دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

به نام خدا

عنوان:

Differential Drive Mobile Robot

نام درس:

کنترل مدرن

نام استاد:

دکتر هاجر عطریانفر

مهندس الناز فیروزمند

نگارش :

محمد برابادی

مارال مرداد

محیا حقگو

سجاد قدیری

فهرست **صفحه**

فاز اول

1-1-معرفی

در سال های اخیر مطالعات و استفاده از ربات های متحرک بسیار مد نظر گرفته است. هر ساله با پیشرفت روش های کنترلی در زمینه های تئوری و عملی،کاربرد این ربات ها بیشتر نمایان می‌شود.

از کاربرد های این ربات می‌توان استفاده در مسیریابی در بیمارستان‌ها، فروشگاه‌های مواد غذایی، نظافت خانگی و ... نام برد. ربات مورد استفاده ما یک ربات 4 چرخ غیرهولونومیک می‌باشد.

بیان مفهوم غیرهولونومیک بسیار مفصل و نیازمند دانشی درباره درجه آزادی (degree of freedom) و فضای پیکربندی (configuration space) است.از رابطه گرابلر برای درجه آزادی داریم:

$$dof = \sum(freedom\ of\ bodies) - \#\ of\ independent\ constraints$$

$$dof = m(N-1-J) + \sum_{i=1}^{J} f_i$$

که در آن N تعداد بدنه‌های شامل زمین، J تعداد مفاصل، m تعداد درجه آزادی تک بدنه و f_i ها درجه آزادی مفصل ها می‌باشد. توصیف سیستم هایی که درجه آزادی پایینی دارند (مثلا یک) و تعداد اجزای آنها زیاد می‌باشد بسیار سخت است.

در این مواقع سیستم را به درجات بالاتر اقلیدسی (higher dimensional Euclidean) می‌برند و با قرار دادن قیدهای حلقه بسته سیستم، آن را راحت تر توصیف می‌کنند. مثلا برای یک سیستم با درجه آزادی یک که دارای 4 لینک حرکتی می‌باشد می‌توان با افزایش بعد آن به 4 و قرار دادن 3 قید سیستم را بهتر توصیف کرد.

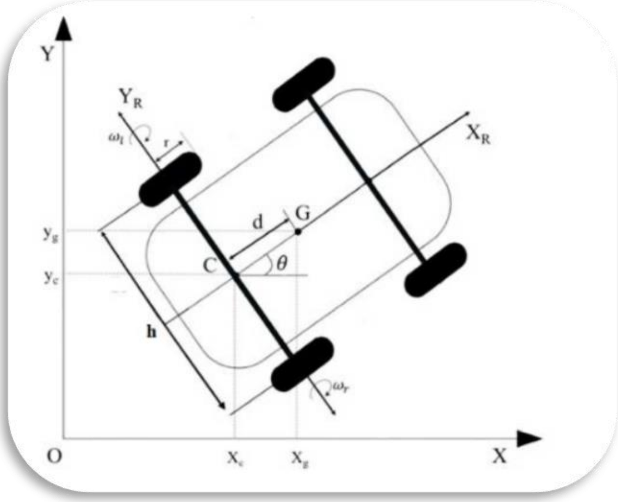
اگر این قید ها بعد فضای پیکربندی را کاهش دهند به آنها holonomic و درغیر این صورت به آنها nonholonomic می‌گویند.

از لحاظ فیزیکی بیانگر آن هست که ربات نمی‌تواند به طور مستقیم در جهت نشان داده شده در شکل حرکت کند . برای تحقق حرکت در این جهت باید از parallel parking استفاده نماید .

ربات از دو جفت چرخ متصل به موتور استفاده می کند. هرجفت که با یک خط به هم متصل هستند، در جهت یکسان دوران می‌کنند. نکته ی مهم در این ربات ها این است که چرخ ها در هرجفت باید با سرعت یکسان بچرخند ، در غیر این صورت آن چرخی که سرعتش کمتر است، هرز و ناکارآمد خواهد بود و ربات در مسیر مستقیم حرکت نخواهد کرد.

هدف این پروژه بررسی ساختار دینامیکی و سینماتیکی ربات مذکور و طراحی کنترلر مناسبی برای حرکت ربات به منظور تعقیب یک مسیر دایره‌ای بوده است.

1-2-بررسی مدل غیرخطی



برای بررسی معادلات غیرخطی از معادلات سینماتیکی استفاده شده است. در ادامه به شرح نحوه به دست آمدن معادلات غیرخطی سینماتیکی سیستم می پردازیم. همانطور که در شکل قابل مشاهده است، برای حرکت ربات دو محور مختصات قابل تعریف است که شامل محور مختصات سراسری (x , y) و محور مختصات محلی ربات می‌باشد. این دو محور مختصات از طریق یک ماتریس تبدیل دوران به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

در شکل بالا X , Y محور مختصات سراسری و Y_R , X_R محور مختصات محلی ربات است.

$$\dot{x} = \frac{r(w_r+w_l)}{2}\cos\theta \qquad (1)$$

$$\dot{y} = \frac{r(w_r+w_l)}{2}\sin\theta \qquad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{r(w_r-w_l)}{h} \qquad (3)$$

w_r و w_l سرعت های زاویه ای چپ و راست چرخ‌ها هستند. h فاصله ی مراکز چرخ ها از یکدیگر است. θ زاویه ی مرکز ربات با محور X محور مختصات سراسری می‌باشد.

برای به دست آوردن معادلات حالت سیستم ورودی های کنترلی سرعت خطی چرخ های چپ و راست در نظر گرفته شده اند.

$$input = \begin{bmatrix} rw_l \\ rw_r \end{bmatrix}$$

و همین طور لغزش به صورت زیر مدل می‌شود:

$$i = 1 - \frac{v}{rw}$$

که r و v به ترتیب شعاع چرخ ها و سرعت خطی ربات می‌باشند.

اگر بخواهیم معادلات 1 و 2 و 3 را به صورت ماتریسی بنویسیم، ماتریس زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ \sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1-i_l}{2} & \frac{1-i_r}{2}\\ -\frac{1-i_l}{h} & \frac{1-i_r}{h}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}rw_l\\ rw_r\end{bmatrix}$$

برای معادلات بالا ترم خطا تشکیل می‌دهیم. ماتریس خطا به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}e_x\\ e_y\\ e_\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^{ref}-x\\ y^{ref}-y\\ \theta^{ref}-\theta\end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن معادلات حالت باید از معادلات خطا مشتق گرفته شود.

برای ترم e_x به صورت زیر می‌نویسیم :

$$e_x = \cos\theta\left(x^{ref}-x\right) + \sin\theta\left(y^{ref}-y\right)$$

$$\dot{e}_x = -\dot{\theta}\sin\theta\left(x^{ref}-x\right) + \dot{\theta}\cos\theta\left(y^{ref}-y\right) + \cos\theta\left(\dot{x}^{ref}-\dot{x}\right) + \sin\theta\left(\dot{y}^{ref}-\dot{y}\right)$$

با در نظر گرفتن

$$\dot{x}^{ref} = v^{ref}\cos\theta^{ref}$$

$$\dot{x} = v\cos\theta$$

$$\dot{y}^{ref} = v^{ref}\sin\theta^{ref}$$

$$y = v\sin\theta$$

$$e_y = -\sin\theta\left(x^{ref}-x\right) + \cos\theta\left(y^{ref}-y\right)$$ و

خواهیم داشت :

$$\dot{e_x} = \dot{\theta}e_y + v^{ref}\cos\left(\theta^{ref}-\theta\right) - v$$

برای ترم e_y به صورت زیر می‌نویسیم :

$$e_y = -\sin\theta\left(x^{ref}-x\right) + \cos\theta\left(y^{ref}-y\right)$$

$$\dot{e_y} = -\dot{\theta}\cos\theta\left(x^{ref}-x\right) - \dot{\theta}\sin\theta\left(y^{ref}-y\right) - \sin\theta\left(\dot{x}^{ref}-\dot{x}\right) + \cos\theta\left(\dot{y}^{ref}-\dot{y}\right)$$

با در نظر گرفتن

$$\dot{x}^{ref} = v^{ref}\cos\theta^{ref}$$

$$\dot{x} = v\cos\theta$$

$$\sin\theta \;\; \dot{y}^{ref} = v^{ref}$$

$$y = v\sin\theta$$

$$e_x = \cos\theta\left(x^{ref} - x\right) + \sin\theta\left(y^{ref} - y\right)$$

خواهیم داشت:

$$\dot{e_y} = -\dot{\theta}e_x + v^{ref}\sin\left(\theta^{ref} - \theta\right)$$

برای ترم e_θ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\dot{e_\theta} = \dot{\theta}^{ref} - \dot{\theta}$$

3-1-خطی‌سازی سیستم سینماتیکی

برای خطی سازی معادلات غیر خطی ارائه شده نقطه تعادل $\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ در نظر گرفته شده است. در اصل خطا نزدیک صفر در نظر گرفته می‌شود اگر دقیقا صفر در نظر گرفته شود دیگر نمی‌توان کنترلر طراحی کرد.

با جایگذاری نقطه تعادل در معادلات قسمت قبل ، معادلات حالت سیستم بر اساس ترم های خطا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{e_x} \\ \dot{e_y} \\ \dot{e_\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}^{ref} & 0 \\ -\dot{\theta}^{ref} & 0 & v^{ref}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1-i_l}{2} & \frac{1-i_r}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1-i_l}{h} & -\frac{1-i_r}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r{w_l}^{fb} \\ r{w_r}^{fb} \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن ماتریس A باید مقادیر $\dot{\theta}^{ref}$ و v^{ref} را محاسبه کنیم. برای محاسبه این دو پارامتر از روابط موجود در فصل 2 کتاب $Gonzalez$ استفاده می‌کنیم.

داریم:

$$v^{ref}(t) = \sqrt{\dot{x}^{ref}(t)^2 + \dot{y}^{ref}(t)^2}$$

$$\dot{\theta^{ref}} = \frac{\dot{x}^{ref}(t)\ddot{y}^{ref}(t) - \dot{y}^{ref}(t)\ddot{x}^{ref}(t)}{\dot{x}^{ref}(t)^2 + \dot{y}^{ref}(t)^2}$$

چون حرکت ربات در مسیر دایره‌ای به مرکز ربات و شعاع 3 متر مد نظر است، x^{ref} و y^{ref} به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$x^{ref} = 3\cos(\frac{\pi}{16}t) \qquad \text{و} \qquad y^{ref} = -3\sin(\frac{\pi}{16}t)$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$\dot{x}^{ref} = -\frac{3\pi}{16}\sin(\frac{\pi}{16}t) \qquad \text{و} \qquad \ddot{x}^{ref} = -3\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{16}t\right)$$

$$\dot{y}^{ref} = \frac{-3\pi}{16}\cos\left(\frac{\pi}{16}t\right) \qquad \text{و} \qquad \ddot{y}^{ref} = 3\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{16}t\right)$$

$$v^{ref}(t) = \sqrt{(\frac{3\pi}{16})^2\sin(\frac{\pi}{16}t)^2 + (\frac{3\pi}{16})^2\cos(\frac{\pi}{16}t)^2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$\dot{\theta}^{ref}(t) = (\frac{16}{3\pi})^2\left[\left(-9\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{16}t\right)^2\right) - \left(9\left(\frac{\pi}{16}\right)^3\cos\left(\frac{\pi}{16}t\right)^2\right)\right] = -\frac{\pi}{16}$$

بدین ترتیب معادلات حالت سیستم با استفاده از مقادیر به دست آمده $v^{ref}(t)$ و $\dot{\theta}^{ref}$ و در نظر گرفتن $h = 0.15\text{m}$ و $i_l = i_r = 0$ به شکل زیر به دست آمده‌اند.

$$\begin{bmatrix}\dot{e_x}\\ \dot{e_y}\\ \dot{e_\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{\pi}{16} & 0\\ \frac{\pi}{16} & 0 & \frac{3\pi}{16}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_x\\ e_y\\ e_\theta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0 & 0\\ 6.66 & -6.66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r{w_l}^{fb}\\ r{w_r}^{fb}\end{bmatrix}$$

پس برای ماتریس حالت، ورودی و خروجی داریم:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\pi}{16} & 0\\ \frac{\pi}{16} & 0 & \frac{3\pi}{16}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\\ \frac{1}{0.15} & -\frac{1}{0.15}\end{bmatrix} \quad , \quad c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

طبق نتایج شبیه سازی مقاله‌ای که از آن در این پروژه استفاده شده است محدوده معتبر پارامترها برای سیستم خطی سازی شده، به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$-20\, {rad}/{s} \le w_l \text{ و } w_r \le 20\, {rad}/{s}$$

$$-0.5m \le e_x \text{ و } e_y \le 0.5m$$

$$-0.5rad \le e_\theta \le 0.5rad$$

1-4-قطری‌سازی و ماتریس تبدیل

برای محاسبه فرم قطری بلوکی از دستور Jordan در متلب استفاده می‌کنیم :

```
J = 3×3 complex
     0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
     0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.1963i   0.0000 + 0.0000i
     0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.1963i
```

همچنین ماتریس تبدیل تشابهی که استفاده شده است را با همان دستور Jordan بدست می‌آوریم :

```
T1 = 3×3 complex
    -3.0000 + 0.0000i   0.0000 - 1.0000i   0.0000 + 1.0000i
     0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i
     1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
```

1-5-تابع تبدیل و نمودار صفر و قطب

تابع تبدیل سیستم بصورت زیر است :

$$G=\begin{bmatrix} \frac{128s}{256s^2+\pi^2}-\frac{20\pi^2}{256s^3+\pi^2s} & \frac{128s}{256s^2+\pi^2}+\frac{20\pi^2}{256s^3+\pi^2s} \\ \frac{328\pi}{256s^2+\pi^2} & -\frac{312\pi}{256s^2+\pi^2} \\ \frac{20}{3s} & -\frac{20}{3s} \end{bmatrix}$$

حال برای یافتن قطب‌ها و صفرهای انتقال سیستم ابتدا ماینورهای مرتبه اول و دوم سیستم نوشته شده است و سپس چند جمله‌ای مشخصه ماتریس تبدیل به دست آمده است.

ماینورهای مرتبه اول:

$$\frac{128s^2+20\pi^2}{256s^3+\pi^2s},\frac{128s^2-20\pi^2}{256s^3+\pi^2s},\frac{328\pi}{256s^2+\pi^2},\frac{-312\pi}{256s^2+\pi^2},\ \frac{20}{3s},\ \frac{-20}{3s}$$

ماینورهای مرتبه دوم:

$$\frac{-320\pi}{256s^3+\pi^2s},\quad \frac{5120}{3(256s^2+\pi^2)},\quad \frac{-320}{3(256s^3+\pi^2s)}$$

معادله مشخصه :

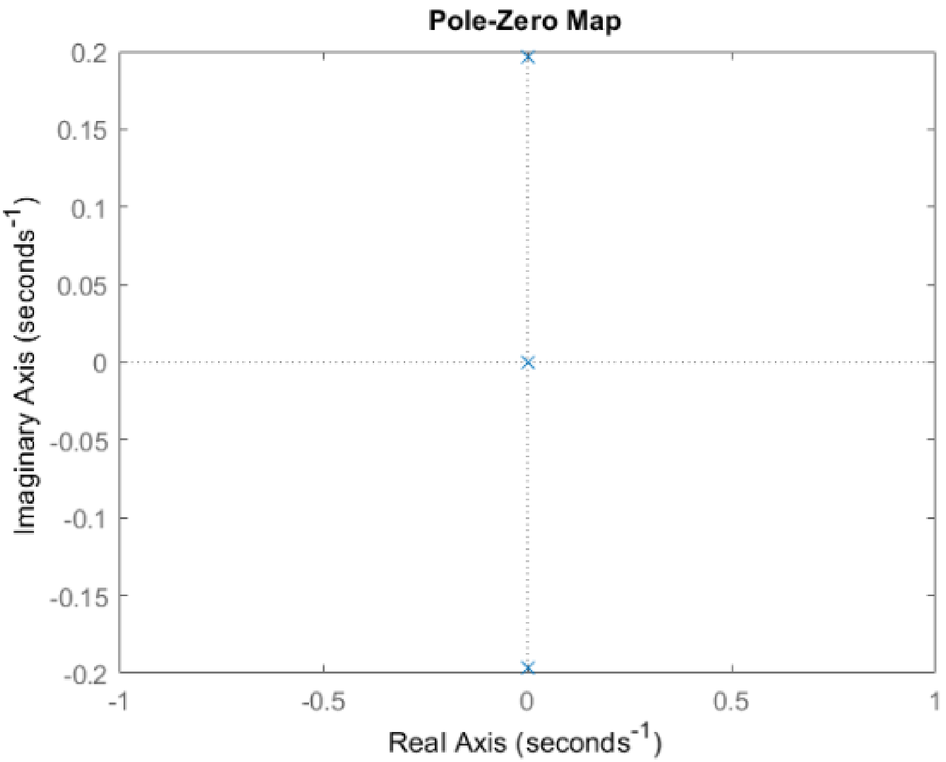
$$p(s)=\ 3(256s^3+\pi^2s)$$

قطب‌های سیستم به شکل زیر می‌باشد:

$$p_1=0,p_2=\frac{\pi}{16}j,p_2=-\frac{\pi}{16}j$$

برای یافتن صفرهای انتقال لازم است رتبه نرمال سیستم را بدانیم که رتبه نرمال ماتریس تبدیل این سیستم 2 است. ماینورهای مرتبه 2 ماتریس تبدیل را در نظر گرفته و مخرج تمامی آن‌ها را معادله مشخصه قرار می‌دهیم در این صورت مشاهده می‌کنیم صورت کسرهای این ماینورها هیچ ب.م.م ای ندارد در نتجیه سیستم صفر انتقال ندارد.

نمودار صفر و قطب سیستم:



1-6-پایداری داخلی

برای بررسی پایداری داخلی سیستم لازم است که به رفتار داخلی سیستم و متغیرهای حالت توجه شود. برای تحلیل پایداری داخلی سیستم، در این پروژه از روش اول لیاپانوف استفاده شده است به این صورت که ابتدا نقطه تعادل سیستم غیر خطی به دست آمده است و سپس سیستم غیر خطی حول نقطه تعادل‌اش خطی سازی شده است. که توضیح مفصل این دو بخش در قسمت‌های قبل آمده است. حال باید پایداری سیستم خطی سازی شده(حول نقطه تعادل) بررسی و تحلیل شود برای اینکار با در نظر گرفتن ورودی 0، اثر شرایط اولیه را روی پاسخ حالت سیستم می‌بینیم. برای اینکار لازم است مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم خطی سازی شده بررسی شوند.

مقادیر ویژه ماتریس حالت:

$$\lambda_1 = 0 \qquad , \qquad \lambda_2 = +0.1963j \qquad , \qquad \lambda_3 = -0.1963j$$

پایداری داخلی به دو بخش پایداری مجانی و پایداری به مفهوم لیاپانف تقسیم می‌شود.

در پایداری مجانبی لازم است قسمت‌های حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس حالت اکیدا منفی باشند چون در سیستم مورد مطالعه در این پروژه مقادیر ویژه روی محور موهومی قرار دارند سیستم پایداری مجانبی ندارد.

در مورد پایداری به مفهوم لیاپانف یا پایداری مرزی باید در نظر گرفت که سیستم نباید مقادیر ویژه ای با قسمت حقیقی مثبت داشته باشد و همچنین مقادیر ویژه روی محور در صورتی که تکراری بودند، تکرر جبری و هندسی آن‌ها برابر باشد. که هردو شرط در این سیستم صدق می‌کند پس می‌توان گفت سیستم پایداری مرزی دارد.

در نهایت سیستم پایداری داخلی از نوع مرزی دارد.

1-7-پایداری ورودی-خروجی

برای بررسی پایداری ورودی-خروجی باید به قطب‌های ماتریس تبدیل توجه شود. در صورتی که تمامی قطب ها دارای بخش حقیقی اکیدا منفی باشند سیستم دارای پایداری ورودی-خروجی است.

قطب‌های ماتریس تبدیل سیستم:

$$p_1 = 0 \quad , \quad p_2 = \frac{\pi}{16}j \quad , \quad p_2 = -\frac{\pi}{16}j$$

همان‌طور که قابل مشاهده است قطب‌ها روی محور موهومی هستند پس سیستم دارای پایداری ورودی-خروجی نمی‌باشد.

در بخش قبل دیدیم که سیستم دارای پایداری داخلی بود و در این بخش دیدیم که سیستم پایداری ورودی-خروجی نداشت پس می‌توان گفت اگر سیستم پایدار داخلی باشد نمی‌شود نتیجه گرفت که لزوما پایدار ورودی-خروجی است. فقط در صورتی می‌توان این نتیجه را گرفت که سیستم پایدار داخلی از نوع مجانبی باشد.

1-8-پاسخ سیستم

ماتریس انتقال حالت سیستم با دستور expm در متلب به صورت زیر می‌باشد:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\frac{-\pi t j}{16}}}{2} + \frac{e^{\frac{\pi t j}{16}}}{2} & \frac{-e^{\frac{-\pi t j}{16}} j}{2} + \frac{e^{\frac{\pi t j}{16}} j}{2} & \frac{3e^{\frac{-\pi t j}{16}}}{2} + \frac{3e^{\frac{\pi t j}{16}}}{2} - 3 \\ \frac{e^{\frac{-\pi t j}{16}} j}{2} - \frac{e^{\frac{\pi t j}{16}} j}{2} & \frac{e^{\frac{-\pi t j}{16}}}{2} + \frac{e^{\frac{\pi t j}{16}}}{2} & \frac{3e^{\frac{-\pi t j}{16}} j}{2} - \frac{3e^{\frac{\pi t j}{16}} j}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ حالت سیستم به ازای شرایط اولیه $x_0 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$ با استفاده از فرمول $x = e^{At}x_0$ به شکل زیر به دست آمده است:

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + e^{-\frac{\pi t j}{16}}\left(\frac{-7}{20} + \frac{1}{10}j\right) + e^{\frac{\pi t j}{16}}\left(\frac{-7}{20} - \frac{1}{10}j\right) \\ e^{-\frac{\pi t j}{16}}\left(\frac{-1}{10} - \frac{7}{20}j\right) + e^{\frac{\pi t j}{16}}\left(\frac{-1}{10} + \frac{7}{20}j\right) \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

پاسخ خروجی سیستم به ازای شرایط اولیه قبلی و ورودی پله واحد حاصل جمع پاسخ ورودی صفر و پاسخ شرایط اولیه صفر است.

پاسخ شرایط اولیه صفر سیستم:

$$\begin{bmatrix} \delta(t) \\ -\frac{\pi}{16} \\ 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ کامل خروجی به شکل زیر می‌باشد:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) + \frac{3}{5} + e^{-\frac{\pi t j}{16}}\left(\frac{-7}{20} + \frac{1}{10}j\right) + e^{\frac{\pi t j}{16}}\left(\frac{-7}{20} - \frac{1}{10}j\right) \\ -\frac{\pi}{16} + e^{-\frac{\pi t j}{16}}\left(\frac{-1}{10} - \frac{7}{20}j\right) + e^{\frac{\pi t j}{16}}\left(\frac{-1}{10} + \frac{7}{20}j\right) \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

1-9-تحریک فرکانس خاص

برای اینکه مود خاصی در خروجی تحریک نشود کافی است شرایط اولیه را به طوری تعیین کنیم که ترکیب خطی از بردار ویژه های متناسب با مقدار ویژه های مود های دیگر سیستم باشد.

در مراحل قبل با استفاده از دستور Jordan علاوه بر فرم جردن ماتریس حالت سیستم ، ماتریس تبدیل تشابهی که ماتریس اصلی ما را به فرم جردن درمی‌آورد نیز بدست آمد که ستون های آن همان بردار ویژه های ماتریس حالت است .

T1 = 3×3 complex

	1	2	3
1	-3.0000 + 0.0000i	0.0000 - 1.0000i	0.0000 + 1.0000i
2	0.0000 + 0.0000i	1.0000 + 0.0000i	1.0000 + 0.0000i
3	1.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i

J = 3×3 complex

	1	2	3
1	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
2	0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.1963i	0.0000 + 0.0000i
3	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.1963i

حال شرایط اولیه را ترکیب خطی ستون دوم و سوم در نظر می‌گیریم. با این فرض مقدار ویژه صفر $\lambda_1 = 0$ در خروجی تحریک نمی‌شود. برای اطمینان از متلب استفاده می‌کنیم :

$$x_1 = \left(0 \times \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix} \right) + \left(1 \times \begin{bmatrix} 0 - 1j \\ 1 + 0j \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \left(1 \times \begin{bmatrix} 0 + 1j \\ 1 + 0j \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t0) = C_e * e^{At} * x_1 = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{\pi t j}{16}} j + e^{\frac{\pi t j}{16}} j \\ e^{-\frac{\pi t j}{16}} + e^{\frac{\pi t j}{16}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

10-1-تجزیه کالمن

ابتدا برای بررسی کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم ماتریس‌های کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم تشکیل داده شده است و رنک آن‌ها محاسبه شده است.

Co = 3×6

	1	2	3	4	5	6
1	0.5000	0.5000	0	0	-0.7903	0.7518
2	0	0	4.0252	-3.8288	0	0
3	6.6667	-6.6667	0	0	0	0

$$C_o = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.7903 & 0.7518 \\ 0 & 0 & 4.0252 & -3.8288 & 0 & 0 \\ 6.6667 & -6.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Ob = obsv(A_e,C_e)

Ob = 9×3
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
         0   -0.1963         0
    0.1963         0    0.5890
         0         0         0
   -0.0386         0   -0.1157
         0   -0.0386         0
         0         0         0
```

$$O_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1963 & 0 \\ 0.1963 & 0 & 0.5890 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0386 & 0 & -0.1157 \\ 0 & -0.0386 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان طور که در شکل بالا مشخص شده است رنک سطری ماتریس کنترل پذیری و رنک ستونی ماتریس رویت پذیری سه (کامل) می‌باشد پس سیستم هم کنترل پذیر و رویت پذیر است.

پس سیستم فقط دارای یک زیر سیستم رویت پذیر و کنترل پذیر به شکل زیر می‌باشد.

$$Abar = \begin{bmatrix} 0 & -0.1963 & -0.5890 \\ 0.1963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Bbar = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 \\ -6.6667 & 6.6667 \end{bmatrix}$$

$$Cbar = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1-11-تحقق مینیمال

با توجه به کامل بودن رنک ماتریس های کنترل پذیری و رویت پذیری، همه ی مود های سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر می‌باشند. می‌دانیم در تابع تبدیل کل سیستم مودهایی را خواهیم دید که هم کنترل پذیر و هم رویت باشند. اگر سیستم قابل تبدیل به زیر سیستم های کنترل پذیر-رویت پذیر، کنترل ناپذیر-رویت پذیر،کنترل پذیر-رویت ناپذیر و کنترل ناپذیر-رویت ناپذیر باشد، تابع تبدیل کل سیستم معادل با تابع تبدیل زیر سیستم کنترل پذیر-رویت پذیر است. از آنجایی که سیستم ما فقط زیر سیستم کنترل پذیر-رویت پذیر دارد، تحقق فضای حالت برای این تابع تبدیل مینیمال می‌باشد.