



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

مقدمه ای بر یادگیری ماشین - گروه دکتر امینی

پاییز ۱۴۰۱

## تمرین تئوری اول

۱. مهلت تحویل این تمرین مطابق تاریخ اعلام شده در سامانه CW می باشد.

۲. ۱۴ روز تاخیر مجاز برای تحویل تمارین در اختیار شما خواهد بود.

۳. سقف تاخیر برای تحویل هر تمرین ۷ روز خواهد بود و پس از آن پاسخنامه تمرین منتشر خواهد شد.

۴. ابهامات و مشکلات خود را می توانید با آقای وزیری مطرح کنید.

@Kiawesome

## ۱ احتمال گاوسی حاشیه ای و شرطی

۱. فرض کنید  $y$  یک بردار با توزیع گاوسی باشد، به عبارتی دیگر:

$$y \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

نشان دهید:

(الف)

$$p(y_2) = \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_{22})$$

(ب)

$$p(y_1|y_2) = \mathcal{N}(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(y_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$$

۲. فرض کنید

$$z \in \mathbb{R}^D, y \in \mathbb{R}^K, W \in \mathbb{R}^{K \times D}, b \in \mathbb{R}^K$$

اگر داشته باشیم

$$p(z) = \mathcal{N}(\mu_z, \Sigma_z)$$

$$p(y|z) = \mathcal{N}(Wz + b, \Sigma_y)$$

نشان دهید:

(الف)

$$p(z, y) = \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_z \\ W\mu_z + b \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_z & \Sigma_z W^T \\ W\Sigma_z & \Sigma_y + W\Sigma_z W^T \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 p(z|y) &= \mathcal{N}(\mu_{z|y}, \Sigma_{z|y}) \\
 \mu_{z|y} &= \Sigma_{z|y} [W^T \Sigma_y^{-1} (y - b) + \Sigma^{-1} \mu_z] \\
 \Sigma_{z|y}^{-1} &= \Sigma_z^{-1} + W^T \Sigma_y^{-1} W
 \end{aligned}$$

## ۲ محاسبه احتمال

فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی تواما نرمال با پارامترهای زیر باشند:

$$\rho = -\frac{1}{2}, \sigma_Y^2 = 4, \mu_Y = -1, \sigma_X^2 = 1, \mu_X = 0$$

۱.  $P(X + Y > 0)$  را بیابید

۲. اگر بدانیم  $aX + Y$  و  $X + 2Y$  مستقل هستند، ثابت  $a$  را بیابید.

۳.  $P(X + Y > 0 | 2X - Y = 0)$  را بدست آورید.

## ۳ مقادیر ویژه

فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد که  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  مقادیر ویژه آن هستند. اگر  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ثابت کنید:

$$e^A = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2} - \lambda_2 e^{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} I + \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} A$$

## ۴ MAP

فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل با میانگین  $\mu$  و واریانس ۱ باشند، که  $\mu \sim Uni(0, 1)$ .

۱. توزیع مشترک  $X, Y, \mu$  را بیابید.  $(f_{\mu, X, Y}(t, x, y))$

۲. تخمین MAP متغیر تصادفی  $\mu$  را بیابید.

## ۵ متغیر تصادفی کمکی

رابطه زیر را اثبات کنید.

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$$