۱ مرتبه ماتریس

اگر A ماتریس $n \times m$ و B ماتریس $n \times p$ باشد، به طوری که $AB = 0$ ثابت کنید $rank(A) + rank(B) \leq n$

$A \in C^{m \times n}$ and $B \in C^{n \times p}$ $\longrightarrow$ $rank(A) + rank(B) \leq n$

normal rank from B $\longrightarrow$ $B = P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (p-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (p-r)} \end{bmatrix} Q$ $\quad P \in C^{n \times n}$ $\quad Q \in C^{p \times p}$

$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} P^{-1}$ $\quad A_1 \in C^{r \times r}$, $A_2 \in C^{r \times (n-r)}$, $A_3 \in C^{(m-r) \times r}$, $A_4 \in C^{(m-r) \times (n-r)}$

$\longrightarrow AB = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} Q \longrightarrow rank(AB) = rank\left(\begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix}\right)$

$$rank\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\right) \leq \underbrace{rank\left(\begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix}\right)}_{rank\ AB} + \overbrace{rank\left(\begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \end{bmatrix}\right)}^{n-r}$$

sylvester inequality theorem

$\longrightarrow rank(A) + rank(B) \leq rank(AB) + n \longrightarrow AB = 0 \Rightarrow rank(AB) = 0 \rightarrow rank(A) + rank(B) \leq n$

۲ تجزیه‌پذیری

فرض کنید $A \in M(F)$ و همچنین $1 \leq rank(A) = r \leq n - 1$ باشد.نشان دهید ماتریس‌های $B_{n \times r}$ و $C_{r \times n}$ وجود

دارند به قسمتی که:

$rank(B) = rank(C) = r$
$A = BC$

۳ تجزیه QR

اگر A ماتریسی با ابعاد $m \geq n$ باشد آنگاه ثابت کنید که در تجزیه QR ماتریس A $(A = QR)$، رنک ماتریس R و A با هم برابرند.

As we know for square matrix A we can defactorize as $\to A = QR \to$ upper triangular matrix

orthogonal $Q^T = Q^{-1}$

More generally if $A \in C^{m\times n}$ where $m \geqslant n \to A = QR$

$Q \to$ unitary $m\times m$ matrix

$R \to$ $m\times n$ upper triangular matrix

bottom $(m-n)$ rows are completely zero. $\to A = QR = Q\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1$

$\mathrm{rank}(R) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = k$

independant vectors

Full column rank

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(Q_1 R_1) = \mathrm{rank}(R_1) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = k$

۴ مینیمم فاصله

اگر نقاط $P = (x, x, x)$ و $Q = (y, 3y, -1)$ بر روی ۲ خط که هیچگاه یکدیگر را قطع نمیکنند قرار داشته باشند آنگاه x و y را به گونه‌ای انتخاب کنید که مربع فاصله بین این ۲ نقطه $(||P - Q||^2)$ را از یکدیگر مینیمم کند.

if we assume these 2 vectors in R^3

$A = x\hat{i} + x\hat{j} + x\hat{k}$

$B = y\hat{i} + 3y\hat{j} - \hat{k}$

these 2 lines never collide.

$\|P - Q\|^2 = (x-y)^2 + (x-3y)^2 + (x+1)^2 \rightsquigarrow$ must be minimum

to minimize the function we must reduce the 3 components to zero as much as possible

so $\rightsquigarrow x = -1 \to$

$-1 - y = 0$

$-1 - 3y = 0$

$y = -1 \to 0 + 4 + 0 = 4 \to D = \sqrt{4} = 2$

$y = -\frac{1}{3} \to \frac{4}{9} + 0 + 0 = \frac{4}{9} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4}{9}} = \boxed{\frac{2}{3}} \to x = -1$ and $y = -\frac{1}{3}$

and $y = 0$ in case $\to 1 + 1 + 0 = 2 \to D = \sqrt{2}$

۵ فضاهای بنیادی

نگاشت بردار $b = \begin{bmatrix}1\\2\\7\end{bmatrix}$ را بر فضای ستونی $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\\-2 & 4\end{bmatrix}$ تعیین نموده و آن را به صورت $p+q$ بنویسید، جاییکه $p \in col(A)$ و $q \perp col(A)$. از چهار زیرفضای بنیادی A، q متعلق به کدام است؟

$A = [\underline{a_1}, \underline{a_2}] \quad \underline{p} = \underline{A}\,\underline{\hat{x}}$

$e \longrightarrow$ prepondicular

$$\left.\begin{array}{l} A^T e = 0 \\ \underline{b} - \underline{p} = \underline{e} = \underline{b} - \underline{A}\,\underline{\hat{x}} \end{array}\right\} A^T(\underline{b} - \underline{A}\,\underline{\hat{x}}) = 0 \rightsquigarrow \underline{A}^T \underline{b} = \underline{A}^T\underline{A}\,\underline{\hat{x}} \rightsquigarrow \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\underline{p} = \underline{A}\,\underline{\hat{x}} \rightsquigarrow \underline{A}(\underline{A}^T\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{b} = \underline{p} \longrightarrow p = \begin{bmatrix}2.09\\-1.27\\5.91\end{bmatrix}, \quad \underline{e} = \underline{b} - \underline{p} = \begin{bmatrix}-1.09\\3.27\\1.09\end{bmatrix} \rightsquigarrow q$$

(در زیر فضای پوچ چپ A)

۶ پایه یکامتعامد

در $\mathbf{R}^4$ پایه یکامتعامدی برای W پیدا کنید جاییکه $W = span\{(1,1,1,1),(1,1,3,5),(1,1,7,7)\}$.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \left(\frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\right)\vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \left(\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\right)\vec{v}_1 - \left(\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\right)\vec{v}_2 \\
&\vdots \\
\vec{v}_n &= \vec{u}_n - \left(\frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\right)\vec{v}_1 - \left(\frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\right)\vec{v}_2 - \cdots - \left(\frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}_{n-1}}{\|\vec{v}_{n-1}\|^2}\right)\vec{v}_{n-1}
\end{aligned}$$

Gram-Schmidt alg :

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - \left(\frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|v_1\|^2}\right)\vec{v}_1$

$v_3 = u_3 - \left[\left(\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|v_1\|^2}\right)\vec{v}_1 + \left(\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|v_2\|^2}\right)\vec{v}_2\right]$

$\rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{یکامتعامد}} \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix} - \left(\frac{\overset{10}{\cancel{(1,1,3,5)\cdot(1,1,1,1)}}}{4}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{یکامتعامد}} \begin{bmatrix}\frac{-3}{2\sqrt{11}}\\\frac{-3}{2\sqrt{11}}\\\frac{1}{2\sqrt{11}}\\\frac{5}{2\sqrt{11}}\end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow v_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\7\\7\end{bmatrix} - \left[\left(\frac{\overset{4}{\cancel{(1,1,7,7)\cdot(1,1,1,1)}}}{\cancel{4}}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \left(\frac{\overset{\frac{18}{11}}{\cancel{(1,1,7,7)\cdot(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2})}}}{11}\right)\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}-\frac{12}{22}\\-\frac{12}{22}\\\frac{48}{22}\\-\frac{24}{22}\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{یکامتعامد}} \begin{bmatrix}\frac{-12}{56.1}\\\frac{-12}{56.1}\\\frac{48}{56.1}\\\frac{-24}{56.1}\end{bmatrix} \rightsquigarrow v_1 = [v_1, v_2, v_3]$

۷ زیر فضای سطری(امتیازی)

ماتریس A به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

۱. فرم کاهش یافته سطری پلکانی ماتریس A ($R = rref(A)$) را بدست آورید.

۲. بعد و یک پایه برای هر کدام از چهار زیر فضای اساسی ماتریس A به دست آورید.

۳. ثابت کنید فضای سطری A و A^TA برابر است.

۴. فرم کاهش یافته سطری پلکانی برای ماتریس R^TR را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1]{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\div 2]{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

column dimension = 2 → فضای ستونی

pivot → $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

row dimension = 2 → فضای سطری

pivot → $[1, 0, -2, 3, -1], [0, 1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}]$

Null dimension = 5 − 2 = 3 → فضای پوچی

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{x_3, x_4, x_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0 \rightarrow -1 + x_1 - 2x_2 = 0, \ 2x_2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 2, \ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 \rightarrow x_1 - 2x_2 + 3 = 0, \ 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \rightarrow x_1 - 2x_2 + 2 = 0, \ 2x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$N(A^T) = 3 - 2 = \boxed{1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(A^T) = C((A^TA)^T) \rightarrow rref(A^TA) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فضای سطری وستونی یکسان

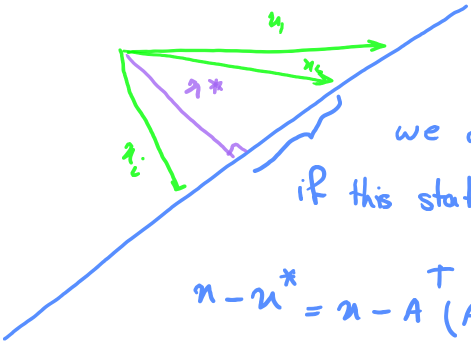
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow R^TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{17}{4} & -6 & \frac{11}{4} \\ 3 & 0 & -6 & 9 & -3 \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{4} & -3 & \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

$$rref(R^TR) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{2 row dimensions.}$$

$Ax=b \xrightarrow{\text{Transpose}} x^TA^T=b^T$

دستگاه معادلات $Ax=b$ را در نظر بگیرید که $A \in R^{m\times n}$ یک ماتریس رتبه کامل سطری است و $n > m$. اگر دستگاه چندین جواب داشته باشد، ثابت کنید جواب x^* که صورت زیر تعریف می شود، از بین همه جواب ها کمترین نرم را دارد.

$$x^* = A^T(AA^T)^{-1}b$$



we assume there are other answers x_i. if x^* have the minimum
if this state is true so we must have $x-x^* \perp x^*$

$$x - x^* = x - A^T(AA^T)^{-1}b$$

$$x-x^* \perp x^* = (x - A^T(AA^T)^{-1}b)^T(A^T(AA^T)^{-1}b)$$

$$\to (x^T - b^T(AA^T)^{-1}A)(A^T(AA^T)^{-1}b) = \underbrace{x^TA^T}_{b^T}(AA^T)^{-1}b - b^T\underbrace{\cancel{(AA^T)^{-1}AA^T}}_{I}(AA^T)^{-1}b = 0$$

so the x^* has the minimum norm