
S_2	3	1	26
S_3	1	0	7
Прибыль (ден.ед)	1	1	

Вариант № 14

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	3	1	12
S_2	1	2	9
S_3	1	0	4
Прибыль (ден.ед)	2	2	

Вариант № 15

Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов S_1 , S_2 и S_3 . При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно (см. таблицу):

Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от готовой продукции.

Сырье	Продукция		Запасы сырья (в кг)
	А	В	
S_1	1	6	42
S_2	1	1	12
S_3	1	0	8
Прибыль (ден.ед)	1	2	