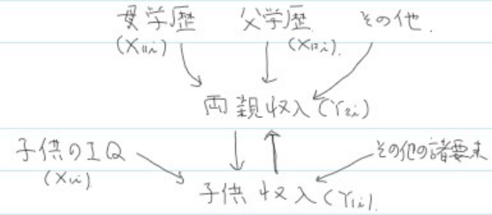
theory

2022年6月27日　16:25

1 設定（真のモデル）



概要

1. 問題設定（真のモデル）
2. 同時性バイアス → 内生性により推定量にバイアス
3. 同時性バイアス解消のための方法：IV
   - 3.1 シンプルな場合
     $Z(\in M(\mathbb{R},n,l)) \to X(\in M(\mathbb{R},n,l)) \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\beta}} y(\in \mathbb{R}^n)$
   - 3.2 複雑な場合（ただし $l \geq k$）
     $Z(\in M(\mathbb{R},n,l)) \to X(\in M(\mathbb{R},n,k)) \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\beta}} y(\in \mathbb{R}^n)$
   - 3.3 補足.

真のモデル式
$$\begin{cases} Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} X_{1i} + \beta_{12} Y_{2i} + \varepsilon_{1i} & (\varepsilon_{1i} \sim N(0, \sigma_1^2)) \\ Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} X_{21i} + \beta_{22} X_{22i} + \beta_{23} Y_{1i} + \varepsilon_{2i} & (\varepsilon_{2i} \sim N(0, \sigma_2^2)) \end{cases} \quad (*)$$

2 同時バイアス（Simultaneity Bias）：問題点

真のモデル式(*)より、

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} X_{1i} + \beta_{12} Y_{2i} + \varepsilon_{1i} \quad (\varepsilon_{1i} \sim N(0, \sigma_1^2))$$
$$= \beta_{10} + \beta_{11} X_{1i} + \beta_{12}\{\beta_{20} + \beta_{21} X_{21i} + \beta_{22} X_{22i} + \beta_{23} Y_{1i} + \varepsilon_{2i}\} + \varepsilon_{1i} \quad (\varepsilon_{1i} \sim N(0, \sigma_1^2),\ \varepsilon_{2i} \sim N(0, \sigma_2^2))$$
$$= (\beta_{10} + \beta_{12}\beta_{20}) + \beta_{11} X_{1i} + \beta_{12}\beta_{21} X_{21i} + \beta_{12}\beta_{22} X_{22i} + \beta_{12}\beta_{23} Y_{1i} + \beta_{12}\varepsilon_{2i} + \varepsilon_{1i} \quad (\because)$$
$$\Rightarrow (1 - \beta_{12}\beta_{23}) Y_{1i} = (\beta_{10} + \beta_{12}\beta_{20}) + \beta_{11} X_{1i} + \beta_{12}\beta_{21} X_{21i} + \beta_{12}\beta_{22} X_{22i} + \beta_{12}\varepsilon_{2i} + \varepsilon_{1i} \quad (\because)$$
$$\Rightarrow Y_{1i} = \boxed{\frac{1}{1 - \beta_{12}\beta_{23}}\{(\beta_{10} + \beta_{12}\beta_{20}) + \beta_{11} X_{1i} + \beta_{12}\beta_{21} X_{21i} + \beta_{12}\beta_{22} X_{22i} + \beta_{12}\varepsilon_{2i} + \varepsilon_{1i}\}} \quad (\text{where } \beta_{12}\beta_{23} \neq 1)$$

ここで $Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} X_{21i} + \beta_{22} X_{22i} + \beta_{23}\boxed{Y_{1i}} + \varepsilon_{2i}$ に上式を代入させると、

$\mathrm{Cov}[Y_{1i}, \varepsilon_{2i}] \neq 0$（なぜなら、$Y_{1i}$ は ε_{2i} にも依存する）。

$$\mathrm{Cov}[Y_{1i}, \varepsilon_{2i}] = \mathbb{E}[Y_{1i}\varepsilon_{2i}] - \mathbb{E}[Y_{1i}]\mathbb{E}[\varepsilon_{2i}]\ \mathbb{E}[Y_{1i}\varepsilon_{2i}] - \mathbb{E}[Y_{1i}]\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_{2i}|Y_{1i}]]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{1i}\varepsilon_{2i}|Y_{1i}]] - \mathbb{E}[Y_{1i}]\mathbb{E}[\varepsilon_{2i}|Y_{1i}] = \mathbb{E}[Y_{1i}\mathbb{E}[\varepsilon_{2i}|Y_{1i}]] - \mathbb{E}[Y_{1i}]\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_{2i}|Y_{1i}]]$$

?

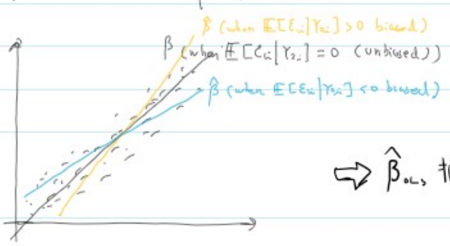
(i) ここで $\mathbb{E}[\varepsilon_{2i}|Y_{1i}]$ が成り立つと仮定すると、
$\mathrm{Cov}[Y_{1i}, \varepsilon_{2i}] = \mathbb{E}[Y_{1i} \cdot 0] - \mathbb{E}[Y_{1i}] \cdot 0 = 0$ となる。

(ii) ここで、$\mathrm{Cov}[Y_{1i}, \varepsilon_{2i}] = 0$ が成り立つとすると、である。
$\mathbb{E}[Y_{1i}\mathbb{E}[\varepsilon_{2i}|Y_{1i}]] = \mathbb{E}[Y_{1i}]\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_{2i}|Y_{1i}]]$
$\Rightarrow$ |

(i),(ii) より、$\mathrm{Cov}[Y_{1i}, \varepsilon_{2i}] \neq 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_{2i}|Y_{1i}] \neq 0$ より、外生性の仮定を満たさない。

同様の議論を展開すると、$\mathrm{Cov}[Y_{2i}, \varepsilon_{1i}] \neq 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_{1i}|Y_{2i}] \neq 0$ である。

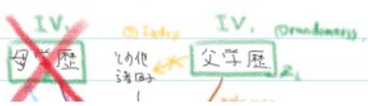
このとき推定量にはバイアスがかかる。
cf 2 統 マクロ BS Lec 14 P54-P58.
↓
推定値の正負の符号が変わってしまうなどの問題を起こしかねない。



⇨ $\hat{\beta}_{OLS}$ 推定量は biased!!

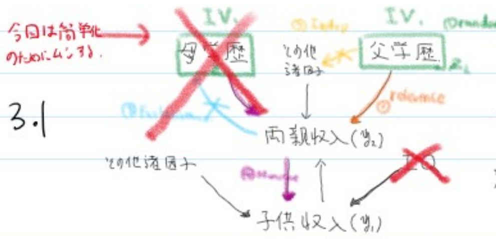
3 IV：解決策（Simple Case）

今回は簡単化のためにムシする。



2SLS を行う。

3.1



2SLS を行う。

まず、$\hat{\beta}_{2SLS}$ を求める (推定量の定式化).

次に、$\hat{\beta}_{2SLS}$ の一致性を示す。

(1) IV 推定量の定式化 (2SLSを以下のように定義する)

Def IV Estimater:

$$\begin{array}{l} Z \in M(\mathbb{R}; m, n) \\ \downarrow \\ X \in M(\mathbb{R}; m, n) \\ \downarrow\uparrow \\ y \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

左図のように #IV, # Indep Var が一致する場合、

$\hat{\beta}_{IV} \equiv (Z'X)^{-1} Z' y$ と定義する.

(2) IV 推定量の一致性を示す.

proof $\hat{\beta}_{IV} \equiv (Z'X)^{-1} Z' y = (Z'X)^{-1} Z'(X\beta + \varepsilon)$ (真のモデル)

$= \cancel{(Z'X)^{-1} Z'X}\beta + (Z'X)^{-1} Z'\varepsilon = \beta + (Z'X)^{-1} \underbrace{Z'\varepsilon}_{0} \longrightarrow \beta$

IVs の性質を考えれば $Z \perp \varepsilon$ は自明

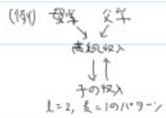
□

3.2 IV : 解決 (Complex Case) : 過剰識別制約

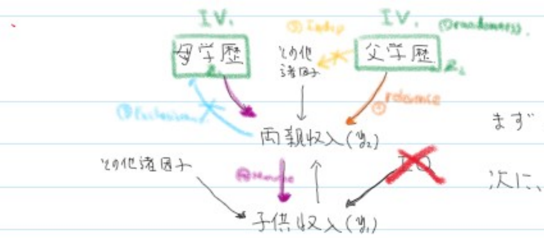
(0) 前提 : IV の数を l, 内生変数の数を k とする.

(i) $l = k$ のとき : Just identified.

(ii) $l > k$ のとき : Over identified. ← (例)



(iii) $l < k$ のとき : unidentified. ← 解けない. 不無限解



2SLS を行う。

まず、$\hat{\beta}_{2SLS}$ を求める (推定量の定式化).

次に、$\hat{\beta}_{2SLS}$ の一致性を示す。

(2) IV 推定量の定義 (一般化)

Def :

$$\begin{array}{l} Z \in M(\mathbb{R}, n, l) \quad \text{Sample Size: } n \\ \downarrow \text{IV} \qquad \text{変数の数 } l \geq k \\ X \in M(\mathbb{R}, n, k) \\ \beta \downarrow \quad \uparrow \\ y \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

左のような状況で、IV Estimator を、

$\hat{\beta}_{IV} = (\hat{X}' X)^{-1} \hat{X}' y$

(ただし、$\hat{X} = Z(Z'Z)^{-1} Z' X$ とする.)

(3) IV 推定量の性質. 一致性をもつ.

proof. $\hat{\beta}_{IV} \equiv (\hat{X}'X)^{-1} \hat{X}' y = (\hat{X}'X)^{-1} \hat{X}'(X\beta + \varepsilon)$ (真のモデル)

proof. $\hat{\beta}_{IV} \equiv (\hat{X}'X)^{-1}\hat{X}'y = (\hat{X}'X)^{-1}\hat{X}'(X\beta + \varepsilon)$ (∵真のモデルより)

$$= \cancel{(\hat{X}'X)^{-1}}\cancel{(\hat{X}'X)}\beta + (\hat{X}'X)^{-1}\hat{X}'\varepsilon$$

$$= \beta + (\hat{X}'X)^{-1}(Z(Z'Z)^{-1}Z'X)'\varepsilon \quad (∵\hat{X}\text{のテーギ})$$

$$= \beta + (\hat{X}'X)^{-1}((Z'Z)^{-1}Z'X)'Z'\varepsilon \quad (\text{cf } (AB)' = (B'A').)$$

ここで IVの諸性質より、$Z \perp\!\!\!\perp \varepsilon$ つまり、$Z'\varepsilon \longrightarrow 0$ である。

よって一致性が示された。 □

3.3 補足.

(0) 前置き：(IVの数 l) ≥ (内生変数の数 k)、に加えて外生変数もとりこむ。

(1) IV推定量のさらに一般的な定義

Def.

$$\begin{tikzcd}
Z \in M(\mathbb{R}; n, l) \arrow[d] & \\
X \in M(\mathbb{R}; n, k) \arrow[d, shift left] & W \in M(\mathbb{R}; n, j) \arrow[dl] \\
y \in \mathbb{R}^n \arrow[u, shift left] &
\end{tikzcd}$$

上図のような状況において、$\hat{\beta}_{IV} \equiv (\hat{M}'M)^{-1}\hat{M}'y$

(ただし、$M \equiv [X \quad W]$，$\hat{M}' \equiv [(Z(Z'Z)^{-1}Z'X) \quad W]$ とおく)

(2) IV推定量の一致性を示す。

proof $\hat{\beta}_{IV} \equiv (\hat{M}'M)^{-1}\hat{M}'y = (\hat{M}'M)^{-1}\hat{M}'(M\beta + \varepsilon)$ (真のモデルより)

$$= \cancel{(\hat{M}'M)^{-1}}\cancel{\hat{M}'M}\beta + (\hat{M}'M)^{-1}\hat{M}'\varepsilon$$

$$= \beta + (\hat{M}'M)^{-1}[Z(Z'Z)^{-1}Z'X \quad W]'\varepsilon$$

$$= \beta + (\hat{M}'M)^{-1}\begin{bmatrix}(Z(Z'Z)^{-1}Z'X)' \\ W'\end{bmatrix}\varepsilon$$

$$= \beta + (\hat{M}'M)^{-1}\begin{bmatrix}((Z'Z)^{-1}Z'X)'Z' \\ W'\end{bmatrix}\varepsilon$$

$$= \beta + (\hat{M}'M)^{-1}\begin{bmatrix}(Z'Z)^{-1}Z'X \\ W'(Z')^{-1}\end{bmatrix} Z'\varepsilon \longrightarrow \beta \text{（前述と同じ理由）}$$