Approximation de ln(x) par des suites

Question I.1

Givens:

- $xnin[1, +ninfty[$
- $T(x) = nfracnxntextasciicircum2 - 1nnxntextasciicircum2 + 1n$
- $S(x) = nfracnxntextasciicircum2 - 1nn2xn$

Requested: $T(x)nle2T(nsqrtnxn)$ et $2S(nsqrtnxn)nleS(x)$
Strategy Outline:

1. Substitute $nsqrtnxn$ into $T(x)$ and $S(x)$ definitions.
2. Simplify $2T(nsqrtnxn)$ and $2S(nsqrtnxn)$.
3. Prove the inequalities by algebraic manipulation, showing they reduce to $(x-1)ntextasciicircum2nge0$ or $(nsqrtnxn - 1)ntextasciicircum2nge0$.

Detailed Steps:

1. **Justification:** Substitution de $nsqrtnxn$ dans $T(x)$ et simplification
Expression: $2T(\sqrt{x}) = 2\frac{(\sqrt{x})^2-1}{(\sqrt{x})^2+1} = \frac{2(x-1)}{x+1}$
2. **Justification:** Énoncé de l'inégalité à prouver
Expression: $T(x) \leq 2T(\sqrt{x}) \iff \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{2(x-1)}{x+1}$
3. **Justification:** Factorisation de $xntextasciicircum2 - 1$
Expression: $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1} \leq \frac{2(x-1)}{x+1}$
4. **Justification:** Division par $(x - 1)$ (valide pour $x > 1$, trivial pour $x = 1$)
Expression: $\frac{x+1}{x^2+1} \leq \frac{2}{x+1}$ pour $x > 1$
5. **Justification:** Multiplication croisée
Expression: $(x + 1)^2 \leq 2(x^2 + 1)$
6. **Justification:** Développement
Expression: $x^2 + 2x + 1 \leq 2x^2 + 2$
7. **Justification:** Réarrangement algébrique
Expression: $0 \leq x^2 - 2x + 1$
8. **Justification:** Factorisation, toujours vrai
Expression: $0 \leq (x - 1)^2$
9. **Justification:** Substitution de $nsqrtnxn$ dans $S(x)$ et simplification
Expression: $2S(\sqrt{x}) = 2\frac{(\sqrt{x})^2-1}{2\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$
10. **Justification:** Énoncé de l'inégalité à prouver
Expression: $2S(\sqrt{x}) \leq S(x) \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{x^2-1}{2x}$
11. **Justification:** Factorisation de $xntextasciicircum2 - 1$
Expression: $\frac{x-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{(x-1)(x+1)}{2x}$
12. **Justification:** Division par $(x - 1)$ (valide pour $x > 1$, trivial pour $x = 1$)
Expression: $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{x+1}{2x}$ pour $x > 1$

13. **Justification:** Multiplication croisée
    Expression: $2x \leq \sqrt{x}(x+1)$

14. **Justification:** Division par $nsqrtnxn$
    Expression: $2\sqrt{x} \leq x+1$

15. **Justification:** Réarrangement algébrique
    Expression: $0 \leq x - 2\sqrt{x} + 1$

16. **Justification:** Factorisation, toujours vrai
    Expression: $0 \leq (\sqrt{x}-1)^2$

Final Answer: $\boxed{\text{Les inégalités sont prouvées.}}$

Question I.2

Givens:

- $f(x) = nln(x) - T(x)$
- $g(x) = S(x) - nln(x)$
- $T(x) = nfracnxntextasciicircum2 - 1nnxntextasciicircum2 + 1n$
- $S(x) = nfracnxntextasciicircum2 - 1nn2xn$
- $xnin[1, +ninfty[$

Requested: a) $f'(x) = nfracn(xntextasciicircum2-1)ntextasciicircum2nnx(xntextasciicircum2+1)ntextasciicircum2$
et $g'(x) = nfracn(x-1)ntextasciicircum2nn2xntextasciicircum2n$; b) $0nlef'(x)nle(x-1)ntextasciicircum2$
et $0nleg'(x)nlenfracn1nn2n(x-1)ntextasciicircum2$

Strategy Outline:

1. Calculate the derivatives $f'(x)$ and $g'(x)$ using quotient rule and chain rule.
2. Simplify the derivatives to match the given expressions.
3. For part b), analyze the sign of the derivatives and prove the upper bounds by algebraic manipulation.

Detailed Steps:

1. **Justification:** Définition de $f'(x)$
   Expression: $f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x) - \frac{x^2-1}{x^2+1})$

2. **Justification:** Application des règles de dérivation
   Expression: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$

3. **Justification:** Simplification du numérateur
   Expression: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

4. **Justification:** Mise au même dénominateur et développement
   Expression: $f'(x) = \frac{(x^2+1)^2-4x^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{x(x^2+1)^2}$

5. **Justification:** Factorisation du numérateur
   Expression: $f'(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}$

6. **Justification:** Définition de $g'(x)$
   Expression: $g'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{x^2-1}{2x} - \ln(x))$

7. **Justification:** Application des règles de dérivation
   Expression: $g'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x(x)-(x^2-1)(1)}{x^2} - \frac{1}{x}$

8. **Justification:** Simplification du numérateur
   Expression: $g'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x^2-x^2+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{2x^2} - \frac{1}{x}$
9. **Justification:** Mise au même dénominateur et factorisation du numérateur
   Expression: $g'(x) = \frac{x^2+1-2x}{2x^2} = \frac{(x-1)^2}{2x^2}$
10. **Justification:** Le numérateur est un carré, le dénominateur est positif pour $xnge1$
    Expression: $f'(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2} \geq 0$
11. **Justification:** Énoncé de l'inégalité à prouver
    Expression: $f'(x) \leq (x-1)^2 \iff \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2} \leq (x-1)^2$
12. **Justification:** Factorisation de $xntextasciicircum2 - 1$
    Expression: $\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{x(x^2+1)^2} \leq (x-1)^2$
13. **Justification:** Division par $(x-1)ntextasciicircum2$ (valide pour $x > 1$, trivial pour $x = 1$)
    Expression: $\frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)^2} \leq 1$ pour $x > 1$
14. **Justification:** Multiplication par le dénominateur
    Expression: $(x+1)^2 \leq x(x^2+1)^2$
15. **Justification:** Développement
    Expression: $x^2 + 2x + 1 \leq x(x^4 + 2x^2 + 1) = x^5 + 2x^3 + x$
16. **Justification:** Réarrangement algébrique. La fonction $h(x) = x(xntextasciicircum2+1)ntextasciicircum2 - (x+1)ntextasciicircum2$ a $h(1) = 0$ et $h'(x) > 0$ pour $xnge1$, donc $h(x)nge0$.
    Expression: $0 \leq x^5 + 2x^3 - x^2 - x - 1$
17. **Justification:** Le numérateur est un carré, le dénominateur est positif pour $xnge1$
    Expression: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x^2} \geq 0$
18. **Justification:** Énoncé de l'inégalité à prouver
    Expression: $g'(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)^2 \iff \frac{(x-1)^2}{2x^2} \leq \frac{1}{2}(x-1)^2$
19. **Justification:** Division par $nfracn1nn2n(x-1)ntextasciicircum2$ (valide pour $x > 1$, trivial pour $x = 1$)
    Expression: $\frac{1}{x^2} \leq 1$ pour $x > 1$
20. **Justification:** Multiplication par $xntextasciicircum2$, toujours vrai pour $xnge1$
    Expression: $1 \leq x^2$

Final Answer: $\boxed{\text{Les dérivées et les encadrements sont prouvés.}}$

Question I.3

Givens:

- $f(1) = 0$
- $g(1) = 0$
- $0nlef'(x)nle(x-1)ntextasciicircum2$
- $0nleg'(x)nlenfracn1nn2n(x-1)ntextasciicircum2$

Requested: $0nlef(x)nlenfracn1nn3n(x-1)ntextasciicircum3$ et $0nleg(x)nlenfracn1nn6n(x-1)ntextasciicircum3$
Strategy Outline:

1. Integrate the inequalities for $f'(x)$ and $g'(x)$ from 1 to x.

2. Use the given initial conditions $f(1) = 0$ and $g(1) = 0$.

Detailed Steps:

1. **Justification:** Intégration de l'encadrement de $f'(x)$ sur $[1, x]$
   Expression: $\int_1^x 0\,dt \leq \int_1^x f'(t)\,dt \leq \int_1^x (t-1)^2\,dt$
2. **Justification:** Calcul des intégrales
   Expression: $0 \leq [f(t)]_1^x \leq \left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_1^x$
3. **Justification:** Application du théorème fondamental du calcul
   Expression: $0 \leq f(x) - f(1) \leq \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(1-1)^3}{3}$
4. **Justification:** Utilisation de $f(1) = 0$ et simplification
   Expression: $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}(x-1)^3$
5. **Justification:** Intégration de l'encadrement de $g'(x)$ sur $[1, x]$
   Expression: $\int_1^x 0\,dt \leq \int_1^x g'(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{2}(t-1)^2\,dt$
6. **Justification:** Calcul des intégrales
   Expression: $0 \leq [g(t)]_1^x \leq \frac{1}{2}\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_1^x$
7. **Justification:** Application du théorème fondamental du calcul
   Expression: $0 \leq g(x) - g(1) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(1-1)^3}{3}\right)$
8. **Justification:** Utilisation de $g(1) = 0$ et simplification
   Expression: $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{6}(x-1)^3$

Final Answer: $\boxed{\text{Les encadrements sont déduits.}}$

Question II.1

Givens:

- $xnin]1, +ninfty[$
- $xn_0 = x$
- $xn_{nn+1n=nsqrtnxn_nn}$
- $tn_n = 2ntextasciicircumnT(xn_n)$
- $sn_n = 2ntextasciicircumnS(xn_n)$

Requested: a) Limite de (xn_n) ; b) tn_nnletn_{nn+1n} et $sn_{nn+1nnlesn_n}$; c) Monotonie de (tn_n) et (sn_n)
Strategy Outline:

1. For a), find fixed points of $xn_{nn+1n=nsqrtnxn_nn}$ and analyze monotonicity.
2. For b), use the inequalities from Question I.1 with xn_n and xn_{nn+1n}.
3. For c), directly state monotonicity from b).

Detailed Steps:

1. **Justification:** Recherche des points fixes de la relation de récurrence
   Expression: $L = \sqrt{L} \implies L^2 = L \implies L(L-1) = 0$
2. **Justification:** Résolution de l'équation
   Expression: $L = 0$ ou $L = 1$

3. **Justification:** Analyse de la relation $xn_{nn+1n=nsqrtnxn_nn}$ pour $xn_n > 1$
   Expression: $x_n > 1 \implies \sqrt{x_n} < x_n$
4. **Justification:** La suite (xn_n) est décroissante
   Expression: $x_{n+1} < x_n$
5. **Justification:** La suite est minorée par 1
   Expression: $x_n > 1$ pour tout n
6. **Justification:** Une suite décroissante et minorée converge vers son point fixe
   Expression: $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$
7. **Justification:** Inégalité de la Question I.1 appliquée à xn_n
   Expression: $T(x_n) \leq 2T(\sqrt{x_n})$
8. **Justification:** Substitution de $xn_{nn+1n=nsqrtnxn_nn}$
   Expression: $T(x_n) \leq 2T(x_{n+1})$
9. **Justification:** Multiplication par $2ntextasciicircumn$
   Expression: $2^nT(x_n) \leq 2^{n+1}T(x_{n+1})$
10. **Justification:** Définition de tn_n et tn_{nn+1n}
    Expression: $t_n \leq t_{n+1}$
11. **Justification:** Inégalité de la Question I.1 appliquée à xn_n
    Expression: $2S(\sqrt{x_n}) \leq S(x_n)$
12. **Justification:** Substitution de $xn_{nn+1n=nsqrtnxn_nn}$
    Expression: $2S(x_{n+1}) \leq S(x_n)$
13. **Justification:** Multiplication par $2ntextasciicircumn$
    Expression: $2^{n+1}S(x_{n+1}) \leq 2^nS(x_n)$
14. **Justification:** Définition de sn_n et sn_{nn+1n}
    Expression: $s_{n+1} \leq s_n$
15. **Justification:** D'après tn_nnletn_{nn+1n}
    Expression: La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
16. **Justification:** D'après $sn_{nn+1nnlesn_n}$
    Expression: La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Final Answer: $\boxed{a)\lim_{n\to+\infty} x_n = 1 \text{ ; b) } t_n \leq t_{n+1} \text{ et } s_{n+1} \leq s_n \text{ ; c) } (t_n) \text{ est croissante et } (s_n) \text{ est décroissante.}}$

Question II.2

Givens:

- $f(x) = nln(x) - T(x)$
- $g(x) = S(x) - nln(x)$
- $0nlef(x)nlenfracn1nn3n(x-1)ntextasciicircum3$
- $0nleg(x)nlenfracn1nn6n(x-1)ntextasciicircum3$
- $xn_n = xntextasciicircumn1/2ntextasciicircumnn$
- $tn_n = 2ntextasciicircumnT(xn_n)$
- $sn_n = 2ntextasciicircumnS(xn_n)$

Requested: $tn_nnlenln(x)nlesn_n$
Strategy Outline:

1. Use $f(xn_n)nge0$ and $g(xn_n)nge0$ from Question I.3.

2. Substitute the definitions of $f(xn_n)$ and $g(xn_n)$ to get inequalities involving $nln(xn_n)$.

3. Relate $nln(xn_n)$ to $nln(x)$ using $xn_n = xntextasciicircumn1/2ntextasciicircumnn$.

4. Multiply by $2ntextasciicircumn$ to obtain the desired encadrement.

Detailed Steps:

1. **Justification:** Utilisation de l'inégalité $f(x)nge0$ de I.3
   Expression: $f(x_n) \geq 0 \implies \ln(x_n) - T(x_n) \geq 0 \implies T(x_n) \leq \ln(x_n)$

2. **Justification:** Utilisation de l'inégalité $g(x)nge0$ de I.3
   Expression: $g(x_n) \geq 0 \implies S(x_n) - \ln(x_n) \geq 0 \implies \ln(x_n) \leq S(x_n)$

3. **Justification:** Combinaison des deux inégalités précédentes
   Expression: $T(x_n) \leq \ln(x_n) \leq S(x_n)$

4. **Justification:** Propriété des logarithmes et définition de xn_n
   Expression: $\ln(x_n) = \ln(x^{1/2^n}) = \frac{1}{2^n}\ln(x)$

5. **Justification:** Substitution de $nln(xn_n)$
   Expression: $T(x_n) \leq \frac{1}{2^n}\ln(x) \leq S(x_n)$

6. **Justification:** Multiplication par $2ntextasciicircumn$
   Expression: $2^nT(x_n) \leq \ln(x) \leq 2^nS(x_n)$

7. **Justification:** Définition de tn_n et sn_n
   Expression: $t_n \leq \ln(x) \leq s_n$

Final Answer: $\boxed{\mathrm{t}_n \leq \ln(x) \leq s_n}$

Question II.3

Givens:

- $tn_n = 2ntextasciicircumnT(xn_n)$
- $sn_n = 2ntextasciicircumnS(xn_n)$
- $T(x) = nfracnxntextasciicircum2 - 1nnxntextasciicircum2 + 1n$
- $S(x) = nfracnxntextasciicircum2 - 1nn2xn$
- $nlimn_{nnnto+ninftynxn_n=1}$

Requested: a) $sn_n - tn_n = nfracn2ntextasciicircumn(xn_n - 1)ntextasciicircum2nn2xn_n(xn_n + 1)n$; b) $nlimn_{nnnto+ninftyn(sn_n-tn_n)=0}$
Strategy Outline:

1. For a), substitute the definitions of sn_n, tn_n, $S(xn_n)$, and $T(xn_n)$ and simplify the expression. (Note: The problem statement's target expression for $sn_n - tn_n$ appears to be incorrect. The derivation will lead to a different, mathematically correct expression.)

2. For b), use the derived expression for $sn_n - tn_n$ and the limit of xn_n to evaluate the limit.

Detailed Steps:

1. **Justification:** Définition de sn_n et tn_n
   Expression: $s_n - t_n = 2^n S(x_n) - 2^n T(x_n) = 2^n(S(x_n) - T(x_n))$
2. **Justification:** Substitution des définitions de $S(xn_n)$ et $T(xn_n)$
   Expression: $S(x_n) - T(x_n) = \frac{x_n^2-1}{2x_n} - \frac{x_n^2-1}{x_n^2+1}$
3. **Justification:** Factorisation par $(xn_n ntextasciicircum 2 - 1)$
   Expression: $S(x_n) - T(x_n) = (x_n^2 - 1)\left(\frac{1}{2x_n} - \frac{1}{x_n^2+1}\right)$
4. **Justification:** Mise au même dénominateur
   Expression: $S(x_n) - T(x_n) = (x_n^2 - 1)\left(\frac{x_n^2+1-2x_n}{2x_n(x_n^2+1)}\right)$
5. **Justification:** Factorisation de $xn_n ntextasciicircum 2 - 1$ et $xn_n ntextasciicircum 2 - 2xn_n + 1$
   Expression: $S(x_n) - T(x_n) = (x_n - 1)(x_n + 1)\frac{(x_n-1)^2}{2x_n(x_n^2+1)}$
6. **Justification:** Substitution dans l'expression de $sn_n - tn_n$ (Note: L'expression donnée dans la question II.3.a est incorrecte. Ceci est la dérivation correcte.)
   Expression: $s_n - t_n = \frac{2^n(x_n-1)^3(x_n+1)}{2x_n(x_n^2+1)}$
7. **Justification:** Énoncé de la limite à calculer
   Expression: $\lim_{n\to+\infty}(s_n - t_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(x_n-1)^3(x_n+1)}{2x_n(x_n^2+1)}$
8. **Justification:** Résultat de la Question II.1.a
   Expression: $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$
9. **Justification:** Approximation de Taylor de $entextasciicircumu - 1napproxu$ pour $unto0$
   Expression: $x_n - 1 = x^{1/2^n} - 1 \approx \frac{\ln x}{2^n}$ pour $n \to +\infty$
10. **Justification:** Substitution de l'approximation
    Expression: $(x_n - 1)^3 \approx \left(\frac{\ln x}{2^n}\right)^3 = \frac{(\ln x)^3}{2^{3n}}$
11. **Justification:** Simplification
    Expression: $2^n(x_n - 1)^3 \approx 2^n \frac{(\ln x)^3}{2^{3n}} = \frac{(\ln x)^3}{2^{2n}}$
12. **Justification:** Substitution des limites des termes et simplification
    Expression: $\lim_{n\to+\infty}(s_n - t_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln x)^3/2^{2n}\cdot(1+1)}{2\cdot1\cdot(1^2+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(\ln x)^3}{4\cdot 2^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{2^{2n+1}}$
13. **Justification:** Le dénominateur tend vers l'infini, donc la fraction tend vers 0
    Expression: $\lim_{n\to+\infty}(s_n - t_n) = 0$

Final Answer: $\boxed{a)s_n - t_n = \frac{2^n(x_n-1)^3(x_n+1)}{2x_n(x_n^2+1)} \text{ ; b) } \lim_{n\to+\infty}(s_n - t_n) = 0}$

Question II.4

Givens:

- (tn_n) est croissante
- (sn_n) est décroissante
- $tn_n nlenln(x)nlesn_n$
- $nlimn_{nnnto+ninftyn(sn_n-tn_n)=0}$

Requested: Nature (convergence et limite) des suites (tn_n) et (sn_n)
Strategy Outline:

1. List the properties of the sequences (tn_n) and (sn_n).

2. Conclude that they are adjacent sequences.
3. State the convergence and common limit based on the definition of adjacent sequences.

Detailed Steps:

1. **Justification:** D'après la Question II.1.c
   Expression: La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. **Justification:** D'après la Question II.1.c
   Expression: La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. **Justification:** D'après la Question II.2 $(tn_n nlenln(x)nlesn_n)$
   Expression: $t_n \leq s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. **Justification:** D'après la Question II.3.b
   Expression: $\lim_{n\to+\infty}(s_n - t_n) = 0$
5. **Justification:** Définition des suites adjacentes (monotonie opposée, $tn_n nlesn_n$, et différence tendant vers 0)
   Expression: Les suites (t_n) et (s_n) sont adjacentes.
6. **Justification:** Propriété des suites adjacentes
   Expression: Les suites adjacentes convergent vers la même limite.
7. **Justification:** L'encadrement $tn_n nlenln(x)nlesn_n$ et la convergence vers une limite commune impliquent que cette limite est $nln(x)$
   Expression: $\lim_{n\to+\infty} t_n = \ln(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln(x)$

Final Answer: $\boxed{\text{Les suites } (\mathrm{t}_n) \text{ et } (s_n) \text{ sont adjacentes et convergent toutes deux vers } \ln(x).}$