Approximation de ln(x) par des suites

Question 1: Prouver les inégalités $T(x) \leq 2T(\sqrt{x})$ et $2S(\sqrt{x}) \leq S(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Étape 1: Substitution des définitions de $T(x)$ et $T(\sqrt{x})$.

T(x) $\leq 2T(\sqrt{x}) \iff \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 2\frac{x-1}{x+1}$

Étape 2: Factorisation de $x^2 - 1$ et simplification pour $x > 1$.

(x-1)(x+1)$\frac{}{x^2+1 \leq 2\frac{x-1}{x+1} \iff \frac{x+1}{x^2+1} \leq \frac{2}{x+1}}$

Étape 3: Réarrangement algébrique.

(x+1)$^2 \leq 2(x^2 + 1)$

Étape 4: Développement et simplification.

x$^2 + 2x + 1 \leq 2x^2 + 2 \iff 0 \leq x^2 - 2x + 1$

Étape 5: Identité remarquable.

$0 \leq (x-1)^2$, ce qui est vrai pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Étape 6: Substitution des définitions de $S(x)$ et $S(\sqrt{x})$.

2S($\sqrt{x}) \leq S(x) \iff 2\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x^2-1}{2x}$

Étape 7: Simplification et factorisation de $x^2 - 1$.

x - 1$\frac{}{\sqrt{x} \leq \frac{(x-1)(x+1)}{2x}}$

Étape 8: Réarrangement algébrique pour $x > 1$.

2x $\leq \sqrt{x}(x+1) \iff 2\sqrt{x} \leq x + 1$

Étape 9: Réarrangement.

$0 \leq x - 2\sqrt{x} + 1$

Étape 10: Identité remarquable.

$0 \leq (\sqrt{x} - 1)^2$, ce qui est vrai pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Résultat: N/A