

تحلیل ناپایداری و حل معادله اور-سامرفیلد

سجاد خدادادی (9665612002)

توربولانس

دکتر علی جعفریان

گروه تبدیل انرژی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

اسفند 1396



فهرست

[چکیده 1](#_Toc507065001)

[پایداری جریان های لایه ای 2](#_Toc507065002)

[اصول یک تحقیق پایداری نمونه 3](#_Toc507065003)

[معادله اور-سامرفیلد 4](#_Toc507065004)

[حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از روش شبه‌طیفی با استفاده از چند جمله‌ای های چبی شف 9](#_Toc507065005)

[بررسي صحت نتايج 11](#_Toc507065006)

**فهرست شکل ها**

[شکل1: مقادیر ویژه برای رینولدز 2000 و 1 12](#_Toc507065020)

[شکل2: مقادیر ویژه رینولدز 22/5772 و 02/1 12](#_Toc507065021)

[شکل3: نمودار شست انگشتی برای جریان پوازی 12](#_Toc507065022)

# چکیده

در این پژوهش با استفاده از معادله اور- سامرفیلد به تحلیل ناپایداری جریان پوازی پرداخته می‌شود. در ابتدا معادله اور-سامرفیلد بدست آمده، پس از آن با استفاده از روش طیفی و با استفاده از چندجمله‌ای چبی‌شف مقادیر ویژه این معادله بدست خواهند آمد. با استفاده از مقادیر ویژه نمودار شست انگشتی این جریان ترسیم می‌شود.

کد برنامه به پیوست ارسال شده و با باز کردن OrrSommerfeld.m و اجرای آن می‌توان مقادیر ویژه را برای این معادله مشاهده نمود.

# پایداری جریان های لایه ای

دو کلمه کلیدی عبارتند از پایداری و تحول. مفهوم عمومی پایداری به دفعات مورد بحث قرار گرفته است. شاید بهترین تعریف توسط کانینگهام‌ ارائه شده باشد. بحث روی این مسئله، همیشه یک سوال به همراه دارد: یک حالت فیزیکی می‌تواند در مقابل یک اختلال مقاومت کرده و حالت اصلی خود را حفظ کند؟

اگر این چنین باشد، پایدار است، در غیر این صورت این حالت خاص ناپایدار است. این وظیفه تحلیل‌گران پایداری است تا اثر یک اختلال مشخص را تست کنند.

یک مثال ساده در شکل 1 نشان داده شده است. در این مثال، یک توپ در شرایط مختلف در حال سکون قرار دارد. در شکل 1-a موقعیت توپ، بدون هیچ شرطی پایدار است، چون اگر یک جابجایی بزرگ به توپ داده شود به موقعیت اولیه خود باز می‌گردد. برعکس شکل 1-b یک حالت ناپایدار را نشان می‌دهد، چون هر اختلال کوچک توپ را از موقعیت خود دور می‌کند و توپ دیگر هیچ‌گاه به موقعیت اولیه خود باز نخواهد گشت. یک صفحه صاف، همانند شکل 1-c یک مثال پایدار خنثی است، چون توپ به هرکجا برده شود در همان‌جا باقی می‌ماند. در نهایت در شکل 1-d حالت پیچیده‌تری را نشان می‌دهد که در آن توپ در مقابل اختلالات کوچک پایدار است. اما اگر اختلالات به اندازه ای بزرگ باشند تا از گوشه ها عبور کنند به موقعیت قبلی باز نخواهند گشت این حالت اغلب در جریان های مرزی اتفاق می‌افتند.که در آن یک اختلال می‌تواند باعث شود جریان لایه ای پایدار به جریان مغشوش تبدیل شود.توجه داشته باشید پایدار بودن یا نبودن یک جریان تنها چیزی است که می‌توان عنوان کرد یک نفر میتواند ثابت کند که یک حالت فیزیکی ناپایدار است، بدون این که قادر باشد حالت پایداری را که این حالن ناپایدار از روی آن ایجاد شده است، معین کند. در جریان لزج، می‌توان ثابت کرد که جریان لایه‌ای در عدد رینولدزهایی بزرگتر از یک عدد رینولز مشخص، ناپایدار خواهد شد. اما این تمام چیزی است که در دست داریم: تحلیل‌ها، چیزی را درمورد جریان مغشوش،حالت پایدار مناسب در اعداد رینولدز بالاست.در نتیجه بروی کلمه ی کلیدی دوم تحول،تنها به صورت کیفی بحث خواهد شد. تحول بصورت تغییر در محدوده فضا، زمان و عدد رینولدز از جریان پایدار به جریان پایدار به جریان مغشوش تعریف می‌شود. هنوز به روشنی مشخص نشده است که تحول چگونه به پایداری مرتبط است. گرچه تئوری پایداری در مقابل اغتشاشات کوچک،نزدیک به 40 سال است که پذیرفته شده و داده های زیادی هم برای ناحیه تحویل به دست آمده است. اما هنوز هیچ تئوری برای تحول ارائه نشده است. اما ،پیش بینی های تجربی نسبتا موفقی نیز برای تحول،بر اساس سرعت گسترش مکانی تئوری پایداری خطی بوجود آمده است.

|  |
| --- |
|  |

شکل1:پایداری نسبی یک توپ ساکن:a پایدار،b ناپایدار،c پایدار خنثی ، d پایدار در مقابل اغتشاشات کوچک،اما ناپایدار در مقابل اغتشاشات بزرگ

# اصول یک تحقیق پایداری نمونه

تمامی تحلیل های پایداری در مقابل اغتشاشات کوچک،از یک‌دسته اصولی کلی تبعیت می‌کنند،که می‌توان در هفت مرحله عنوان کرد.

1- می‌خواهیم پایداری یک پاسخ اساسی را از یک مسئله فیزیکی که می‌توان یک تابع اسکالر یا برداری باشد تست کنیم.

2- یک متغیر اختلال به پاسخ افزوده و را در معادلات اساسی که بر مسئله حاکم هستند قرار می‌دهیم.

3- از معادلات (و یا معادله های)حاصل از مرحله2،معادلات اساسی که درون آن صدق می‌کند را کم می‌کنیم، چیزی که باقی می‌ماند، معادله اختلال است.

4- با فرض کوچک بودن اختلالات،یعنی معادله اختلال را خطی کرده و از جملاتی نظیر و صرف‌نظر می‌کنیم.

5- اگر معادله اختلال خطی شده، پیچیده و چند بعدی باشد، می‌توان با یک فرض خاص برای اختلال مسئله را ساده کرد. مثلا اختلال را یک موج در حال انتشار و یا یک اختلال در یک جهت خاص در نظر می‌گیریم.

6- معادله اختلال خطی شده می‌بایست مستقل از جهت بوده و شرایط مرزی مستقل از جهت داشته باشد. در نتیجه این معادله تنها می‌تواند برای تعداد معینی از پارامتر ها معادله حل شود. بعبارت دیگر، این مسئله یک مسئله، یک مسئله مقادیر ویژه خواهد بود.

7.مقادیر ویژه بدست آمده در مرحله 7 می بایستی مورد بررسی قرار گیرند تا چه زمان بزرگ می‌شوند(ناپایدار هستند)، چه زمان از بین می‌روند(پایدار هستند) و چه زمانی ثابت باقی می‌مانند(پایدار بی تفاوت هستند). معمولا تحلیل‌ها با ارائه یک نمودار که نواحی پایدار را توسط منحنی‌های خنثی از نواحی ناپایدار جدا می‌کنند، خاتمه می‌یابند.

# معادله اور-سامرفیلد

اجازه دهید این هفت مرحله را برای یک جریان لایه‌ای تراکم ناپذیر با () ثابت در نظر بگیریم و اثرات شناوری را نیز حدف کنیم.در نتیجه به بررسی پایداری معادلات پیوستگی و ناویر استوکس برای دو متغیر V و P می‌پردازیم.

|  |  |
| --- | --- |
| (1) |  |
| (2) |  |

برای اینکه معیین کنیم این پاسخها پایدار می باشند، یک اختلال کوچک و به پاسخ ها می‌افزاییم. متغیر های جدید و را در معادلات قرار داده، معادلات اصلی را از و معادله کم کرده و از توانهای بالای و ضرب آنها در یکدیگر،که تنها یک بار در شتاب جابجای (غیرخطی)رخ می‌دهد،صرفنظر می‌کنیم. می‌توان معادلات اختلال خطی شده،که در زیر بطور کامل نوشته شده است را شخصا هم بدست آورد:

*با کم کردن پاسخ‌ها:*

*با خطی سازی معادلات:*

لذا معادلات به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| (3) |  |
| (4) |  |
| (5) |  |
| (6) |  |

این معادلات ،معادلات پیچیده اما خطی هستند. از آنجا که و و توابع معلومی هستند هیچ متغیر دیگری وحود ندارد.

معادلات موجود در جدول بالا را می‌توان با فرض اینکه جریان اصلی بطور محلی موازی است، به یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی تبدیل کرد،اگرy جهت عمود بر دیوار و لایه برشی باشد، می‌توان فرض کرد که مولفه در این جهت،کوچک و قابل صرفنظر کردن است، همانند جریان در داخل لوله که پیش از این فرض کردیم و می‌باشد.این کار سبب می‌شود 10 جمله از جمله های جابجایی از سمت چپ معادلات حذف شوند.

|  |  |
| --- | --- |
| (7) |  |
| (8) |  |
| (9) |  |
| (10) |  |

اختلالات نیز جریانهای موازی فرض می‌شود. درنتیجه در حالت عمومی،اختلال سه بعدی یک موج در حال انتشار است که در دامنهy تغییر می‌کند و این موج در طول دیوار با زاویه نسبت به محورx حرکت می‌کند با بکارگیری اعداد مختلف، اختلال را می‌توان بصورت زیر معین کنیم.

|  |  |
| --- | --- |
| (11) |  |

که می‌باشد. تمامی این اختلالات، عدد موج، سرعت انتشارc و فرکانس دارند.این موجها در واقع برگرفته از از موج های تولیمن-شیلیختینگ می‌باشد،که اولین نشانه (بسیار کوچک) ناپایداری جریان لایه‌ای می‌باشد. با جای‌گذاری رابطه (11) در معادلات بالا داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (12) |  |
| (13) |  |
| (14) |  |
| (15) |  |
| (16) |  |
| (17) |  |
| (18) |  |
| (19) |  |

با جای‌گذاری روابط بالا در معادلات (7) تا (10) داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (20) |  |
| (21) |  |
| (22) |  |
| (23) |  |

با تعریف نمادهای زیر و جای‌گذاری در روابط بالا:

|  |  |
| --- | --- |
| (24) |  |
| (25) |  |

در این حالت مشاهده می‌شود که تنها سه معادله با سه مجهول‌ ، و باقی می‌ماند :

|  |  |
| --- | --- |
| (26) |  |
| (27) |  |
| (28) |  |

این معادلات،معادلات دوبعدی هستند که در آن‌ها و جهت موازی با انتشار موج را نشان می‌دهد. در نتیجه پایداری هر جریان موازی که در جهت درحال حرکت است را می‌توان با یک تحلیل دو بعدی روی جریان موثر اصلی که در جهت درحال جریان است، بررسی کرد.

حال فرض کنید که w صفر است بعبارت دیگر جریان اصلی کاملا دو بعدی است.در این حالت شکل پروفیل مستقل خواهد شد،که بدان معناست که محاسبات پایداری نیز مستقل از خواهد شد، مگر در فاکتور اندازه cos درنتیجه برای یک اختلال مایل ،جریان اصلی نسبتا آهسته تر و در نتیجه پایدار اختلالی است که در جهت موازی با منتشر میشود.این نتیجه را اسکویر در قضیه معرف خود بدست آورد.

قضیه اسکویر:برای یک جریان موازی دو بعدیکمترین مقدار عدد رینولز ناپایدار در حالی رخ می‌دهد که اختلال دو بعدی در همان جهت جریان منتظر شود()

در نتیجه ما در اینجا فقط اختلال های دو بعدی را مورد بررسی قرار خواهیم داد. قضیه اسکویر نشان می‌دهد که عدد رینولدز مینیمم بحرانی،هنگامی رخ می‌دهد کهباشد.

با حذف p و v بین معادلات (26) تا (28) معادله اور سامرفیلد حاصل می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

شرایط مرزی برای این معادله به صورت زیر خواهد بود:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | جریان درون کانال |
|  |  | لایه‌های مرزی |
|  |  | جریان‌های بدون برش |

این معادله یک معادله خطی می‌باشد که هم با روش‌های عددی و هم با روش‌های تحلیلی می‌توان آن را حل نمود. در این تحقیق این معادلات به روش شبه طیفی به کمک چندجمله ای های چبی شف حل شده است.

# حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از روش شبه‌طیفی با استفاده از چند جمله‌ای های چبی شف

معادلات ناپايداري، معادلات مقدار مرزي هستند كه براي حل آنها در اين تحقيق، روش شبه‌طيفي نقطه با استفاده از چند جملهاي‌هاي چبي‌شف به‌كار برده شده است. بنابراين ابتدا چندجمله‌اي‌هاي چبي شف‌گذاري به‌طور مختصر تعريف مي‌شوند .چندجمله‌اي‌هاي چبي‌شف در واقع شكلي از سري فوريه كسينوسي هستند كه به‌صورت زير تعريف مي‌شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

را چندجمله‌اي چبي‌شف از مرتبة n گويند. چندجمله‌اي‌هاي چبي‌شف در بازة ] 1و1-[تعريف مي‌شوند. براي محاسبة چندجمله‌اي چبي‌شف در هر نقطه، مي‌توان از رابطة بازگشتي زير استفاده كرد:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

به‌كمك يك چندجمله‌اي‌هاي چبي‌شف، مشابه آنچه كه در مورد سري‌هاي فوريه گفته شده است، هر تابعي را مي‌توان تقريب زد، مثلاً تابع دلخواه به صورت يك سري بر حسب چندجمله‌اي‌هاي چبي‌شف به‌صورت زير تقريب زده مي‌شود (فعلاً فرض مي‌شود كه تابع در بازة ] 1و1-[ تعريف شده است.

در روش نقطه‌گذاري، براي بهترين تقريب، تابع دلخواه و همچنين چندجمله‌اي‌هاي چبي‌شف، در نقاطي خاص محاسبه مي‌شوند، يعني در واقع که در آن ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

N تعداد نقاط موردنياز براي تقريب تابع موردنظر با دقت دلخواه و مناسب است. اما، براي آشنايي با اين روش در حل معادلات ديفرانسيل معمولي، به عنوان مثال معادلة زير با شرايط مرزي مشخص شده، در نظر گرفته مي‌شود:



که در آن تابع مجهول u و x متغییر مستقل است و f(x) و q(x) توابعی مشخص هستند. u با استفاده از چند جمله­ای چپی­شف به­صورت زیر تقریب زده می­شود:



که برای بدست آوردن u باید ضرایب مجهول an مشخص شوند. برای بدست آوردن ضرایب an باید دستگاه معادلات زیر حل شود:



که عناصر بردار ستونی  ضرایب چپی­شف u(x) هستند. عناصر ماتریس­های L و F هم به­صورت زر محاسبه می­شوند:





که  مشتق دوم چندجمله­ای چپی­شف مرتبه j-1 نسبت به x است. دو سطر بالایی ماتریس­ها، برای اعمال شرایط مرزی هستند:



با توجه به این­که معادلات ناپایداری هیدرودینامیکی، به­صورت مقدار ویژه هستند، باید روش حل معادلات مقدار ویژه نیز مشخص شود. حل معادلات مقدار ویژه نیز بسیار مشابه روند مطرح شده­ی فوق است، تنها تفاوت این است که معادلات ماتریسیِ نهایی به­صورت زیر خواهند بود:



که λ مقدار ویژه­ی مجهول و u(x) بردار ویژه­ی مجهول است که با به­دست آمدن ضرایب  به­دست می­آید. برای حل معادله­ی ماتریسی فوق، کافی است در نرم­افزار MATLAB دستور []=eig(L,F) وارد شود که  و  مقادیر ویژه­ی متناظر را می­دهد.

بايد به اين نكته توجه داشت كه توابع چبي‌شف در بازة ] 1و1-[ تعريف شده‌اند، در حالي كه معادلات فوق در بازة (∞ و ∞-) هستند. براي محيط‌هاي نامحدود از توابع چبي‌شف نسبي استفاده مي‌شود كه به‌صورت، تعريف مي‌شوند که تغییر متغییر بازه (∞ و ∞-) را بر روی بازه ] 1و1-[ می‌نگارد.]1,1-[ ، (∞ و ∞-) و تابع وزنی می‌باشد.

# بررسي صحت نتايج

برای به‌دست آوردن نمودار شست انگشتی در حالت لزج، به این صورت عمل می‌شود که در هر ، و هر عدد رینولدز، Re، مقدار c به‌دست می‌آید که اگر مقدار موهومی آن بزرگتر از صفر باشد یعنی جریان ناپایدار است و اگر کوچکتر از صفر، جریان پایدار. برای به‌دست آوردن مرز پایداری نیز می‌توان این‌گونه عمل کرد که در یک ، عدد رینولدز را در یک محدوده تغییر دهیم تا محدودة پایداری و ناپایداری جریان مشخص شود. اگر این کار را برای مقادیر دیگر تکرار کنیم، نمودار شست انگشتی به‌دست می‌آید که در شکل زیر نشان داده شده است. براي اطمينان از صحت روش حل، معادلة اُر-سامرفلد براي جريان پوازي حل شده است. بر اساس نتایج تجربی هنینگسون[[1]](#footnote-1) شروع ناپایداری در رینولدز 72/5772 و 02/1 اتفاق می‌ افتد که با نتایج حاصل از حل معادله هم‌ خوانی دارد. در این کد مقادیر ویژه اگر مقداری بزرگ‌تر از صفر داشته باشند ناپایداری اتفاق می‌افتد.

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\sajad\Desktop\2000.emf  شکل1: مقادیر ویژه برای رینولدز 2000 و 1 | C:\Users\sajad\Desktop\5772.emf  شکل2: مقادیر ویژه برای رینولدز 22/5772 و 02/1 |

با مشاهده شکل‌های بالا می‌توان دریافت که شکل 2 مقدار ویژه مساله صفر شده و شروع ناپایداری را نشان می‌دهد. حال برای ترسیم نمودار انگشتی به ازای یک عدد رینولدز ثابت مقدار را آنقدر تغییر می‌دهیم که مقدار ویژه صفر شود. مجموع نقاط حاصله نمودار شست انگشتی را تشکیل می‌دهند.

|  |
| --- |
| C:\Users\sajad\Desktop\fin.tif  شکل3: نمودار شست انگشتی برای جریان پوازی |

مراجع

1. Viscous Fluid Flow, [Frank M. White](https://www.amazon.com/s/ref=dp_byline_sr_book_1?ie=UTF8&text=Frank+M.+White&search-alias=books&field-author=Frank+M.+White&sort=relevancerank), McGraw-Hill Education; 3 edition (January 5, 2005)
2. <http://www.chebfun.org/>
3. احسان خواصی، بررسی نظري و تجربي ناپايداريهاي سطح تماس در جريان چگال حاوي ذرات، پایان‌نامه دکتری، دانشگاه صنعتی شریف،1393

1. Henningson [↑](#footnote-ref-1)