

Практическая работа № 9

Тема: «Определение потока заданной величины минимальной стоимости. Алгоритм Басакера-Гоуэна»

Цель: Изучить алгоритм Басакера-Гоуэна

Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретические сведения
2. Выполнить задания по вариантам.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Необходимо рассмотреть сеть $G = (V, E)$, каждой дуге (x, y) которой соответствовала пропускная способность дуги $c(x, y) \geq 0$, указывающая максимальное количество потока, которое по ней можно пропустить.

Для данной задачи нахождения потока заданной величины минимальной стоимости необходимо, каждой дуге (x, y) было поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $d(x, y)$, называемое стоимостью доставки единицы потока по дуге (x, y) . Если в сети пропущен поток f , то стоимостью потока называется число

$$S(f) = \sum_{(x,y) \in E} d(x,y) * f(x,y)$$

Постановка задачи. Пусть $G = (V, E)$ — сеть с заданными пропускными способностями $c(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in E$ и стоимостями $d(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in E$ дуг. Среди допустимых потоков (т.е. потоков, удовлетворяющих условиям $0 \leq f(x, y) \leq c(x, y)$) заданной мощности $M(f) = V$, найти поток минимальной стоимости $S(f)$.

При этом подразумевается, что величина V не превышает максимальной мощности допустимого потока из s в t , иначе задача не имеет решения.

В излагаемых далее алгоритмах построения потока минимальной стоимости существенную роль играет так называемый граф модифицированных стоимостей G_f .

Пусть дан граф $G = (V, E)$, в котором пропущен допустимый поток f . Граф $G_f = (V_f, E_f)$ строится следующим образом: множество вершин совпадает с множеством вершин графа G , т.е. $V_f = V$; множество E_f определяется правилами:

- а) Если $(x, y) \in E$ и $f(x, y) = 0$, то в графе G_f рисуется одна дуга $(x, y) \in E_f$, имеющая длину (модифицированную стоимость) $d_f(x, y) = d(x, y)$.
- б) Если $(x, y) \in E$ и $f(x, y) = c(x, y)$, то в графе G_f рисуется одна дуга $(y, x) \in E_f$, имеющая длину (модифицированную стоимость) $d_f(y, x) = -d(x, y)$.
- в) Если $(x, y) \in E$ и $0 < f(x, y) < c(x, y)$, то в графе G_f рисуется две дуги $(x, y) \in E_f$ и $(y, x) \in E_f$ имеющие соответственно длины $d_f(x, y) = d(x, y)$ и $d_f(y, x) = -d(x, y)$.

Пример. Пусть задан граф $G = (V, E)$, в котором пропущен допустимый поток f (см. Рис.1).

$$\overbrace{c(x, y), f(x, y)}$$

В данном графе над каждой дугой $(x, y) \in E$ числа $d(x, y)$ показывают соответственно пропускную способность, пропущенный по дуге поток и стоимость единицы потока. Тогда граф $G_f = (V_f, E_f)$ имеет вид (см. Рис. 2)

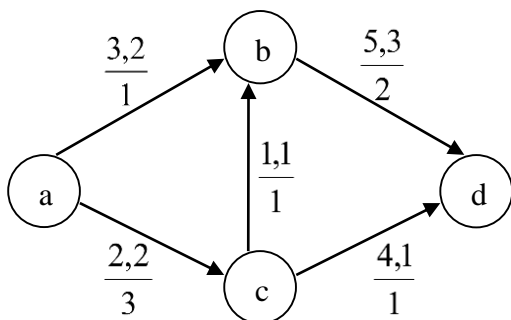


Рис. 1

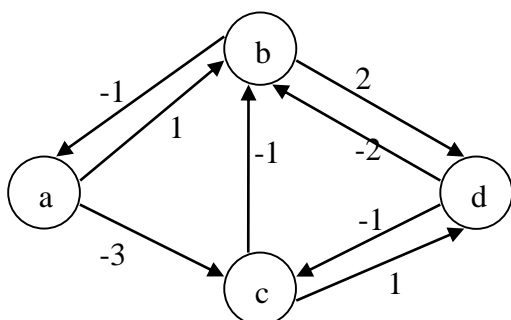


Рис. 2

Алгоритм Басакера-Гоуэна (Basaker R.G., Gowen P.J)

Шаг 0. Решение начинаем с нулевого потока $M(f) = 0$. Полагаем $v' = 0$.

Шаг 1. Строим граф модифицированных стоимостей G_f . Если нет ни одной цепи из s в t , то задача нахождения потока минимальной стоимости, имеющего заданную мощность, v' не имеет решения. В исходной сети G пропущен поток максимальной мощности $v'(v' < v)$ минимальной стоимости. В противном случае находим кратчайшую цепь P^* из s в t (роль длин дуг играют их модифицированные стоимости).

Шаг 3. В исходном графе определяем (s, t) - путь P , соответствующий цепи P^* . На прямых дугах пути P вычисляем:

$$\varepsilon_1 = \min\{c(x, y) - f(x, y)\},$$

на обратных:

$$\varepsilon_2 = \min\{f(x, y)\}.$$

Находим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, v - v'\}$.

На прямых дугах пути P величину потока увеличиваем, а на обратных уменьшаем на ε .

Шаг 4 Полагаем $v = v' + \varepsilon$.

Если $v' < v$, то переходим к шагу 1, если $v' = v$, то алгоритм свою работу закончил, в сети построен оптимальный поток.

Замечание. Для решения задачи о нахождении максимального потока максимальной стоимости достаточно в алгоритме Басакера-Гоуэна заменить v на ∞ .

Пример. Построить поток заданной мощности $v = 3$ минимальной стоимости в сети G (см. Рис. 3).
Итерация 1

Полагаем $v' = 0$. Строим граф модифицированных стоимостей $G_{f=0}$ (см. Рис.4).

Находим кратчайшую (наиболее дешевую) цепь P^* из s в t :

$P^*: s \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow t$,

Длина цепи (модифицированная стоимость) равна 3.

Соответствующий ей (s, t) – путь

$P: s \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow t$,

и $\varepsilon = \min\{2, 3, 2\} = 2$.

Т.к. все дуги пути — прямые, то увеличивая пути P величину потока на 2, то получаем (см. Рис. 5)

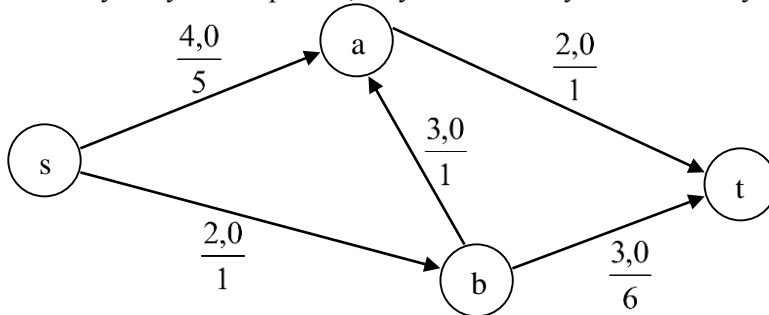


Рис. 3

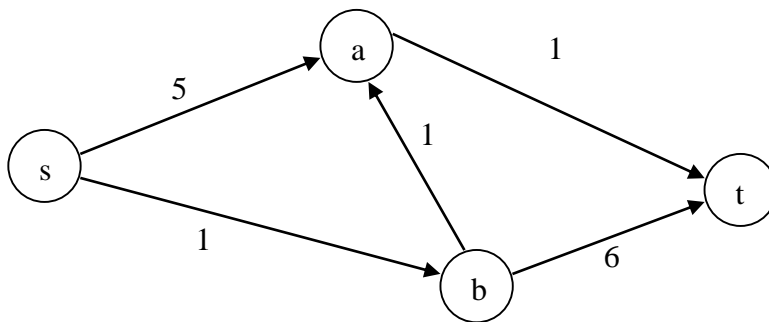


Рис. 4

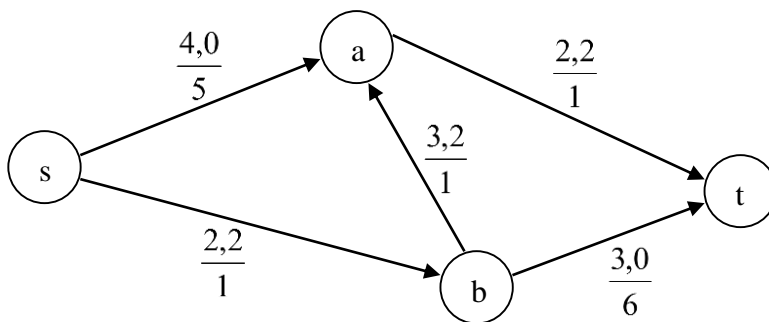


Рис. 5

Пересчитываем $v' = v' + \varepsilon = 0 + 2 = 2$.

Поскольку $v' < v'$, то переходим к шагу 1.

Итерация 2

Строим граф модифицированных стоимостей G_f (см. Рис. 6).

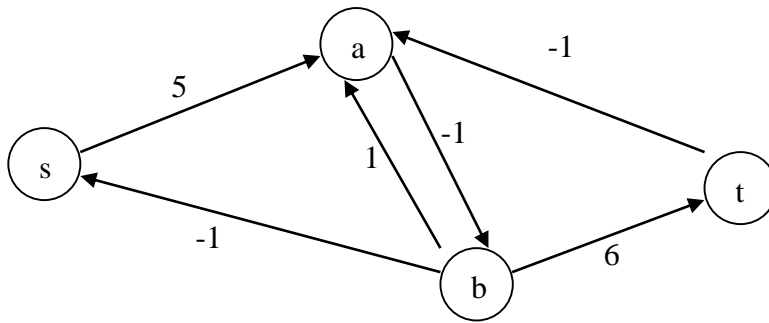


Рис. 6

Находим в графе модифицированных стоимостей кратчайшую цепь

$P^*: s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow t$,

Соответствующий ей (s, t) – путь

$P: s \rightarrow a \leftarrow b \rightarrow t$.

На прямых дугах пути P вычисляем:

$$\varepsilon_1 = \min\{4 - 0, 3 - 0\} = 3,$$

на обратных:

$$\varepsilon_2 = \min\{2\} = 2.$$

$$\text{Находим } \varepsilon = \min\{3, 2, 3 - 2\} = 1.$$

Величину потока на прямых дугах (s, a) , (b, t) увеличиваем, а на обратной (a, b) уменьшаем на 1.

Получаем (см. Рис. 7)

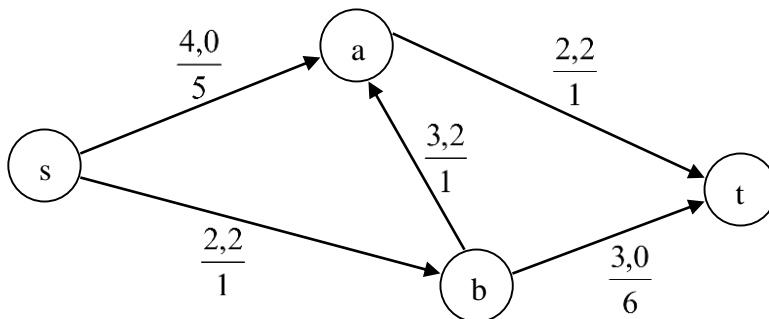


Рис. 7

$$\text{Считаем } v' = v' + \varepsilon = 2 + 1 = 3.$$

Т.к. $v' = V$, то алгоритм свою работу закончил, в сети построен оптимальный поток.

Вычислим суммарную стоимость пропущенного потока:

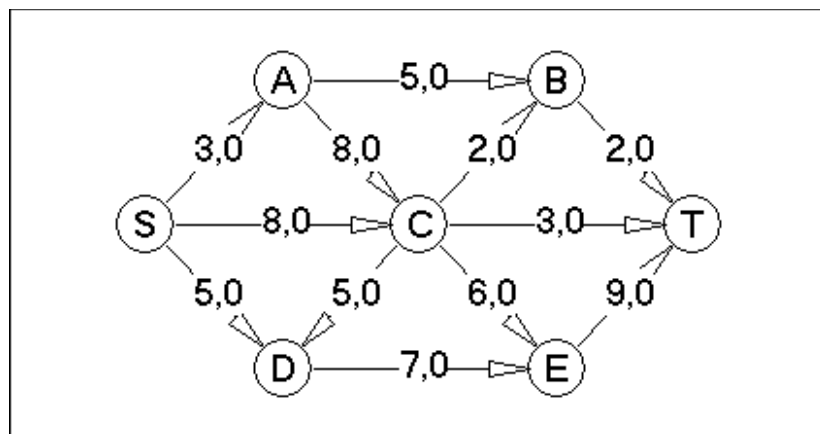
$$S(f) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 16.$$

Очевидно, что при достаточно больших значениях V использование алгоритма Басакера-Гоуэна приводит к длительным вычислениям.

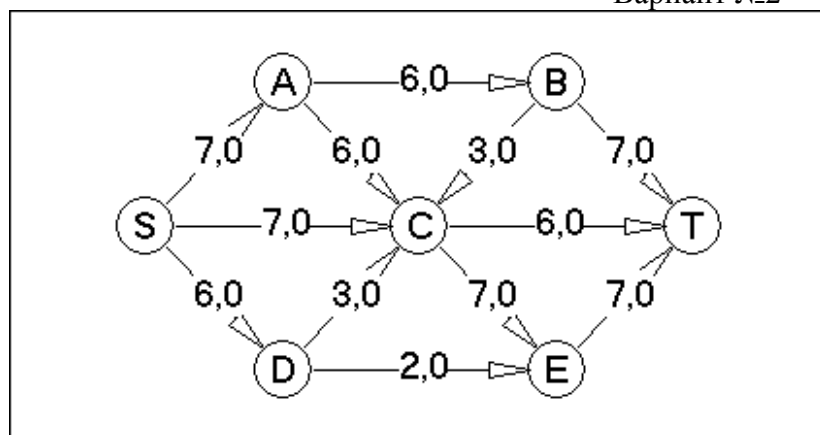
Практическая часть

Для сети построить поток заданной мощности в соответствии с вариантом минимальной стоимости. На каждой дуге сети указаны два числа. Первое число означает пропускную способность ребра, а второе число указывает на поток по ребру. Стоимость доставки единицы потока по дуге указана в соответствии с вариантом.

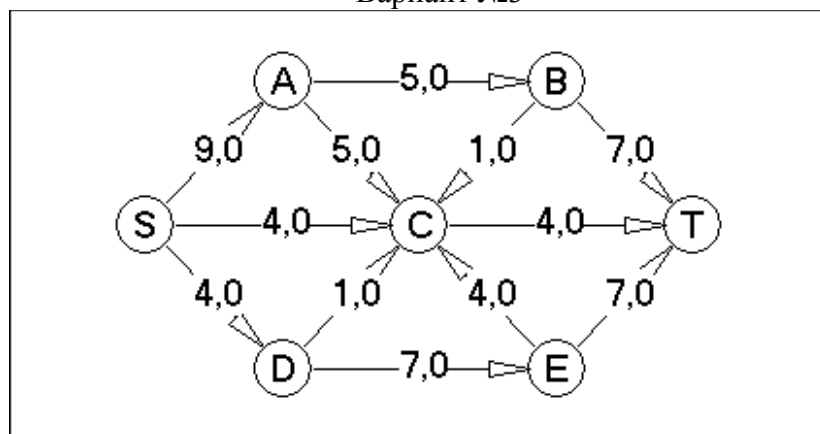
Вариант №1



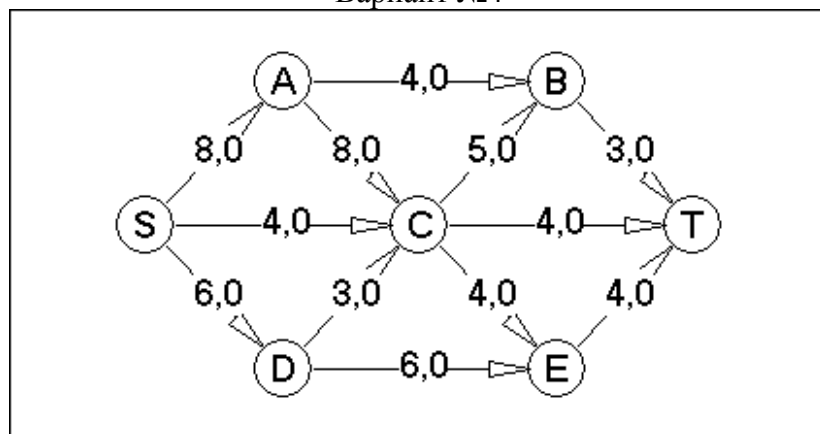
Вариант №2



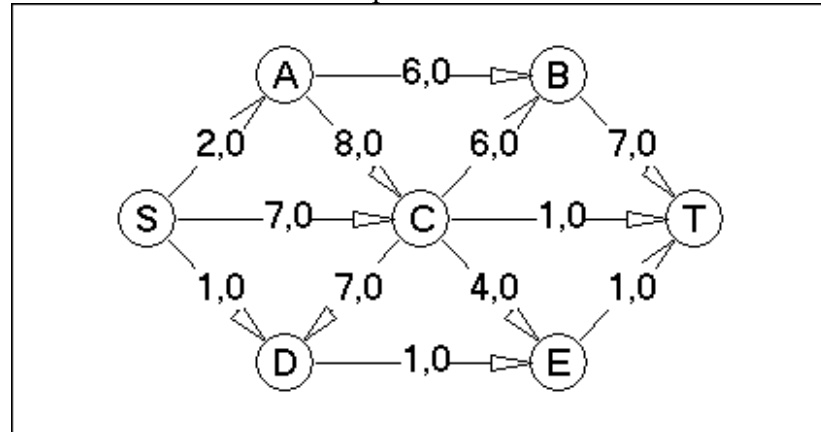
Вариант №3



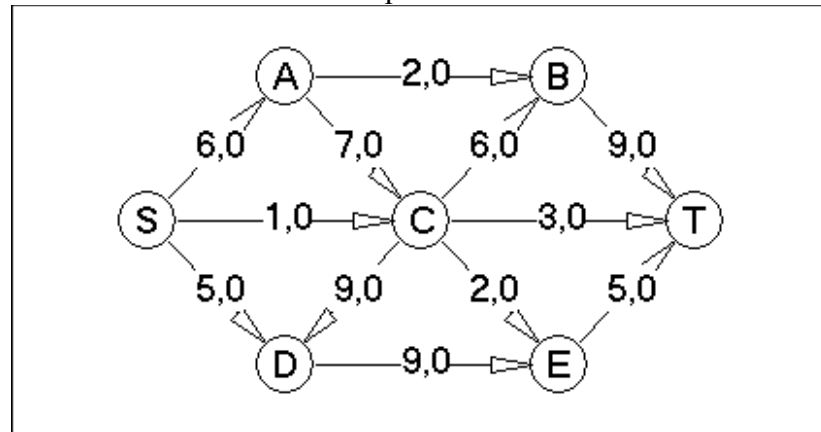
Вариант №4



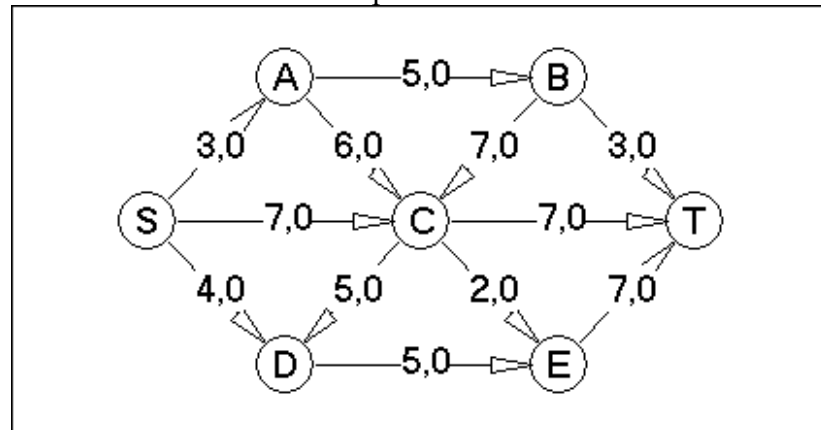
Вариант №5



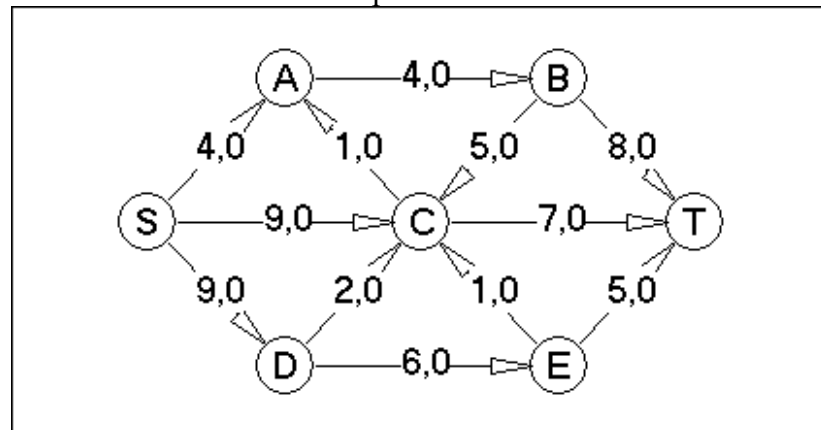
Вариант №6



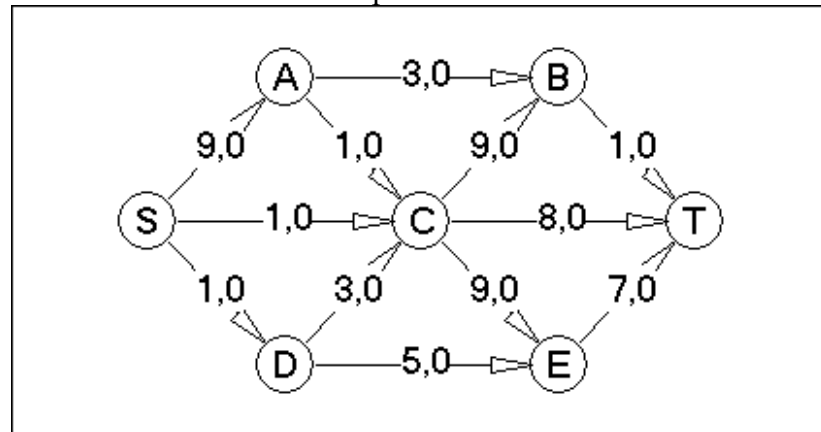
Вариант №7



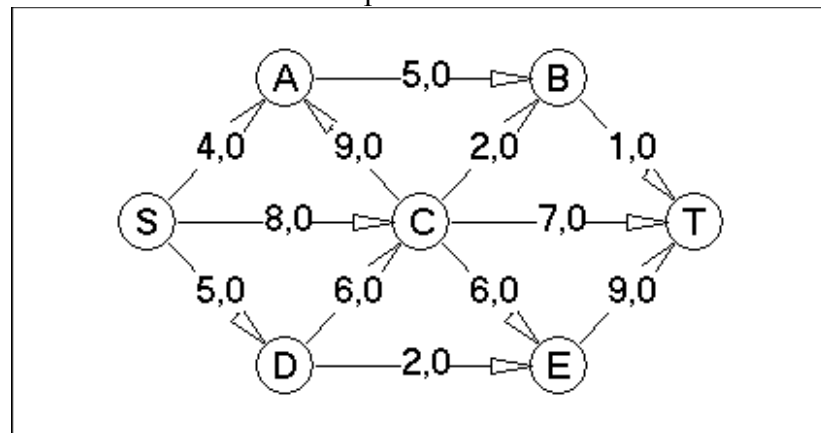
Вариант №8



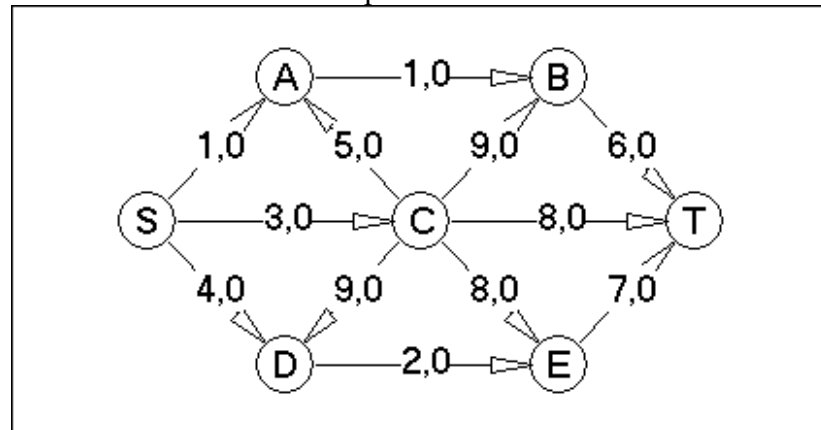
Вариант №9



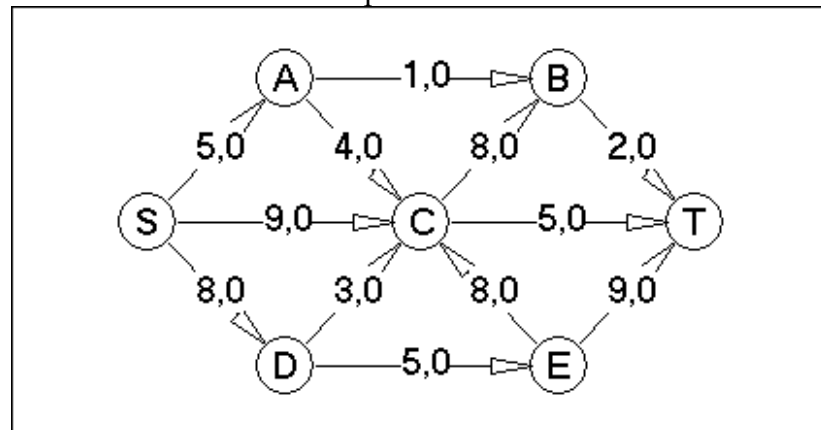
Вариант №10



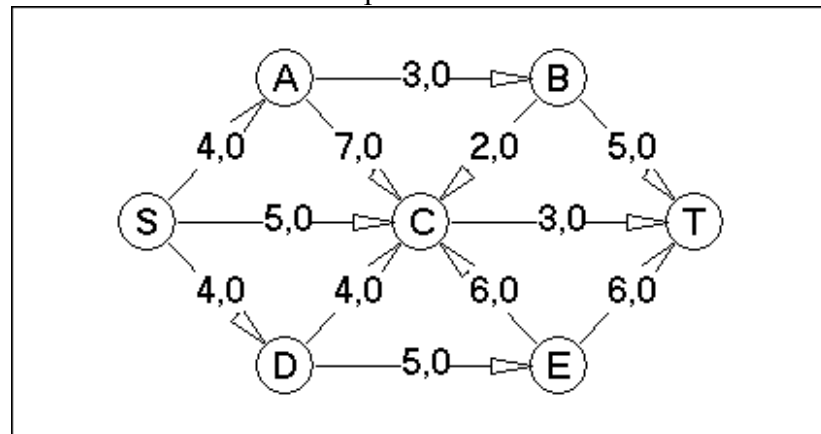
Вариант №11



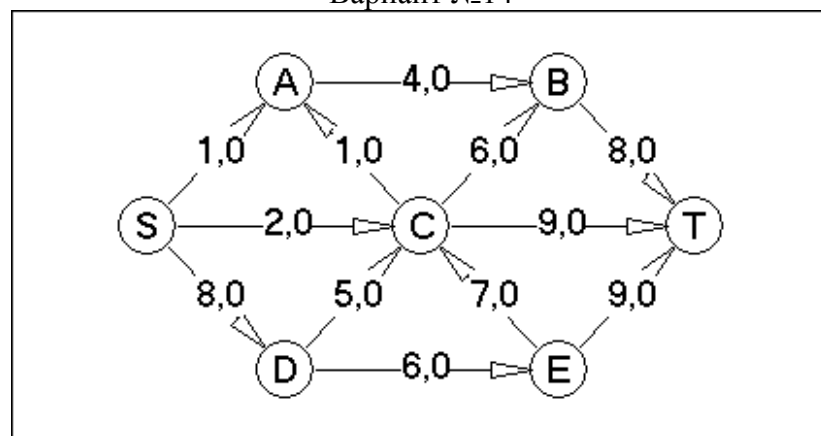
Вариант №12



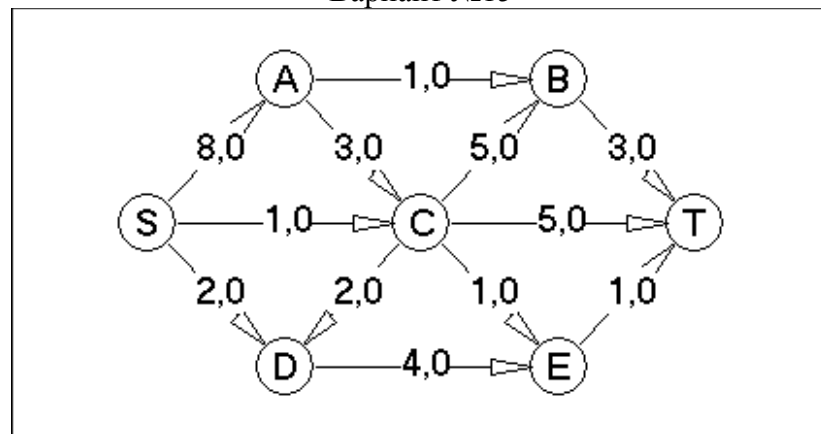
Вариант №13



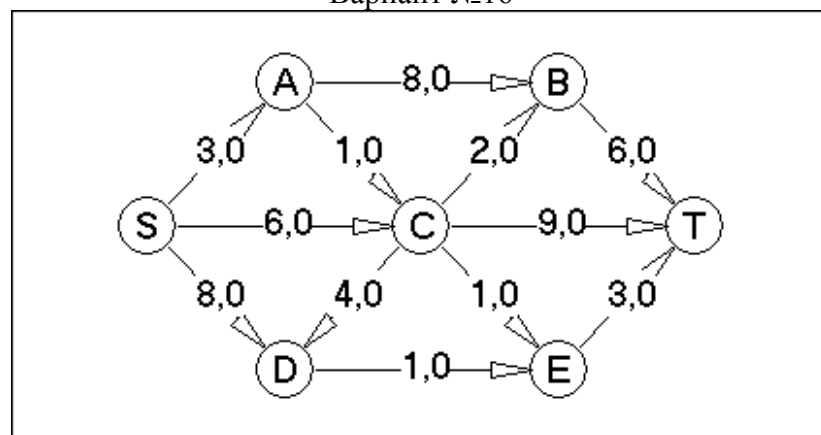
Вариант №14



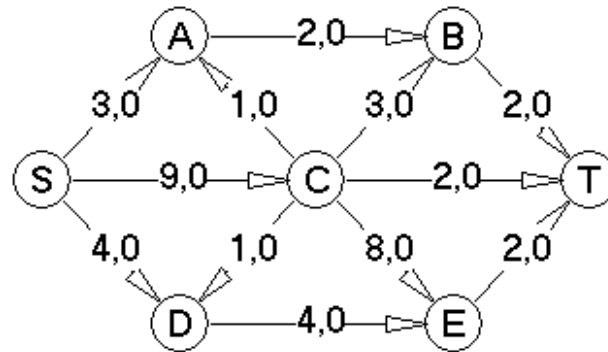
Вариант №15



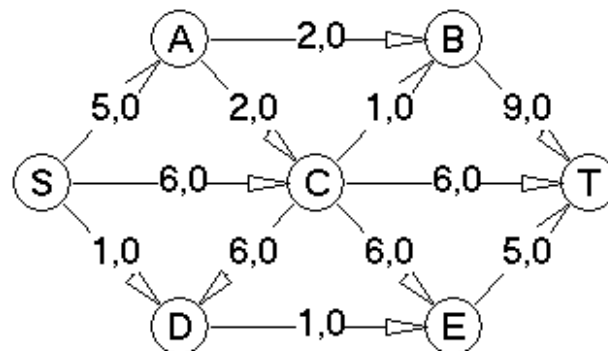
Вариант №16



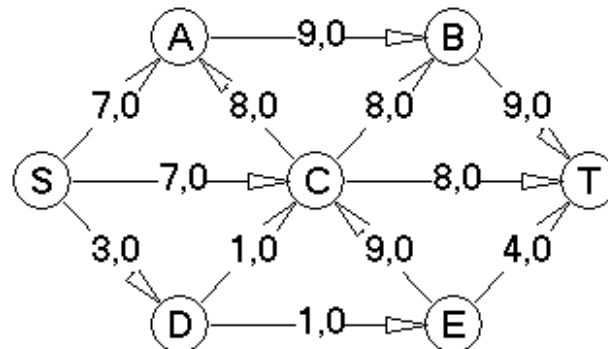
Вариант №17



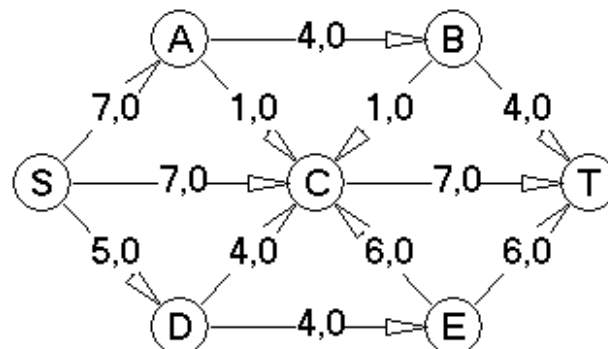
Вариант №18



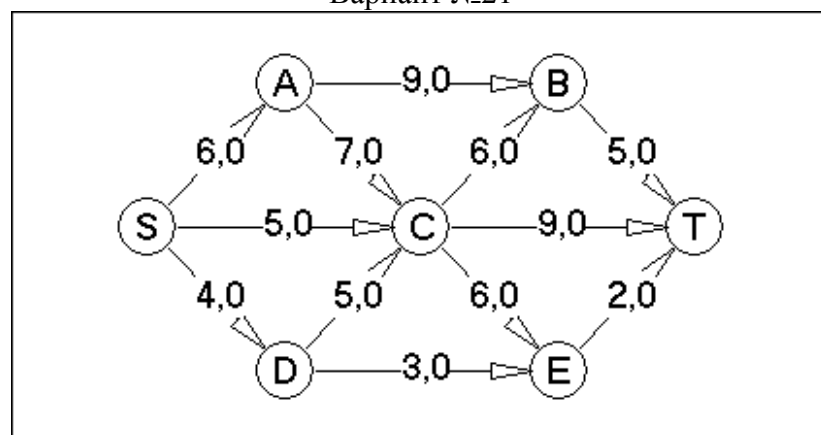
Вариант №19



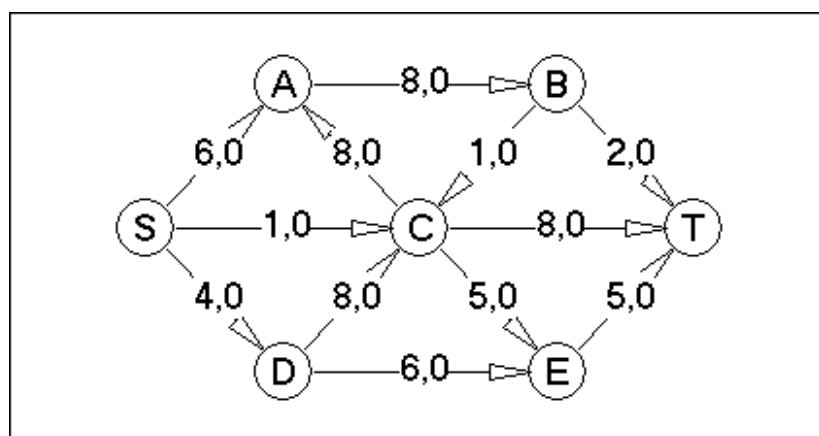
Вариант №20



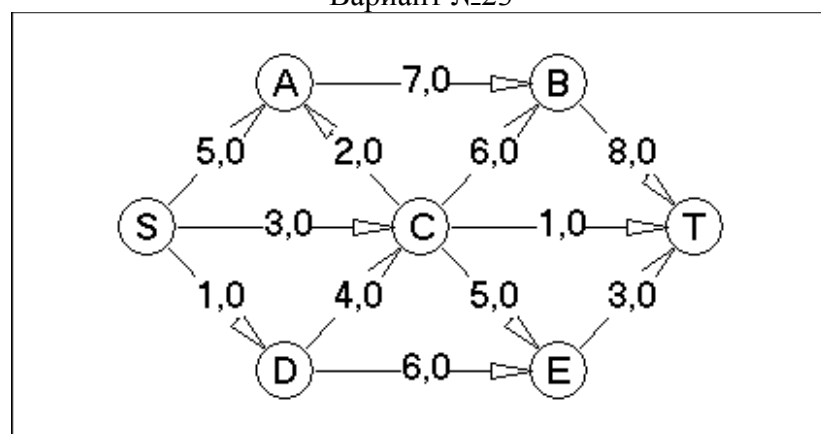
Вариант №21



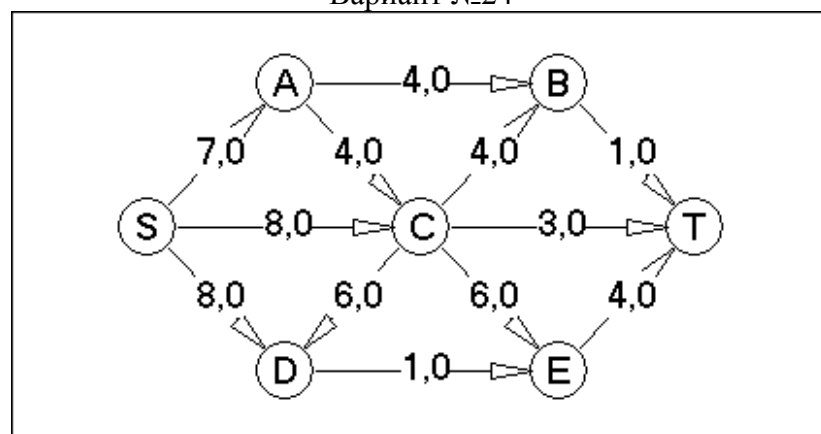
Вариант №22



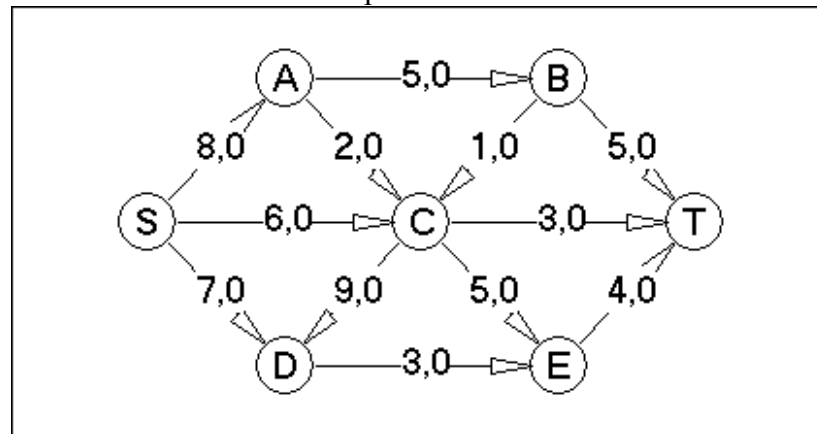
Вариант №23



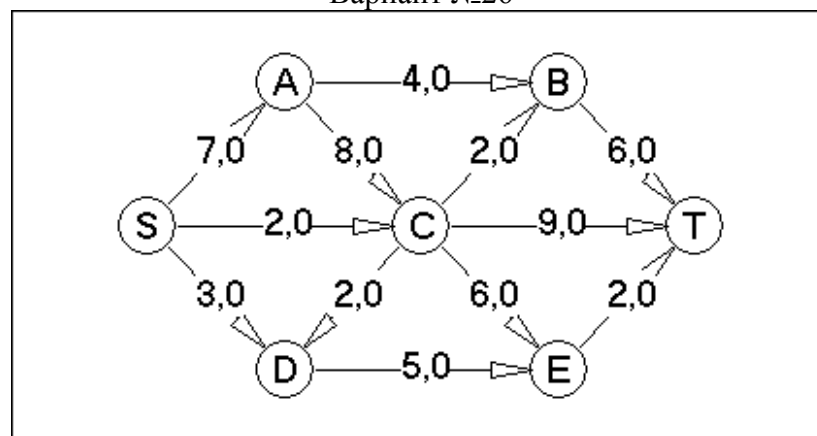
Вариант №24



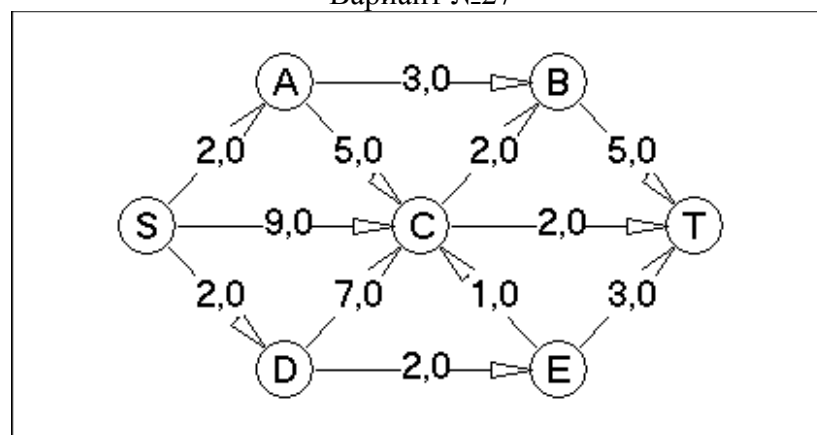
Вариант №25



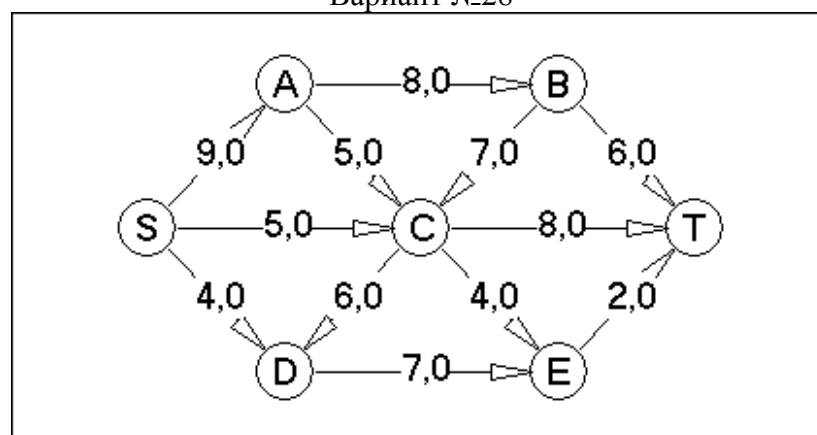
Вариант №26



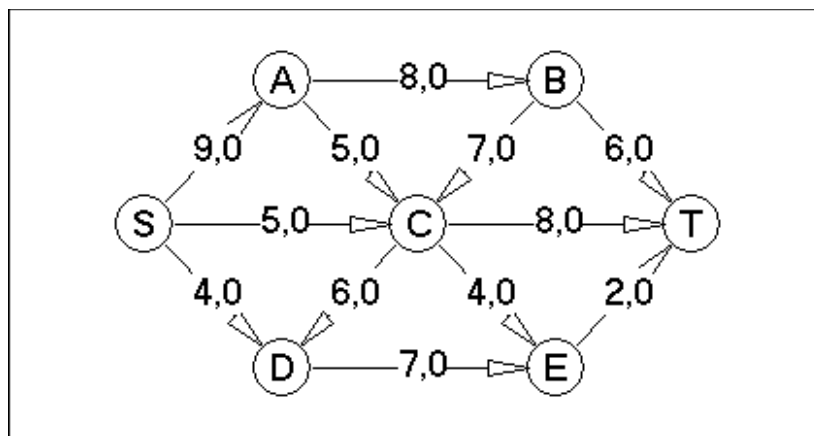
Вариант №27



Вариант №28



Вариант № 29



Вариант №1

SA — 7
 SC — 8
 SD — 9
 AB — 4
 AC — 5
 BC — 2
 BT — 8
 CD — 3
 CE — 7
 DE — 6
 ET — 4
 CT — 5

Вариант №2

SA — 6
 SC — 8
 SD — 3
 AB — 4
 AC — 4
 BC — 2
 BT — 7
 CD — 3
 CE — 6
 DE — 6
 ET — 4
 CT — 5

Вариант №3

SA — 7
 SC — 9
 SD — 2
 AB — 4
 AC — 5
 BC — 4
 BT — 8
 CD — 7
 CE — 7
 DE — 6
 ET — 2
 CT — 4

Вариант №4

SA — 2
 SC — 6
 SD — 9
 AB — 5
 AC — 6
 BC — 7
 BT — 8
 CD — 3
 CE — 7
 DE — 4
 ET — 4
 CT — 3

Вариант №5

SA — 6
 SC — 3
 SD — 4
 AB — 4
 AC — 5
 BC — 2
 BT — 5
 CD — 3
 CE — 7
 DE — 6
 ET — 7
 CT — 9

Вариант №6

SA — 4
 SC — 8
 SD — 2
 AB — 4
 AC — 5
 BC — 9
 BT — 8
 CD — 7
 CE — 7
 DE — 2
 ET — 4
 CT — 5

Вариант №7

SA — 3
 SC — 4
 SD — 9
 AB — 6
 AC — 8
 BC — 6
 BT — 4
 CD — 3
 CE — 7
 DE — 3

Вариант №8

SA — 8
 SC — 9
 SD — 6
 AB — 8
 AC — 2
 BC — 5
 BT — 5
 CD — 4
 CE — 7
 DE — 6

Вариант №9

SA — 6
 SC — 3
 SD — 5
 AB — 4
 AC — 5
 BC — 2
 BT — 5
 CD — 9
 CE — 7
 DE — 5

ET — 7
CT — 9

ET — 7
CT — 6

ET — 7
CT — 9

Вариант №10

SA — 7
SC — 5
SD — 9
AB — 5
AC — 3
BC — 7
BT — 8
CD — 9
CE — 7
DE — 8
ET — 4
CT — 3

Вариант №11

SA — 3
SC — 6
SD — 9
AB — 6
AC — 6
BC — 8
BT — 8
CD — 6
CE — 7
DE — 2
ET — 4
CT — 5

Вариант №12

SA — 2
SC — 7
SD — 7
AB — 9
AC — 3
BC — 5
BT — 7
CD — 3
CE — 4
DE — 4
ET — 7
CT — 8

Вариант №13

SA — 4
SC — 3
SD — 6
AB — 8
AC — 3
BC — 7
BT — 6
CD — 9
CE — 5
DE — 8
ET — 7

Вариант №14

SA — 5
SC — 5
SD — 6
AB — 5
AC — 7
BC — 7
BT — 8
CD — 8
CE — 7
DE — 8
ET — 4

Вариант №15

SA — 2
SC — 4
SD — 8
AB — 2
AC — 9
BC — 4
BT — 8
CD — 9
CE — 7
DE — 2
ET — 7

Вариант №16

SA — 7
SC — 4
SD — 8
AB — 5
AC — 3
BC — 7
BT — 2
CD — 9
CE — 7
DE — 8
ET — 4
CT — 6

Вариант №17

SA — 6
SC — 3
SD — 9
AB — 4
AC — 8
BC — 6
BT — 8
CD — 9
CE — 7
DE — 7
ET — 6
CT — 3

Вариант №18

SA — 5
SC — 5
SD — 7
AB — 6
AC — 7
BC — 7
BT — 9
CD — 5
CE — 9
DE — 8
ET — 4
CT — 2

Вариант №19

SA — 2
SC — 6
SD — 7
AB — 5
AC — 6
BC — 7
BT — 5

Вариант №20

SA — 8
SC — 5
SD — 9
AB — 4
AC — 4
BC — 9
BT — 8

Вариант №21

SA — 6
SC — 6
SD — 5
AB — 5
AC — 6
BC — 7
BT — 8

CD — 3
CE — 7
DE — 6
ET — 4
CT — 3

CD — 4
CE — 7
DE — 4
ET — 8
CT — 7

CD — 9
CE — 7
DE — 8
ET — 4
CT — 6

Вариант №22

SA — 4
SC — 4
SD — 7
AB — 2
AC — 9
BC — 8
BT — 8
CD — 9
CE — 7
DE — 7
ET — 7

Вариант №23

SA — 2
SC — 8
SD — 8
AB — 2
AC — 4
BC — 4
BT — 6
CD — 9
CE — 7
DE — 2
ET — 9

Вариант №24

SA — 6
SC — 2
SD — 7
AB — 2
AC — 9
BC — 4
BT — 8
CD — 7
CE — 7
DE — 2
ET — 7

Вариант №25

SA — 5
SC — 5
SD — 7
AB — 5
AC — 6
BC — 7
BT — 5
CD — 5
CE — 7
DE — 6
ET — 4
CT — 3

Вариант №26

SA — 8
SC — 6
SD — 8
AB — 5
AC — 6
BC — 8
BT — 5
CD — 3
CE — 7
DE — 8
ET — 4
CT — 8

Вариант №27

SA — 2
SC — 6
SD — 7
AB — 7
AC — 6
BC — 7
BT — 5
CD — 3
CE — 7
DE — 6
ET — 7
CT — 3

Вариант №28

SA — 4
SC — 5
SD — 4
AB — 5
AC — 6
BC — 4
BT — 5
CD — 4
CE — 7
DE — 9
ET — 4
CT — 3

Вариант №29

SA — 9
SC — 5
SD — 7
AB — 9
AC — 6
BC — 7
BT — 9
CD — 5
CE — 7
DE — 9
ET — 4
CT — 3

Вариант №30

SA — 3
SC — 5
SD — 7
AB — 5
AC — 3
BC — 7
BT — 5
CD — 3
CE — 7
DE — 8
ET — 4
CT — 9

Контрольные вопросы:

1. Что называется сетью?
2. Дайте определение «сток» и «исток» на сети.
3. Охарактеризуйте понятие «поток на сети»
4. Охарактеризуйте понятие «мощность потока на сети».
5. Охарактеризуйте понятие «пропускная способность дуг»