



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش های ریاضی در مهندسی - گروه دکتر امینی

نیمسال اول ۱۴۰۱-۰۲

تمرین تئوری سری سوم

۱. مهلت تحویل این تمرین مطابق تاریخ اعلام شده در سامانه CW می باشد.
 ۲. ۱۰ روز تاخیر مجاز برای تحویل تمرین های تئوری در اختیار شما خواهد بود.
 ۳. سقف تاخیر برای تحویل هر تمرین ۷ روز خواهد بود و پس از آن پاسخنامه تمرین منتشر خواهد شد.
 ۴. ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران طراح، خانم جعفری و آقای صفوی مطرح کنید.
- @fjafari79, @Safavi_MRS

۱ ماتریس پاسکال

درایه های ماتریس مربعی پاسکال S به صورت زیر تعریف می شوند:

$$S_{ij} = \binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j}$$

برای مثال برای ماتریس 5×5 داریم:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$$

الف) تجزیه LU این ماتریس را در حالت کلی $(n \times n)$ بدست آورید و ثابت کنید که دترمینان این ماتریس همواره برابر ۱ خواهد بود.

ب) یکی از درایه های روی قطر اصلی این ماتریس را در حالت کلی $(n \times n)$ یک واحد کاهش دهید و دترمینان ماتریس حاصل را بدست آورید.

۲ یک نامساوی!

اگر ماتریس X به صورت $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد که $x_i \in \mathbb{R}^n$ ، ثابت کنید داریم:

$$|\det(X)| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|$$

راهنمایی: از تجزیه QR کمک بگیرید.

۳ دترمینان ماتریس Hessenberg

ماتریس Hessenberg، یک ماتریس مثلثی به همراه یک قطر اضافه است. برای نمونه سه ماتریس آن به صورت زیر هستند:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, H_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

رابطه ای برای دترمینان H_n پیدا کنید و مقدار دترمینان H_{10} را از این رابطه بدست آورید.

۴ ماتریس دوران

با استفاده از قطری سازی ماتریس دوران ثابت کنید:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

۵ ماتریس های متشابه

اگر $A, B \in M_n$ و ماتریس های A و B متشابه باشند، موارد زیر را ثابت کنید:

الف. $tr(B) = tr(A)$

ب. $det(B) = det(A)$

ج. A^2 و B^2 نیز متشابه هستند.

د. اگر A قطری شدنی باشد، B نیز قطری شدنی است.

۶ صحیح و غلط!

درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل یا مثال نقض مشخص کنید.

الف. ماتریسی با مقادیر ویژه حقیقی و n بردار ویژه حقیقی، متقارن است.

ب. ماتریسی با مقادیر ویژه حقیقی و n بردار ویژه متعامد یکه، متقارن است.

ج. ماتریس وارون یک ماتریس وارون پذیر متقارن، متقارن است.

۷ ماتریس بلوکی

اگر $A = X\Lambda X^{-1}$ ، آنگاه ماتریس بلوکی $B = \begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ را قطری سازی کرده و مقادیر و بردارهای ویژه آن را بنویسید.

۸ ضرب داخلی و مقادیر ویژه

اگر ماتریس $A \in M_n(\mathbb{F})$ یک ماتریس هرمیتی باشد، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{F}^n$ ثابت کنید داریم:

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$$

۹ استقلال بردارهای ویژه

اثبات کنید اگر ماتریس X دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد که متناظر با بردارهای ویژه v_1, \dots, v_n هستند، اگر مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ از یکدیگر متمایز باشند، بردارهای v_1, \dots, v_s مستقل خطی خواهند بود.

۱۰ امتیازی: یک نامساوی دیگر!

می خواهیم یک نامساوی نسبتاً پیچیده را اثبات کنیم. برای این کار دو لم را اثبات می کنیم و سپس به سراغ قضیه اصلی می رویم!

لم ۱: ماتریس A یک ماتریس متقارن است و ماتریس B از حذف سطر و ستون آخر ماتریس A به دست می آید. ثابت کنید داریم:

$$\lambda_{\min}(B) \geq \lambda_{\min}(A)$$

لم ۲: ماتریس بلوکی متقارن A را که به صورت زیر تعریف می شود در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C^T & D \end{bmatrix}$$

ثابت کنید داریم:

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\min}(B) + \lambda_{\max}(D)$$

راهنمایی: از این قضیه استفاده کنید که برای هر بردار نرمال مانند x داریم:

$$x^T A x \geq \lambda_{\min}(A)$$

قضیه: ثابت کنید اگر ماتریس بلوکی متقارن A که از k^2 ماتریس کوچک تر به صورت زیر تشکیل شده است را در نظر بگیریم:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,k} \\ A_{1,2}^T & A_{2,2} & \dots & A_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,k}^T & A_{2,k}^T & \dots & A_{k,k} \end{bmatrix}$$

برای $k \geq 2$ داریم:

$$(k-1)\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{\max}(A_{i,i})$$