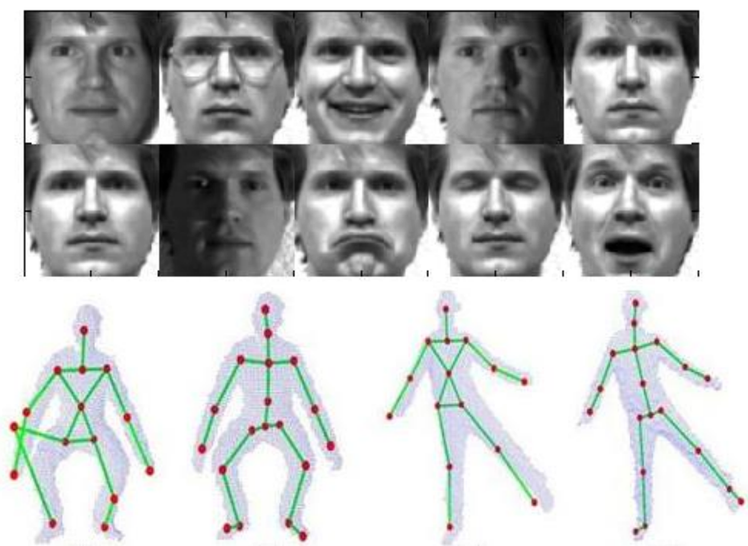
بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

گروه سیستم‌های دیجیتال



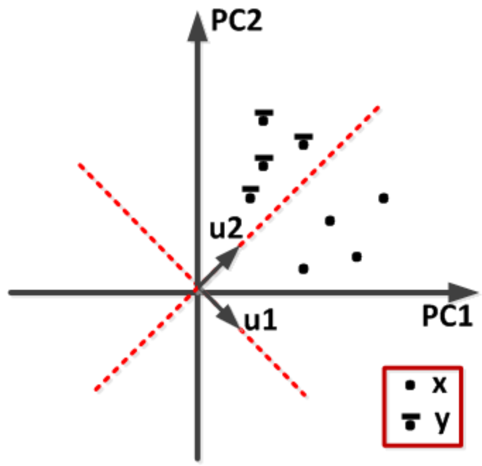
آزمایشگاه یادگیری و بینایی ماشین

دستور کار آزمایش سوم: طبقه بندی به روش Fisher LDA

زمان لازم برای انجام آزمایش: حداکثر یک جلسه

طبقه‌بندی به روش Fisher LDA

به نظر شما، اگر دو دسته داده متفاوت x و y داشته باشیم که به صورت زیر در فضای دو بعدی پخش شده‌اند، کدام یک از خطوط u1 و u2 بهترین زیرفضا برای تصویر کردن این داده‌ها بر آن است. به عبارتی دیگر، کدام یک از این دو خط اگر داده‌ها بر آن تصویر شود، بیشترین تفکیک‌پذیری را از کلاس دیگر و کمترین تفکیک‌پذیری را از داده‌های کلاس خودی دارند؟



مشخص است که با تصویر کردن داده‌های دو کلاس بر خط u1 این هدف برآورده می‌شود. اگر پراکندگی (واریانس) داده‌های کلاس x را بنویسیم، داریم:

$$S = \sum_i (x^i - \mu_x)(x^i - \mu_x)^T$$

که در آن، μ_x میانگین کلاس x است. حال، با تصویر کردن داده‌های کلاس x بر خط u1 (یعنی $u_1^T x^i$)، این پراکندگی در جهت u1 به صورت زیر می‌شود:

$$S_{u_1} = \sum_i (u_1^T x^i - u_1^T \mu_x)(u_1^T x^i - u_1^T \mu_x)^T = \sum_i u_1^T (x^i - \mu_x)(x^i - \mu_x) u_1 =$$

$$= u_1^T \left[\sum_i (x^i - \mu_x)(x^i - \mu_x)^T \right] u_1 = u_1^T S u_1$$

پس برای هر یک از کلاس‌های x و y داریم:

$$S_{u_1}(x) = u_1^T S_x u_1$$

$$S_{u_1}(y) = u_1^T S_y u_1$$

اکنون، به پراکندگی بین کلاس‌ها دقت فرمایید. اگر پراکندگی بین دو کلاس را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$S_B = n_x(\mu_x - \mu)(\mu_x - \mu)^T + n_y(\mu_y - \mu)(\mu_y - \mu)^T$$

که در روابط بالا، μ_x ، μ_y و μ به ترتیب میانگین کلاس x و کلاس y و میانگین کل داده‌ها است و n_x و n_y تعداد نمونه های کلاس x و کلاس y است. در حالت دو کلاسه و هنگامی که تعداد نمونه های دو کلاس با هم برابر هستند، پراکندگی بین دو کلاس متناسب با عبارت زیر خواهد بود که پراکندگی میانگین دو کلاس از هم را نشان می دهد:

$$(\mu_x - \mu_y)(\mu_x - \mu_y)^T$$

به عنوان جمع‌بندی، دو نوع پراکندگی داخلی (Within) و بینابینی (Between) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S_W = \sum_{j=1}^{C} \sum_{x^i \epsilon C_j} (x^i - \mu_j)(x^i - \mu_j)^T$$

$$S_B = \sum_{j=1}^{C} n_j(\mu_j - \mu)(\mu_j - \mu)^T$$

که در روابط بالا، S_W هم بر روی کلاس‌ها جمع می‌بندد که در اینجا دو کلاس داشتیم و هم بر روی داده‌های درون کلاس j ام. و S_B هم بر روی تعداد کلاس‌ها جمع می‌بندد. نمادهای C ، C_j و x^i به ترتیب بیان‌گر تعداد کلاس‌ها، کلاس j ام و داده‌ی کلاس مربوطه است.

برای یافتن زیرفضای ایده‌آل برای تفکیک حداکثری بین کلاسی و حداقلی درون‌کلاسی، معیار زیر موسوم به معیار Fisher تعریف می‌شود:

$$\arg \max_{u_1} \frac{u_1^T S_B u_1}{u_1^T S_W u_1}$$

اگر از عبارت بالا نسبت به u1 مشتق بگیریم (بهینه‌سازی) و مساوی صفر قرار دهیم، خواهیم دید که:

$$(S_W^{-1} S_B) u_1 = u_1 \frac{u_1^T S_B u_1}{u_1^T S_W u_1}$$

از عبارت بالا نتیجه می‌گیریم که u1 بردار ویژه‌ی $(S_W^{-1} S_B)$ و $\frac{u_1^T S_B u_1}{u_1^T S_W u_1}$ هم مقدار ویژه‌ی $(S_W^{-1} S_B)$ شد.

(امتیازی): عبارت بالا را اثبات نمایید. (راهنمایی: اگر A یک ماتریس و x1 یک بردار باشد، داریم: $\frac{\partial x_1^T A x_1}{\partial x_1} = 2Ax_1$)

لذا، برای طبقه‌بندی به کمک روش Fisher LDA ، باید ماتریس $(S_W^{-1} S_B)$ را که یک ماتریس مربعی است، تشکیل دهیم و سپس، بردارهای ویژه‌ی آن را بدست آوریم. لازم به ذکر است که در روش LDA، به تعداد (تعداد کلاس‌ها منهای یک) بردار ویژه داریم. سپس، هر داده تستی را بر روی فضای آماری ساخته شده از این بردارهای ویژه تصویر می‌کنیم. به عبارتی، این داده تست را بر تک‌تک بردارهای ویژه تصویر می‌کنیم. از کنار هم قرار دادن این حاصلضرب‌های داخلی، یک بردار جدید (بردار ویژگی) ایجاد می‌شود.

همین کار را برای میانگین هر یک از کلاس‌ها هم انجام می‌دهیم. یعنی آنها را هم بر روی این بردارها تصویر می‌کنیم. سپس، فاصله اقلیدسی تصویر شده‌ی بردار تست را از تک‌تک تصویر شده‌های میانگین کلاس‌ها محاسبه می‌کنیم. کمترین فاصله به منزله بیشترین شباهت است که کلاس داده تست را مشخص می‌کند.

در این آزمایش می خواهیم طبقه بندی بین دو کلاس احساس تعجب و خوشحال را انجام بدهیم. از هر کدام از دو مجموعه surprise و happy تعداد ۵۰ تصویر را به صورت تصادفی به عنوان نمونه های آموزش و مابقی را به عنوان نمونه های تست جدا کنید. با استفاده از روش مؤلفه های اساسی، بعد داده ها را به **۵۰** کاهش دهید. دقت کنید که فضای مؤلفه های اساسی را با استفاده از داده های آموزش بسازید و سپس

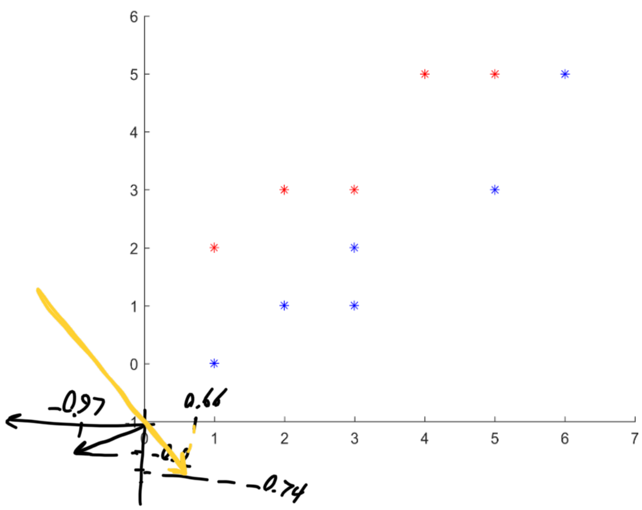
داده های آموزش و تست را با استفاده از این فضا کاهش بعد دهید. بعد از کاهش بعد، بردارهای ویژه Fisher را با استفاده از داده های آموزش بدست آورید.

چند بردار ویژه Fisher بدست آمده است؟ این بردار/بردارها که در فضای کاهش بعد یافته هستند را در فضای پیکسلی بازسازی و سپس رسم کنید. دقت کنید که تصویرهای بدست آمده باید شبیه صورت باشند، مانند eigenface ها. تصویرهای بدست آمده را تحلیل کنید؛ محل های روشن و تیره در این تصویر/تصویرها به چه ناحیه هایی اشاره دارند؟

خطای طبقه بندی با LDA را برای نمونه های آموزش و تست با چند تعداد متفاوت مؤلفه های اساسی بین ۱ تا ۵۰ بدست بیاورید و با خطای روش k نزدیک ترین همسایه برای k=1,3,5 برای هر حالت مقایسه کنید. نتیجه را در قالب دو figure با چهار نمودار برای آموزش و تست نشان دهید.

پیش گزارش

می‌خواهیم داده‌های زیر را طبقه‌بندی کنیم.



$class_1$= [(1,2), (2,3), (3,3), (4,5), (5,5)]

$class_2$= [(1,0), (2,1), (3,1), (3,2), (5,3), (6,5)]

همان‌طور که ملاحظه می‌شـــود، برداری که بیشـــترین واریانس را نشـــان می‌دهد نمی‌تولند داده‌ها را به خوبی کلاس‌بندی کند. بدین ترتیب از PCA (که در آزمایش قبل با آن آشـنا شـدید) نمی‌توانیم اسـتفاده کنیم. در این آزمایش با روش Fisher LDA که یک ابزار قدرتمند در مسائل طبقه‌بندی است آشنا می‌شویم.

- میانگین هر کلاس را به دست آورید.
- پراکندگی‌های داخلی (S_W) و بینابینی (S_B) را به دست آورید.

بردار ویژهٔ $S_W^{-1}S_B$ را به دست آورید و آن را رسم کنید. (با تصویر داده‌ها بر این بردار می‌توانیم به راحتی داده‌ها را طبقه‌بندی کنیم.)

Bonus

$$\frac{\partial \frac{u_1^T S_B u_1}{u_1^T S_W u_1}}{\partial u_1} = \frac{2 S_B u_1 (u_1^T S_W u_1) - 2 S_W u_1 (u_1^T S_B u_1)}{(u_1^T S_W u_1)^2}$$

$$\xRightarrow{=0} 2 S_B u_1 (u_1^T S_W u_1) = 2 S_W u_1 (u_1^T S_B u_1)$$

$$\boxed{(S_W^{-1} S_B) u_1 = u_1 \frac{u_1^T S_B u_1}{u_1^T S_W u_1}}$$

PreReport $\mu_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.6 \end{bmatrix}, \mu_2 = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 2 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 3.18 \\ 2.73 \end{bmatrix}$

$$S_W = \sum_{i=1}^{5} (x^i - \mu_1)(x^i - \mu_1)^T + \sum_{j=1}^{6} (x^j - \mu_2)(x^j - \mu_2)^T$$

$$= \begin{bmatrix} 27.3334 & 24 \\ 24 & 23.2 \end{bmatrix}$$

$n_1 = 5, n_2 = 6$

$$S_B = n_1 (\mu_1 - \mu)(\mu_1 - \mu)^T + n_2 (\mu_2 - \mu)(\mu_2 - \mu)^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0.162 & -0.783 \\ -0.783 & 3.7845 \end{bmatrix}$$

$$S_W^{-1} S_B = \begin{bmatrix} 0.38 & -1.87 \\ -0.43 & 2.1 \end{bmatrix}$$

eigen vectors: $\begin{bmatrix} 0.66 \\ -0.74 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.97 \\ -0.2 \end{bmatrix}$