

Lineare Algebra 1

Roger Burkhardt

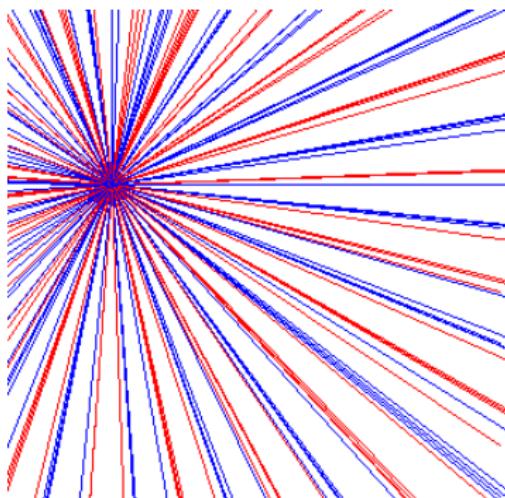
roger.burkhardt@fhnw.ch

Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik
Institut für Geistes- und Naturwissenschaft

HS 2010/11



1 Lineare Gleichungssysteme



1 Lineare Gleichungssysteme

- Einführung
 - Lineare Gleichungen
 - Matrizen
 - Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor
- Definition
 - Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsverfahren
 - Elementare Zeilenumformungen
 - Zeilenstufenform
 - Rang einer Matrix
- Lösungsfälle
 - Rang und lineare Gleichungssysteme
- Gauss'scher Algorithmus
 - Gauss'scher Algorithmus
 - Gauss-Jordan-Verfahren

Lineare Gleichungen

Definition

Unter einer linearen Gleichung mit den n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n versteht man eine Bestimmungsgleichung für die n Unbekannten, in welcher die Unbekannten nur linear auftreten.
D.h. eine Gleichung der Form:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \sum_{k=1}^n a_kx_k = b \quad (1)$$

dabei nennt man a_1, a_2, \dots, a_n die Koeffizienten und b den Absolutteil der linearen Gleichung.

Beispiel

Die Gleichung $x - 2y + z = 1$ ist eine lineare Gleichung mit den drei Unbekannten x , y und z . Aus der Vektorgeometrie wissen wir, dass dies die Koordinatengleichung einer Ebene im dreidimensionalen reellen Raum ist.

Bemerkung

Unter der Lösungsmenge einer linearen Gleichung versteht man die Menge aller Punkte, die die Gleichung erfüllen. Es versteht sich von selbst, dass die Lösungsmenge einer Gleichung mit n Unbekannten eine Teilmenge des n -dimensionalen Raumes ist.

Beispiel

Die Lösung der linearen Gleichung aus dem vorigen Beispiel lautet:

$$\mathbf{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 1\} = \{(2y - z + 1, y, z)\}$$

In der zweiten Darstellung beschreiben wir die Lösungspunkte in Abhängigkeit der beiden Variablen y und z . Wir haben also zwei frei wählbare Variablen und sagen deshalb, dass die Dimension des Lösungsraumes zwei ist. In dieser Schreibweise lassen sich einzelne Elemente der Lösungsmenge einfach durch eine Wahl von Werten für y und z beschreiben. Sei z.B. $y = 1$ und $z = 2$, so findet man den Lösungspunkt $(1, 1, 2)$. Natürlich hat unsere Lösungsmenge unendlich viele Elemente (alle Punkte auf der Ebene, die durch diese Koordinatengleichung beschrieben wird).

Matrizen

Definition

Eine $n \times m$ -Matrix über \mathbf{K} ist eine Anordnung von $n * m$ Elementen von \mathbf{K} nach dem folgenden Schema:

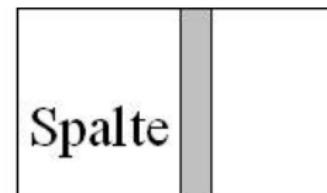
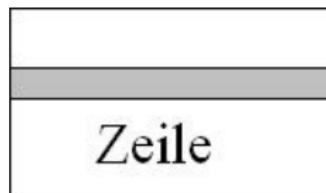
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Die $a_{ij} \in \mathbf{K}$ nennt man die Koeffizienten der Matrix.

Bemerkung

Die waagrecht geschriebenen n-Tupel $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{im})$ nennt man die Zeilen und die senkrecht geschriebenen m-Tupel

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ die Spalten der Matrix.



Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor

Definition

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times 1} = \mathbb{K}^m$ wird das Produkt $Ax \in \mathbb{K}^n$ der

Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ mit dem Spaltenvektor x definiert durch:

$$Ax := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} x_k \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} x_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} x_k \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir wollen nun

das Produkt dieser Matrix mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

bestimmen:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 * 1 + 2 * 2 + 0 * 3 + (-3) * 4 \\ 4 * 1 + 0 * 2 + 1 * 3 + 2 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Ein System aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten nennt man ein lineares Gleichungssystem. Mit der Matrizenrechnung lässt es sich wie folgt schreiben:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b \quad (2)$$

Dabei nennt man die Matrix $A = (a_{ij})$ die Koeffizientenmatrix und den Spaltenvektor $b = (b_i)$ die Absolutglieder des Systems. Sind alle Absolutglieder gleich Null, so nennt man das lineare Gleichungssystem homogen, sonst inhomogen. Weiter nennt man die Matrix $A|b = (a_{ij} | b_i)$ die man aus der Koeffizientenmatrix durch das Anhängen des Spaltenvektors erhält, die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Beispiel

Das folgende lineare Gleichungssystem besteht aus vier Gleichungen mit drei Unbekannten und ist, da nicht alle Absolutglieder gleich Null sind, ein inhomogenes System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{lcl} x + 2y + 3z & = & 1 \\ 2x + 3y + 4z & = & 0 \\ 3x + 4y + z & = & 0 \\ 4x + y + 2z & = & -1 \end{array} \right|$$

Bemerkung

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der linearen Gleichungen aus denen sich das linear Gleichungssystem zusammen setzt. Daraus folgt nun sofort, dass die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten eine Teilmenge des n -dimensionalen reellen Raumes ist.

Elementare Zeilenumformungen

Theorem

Die folgenden Operationen (elementare Zeilenumformungen), angewandt auf ein lineares Gleichungssystem, verändern die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht (sogenannte Äquivalenzumformungen!):

- *Multiplikation einer Gleichung (Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix) mit einer reellen Zahl ungleich Null.*
- *Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix).*
- *Ersetzen der i -ten Gleichung durch eine (nicht triviale) Linearkombination der i -ten und der j -ten Gleichung (Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix).*

Bemerkung

Die ersten beiden Punkte dürften klar sein. Für den dritten Punkt stelle man sich einmal eine solche Linearkombination vor:

$$s_1 \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k}_{b_i} + s_2 \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k}_{b_j} = s_1 b_i + s_2 b_j$$

Nun gilt sicher, dass alle Lösungen des ursprünglichen Systems diese neue Gleichung auch erfüllen. Fast so einfach lässt sich zeigen, dass keine neuen Lösungspunkte hinzu kommen!

Die Gültigkeit des letzten Satzes macht man sich nun zu Nutze um lineare Gleichungssysteme zu lösen. Dazu formt man das lineare Gleichungssystem, bzw. die erweiterte Koeffizientenmatrix mit den elementaren Zeilenumformungen so um, dass man die Lösungen einfacher bestimmen kann. Dazu gehen wir in einem ersten Schritt soweit, dass wir unterhalb der Diagonalen alles Nullen erzeugen, d.h. die erweiterte Koeffizientenmatrix in die sogenannte Zeilenstufenform umformen!

Zeilenstufenform

Definition

Man nennt eine Matrix, für die gilt:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \quad \forall i > j \\ a_{ii} &\neq 0 \quad \forall i < k \\ a_{st} &= 0 \quad \forall s > k \forall t \end{aligned} \tag{3}$$

eine Matrix in Zeilenstufenform.

Bemerkung

Jede Matrix lässt sich (wenn auch Spaltenvertauschungen zugelassen sind) durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform überführen!

Beispiel

Wir wollen die nachfolgende Matrix in Zeilenstufenform überführen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Wir wenden folgende Umformungen an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} II \xleftarrow{\rightarrow 4I - II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$III \xleftarrow{\rightarrow 7I - III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} III \xleftarrow{2II - III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix

Definition

Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen einer Matrix A nennt man den Rang der Matrix A . Man schreibt: $\text{rang}(A) = \text{rg}(A)$

Theorem

Der Rang einer Matrix ist invariant bezüglich elementarer Zeilenumformungen, d.h. der Rang einer durch elementare Zeilenumformungen aus der Matrix A umgeformten Matrix A' ist gleich dem Rang der ursprünglichen Matrix A :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A') \quad (4)$$

Bemerkung

Der Rang einer Matrix in Zeilenstufenform ist gleich der von Null verschiedener Zeilen.

Beispiel

Wir wollen den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ bestimmen!

Mit elementaren Zeilenumformungen finden wir:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} II \Leftarrow 2I - II \\ III \Leftarrow 3I - III \\ IV \Leftarrow 7II - IV \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & 10 \end{array} \right)$$

Fortsetzung

$$\begin{array}{l} A' \rightarrow A'' \\ III \Leftarrow III - 2II \\ IV \Leftarrow 7III - IV \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} A'' \rightarrow A''' \\ IV \Leftarrow III - IV \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nun gilt gemäss letztem Satz:

$$rg(A) = rg(A') = rg(A'') = rg(A''')$$

Da die Matrix A''' (in Zeilenstufenform) drei nicht verschwindende Zeilen besitzt, ist ihr Rang gleich 3. Also:

$$rg(A) = rg(A''') = 3$$

Rang und lineare Gleichungssysteme

Theorem

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten, so gilt:

<i>reguläres System</i> $rg(A) = n$	<i>eindeutiger Lösungspunkt</i> ($\dim(\mathbf{L}) = 0$)
<i>singuläres System</i> $rg(A) < n$	$rg(A) = rg(A b)$
$rg(A) < rg(A b)$	<i>unendlich viele Lösungspunkte</i> $\dim(\mathbf{L}) = n - rg(A)$ <i>leere Lösungsmenge</i> $\mathbf{L} = \{\}$

Beispiel

Wir suchen die Lösung des nachfolgenden Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir formen dazu die erweiterte Koeffizientenmatrix um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} II \leftarrow \overset{\rightarrow}{II} - 2I \\ III \leftarrow 2I - III \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} I \leftarrow \vec{I} - II \\ III \leftarrow III - 2II \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} I \leftarrow \overset{\rightarrow}{7I} - 2III \\ II \leftarrow 7II + 2III \end{array}$$

Fortsetzung

$$\left(\begin{array}{cccc} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} I \leftarrow \frac{1}{7}I \\ II \leftarrow \frac{1}{7}II \\ III \leftarrow \frac{1}{7}III \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{array} \right)$$

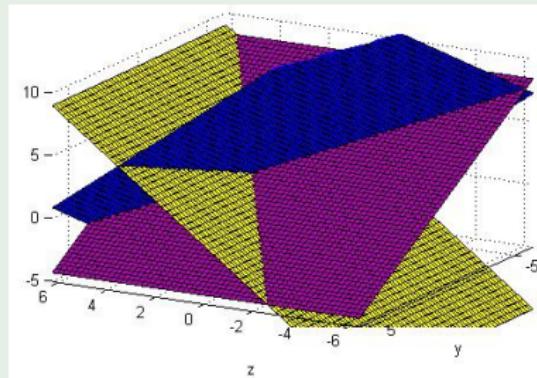
Wir erhalten also das äquivalente System:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \\ \frac{5}{7} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \\ \frac{5}{7} \end{array} \right)$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist 3, also ist das System regulär und es existiert ein eindeutiger Lösungspunkt. Diesen Lösungspunkt kann aus dem umgeformten System einfach berechnet werden:

Fortsetzung

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \left\{ \left(\frac{4}{7}, \frac{10}{7}, \frac{5}{7} \right) \right\}$$



In der Grafik sind die drei Ebenen eingezeichnet, welche durch die drei linearen Gleichungen beschrieben werden. Diese drei Ebenen schneiden sich im Lösungspunkt des linearen Gleichungssystems!

Beispiel

Wir suchen die Lösung des nachfolgenden Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wir formen dazu die erweiterte Koeffizientenmatrix um:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} II \Leftarrow \overset{\rightarrow}{3II} - 2I \\ III \Leftarrow 4I - 3III \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} I \Leftarrow \overset{\rightarrow}{5I} + II \\ III \Leftarrow III - II \end{array} \quad \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} I \Leftarrow \frac{1}{15}I \\ II \Leftarrow \frac{1}{5}II \end{array}$$

Fortsetzung

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

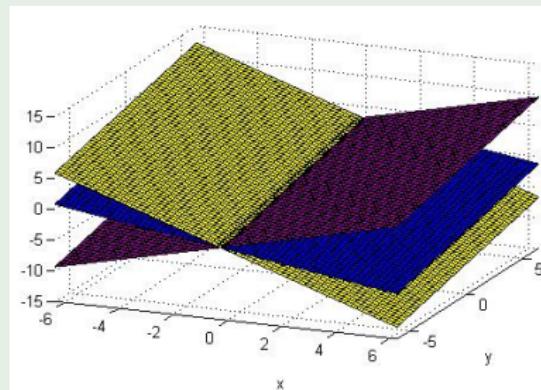
Wir erhalten also das äquivalente System:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{array} \right)$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist 2, also ist das System singulär. Da der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ebenfalls 2 ist, gibt es unendlich viele Lösungspunkte. Diese Lösungspunkte können aus dem umgeformten System einfach berechnet werden:

Fortsetzung

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5} + 2t, t \right) \right\}$$



Die drei Ebenen schneiden sich in einer gemeinsamen Schnittgeraden! Es gibt also unendlich viele Lösungspunkte!

Beispiel

Wir suchen die Lösung des nachfolgenden Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir formen dazu die erweiterte Koeffizientenmatrix um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 11 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{II} \leftarrow \overset{\rightarrow}{2}\text{II} - \text{I} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & -7 \\ 0 & 9 & 7 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{I} &\leftarrow \overset{\rightarrow}{9}\text{I} - \text{II} & \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 0 & -34 & 16 \\ 0 & 9 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \\ \text{III} &\leftarrow \text{III} - \text{II} \end{aligned}$$

Fortsetzung

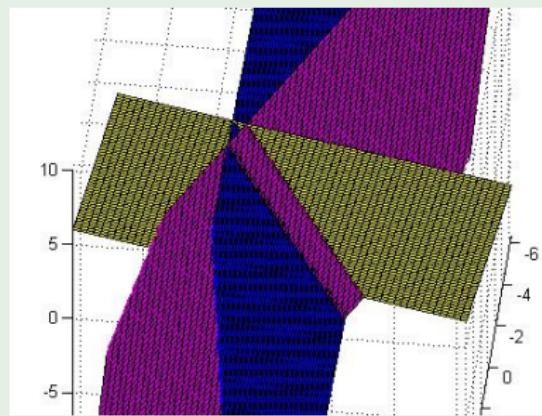
Wir erhalten also das äquivalente System:

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 & -34 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist 2, also ist das System singulär. Da der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix grösser ist, gibt es eine widersprüchliche Gleichung ($0 = 5$) und somit hat das System eine leere Lösungsmenge:

$$\Rightarrow L = \{\}$$

Fortsetzung



Die drei Ebenen haben keine gemeinsamen Schnittpunkte!

Gauss'scher Algorithmus

Das in den letzten Beispielen angewandte Verfahren nennt man den **Gauss-Jordan Algorithmus**. Dabei wird verucht mittels elementarer Zeilenumformungen eine Matrix in Diagonalform zu erzeugen. Bevor wir dieses Verfahren ausführlicher diskutieren, soll hier zuerst der **Gauss'sche Algorithmus** kurz skizziert werden.

Das Verfahren nach Gauss formt eine Matrix (z.B. erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems) in Zeilenstufenform um. Das Verfahren kann sprachlich folgendermassen als Rezept beschrieben werden:

Gauss'scher Algorithmus

- Beginne in der ersten Spalte
 - Finde eine Zeile ohne führende Null. Ist dies nicht die erste Zeile vertausche die erste mit der gefundenen Zeile.
 - Sollte in der ganzen Spalte alles Nullen stehen, so vertausche diese Spalte mit einer anderen (Variablen müssen entsprechend vertauscht werden) oder fahre einfach in der nächsten Spalte weiter (ein Element oberhalb der Diagonalen!).
- Führe mit allen Zeilen unterhalb der Ersten eine Ersetzung der Zeile mittels einer Linearkombination der entsprechenden Zeile und der ersten Zeile durch, so dass in der ersten Spalte eine Null zu stehen kommt.
- Verfahre analog weiter für die weiteren Spalten, indem spaltenweise unterhalb des Diagonalelements Nullen erzeugt werden. Zum Schluss liegt die Matrix in Zeilenstufenform vor!

Beispiel

Wir betrachten den Algorithmus an einem Beispiel ausführlich:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 9 & 2 & 0 & 13 & -1 & 19 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 7 & 10 \\ 15 & 5 & 2 & 27 & 1 & 42 & 51 \\ 1 & 3 & 2 & 9 & 1 & 12 & 17 \\ 8 & 2 & 1 & 13 & 0 & 21 & 23 \end{pmatrix}$$

$$II \leftarrow II - 9I$$

Wir starten in der ersten Spalte. Da das Diagonalelement (erste Zeile erste Spalte) ungleich Null ist, können wir in allen Zeilen unter dem Diagonalelement Nullen erzeugen.

Fortsetzung

Für die zweite Zeile verwenden wir die folgende Ersetzung
 (Linearkombination) $II \leftarrow II - 9I$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 9 & 13 & 8 & 37 & 47 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 7 & 10 \\ 15 & 5 & 2 & 27 & 1 & 42 & 51 \\ 1 & 3 & 2 & 9 & 1 & 12 & 17 \\ 8 & 2 & 1 & 13 & 0 & 21 & 23 \end{pmatrix}$$

$$III \leftarrow III - I, IV \leftarrow IV - 15I, V \leftarrow V - I, VI \leftarrow VI - 8I$$

Fortsetzung

Für die restlichen Zeilen analog $III \leftarrow III - I$, $IV \leftarrow IV - 15I$,
 $V \leftarrow V - I$ und $VI \leftarrow VI - 8I$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 9 & 13 & 8 & 37 & 47 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 9 & 13 \\ 0 & 5 & 17 & 27 & 16 & 72 & 96 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & 2 & 14 & 20 \\ 0 & 2 & 9 & 13 & 8 & 37 & 47 \end{pmatrix}$$

$$III \leftarrow II - 2III, IV \leftarrow 5II - 2IV, V \leftarrow 3II - 2V, VI \leftarrow VI - II$$

Fortsetzung

Nun folgt die zweite Spalte. Auch hier ist das Diagonalelement ungleich Null und mittels geeigneter Ersetzungen können die Elemente unterhalb der Diagonalen auf Null gesetzt werden:

$(III \leftarrow II - 2III, IV \leftarrow 5II - 2IV, V \leftarrow 3II - 2V$ und
 $VI \leftarrow VI - II)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 9 & 13 & 8 & 37 & 47 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 & 19 & 21 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 8 & 41 & 43 \\ 0 & 0 & 21 & 21 & 20 & 83 & 101 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$IV \leftarrow 11III - 5IV, V \leftarrow 21III - 5V$$

Fortsetzung

Weiter mit der dritten Spalte. Auch hier ist das Diagonalelement ungleich Null und mittels geeigneter Ersetzungen können die Elemente unterhalb der Diagonalen auf Null gesetzt werden ($IV \leftarrow 11III - 5IV$, $V \leftarrow 21III - 5V$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 9 & 13 & 8 & 37 & 47 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 & 19 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & -16 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V \leftarrow 4VI + V$$

Fortsetzung

In der vierten Spalte ist nun das Diagonalelement gleich Null und zudem auch alle Elemente unterhalb dem Diagonalelement. Nun fahren wir in der fünften Spalte weiter (aber mit der vierten Zeile). ($V \leftarrow 4VI + V$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 9 & 13 & 8 & 37 & 47 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 & 19 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$II \leftarrow \frac{1}{2}II, III \leftarrow \frac{1}{5}III, IV \leftarrow \frac{1}{4}IV$$

Fortsetzung

Nun können unterhalb der Diagonalen keine weiteren Nullen erzeugt werden. Zum Abschluss werden die führenden Werte jeder Zeile meistens noch normiert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{13}{2} & 4 & \frac{37}{2} & \frac{47}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{19}{5} & \frac{21}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nachdem die erweiterte Koeffizientenmatrix mit dem Gauss'schen Algorithmus in Zeilenstufenform umgeformt wurde, kann die Lösungsmenge von unten her berechnet werden! Bei einem regulären System kann die hinterste Variable aus der untersten Zeile bestimmt werden. Diesen Wert kann dann in der zweituntersten Zeile eingesetzt werden um die nächste Variable zu berechnen, usw. Bei einem singulären System mit einer unendlichen Lösungsmenge verfährt man analog, doch werden für die Nullzeilen Parameter für die entsprechenden Unbekannten eingesetzt. Es folgen zwei Beispiele:

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge des Systems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun kann aus der dritten Gleichung ($6z = 1$) die Lösung für z berechnet werden: $z = \frac{1}{6}$. Diesen Wert setzen wir nun in der zweiten Gleichung ein ($2y + 2 * \frac{1}{6} = 1$) und berechnen y : $y = \frac{1}{3}$. Und nun noch den Wert für x : $x = 1 - 2 * \frac{1}{3} - 3 * \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$.

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge des Systems:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

Da wir eine Nullzeile haben, gibt es unendlich viele Lösungspunkte. Für die Variablen ohne führenden Wert ungleich Null (hier z), setzt man einen Parameter (frei wählbare Variable) ein. Also $z = t$. Dies setzen wir nun in der zweiten Gleichung ein ($5y - 10t = 2$) und berechnen y : $y = \frac{2+10t}{5}$. Und nun noch die Variable x :

$$x = \frac{-1-2t + \frac{2+10t}{5}}{3} = -\frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{2+10t}{5}, t \right) \right\}$$

Gauss-Jordan-Verfahren

Da die Berechnung der Lösungsmenge aus der Zeilenstufenform recht umständlich ist, wird oft mit den elementaren Zeilenumformungen gerade eine Matrix in Diagonalform erzeugt. Dieses Verfahren nennt man Gauss-Jordan-Algorithmus.
Betrachten wir dazu noch einmal die vorigen beiden Beispiele:

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge des Systems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \left\{ \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right) \right\}$$

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge des Systems:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

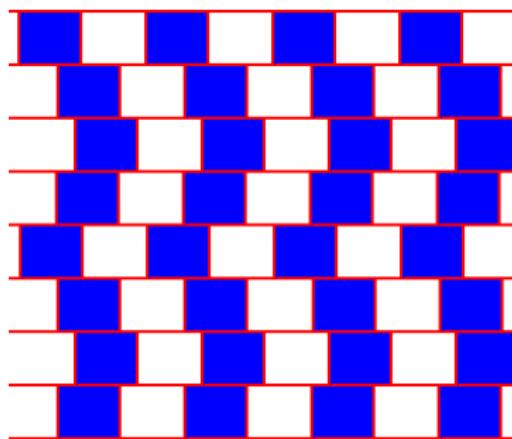
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} + 2t \\ t \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathbf{L} = \left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{2+10t}{5}, t \right) \right\}$$

2 Matrizenrechnung



2 Matrizenrechnung

- Rechenoperationen und Gesetze
 - Addition und Subtraktion
 - Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar
 - Matrizenmultiplikation
- Spezielle Matrizen
 - Quadratische Matrizen
 - Diagonal- und Dreiecksmatrizen
 - Einheitsmatrizen
 - transponierte Matrix
 - symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen
 - Matrizen der elementaren Zeilenumformungen
 - reguläre und singuläre Matrizen
- Inversion
 - Definition Inverse
 - Berechnung der inversen
 - Gesetze für die Inverse

Gleichheit von Matrizen

Definition

Zwei Matrizen A und B sind genau dann gleich, wenn sie die gleiche Dimension haben (also $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$) und die Matrizen die gleichen Elemente besitzen (also $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i \leq n \wedge j \leq m$).

Beispiel

- Gleiche (identische) Matrizen: $\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$

- Ungleiche Matrizen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Addition und Subtraktion

Definition

Sind A und B zwei $n \times m$ -Matrizen, so versteht man unter der Summe $A + B$ (bzw. Differenz $A - B$) die $n \times m$ -Matrix S (bzw. D), welche wie folgt definiert ist:

$$s_{ij} := a_{ij} + b_{ij} \quad (1)$$

bzw.

$$d_{ij} := a_{ij} - b_{ij} \quad (2)$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 3-1 \\ 4-2 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$



Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Definition

Sei $A \in \mathbf{K}^{n \times m}$ eine Matrix und $k \in \mathbf{K}$ ein Skalar, so versteht man unter dem Produkt kA die Matrix:

$$kA := k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

Alle Elemente der Matrix werden also mit dem Skalar multipliziert!

Beispiel

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 * 1 & 5 * 2 \\ 5 * 3 & 5 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

Theorem

Für die Addition von Matrizen A , B und C und die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar λ , τ und v gelten die folgenden Gesetze:

- (kommutativ) $A + B = B + A$
- (assoziativ) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$
- (distributiv) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- (distributiv) $(\tau + v)A = \tau A + vA$

Linearkombinationen von Matrizen

Mit den bisher betrachteten Rechenoperationen können sogenannte Linearkombinationen von Matrizen gebildet werden. D.h. eine Anzahl von gleichdimensionalen Matrizen kann mit Zahlen multipliziert und die Produkte danach aufsummiert werden.

Beispiel

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-10 & 4+5 \\ 6+0 & 6+25 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 6 & 31 \end{pmatrix}$$

Diese Fähigkeit werden wir später bei den Vektorräumen gebrauchen!

Matrizenmultiplikation

Definition

Sei A eine $n \times m$ und B eine $m \times r$ Matrix, so versteht man unter dem Produkt AB die $n \times r$ Matrix P mit den Elementen:

$$p_{ij} := \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \quad (3)$$

Bemerkung

Das Matrizenprodukt ist nur definiert, wenn die angegebene Dimensionsbedingung erfüllt ist, d.h. der erste Faktor gleich viele Spalten wie der Zweite Zeilen besitzt. Zudem hat die Produktmatrix die gleiche Zeilenzahl wie der erste Faktor und die gleiche Spaltenzahl wie der zweite Faktor.

Beispiel

Wir suchen das Produkt AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} =$$

Das Produkt ist definiert, da der Faktor A 3 Spalten und die Matrix B 3 Zeilen hat. Das Produkt hat wie die Matrix A 2 Zeilen und wie die Matrix B 3 Spalten:

$$= \begin{pmatrix} 2+0+2 & 1+2+4 & -3+0-5 \\ 0+0-8 & 0-3-16 & 0+0+20 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ -8 & -19 & 20 \end{pmatrix}$$

Falk'sches Schema

Die Matrizenmultiplikation lässt sich in einer Tabelle sehr übersichtlich bestimmen. Betrachten wir dazu noch einmal voriges Beispiel:

$$\begin{array}{c|ccc}
 AB & \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{array} \right) \\
 \hline
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 4 & 7 & -8 \\ -8 & -19 & 20 \end{array} \right)
 \end{array}$$

In dieser tabellarischen Darstellung ist der Zusammenhang der i -ten Zeile des ersten Faktors mit der j -ten Spalte des zweiten Faktors für die Berechnung des Elements p_{ij} ersichtlich. In der Reihenfolge ihres Auftretens in der Zeile bzw. Spalte werden die Elemente dann multipliziert und die Produkte addiert!

Theorem

Für die Matrizenmultiplikation gelten die folgenden Gesetze:

- (assoziativ) $A(BC) = (AB)C = ABC$
- (distributiv) $A(B + C) = AB + AC$

Bemerkung

Achtung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ (d.h., die Faktoren sind nicht vertauschbar): $AB \neq BA$

Bsp:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB$$

Quadratische Matrizen

Quadratische Matrizen

Ein Matrix A mit gleich vielen Zeilen wie Spalten, also $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, nennt man eine quadratische Matrix.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$$

Diagonal- und Dreiecksmatrizen

Diagonalmatrizen

Eine quadratische $n \times n$ Matrix A mit Nullen oberhalb und unterhalb der Diagonalen ($a_{ij} = 0 \forall i \neq j$) nennt man eine Diagonalmatrix.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

obere und untere Dreiecksmatrix

Eine quadratische $n \times n$ Matrix A die unterhalb (bzw. oberhalb) der Diagonalen nur Nullen aufweist, also $a_{ij} = 0 \forall i > j$ (bzw. $a_{ij} = 0 \forall i < j$), heisst obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Das Produkt zweier oberer (bzw. unterer) Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere (bzw. eine untere) Dreiecksmatrix.

Einheitsmatrizen

Einheitsmatrix

Die quadratische $n \times n$ Matrix E_n mit Einsen auf der Diagonalen ($a_{ii} = 1$) und Nullen oberhalb und unterhalb der Diagonalen ($a_{ij} = 0 \forall i \neq j$) nennt man eine Einheitsmatrix.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem

Das Produkt mit einer Einheitsmatrix bewirkt keine Veränderung:

$$E_n * A = A * E_n = A$$

transponierte Matrix

Definition

Sei A eine $n \times m$ Matrix, so versteht man unter der zu A transponierten Matrix A^T die $m \times n$ Matrix, welche man durch Spiegelung der Matrix A an ihrer Diagonalen erhält.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Transponierten

Theorem

Es gilt:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Bemerkung

In späteren Kapiteln werden wir die Produkte einer Matrix mit ihrer Transponierten, also AA^T und A^TA gebrauchen. Hier sei erwähnt, dass unabhängig von der Dimension der Matrix A dieses Produkt immer definiert ist!

Beispiel

Gegeben Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Wir suchen die Produkte AA^T und A^TA :

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$$

symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen

Definition

Eine quadratische Matrix A mit der Eigenschaft $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ nennt man eine symmetrische Matrix (die Elemente oberhalb der Diagonalen sind gleich den entsprechenden Elementen unterhalb der Diagonalen - die Diagonale ist die Spiegelachse!). Gilt $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$, so nennt man die Matrix schiefsymmetrisch.

Beispiel

A ist eine symmetrische und B eine schiefsymmetrische Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -4 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen der elementaren Zeilenumformungen

Theorem

Sei (Ab) eine erweiterte Koeffizientenmatrix und $(Ab)'$ die erweiterte Koeffizientenmatrix nach elementaren Zeilenumformungen, so existiert die Matrix Z , mit $Z(Ab) = (Ab)'$. Dabei entspricht Z einer leicht abgewandelten Einheitsmatrix. Es gilt:

- Multiplikation der k -ten Zeile mit der reellen Zahl $a \neq 0$:
$$z_{kk} = a$$
- Vertauschen der k -ten mit der s -ten Zeile: $z_{kk} = z_{ss} = 0$ und
$$z_{ks} = z_{sk} = 1$$
- Ersetzen der k -ten Zeile durch die Linearkombination $a * k$ -te und $b * s$ -te Zeile ($a \neq 0$): $z_{kk} = a$ und $z_{ks} = b$

Beispiel

Wir suchen die Lösung des nachfolgenden Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir formen dazu die erweiterte Koeffizientenmatrix um:

$$(Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{II} \leftarrow \vec{\text{II}} - 2\text{I} \\ \text{III} \leftarrow 2\text{I} - \text{III}$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Ab)_1 = Z_1(Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

$$(Ab)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} I \Leftarrow \vec{I} - II \\ III \Leftarrow III - 2II \end{array}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Ab)_2 = Z_2(Ab)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(Ab)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} I \Leftarrow 7I - 2III \\ II \Leftarrow 7II + 2III \end{array}$$

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Ab)_3 = Z_3(Ab)_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

$$(Ab)_3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} I \xleftarrow{\rightarrow} \frac{1}{7}I \\ II \xleftarrow{\rightarrow} \frac{1}{7}II \\ III \xleftarrow{\rightarrow} \frac{1}{7}III \end{array}$$

$$Z_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow (Ab)_4 = Z_4(Ab)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

Nun lassen sich diese Faktoren noch zusammenfassen:

$$(Ab)_4 = Z_4(Ab)_3 = Z_4Z_3(Ab)_2 = Z_4Z_3Z_2(Ab)_1 = Z_4Z_3Z_2Z_1(Ab)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}}_{Z_4Z_3Z_2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Die hier gefundene Matrix $Z_4Z_3Z_2Z_1$ werden wir im nächsten Abschnitt noch genauer untersuchen!

reguläre und singuläre Matrizen

Definition

Ein quadratische $n \times n$ Matrix A nennt man regulär, wenn der Rang der Matrix maximal, also $rg(A) = n$ ist. Andernfalls nennt man die Matrix singulär.

Bemerkung

Die Koeffizientenmatrix A eines regulären linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist regulär und diejenige eines singulären linearen Gleichungssystem ist dementsprechend singulär.

Inversion

Definition

Sei A eine quadratische $n \times n$ -Matrix. Existiert eine Matrix B so, dass gilt:

$$AB = BA = E_n$$

so nennt man A invertierbar und die Matrix B das Inverse von A .

Für die Inverse schreibt man: $B = A^{-1}$

Mit der Inversen einer Matrix lässt sich ebenfalls die Lösungsmenge eines (regulären) linearen Gleichungssystem beschreiben. Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem, so kann dieses System beidseitig mit der Inversen (von Links her) multipliziert werden:

$$Ax = b$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E_n}x = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Fortsetzung Beispiel Matrizen und elementare Zeilenumformung

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

fanden wir die Umformung:

Fortsetzung

$$(Ab)_4 = Z_4(Ab)_3 = Z_4Z_3(Ab)_2 = Z_4Z_3Z_2(Ab)_1 = Z_4Z_3Z_2Z_1(Ab)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}}_{Z_4Z_3Z_2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Nun entspricht das Produkt der Umformungsmatrizen der Inversen der Koeffizientenmatrix des Systems:

$$A^{-1} = Z_4Z_3Z_2Z_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

Die Lösung des Systems erhalten wir durch das Produkt der Inversen mit den Absolutgliedern:

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Dieses Beispiel zeigt ein Verfahren, um die Inverse einer Matrix zu bestimmen. Da jedoch die einzelnen Zeilenumformungsmatrizen miteinander multipliziert werden müssen, ist es ein sehr aufwendiges Verfahren!

Berechnung der Inversen

Denkt man sich die gesuchte Inverse $A^{-1} = (b_{ij})$ als eine $n \times n$ Matrix mit den Unbekannten b_{ij} , so entspricht die Gleichung $AA^{-1} = E_n$ dem Problem n^2 Größen zu bestimmen. Dieses Problem lässt sich nun in n lineare Gleichungssysteme mit jeweils n Unbekannten aufteilen:

$$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich also n erweiterte Koeffizientenmatrizen, wobei bei allen die gleiche Koeffizientenmatrix vorliegt:

$$\left(A \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right. \right), \left(A \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right. \right), \dots, \left(A \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right. \right)$$

Da beim Lösen des linearen Gleichungssystems die elementaren Zeilenumformungen nur von der Koeffizientenmatrix abhängen, ergibt sich für alle n Systeme das gleiche Vorgehen und man fasst die n erweiterten Koeffizientenmatrizen zu einer *super* erweiterten Koeffizientenmatrix zusammen:

$$\left(A \left| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right. \right) = (A | E_n)$$

Mit elementaren Zeilenumformungen bestimmt man nun (Gauss-Jordan-Verfahren) die Lösungen der n Systeme (vorausgesetzt die Lösungen existieren!):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right)$$

Inversion mit dem Verfahren nach Gauss-Jordan

Noch schematischer kann das Vorgehen folgendermassen dargestellt werden:

$$(A | E_n) \Rightarrow (E_n | A^{-1})$$

Beispiel

Gesucht sei die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Es wird die erweiterte Matrix mit A und der Einheitsmatrix gebildet:

$$(A | E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} II \leftarrow \vec{2I} - II \\ III \leftarrow 4I - III \\ IV \leftarrow 2I + IV \end{array}$$

Fortsetzung

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 16 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} I \Leftarrow \vec{3I} - 2II \\ III \Leftarrow 2II - III \\ IV \Leftarrow 3IV - 4II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & -1 & -4 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -2 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} I \Leftarrow \vec{I} + III \\ II \Leftarrow II - 2III \\ IV \Leftarrow III - IV \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & -6 & 1 & -3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} I \Leftarrow 2I + IV \\ II \Leftarrow II - IV \end{array}$$

Fortsetzung

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & -6 & 1 & -3 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} I \leftarrow \frac{1}{6}I \\ II \leftarrow \frac{1}{3}II \\ IV \leftarrow \frac{1}{8}IV \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{array} \right) = (E_4 | A^{-1})$$

Die Inverse existiert somit und lautet:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{array} \right)$$

Gesetze für die Inverse

Theorem

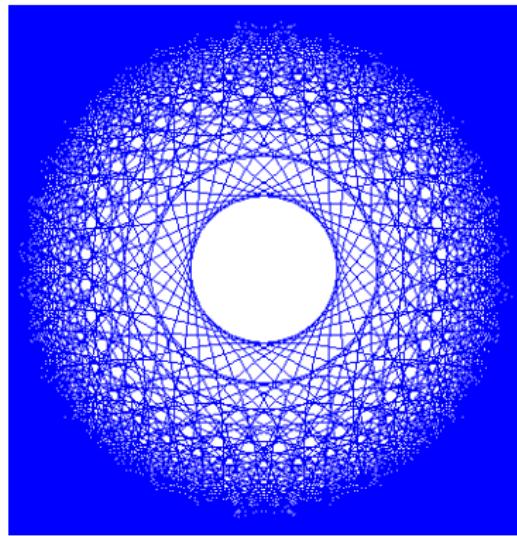
Für die Matrixinversion gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

- A sei regulär $\Leftrightarrow A$ ist invertierbar

und die folgenden Rechengesetze:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3 Determinante



3

Determinante

- Determinante und lineare Gleichungssysteme
 - Zweireihige Determinante
 - Cramer'sche Regel
 - Dreireihige Determinante
- Determinante und Permutationen
- Definition
- Berechnungsmethoden und Gesetze
 - Determinante einer Dreiecksmatrix
 - Elementare Zeilenumformungen und Determinanten
 - Folgerungen und Gesetze
 - Laplace'scher Entwicklungssatz

Determinante und lineare Gleichungssysteme

Wenn man lineare Gleichungssysteme systematisch durch Elimination der Unbekannten zu lösen versucht, stösst man bei der Rechnung unweigerlich auf gewisse Ausdrücke, die gesetzmässig aus den Koeffizienten des Gleichungssystems gebildet sind und mit deren Hilfe sich die Lösung des Systems theoretisch sehr einfach beschreiben lässt. Diese Ausdrücke nennt man Determinanten. Wir wollen auf diese Art den Determinantenbegriff einführen.

Determinante**Determinante und lineare Gleichungssysteme**

Wir suchen die Lösung des folgenden allgemeinen linearen Gleichungssystems (2 Gleichungen mit 2 Unbekannten):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels Gauss-Jordan-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} I \leftarrow a_{22}I - a_{12}II \\ II \leftarrow a_{11}II - a_{21}I \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 & b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array} \right)$$

Determinante

Determinante und lineare Gleichungssysteme

Auf der Diagonalen der Koeffizientenmatrix steht zweimal der gleiche Ausdruck: $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Unter der Voraussetzung, dass dieser Wert ungleich Null ist, können beide Zeilen durch D geteilt werden:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{array} \right)$$

Es ergibt sich daher die direkte Berechnungsformel (wenn $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$):

$$\mathbf{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) \right\}$$

Determinante**Determinante und lineare Gleichungssysteme**

Die beiden Zähler sind analog aufgebaut wie der Nenner D . Wir setzen:

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, D_x = b_1a_{22} - b_2a_{12}, D_y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Diese Ausdrücke sind alle gleich aufgebaut, bestehen aus vier Koeffizienten, die auch als Matrizen geschrieben werden können:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

Nun können die zweireihigen Determinanten (Determinante einer 2×2 Matrix) definiert werden!

Zweireihige Determinante

Definition

Unter einer zweireihigen Determinante versteht man:

$$\det(A) := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

Bemerkung

Die zweireihige Determinante einer Matrix ist also gleich der Differenz aus dem Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen und demjenigen Produkt aus den Elementen der Nebendiagonalen.

Cramer'sche Regel

Mit Hilfe der Determinante lässt sich die Lösung des linearen Gleichungssystems wie folgt schreiben (Cramer'sche Regel):

Theorem

$$\mathbf{L} = \left\{ \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \right) \right\} \quad (2)$$

Bemerkung

Um die Determinanten im Zähler zu bilden, wird für D_x in der Koeffizientenmatrix die erste Spalte durch die Absolutglieder ersetzt, analog die zweite Spalte für D_y .

Beispiel

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kann mit Hilfe der Determinanten:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (-2)(1) = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (0)(1) = 8$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (-2)(4) = -8$$

Fortsetzung

mit der Cramer'schen Regel ($D \neq 0$) berechnet werden:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{8}{4} = 2; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (2, -2)\}$$

Dieses Vorgehen kann nun analog für Gleichungssysteme mit mehr als zwei Unbekannten durchgeführt werden. Hier noch der Fall für ein System mit drei Unbekannten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Determinante

Determinante und lineare Gleichungssysteme

Da die Berechnung hier viel aufwendiger ist, wird nur die Lösung für x berechnet. Wieder mit dem Gauss-Algorithmus (3-te Spalte):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} I \xrightarrow{\quad} a_{33}I - a_{13}III \\ II \xrightarrow{\quad} a_{33}II - a_{23}III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} & 0 & a_{33}b_1 - b_3a_{13} \\ a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} & a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & 0 & a_{33}b_2 - b_3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

Nun können einige Ausdrücke als zweireihige Determinanten geschrieben werden:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{13} & 0 & b_1 & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{33} & & b_2 & a_{33} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{23} & 0 & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{33} & & b_3 & a_{33} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cccc} a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}$$

Damit die Schreibarbeit einfacher und das Ganze übersichtlicher wird, verwenden wir:

Definition

Sei A eine quadratische Matrix, dann versteht man unter A_{ij} zum Element a_{ij} die Matrix die man aus A durch Weglassen der i -ten Zeile und j -ten Spalte erhält.

$$\begin{pmatrix} |A_{22}| & |A_{21}| & 0 & \left| \begin{array}{cc} b_1 & a_{13} \\ b_2 & a_{33} \end{array} \right| \\ |A_{12}| & |A_{11}| & 0 & \left| \begin{array}{cc} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{array} \right| \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Determinante

Determinante und lineare Gleichungssysteme

Nun kann das Teilsystem aus den ersten beiden Zeilen nach x (und y) aufgelöst werden (unter der Voraussetzung, dass das System regulär ist!):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{13} \\ b_3 & a_{33} \\ b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} |A_{21}|}{\begin{vmatrix} |A_{22}| & |A_{21}| \\ |A_{12}| & |A_{11}| \end{vmatrix} |A_{22}| |A_{11}| - |A_{21}| |A_{12}|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{13} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} |A_{11}| - \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} |A_{21}|}{|A_{22}| |A_{11}| - |A_{21}| |A_{12}|}$$

$$= \frac{(b_1 a_{33} - b_3 a_{13}) |A_{11}| - (b_2 a_{33} - b_3 a_{23}) |A_{21}|}{(a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) |A_{11}| - (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) |A_{21}|}$$

Da Zähler und Nenner gleich aufgebaut sind, wird im weiteren nur noch der Nenner N (Zähler Z) untersucht:

Determinante

Determinante und lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
 N &= (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})|A_{11}| - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})|A_{21}| \\
 &\quad = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \\
 &\quad \quad (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33}^2 - a_{13}a_{22}a_{31}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{33} + a_{13}a_{23}a_{31}a_{32} - \\
 &\quad a_{12}a_{21}a_{33}^2 + a_{12}a_{23}a_{31}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{33} - a_{13}a_{23}a_{31}a_{32} \\
 &= a_{33}(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\
 &\quad a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})
 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für den Zähler Z :

$$\begin{aligned}
 Z &= a_{33}(b_1a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 - b_1a_{23}a_{32} - \\
 &\quad a_{12}b_2a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32})
 \end{aligned}$$

Dreireihige Determinante

Der Bruch für die Lösung x kann noch gekürzt werden:

$$\frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - a_{13} a_{22} b_3 - a_{12} b_2 a_{33} - b_1 a_{23} a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

Definition

Unter einer dreireihigen Determinante versteht man:

$$\det(A) := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$= (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) -$$

$$(a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{11} a_{23} a_{32})$$

Regel von Sarrus

Bemerkung (Regel von Sarrus)

Um diese 6 Mehrfachprodukte korrekt zu berechnen und die Vorzeichen richtig einzusetzen arbeitet man oft nach folgendem Prinzip:

Die ersten beiden Spalten werden an die Matrix angehängt:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

Nun werden die drei Produkte entlang der Diagonalen von oben links nach unten rechts positiv genommen und die drei Produkte entlang der Diagonalen von rechts oben nach links unten negativ.

Determinante

Determinante und lineare Gleichungssysteme

Die Lösung des linearen Gleichungssystem bestimmt man wiederum mit der Cramer'schen Regel:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}};$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Bemerkung

Auch hier bildet man die Determinanten im Zähler indem man in der Koeffizientenmatrix die entsprechende Spalte durch die Absolutglieder ersetzt!

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1$$

Fortsetzung

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{9} = -2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (1, -2, 1)\}$$

Determinante und Permutationen

Nun soll ein Berechnungsverfahren für Determinanten von quadratischen Matrizen beliebiger Dimension hergeleitet werden.

Definition

Eine n -stellige Permutation ist eine bijektive Abbildung
 $\sigma : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ einer n -elementigen Menge \mathbf{X}_n auf sich selbst.

Bemerkung

Eine Permutation ist eine Umordnung der n Elemente der Menge \mathbf{X}_n .

Beispiel

Die Umordnung der Elemente $\sigma_1 : (1, 2, 3, 4) \rightarrow (1, 2, 4, 3)$ ist eine Permutation.

Fortsetzung

Es gibt mehrere Schreibweisen um eine solche Permutation darzustellen. Eine sehr übersichtliche Art ist die Matrixschreibweise. Hier wird in einer ersten Zeile die Ausgangsposition und in einer zweiten Zeile die Zielanordnung geschrieben. Für das Beispiel ergibt sich also:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompakter ist die Tupelschreibweise, wo nur die Zielanordnung angegeben wird: $\sigma_1 = (1, 2, 4, 3)$. Zudem ist die Permutation eine Abbildung und diese kann folgendermassen beschrieben werden:

$$\sigma_1(1) = 1; \sigma_1(2) = 2; \sigma_1(3) = 4; \sigma_1(4) = 3$$

Beispiel

Gesucht seien alle Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$.

Es gibt hier 6 verschiedene Permutationen:

$$\sigma_1 = (1, 2, 3)$$

$$\sigma_2 = (1, 3, 2)$$

$$\sigma_3 = (2, 1, 3)$$

$$\sigma_4 = (2, 3, 1)$$

$$\sigma_5 = (3, 1, 2)$$

$$\sigma_6 = (3, 2, 1)$$

Jede Permutation lässt sich aus einem Anfangszustand dadurch erreichen, indem man nacheinander immer zwei Elemente vertauscht. Dieses Vertauschen nennt man **Transposition**.

Beispiel

Die Permutationen des letzten Beispiels:

$$\sigma_1 = (1, 2, 3)$$

$$\sigma_2 = (1, 3, 2) \Rightarrow (1, \mathbf{2}, \mathbf{3}) \rightarrow (1, 3, 2)$$

$$\sigma_3 = (2, 1, 3) \Rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3) \rightarrow (2, 1, 3)$$

$$\sigma_4 = (2, 3, 1) \Rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3) \rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \rightarrow (2, 3, 1)$$

$$\sigma_5 = (3, 1, 2) \Rightarrow (1, \mathbf{2}, \mathbf{3}) \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 2) \rightarrow (3, 1, 2)$$

$$\sigma_6 = (3, 2, 1) \Rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) \rightarrow (3, 2, 1)$$

Eine Permutation heisst gerade, wenn die Permutation mit einer geraden Anzahl von Transpositionen erzeugt werden kann, andernfalls ungerade.

Ein elementares Produkt aus einer $n \times n$ Matrix A ist ein Produkt aus n Elementen der Matrix, wobei keine zwei Elemente in der selben Zeile (Spalte) stehen dürfen.

Beispiel

Die 3×3 Matrix A besitzt die folgenden elementaren Produkte:

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{11}a_{23}a_{32} \\ a_{12}a_{21}a_{33} & a_{12}a_{23}a_{31} \\ a_{13}a_{21}a_{32} & a_{13}a_{32}a_{13} \end{array}$$

Es gibt im obigen Beispiel 6 elementare Produkte. Für eine $n \times n$ Matrix gibt es $n!$ elementarer Produkte. Diese Produkte können wie folgt mit Hilfe von Permutationen geschrieben werden:

$a_{1\sigma_k(1)}a_{2\sigma_k(2)} \dots a_{n\sigma_k(n)}$. Dabei ist σ_k eine der $n!$ Permutation der Zahlen $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definition

Definition

Sei A eine quadratische Matrix mit n Zeilen. Unter der Determinante der Matrix A versteht man den Wert:

$$\det(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n!} \operatorname{sign}(\sigma_k) a_{1\sigma_k(1)} a_{2\sigma_k(2)} \cdots a_{n\sigma_k(n)} \quad (4)$$

Beispiel

Anhand der Definition sollen die im vorigen Abschnitt gefundenen Formeln hergeleitet werden:

Fortsetzung

2 × 2 Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{\substack{(1, 2) \\ \text{gerade}}} + (-1) \underbrace{a_{12}a_{21}}_{\substack{(2, 1) \\ \text{ungerade}}} \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 × 3 Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\substack{(1, 2, 3) \\ \text{gerade}}} + (-1) \underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}}_{\substack{(1, 3, 2) \\ \text{ungerade}}} +$$

Fortsetzung

$$(-1) \underbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}_{(2,1,3)} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{(2,3,1)} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{(3,1,2)} + (-1) \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{(3,2,1)} =$$

ungerade *gerade* *gerade* *ungerade*

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Die Determinantenberechnung mit Hilfe der Definition wird für grosse Matrizen sehr aufwendig! Da die Anzahl der Permutationen (und somit der Summanden) mit wachsendem n sehr schnell wächst (bei n elementiger Menge ergeben sich $n!$ Permutationen), wird in der Praxis nicht mit diesem Verfahren gearbeitet. Im weiteren sind hier zwei Verfahren beschrieben, welche auch bei grossen Matrizen angewendet werden können.

Determinante einer Dreiecksmatrix

Das erste Verfahren, welches wir hier betrachten, eignet sich sehr gut für die computerunterstützte Berechnung. Es ähnelt dem Gauss'schen Algorithmus und verwendet wie dieser die elementaren Zeilenumformungen. Zuerst ein wichtiger Satz zur Motivierung:

Theorem

Sei A eine quadratische Dreiecksmatrix, dann ist die Determinante $\det(A) = |A|$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(A) = |A| = \prod_{k=1}^n a_{kk} = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn} \quad (5)$$

Beispiel

Wir suchen die Determinante der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = (1)(4)(6) = 24$$

Dieser Satz ermöglicht es nun, auf einfache Weise die Determinante einer Dreiecksmatrix zu berechnen. Wie sieht es nun mit der Determinante aus, wenn wir mit den elementaren Zeilenumformungen eine beliebige quadratische Matrix in eine gestaffelte Form umwandeln? Die Determinante verändert sich zwar mit den Umformungen, doch sind diese Veränderungen mit nachfolgendem Satz gut fassbar:

Elementare Zeilenumformungen und Determinanten

Theorem

Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix, so gilt:

- Sei A' die Matrix die durch Multiplikation der i -ten Zeile mit der reellen Zahl k entsteht, so gilt: $|A'| = k |A|$
- Sei A' die Matrix die durch Vertauschung der i -ten mit der j -ten Zeile entsteht, so gilt: $|A'| = - |A|$
- Sei A' die Matrix die durch Ersetzen der i -ten Zeile durch die Linearkombination k mal die i -te Zeile plus s mal die j -te Zeile entsteht, so gilt: $|A'| = k |A|$

Diese Gesetze lassen sich mit der Definition mittels Permutationen leicht beweisen!

Beispiel

$$\det(A) = |A| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right| \quad \begin{matrix} \overbrace{\quad\quad\quad}^{\equiv} \\ II \leftarrow I - II \\ IV \leftarrow 4I - IV \end{matrix}$$

$$\frac{1}{(-1)(-1)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 13 & 19 \end{array} \right| \quad \begin{matrix} \overbrace{\quad\quad\quad}^{\equiv} \\ III \leftarrow III - II \\ IV \leftarrow 7II - IV \end{matrix}$$

Fortsetzung

$$\frac{1}{(-1)(-1)(-1)(-1)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 22 & 16 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{III} \leftarrow 3\text{II} - 2\text{I}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 22 & 16 \end{array} \right|$$

$$\frac{1}{(-1)(-1)(-1)(-1)(3)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right| = \frac{1}{3}(1)(1)(3)(4) = 4$$

Bemerkung

Bei dem letzten Beispiel ist der Sachverhalt des letzten Satzes umgekehrt zum tragen gekommen: $|A| = \frac{1}{k} |A'|$

Folgerungen und Gesetze

Theorem

Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix, so gilt:

- A regulär $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- A singulär $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

Bemerkung

Ein lineares Gleichungssystem ist somit genau dann regulär, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. In diesem Fall kann die Cramer'sche Regel zur Berechnung der Lösungsmenge angewendet werden:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

Fortsetzung

Verschwindet die Determinante der Koeffizientenmatrix, so ist das System singulär. Verschwinden auch alle Determinanten D_i , so existieren unendlich viele Lösungspunkte, andernfalls ist die Lösungsmenge leer.

Im weiteren gelten für Determinanten die folgenden Gesetze:

Theorem

Seien A und B reguläre $n \times n$ Matrizen, so gilt:

$$\det(kA) = |kA| = k^n |A| \quad (6)$$

$$\det(AB) = |AB| = |A| |B| \quad (7)$$

$$\det(A^{-1}) = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (8)$$

Minor

Eine weiteres Verfahren liefert der Laplace'sche Entwicklungssatz.
 Für diesen braucht es noch einige Hilfsgrößen:

Definition

Sei A eine quadratische Matrix, dann versteht man unter dem Minor M_{ij} zum Element a_{ij} die Determinante der Matrix, die sich aus A durch Weglassen der i -ten Zeile und j -ten Spalte ergibt:

$$M_{ij} := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Beispiel

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt die folgenden 9 Minoren:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$



Kofaktor

Definition

Das Produkt aus dem Minor M_{ij} mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ heisst der Kofaktor C_{ij} des Elements a_{ij} :

$$C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (10)$$

Bemerkung

Die Vorzeichen ergeben sich aus folgendem Schachbrettmuster:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Laplace'scher Entwicklungssatz

Theorem

Das Produkt der Elemente einer Zeile (oder einer Spalte) mit den entsprechenden Kofaktoren ist gleich der Determinante einer Matrix:

- Entwicklung nach der i -ten Zeile:

$$\det(A) = |A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ik} \quad (11)$$

- Entwicklung nach der j -ten Spalte:

$$\det(A) = |A| = \sum_{k=1}^n a_{kj} C_{kj} \quad (12)$$

Beispiel

Die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nach der ersten Zeile entwickelt:

$$\det(A) = |A| = \sum_{k=1}^n a_{1k} C_{1k} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} =$$

$$a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} =$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(1) - 1(-1) + 1(-4) = -2$$

Fortsetzung

Nach der dritten Spalte entwickelt:

$$\det(A) = |A| = \sum_{k=1}^n a_{k3} C_{k3} = a_{13} C_{13} + a_{23} C_{23} + a_{33} C_{33} =$$

$$a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} + a_{23}(-1)^{2+3} M_{12} + a_{33}(-1)^{3+3} M_{13} =$$

$$a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-4) + 0(0) + 1(2) = -2$$

Bemerkung

Bei dieser rekursiven Berechnung wird die Determinante einer $n \times n$ Matrix als Summe/Differenz aus n Determinanten von kleineren Matrizen bestimmt. Idealerweise entwickelt man nach einer Zeile bzw. Spalte mit möglichst vielen Nullen.

Der Entwicklungssatz besagt, dass die Summe der Produkte der Elemente einer beliebigen Matrixzeile (oder Spalte) mit den entsprechenden Kofaktoren immer die Determinante ergibt. Um solche Summen von Produkten genauer zu betrachten bilden wir die Matrix aus den Kofaktoren und transponieren diese:

Adjunkte

Definition

Ist A eine quadratische Matrix, so versteht man unter:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T \quad (13)$$

die Adjunkte von A (oder auch algebraisches Komplement).

Bildet man nun das Produkt der Matrix A mit ihrer Adjunkten, so erhält man eine quadratische Matrix, auf deren Diagonalen immer die Determinante zu stehen kommt (dies sind eben die Summen der Produkte gemäss dem Entwicklungssatz).

Zudem ist das Produkt der Matrizen eine Diagonalmatrix, d.h. alle Werte ausserhalb der Diagonalen sind Null! Es gilt somit:

Theorem

$$A \ adj(A) = adj(A) A = |A| E_n \quad (14)$$

Beispiel

Die Matrix A des letzten Beispiels besitzt die Adjunkte:

$$adj \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right)$$

Fortsetzung

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Das Produkt der Matrix mit ihrer Adjunkten ergibt nun:

$$A \ adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2E_3$$

Inversenberechnung mittels Adjunkte

Die Gleichung des letzten Satzes kann (wenn A regulär ist) einfach zu einer Berechnungsformel für die Inverse umgewandelt werden (beidseitiges Multiplizieren mit $\frac{1}{\det(A)} A^{-1}$). Es ergibt sich:

Theorem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (15)$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

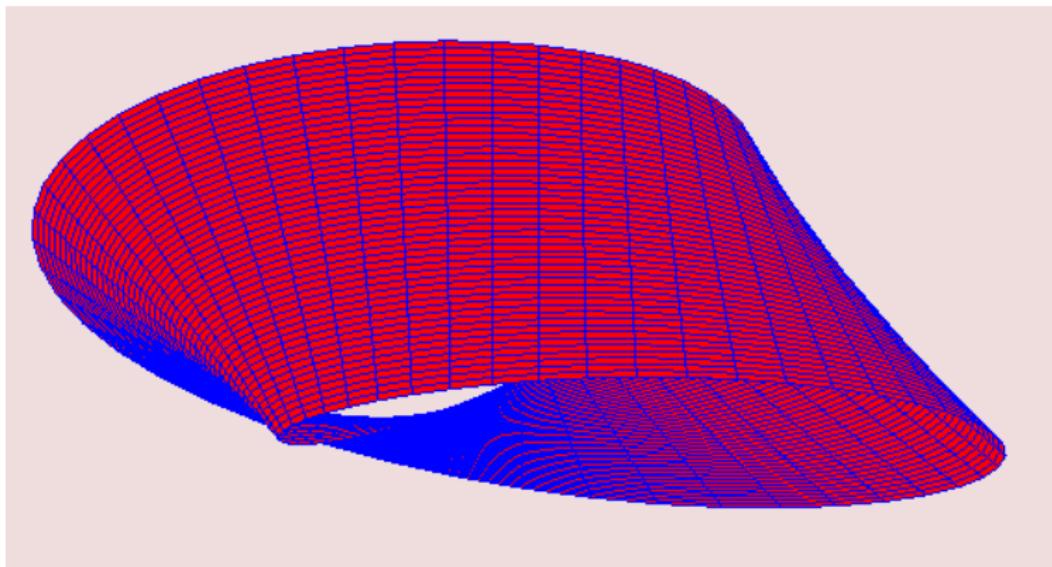
Fortsetzung

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Für die Berechnung eignet sich das Gauss-Jordan-Verfahren besser, doch hier haben wir zum ersten mal eine direkte Berechnungsformel um die Inverse zu bestimmen!

4 Vektorräume

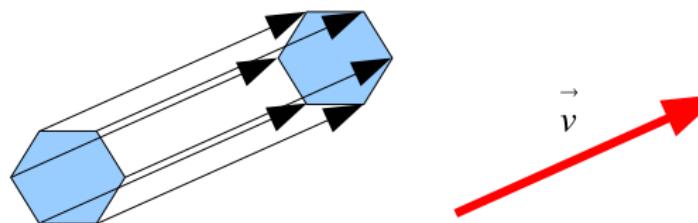


4 Vektorräume

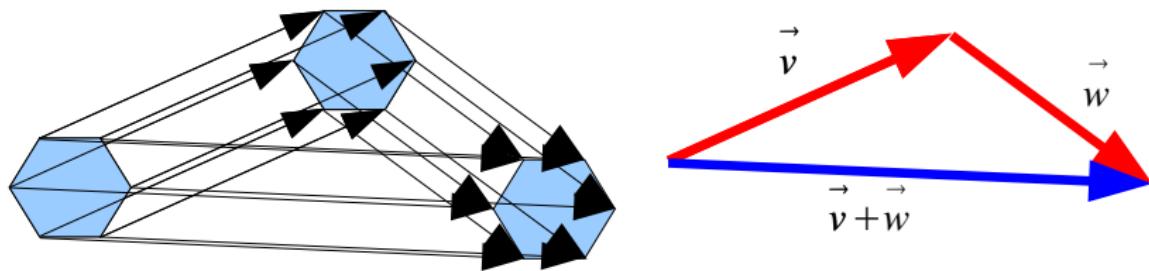
- Einführung
 - Vektoren und Translationen
 - Linearkombinationen und Gesetze
 - Lineare Unabhängigkeit
- Definition
 - Vektorraum
 - Untervektorraum
- Lineare Hülle, Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension
 - Lineare Hülle
 - Lineare Unabhängigkeit
 - Basis
 - Dimension

Vektoren und Translationen

Vektoren, wie sie in der Vektorgeometrie verwendet werden, können mittels Translationen definiert werden. Wird ein Gegenstand translativ (d.h. geradlinig und ohne Rotation) von einer Ausgangsposition zu einer Zielposition verschoben, so führen alle Punkte des Gegenstandes die gleiche Bewegung durch. Diese Bewegung kann durch einen Pfeil beschrieben werden. Ein solcher Pfeil, oder eben ein Vektor, hat eine Richtung und eine Länge (Betrag) und ist durch diese beiden Eigenschaften vollständig beschrieben.

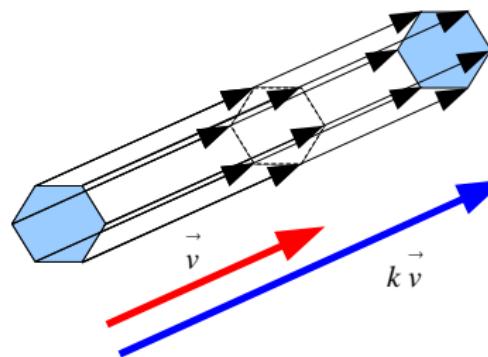


Für diese Objekte definiert man zwei grundsätzliche Operationen. Dies sind die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar (z.B. einer reellen Zahl). Dabei versteht man unter der Summe von zwei Translationen die Translation, welche man erhält, wenn man die beiden Translationen nacheinander ausführt.



Es ist einfach einsichtig, dass diese Operation kommutativ ist, d.h. es kommt nicht darauf an, welche der beiden Translationen als erstes ausgeführt wird.

Die zweite Grundoperation ist die Multiplikation mit einem Skalar. Diese kann als Streckung/Stauchung der Translation verstanden werden. Dabei wird die Länge aber nicht die Richtung verändert:



Wird mit einem negativen Skalar multipliziert, so bewirkt das negative Vorzeichen des Skalars zusätzlich eine Umkehrung der Richtung. Im speziellen bewirkt die Multiplikation mit -1 , dass eine Translation gerade in die Gegenrichtung führt (Kehrvektor).

Linearkombinationen und Gesetze

Mit den beiden Operationen können nun Linearkombinationen von Translationen (Vektoren) gebildet werden! Schreiben wir die Translationen als Vektoren, so verstehen wir unter einer Linearkombination der n Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ mit den Skalaren a_1, a_2, \dots, a_n den Vektor:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \sum_{k=1}^n a_k\vec{v}_k$$

Im weiteren gelten die folgenden Gesetze:

- Die Addition von Vektoren ist assoziativ und kommutativ:

$$\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + \vec{w} + \vec{u}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

- Bezüglich der Addition von Vektoren gibt es ein neutrales Element (Nullvektor - Vektor mit der Länge Null), welches zu einem beliebigen Vektor addiert keine Auswirkungen hat:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

- Zu jedem Vektor gibt es einen Kehrvektor, d.h. zu jedem Vektor existiert ein zweiter Vektor, so dass die Summe dieser beiden Vektoren den Nullvektor ergibt.
- Sei im weiteren \mathbf{K} ein Körper (z.B. die Menge der reellen Zahlen), so gilt für die Multiplikation eines Vektors mit Skalaren aus \mathbf{K} das Assoziativgesetz:

$$a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$$

- Im weiteren gelten die folgenden beiden Distributivgesetze:

$$a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$$

$$(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$$

Lineare Unabhängigkeit

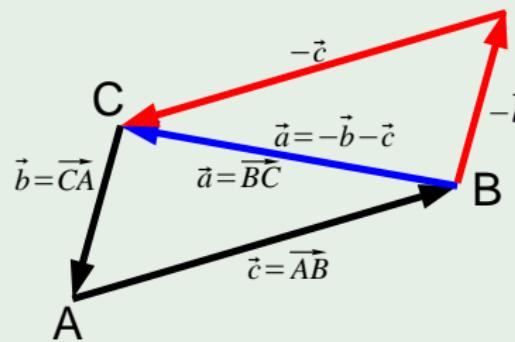
- Zudem ist das Produkt eines beliebigen Vektors mit dem Skalar 1 wieder gleich dem Vektor.

Diese acht grundlegenden Gesetze werden wir zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal aufrollen. Im Moment fahren wir mit den Translationen weiter. Die n Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ nennt man linear unabhängig, wenn sich keiner der Vektoren als Linearkombination der restlichen Vektoren darstellen lässt. Andernfalls nennt man die Vektoren linear abhängig (bei zwei Vektoren in der Vektorgeometrie spricht man von kollinearen, bei drei Vektoren von komplanaren Vektoren).

Beispiel

Bei einem beliebigen Dreieck mit den Eckpunkten A , B und C können die drei Seiten als Vektoren beschrieben werden. Z.B. $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{CA}$ und $\vec{c} = \vec{AB}$. Diese drei Vektoren sind linear abhängig, da z.B. der Vektor \vec{a} als Linearkombination der beiden anderen Vektoren geschrieben werden kann:

$$\vec{a} = \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{b} - \vec{c}$$



Wenn man überprüfen muss, ob eine Anzahl von Vektoren linear unabhängig sind, hilft oft die Tatsache, dass der Nullvektor bei linear unabhängigen Vektoren nur mittels einer trivialen Linearkombination beschrieben werden kann (alle Vektoren mit dem Skalar 0 multipliziert), während bei linear abhängigen Vektoren neben der trivialen noch unendlich viele weitere Linearkombination möglich sind.

Beispiel

Im Dreieck des letzten Beispiels ist der Nullvektor aus den drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} auf viele verschiedene Arten beschreibbar:

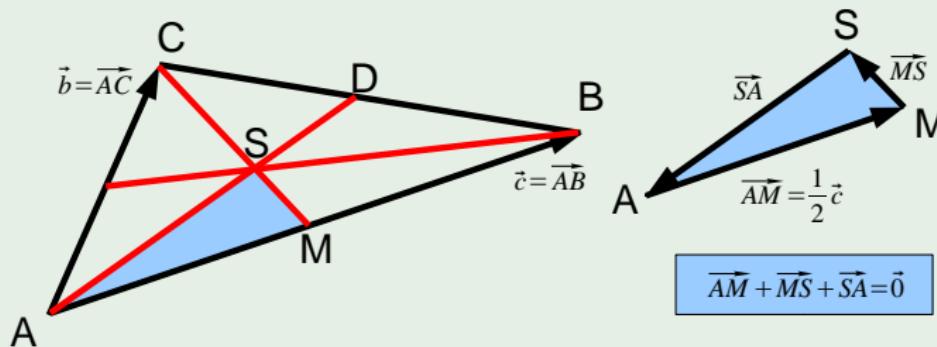
$$\vec{0} = 0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} = 1\vec{a} + 1\vec{b} + 1\vec{c} = -5\vec{a} - 5\vec{b} - 5\vec{c} = \dots$$

Werden aber nur zwei der drei Vektoren genommen, so existiert nur die triviale Linearkombination: $\vec{0} = 0\vec{a} + 0\vec{b}$

Eine interessante Anwendung der linearen Unabhängigkeit ist der Beweis, dass sich in einem beliebigen Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilen:

Beispiel

Um mit der linearen Unabhängigkeit von Vektoren diesen Satz zu beweisen, muss ein Nullvektor als Linearkombination unabhängiger Vektoren gebildet werden.



Fortsetzung

Die beiden Seitenvektoren \vec{b} und \vec{c} sind linear unabhängig und es gilt (k und s sind Streckungsfaktoren):

$$\vec{AM} + \vec{MS} + \vec{SA} = \frac{1}{2}\vec{c} + k\vec{MC} + s\vec{DA} =$$

$$\frac{1}{2}\vec{c} + k\left(-\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b}\right) + s\left(-\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \\ \left(k - \frac{s}{2}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right)\vec{c} = \vec{0}$$

Da nur die triviale Linearkombination unabhängiger Vektoren den Nullvektor erzeugt, müssen die beiden Klammerausdrücke in der letzten Zeile gleich Null sein!

Fortsetzung

Also gilt:

$$\left| \begin{array}{l} k - \frac{s}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{k}{2} - \frac{s}{2} = 0 \end{array} \right|$$

Dieses lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

hat die Lösung: $k = \frac{1}{3}$ und $s = \frac{2}{3}$. Das Verhältnis von k zu s gibt nun das gesuchte Teilungsverhältnis:

$$\frac{k}{s} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Die Erkenntnisse der Einführung lassen sich nun verallgemeinern.

Definition Vektorraum

Definition

Ein Vektorraum über einen Körper \mathbf{K} ist eine Menge \mathbf{V} zusammen mit zwei Operationen:

$$\begin{array}{ll} + : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} & * : \mathbf{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \\ (v, w) \mapsto v + w & (\lambda, v) \mapsto \lambda * v \end{array}$$

für welche die folgenden Bedingungen gelten:

- Addition von Vektoren:

A1: $\forall u, v, w \in \mathbf{V}$	$(u + v) + w = u + (v + w)$
A2: $\forall u, v \in \mathbf{V}$	$u + v = v + u$
A3: $\exists 0 \in \mathbf{V}, \forall v \in \mathbf{V}$	$0 + v = v + 0 = v$
A4: $\forall v \in \mathbf{V} \exists -v \in \mathbf{V}$	$v + (-v) = (-v) + v = 0$

Fortsetzung

- Multiplikation mit einem Skalar:

S1: $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall v \in \mathbf{V}$	$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
S2: $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall v, w \in \mathbf{V}$	$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
S3: $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall v \in \mathbf{V}$	$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
S4: $\forall v \in \mathbf{V}$	$1v = v$

Das Tripel $(\mathbf{V}, +, *)$ aus Menge \mathbf{V} und den gegebenen Operationen $+$ und $*$ nennt man einen Vektorraum über \mathbf{K} . Ist \mathbf{K} die Menge der reellen Zahlen, so spricht man von einem reellen Vektorraum.

Bemerkung

Die Vektoren aus der Vektorgeometrie (Translationen) bilden mit der besprochenen Vektoraddition und der Multiplikation mit einer reellen Zahl ein reellen Vektorraum.

Vektorraum der reellen n -Tupel

Beispiel

Das Tripel aus Menge der reellen n -Tupel $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ mit $x_i \in \mathbf{R}$ und der Vektoraddition:

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

und der Multiplikation mit einem reellen Skalar:

$$\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

bilden einen reellen Vektorraum.

Vektorraum der reellen Matrizen

Beispiel

Das Tripel aus Menge der reellen $n \times m$ Matrizen

$V = \{x \in \mathbf{R}^{n \times m}\}$ und der behandelten Matrizenaddition:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) \mapsto (a_{ij} + b_{ij})$$

und Multiplikation einer Matrix mit einem reellen Skalar:

$$* : \mathbf{R} \times V \rightarrow V$$

$$\lambda * (a_{ij}) \mapsto (\lambda a_{ij})$$

bilden einen reellen Vektorraum.

Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grade n

Beispiel

Das Tripel aus Menge der reellen Polynomfunktionen

$V = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\}$ mit $a_k \in \mathbf{R}$ und den Operationen:

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) + \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k \right) \mapsto \left(\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k \right)$$

$$* : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

$$\lambda * \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \mapsto \left(\sum_{k=0}^n \lambda a_k x^k \right)$$

bilden einen reellen Vektorraum.

Untervektorraum

Sei $(\mathbf{V}, +, *)$ ein Vektorraum über \mathbf{K} und \mathbf{U} eine Teilmenge von \mathbf{V} . Nun stellt sich die Frage, ob $(\mathbf{U}, +, *)$ mit den Verknüpfungen von \mathbf{V} ebenfalls ein Vektorraum ist. Diese Frage beantwortet der nachfolgende Satz:

Theorem

Sei $(\mathbf{V}, +, *)$ ein Vektorraum über \mathbf{K} und \mathbf{U} eine Teilmenge von \mathbf{V} , so nennt man \mathbf{U} einen Untervektorraum von \mathbf{V} , wenn \mathbf{U} bezüglich der Verknüpfungen $+$ und $*$ abgeschlossen ist, d.h.

$$\forall u, v \in \mathbf{U} \Rightarrow u + v \in \mathbf{U} \quad (1)$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall v \in \mathbf{U} \Rightarrow \lambda v \in \mathbf{U} \quad (2)$$

Natürlich ist $(\mathbf{U}, +, *)$ ebenfalls ein Vektorraum!

Beispiel

Im Vektorraum der reellen n -Tupel bildet die Menge $U = \{(x, 0, 0, \dots, 0)\}$ einen reellen Untervektorraum, da die Summe zweier beliebiger Elemente aus U wieder in U liegen:

$$(x, 0, 0, \dots, 0) + (y, 0, 0, \dots, 0) = (x + y, 0, 0, \dots, 0) \in U$$

und die Multiplikation eines Elementes aus U mit einer beliebigen reellen Zahl ebenfalls in U liegt:

$$\lambda(x, 0, 0, \dots, 0) = (\lambda x, 0, 0, \dots, 0) \in U$$

Bemerkung

Gelten diese beiden Bedingungen, also bekommt man durch Linearkombinationen keine neuen Elemente, so sagt man die Menge ist **abgeschlossen** bezüglich den gegebenen Operationen.

Beispiel

Da die Summe zweier symmetrischer $n \times n$ Matrizen wieder eine symmetrische Matrix ist und die Multiplikation einer symmetrischen Matrix mit einer reellen Zahl auch wieder symmetrisch ist, ist die Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen abgeschlossen bezüglich Matrizenaddition und Multiplikation mit einem Skalar. Daher ist die Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen ein Untervektorraum des Vektorraums der quadratischen $n \times n$ Matrizen.

Beispiel

Die Summe zweier linearer Funktionen $f(x) = mx + b$ ist wieder eine lineare Funktion und das Produkt einer linearen Funktion mit einer reellen Zahl ist auch wieder eine lineare Funktion. Daher ist die Menge der linearen Funktionen ein Untervektorraum des Vektorraums der reellen Polynomfunktionen n -ten Grades.

Beispiel

Die Menge der Tripel $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ beschreibt eine Ebene im dreidimensionalen reellen Raum (Vektorraum der reellen Tripel). Die Tripel der Menge U lassen sich z.B. wie folgt beschreiben (y und z sind frei wählbar):

$$(x, y, z) = (-2y - 3z, y, z)$$

Die Summe zweier solcher Tripel ergibt:

$$(-2y_1 - 3z_1, y_1, z_1) + (-2y_2 - 3z_2, y_2, z_2) =$$

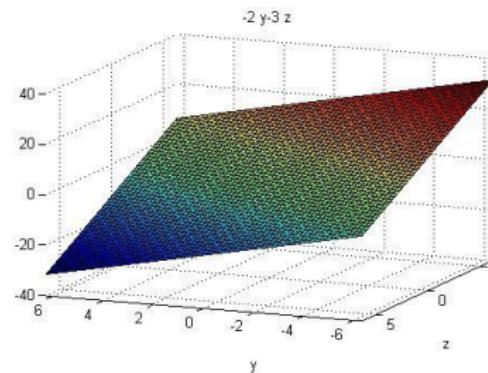
$$(-2(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in U$$

Fortsetzung

Ein Element von U mit einer reellen Zahl multipliziert ergibt wieder ein Element aus U :

$$\lambda(-2y_2 - 3z_2, y_2, z_2) = (-2\lambda y - 3\lambda z, \lambda y, \lambda z) \in U$$

Somit ist diese Ebene ein Untervektorraum des reellen dreidimensionalen Vektorraums.



Die Ebene des letzten Beispiels beinhaltet den Ursprung des dreidimensionalen Raums (Tripel $(0, 0, 0)$ ist der Nullvektor des Vektorraums). Wird die Ebene U parallel verschoben, so ist die neue Menge von Tripeln kein Untervektorraum mehr:

Beispiel

Die Menge der Tripel $U' = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (-2y - 3z + 5, y, z)\}$ (alle Punkte von U werden um 5 in x -Richtung verschoben!) bilden keinen Untervektorraum. Es gilt bei der Summe:

$$(-2y_1 - 3z_1 + 5, y_1, z_1) + (-2y_2 - 3z_2 + 5, y_2, z_2) =$$

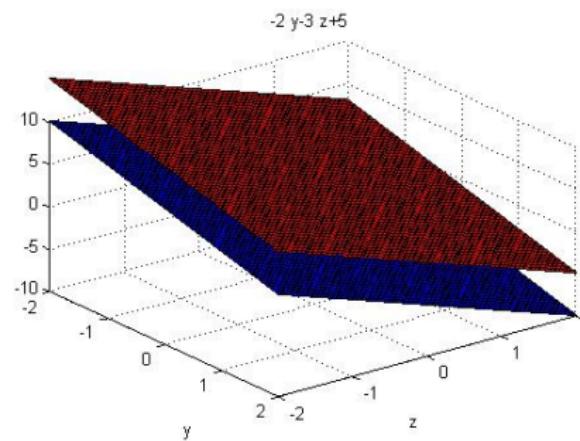
$$(-2(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2) + 10, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \notin U'$$

Bemerkung

Der Nullvektor ist immer Element des Untervektorraums!

Bemerkung

Sei \mathbf{U} ein Untervektorraum des Vektorraums \mathbf{V} und sei a ein Element von \mathbf{V} , welches nicht im Untervektorraum liegt, so ist $\mathbf{U}' = \{v \in \mathbf{V} : v = u + a, u \in \mathbf{U}\}$ kein Untervektorraum. Eine solche Menge nennt man einen affinen Raum (werden wir nicht speziell behandeln!).



Lineare Hülle

Eine Möglichkeit einen Untervektorraum zu bilden, ist mit gegebenen Vektoren alle möglichen Linearkombinationen zu bilden:

Definition

Seien v_1, v_2, \dots, v_n Vektoren eines Vektorraums \mathbf{V} . Die Menge

$$L(v_1, v_2, \dots, v_n) := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n\} \subset \mathbf{V} \quad (3)$$

aller Linearkombinationen von v_1, v_2, \dots, v_n heisst die lineare Hülle des n -tupels (v_1, v_2, \dots, v_n) von Vektoren.

Theorem

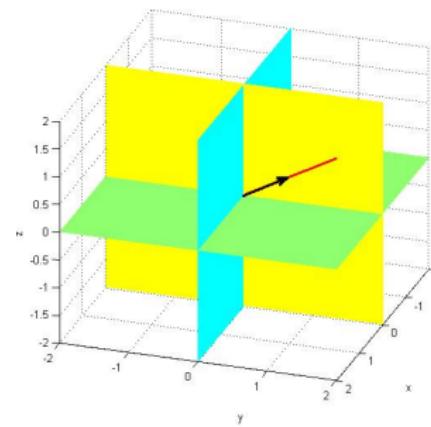
Die lineare Hülle ist immer ein Untervektorraum.

Beispiel

Betrachten wir den dreidimensionalen reellen Vektorraum

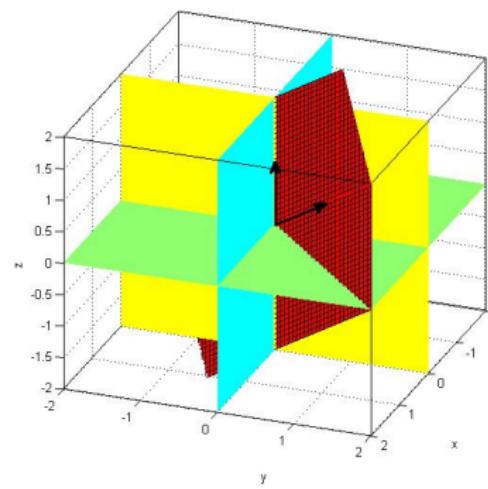
$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z)\}.$$

- Die lineare Hülle des Vektors $v = (1, 1, 1)$ ist der Untervektorraum $\mathbf{U} = \{\lambda(1, 1, 1)\} = \{(\lambda, \lambda, \lambda)\}$. Dies sind alle Punkte auf einer Geraden im \mathbf{R}^3 :



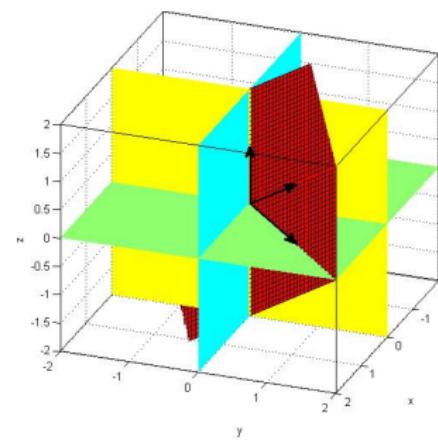
Fortsetzung

- Die lineare Hülle der Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)$ und $v_2 = (0, 0, 1)$ ist der Untervektorraum $\mathbf{U} = \{\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(0, 0, 1)\}$ $= \{(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)\}$. Dies sind alle Punkte auf einer Ebenen im \mathbb{R}^3 :



Fortsetzung

- Die lineare Hülle der Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ und $v_3 = (1, 1, 0)$ ist der Untervektorraum
 $\mathbf{U} = \{\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(0, 0, 1) + \lambda_3(1, 1, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$
 $= \{(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$. Dies sind alle Punkte auf der vorigen Ebene:



Mit der linearen Hülle können also aus einer kleinen Anzahl von Vektoren viele neue Vektoren gebildet werden! Dieser Sachverhalt wird uns im weiteren beschäftigen. Zudem haben wir in den letzten beiden Beispielen gesehen, dass mit unterschiedlichen Vektoren (oder auch mit einer unterschiedlichen Anzahl von Vektoren) die gleichen (Unter)-Vektorräume erzeugt werden können. Diese Tatsache ist sehr störend, da sie keine eindeutige Beschreibungsmöglichkeit der Vektoren des (Unter)-Vektorraums bewirkt. Um hier weiter zu kommen, brauchen wir nun wieder den Begriff der linearen Unabhängigkeit aus der Einführung!

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Die n Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n des Vektorraums \mathbf{V} nennt man linear unabhängig, wenn sich keiner der Vektoren als Linearkombination der restlichen Vektoren darstellen lässt. Andernfalls nennt man die Vektoren linear abhängig.

Theorem

Die n Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n des Vektorraums \mathbf{V} sind genau dann linear unabhängig, wenn der Nullvektor des Vektorraums nur mit einer trivialen Linearkombination gebildet werden kann:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0$$

Beispiel

Es soll gezeigt werden, dass die drei Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ und $v_3 = (1, 1, 0)$ des Vektorraums der reellen Tripel linear abhängig sind. Dazu stellt man den Nullvektor als Linearkombination der drei Vektoren dar:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (0, 0, 1) + \lambda_3 (1, 1, 0) =$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

Dies führt zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

Dieses System besitzt neben der trivialen Nulllösung noch unendlich viele weitere Lösungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3 : (-\lambda_3, \lambda_3, \lambda_3)\}$$

Die Lösung eingesetzt, zeigt nun, dass es unendlich viele Linearkombinationen gibt:

$$-\lambda_3 v_1 + \lambda_3 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{z.B.} -v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Fortsetzung

Diese letzte Gleichung kann nach einem der drei Vektoren aufgelöst werden. Für v_3 gilt:

$$v_3 = v_1 - v_2$$

Der Vektor v_3 lässt sich somit als Linearkombination der anderen beiden Vektoren schreiben!

Diese Erkenntnis haben wir auch bei den letzten beiden Beispielen zur linearen Hülle erhalten. Die Hinzunahme des dritten Vektors hat auf die linearen Hülle keinen Einfluss gehabt:

$$L(v_1, v_2) = L(v_1, v_2, v_3)$$

Beispiel

Es soll gezeigt werden, dass die drei Polynome $p_1 = 1$, $p_2 = 1 + x$ und $p_3 = 1 + x + x^2$ des Vektorraums der Polynome linear unabhängig sind. Dazu stellt man den Nullvektor (Nullpolynom $p_0 = 0$) als Linearkombination der drei Funktionen dar:

$$\begin{aligned}\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 &= \lambda_1 (1) + \lambda_2 (1 + x) + \lambda_3 (1 + x + x^2) = \\ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_2 + \lambda_3)x + (\lambda_3)x^2 &= 0 = 0 + 0x + 0x^2\end{aligned}$$

Dies führt zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da dieses System regulär ist besitzt es nur die triviale Nulllösung!

Basis

Linear unabhängige Vektoren besitzen die wichtige Eigenschaft:

Theorem

Seien die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n linear unabhängig, so lässt sich jeder Vektor im Vektorraum der linearen Hülle dieser Vektoren eindeutig als Linearkombination dieser Vektoren darstellen.

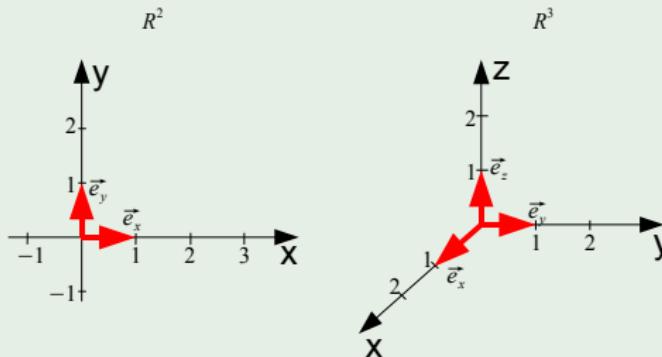
Daher definiert man denn Begriff der Basis:

Definition

Sei \mathbf{V} ein Vektorraum über \mathbf{K} . Die Menge der n Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbf{V}$ heisst eine Basis von \mathbf{V} , wenn die Vektoren linear unabhängig sind und die lineare Hülle der Vektoren den ganzen Vektorraum aufspannen.

Beispiel

Betrachten wir die Translationen in einem reellen zwei- bzw. dreidimensionalen Raum mit einem kartesischen Koordinatensystem:

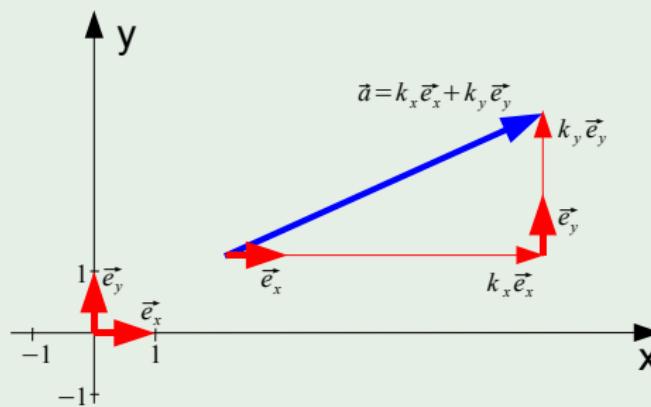


Die Translationen mit der Länge 1 entlang den Koordinatenachsen bilden eine Basis der Vektorräume:

Fortsetzung

$$B_{\mathbb{R}^2} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}, B_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$$

Nun lässt sich eine beliebige Translation eindeutig als Linearkombination dieser Basisvektoren beschreiben:



Fortsetzung

Anstelle dieser aufwendigen Schreibweise in Form einer Linearkombination $\vec{a} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$ verwendet man meistens die Komponentenschreibweise, wobei in einem Spaltenvektor (oder auch Zeilenvektor) die Koeffizienten der Linearkombination angegeben werden:

$$\vec{a} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Die in diesem Beispiel verwendete Basis ist die Standardbasis und man nennt diese auch die kanonische Basis!

Beispiel

Wir wollen zeigen, dass die drei Translationen $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbf{R}^3 bilden.

Dazu muss gezeigt werden, dass diese drei Translationen linear unabhängig sind und sie den ganzen Vektorraum aufspannen. Dies kann in einem Schritt durchgeführt werden. Wir stellen dazu einen beliebigen Vektor als Linearkombination der gegebenen Vektoren dar:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1 \vec{b}_1 + k_2 \vec{b}_2 + k_3 \vec{b}_3$$

Fortsetzung

Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem mit den drei Unbekannten k_1, k_2 und k_3 (und den Parametern x, y und z):

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauss-Jordan-Verfahren bekommt man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y+z}{7} \\ \frac{-4x+5y-2z}{7} \\ \frac{-5x+y+z}{7} \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

Das lineare Gleichungssystem ist somit regulär und hat (unabhängig von den Parameterwerten) eine eindeutige, einelementige Lösungsmenge. Daher kann auch der Nullvektor ($x = y = z = 0$) nur auf eine Art (triviale Linearkombination) dargestellt werden und die Vektoren sind daher linear unabhängig! Zudem können für die Parameter beliebige Werte eingesetzt werden und somit spannen die drei gegebenen Vektoren auch den gesamten Raum auf! Gilt z.B. $x = y = z = 1$, so findet man für diesen Vektor die folgenden Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y+z}{7} \\ \frac{-4x+5y-2z}{7} \\ \frac{-5x+y+z}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+1+1}{7} \\ \frac{-4+5-2}{7} \\ \frac{-5+1+1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

Also gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-3}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Im Vektorraum der Polynome höchstens 4-ten Grades betrachten wir die Polynome (Legendre-Polynome):

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x), P_4 = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Fortsetzung

Es soll gezeigt werden, dass diese Polynome eine Basis des Vektorraums bilden.

Das Vorgehen ist analog zum letzten Beispiel - es wird ein allgemeines Polynom des Vektorraums als Linearkombination der gegebenen Vektoren gebildet:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 &= k_0P_0 + k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3 + k_4P_4 \\ &= \left(k_0 - \frac{1}{2}k_2 + \frac{3}{8}k_4\right) + \left(k_1 - \frac{3}{2}k_3\right)x + \left(\frac{3}{2}k_2 - \frac{15}{4}k_4\right)x^2 + \frac{5}{2}k_3x^3 + \frac{35}{8}k_4x^4 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das Gleichungssystem:

Fortsetzung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Dieses System ist regulär und besitzt die eindeutige Lösung:

$$\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{5}a_4 \\ a_1 + \frac{3}{5}a_3 \\ \frac{2}{3}a_2 + \frac{4}{7}a_4 \\ \frac{2}{5}a_3 \\ \frac{8}{35}a_4 \end{pmatrix}$$

Die Polynome sind linear unabhängig und spannen den Vektorraum auf und bilden daher eine Basis.

Dimension

In der Regel hat ein Vektorraum unendlich viele verschiedene Basen. Es gilt jedoch:

Theorem

Sind $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ Basen eines Vektorraums, so sind die beiden Basen gleichmächtig.

Daher definiert man:

Definition

Unter der Dimension $\dim(\mathbf{V})$ eines Vektorraums \mathbf{V} versteht man die Anzahl der Vektoren einer Basis. Besitzt ein Vektorraum eine endliche Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, spricht man von einem endlich dimensionalen Vektorraum ($\dim(\mathbf{V}) = n$). Andernfalls spricht man von einem unendlich dimensionalen Vektorraum ($\dim(\mathbf{V}) = \infty$).

Beispiel

Die Vektorräume der Translationen in den zwei- und dreidimensionalen reellen Räumen sind zwei- bzw. dreidimensional.

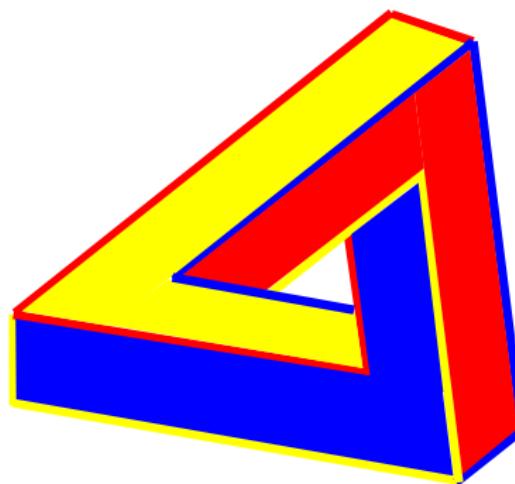
Beispiel

Für den Vektorraum der $n \times m$ Matrizen gilt: $\dim(\mathbf{R}^{n \times m}) = nm$.

Beispiel

Der Vektorraum der Polynome ist unendlich dimensional. Eine mögliche Basis ist: $B = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$.

5 Euklid'sche Vektorräume



5

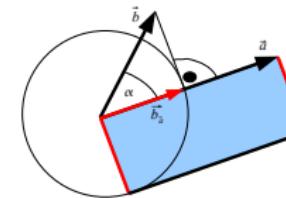
Euklid'sche Vektorräume

- Skalarprodukte
 - Einführung
 - Definition
 - Standardskalarprodukt
- Norm und Winkel
 - Definition
 - Orthogonale Vektoren
- Orthogonale Zerlegungen
 - Orthonormale Basen
 - Projektion
 - Orthogonale Zerlegung
 - Orthonormalisierung
- Matrizenräume
 - Definition
 - Dimensionssatz
 - Normalensystem

Einführung

Bisher konnten wir in den Vektorräumen noch keine Längen und Winkel berechnen. Dazu reichen die Vektorraumdaten nicht aus, der Vektorraum muss mit einer Zusatzstruktur ausgestattet werden. Diese zusätzliche Struktur wird mit dem Skalarprodukt eingeführt.

Betrachten wir dazu wieder die Situation bei der Vektorgeometrie. Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Translationen, so versteht man unter dem Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ dieser beiden Translationen die reelle Zahl aus Produkt der Länge des ersten Vektors ($|\vec{a}|$) mal Länge der Projektion des zweiten auf den ersten Vektor ($|\vec{b}_a| = |\vec{b}| \cos(\alpha)$):



$$\vec{a} \circ \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}_a| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha)$$

Ein solches Skalarprodukt liefert uns drei sehr grundlegende Prinzipien:

- Mittels Skalarprodukt kann die Länge (Betrag) eines Vektors berechnet (bzw. definiert) werden: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Mittels Skalarprodukt kann der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet (bzw. definiert) werden: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
- Mittels Skalarprodukt können insbesondere rechte Winkel definiert werden! Da der Kosinus eines rechten Winkels Null ist, ist das Skalarprodukt rechtwinklig (normal) zueinanderstehender Vektoren gleich Null.

Definition

Diese Definition aus der Vektorgeometrie wird nun auf allgemeine Vektorräume erweitert:

Definition

Sei \mathbf{V} ein reeller Vektorraum. Ein Skalarprodukt in \mathbf{V} ist eine Abbildung $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}, (u, v) \mapsto u \circ v$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

- Bilinearität, dass heisst, die beiden Abbildungen für die einzelnen Operanden sind linear:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{R}, u \mapsto u \circ v \\ \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{R}, v \mapsto u \circ v\end{aligned}\tag{1}$$

Euklid'sche Vektorräume

Definition (Fortsetzung)

- Die Abbildung ist kommutativ:

$$u \circ v = v \circ u \quad (2)$$

- Positive Definitheit:

$$u \circ u \geq 0 \quad (3)$$

Definition

Ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt nennt man einen **Euklid'schen Vektorraum**.

Das in der Einführung besprochene Skalarprodukt aus der Vektorgeometrie erfüllt diese drei Eigenschaften. Die zweite und dritte Eigenschaft sind einfach zu zeigen:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha) = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos(-\alpha) = \vec{b} \circ \vec{a}$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos(0) = |\vec{a}|^2 \geq 0$$

Die erste Eigenschaft beschreibt in etwa das Distributivgesetz. Es muss folgendes gelten: Linear im ersten Argument (Faktor)

$$(k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2) \circ \vec{b} = k_1 \vec{a}_1 \circ \vec{b} + k_2 \vec{a}_2 \circ \vec{b}$$

und linear im zweiten Argument (Faktor):

$$\vec{a} \circ (k_1 \vec{b}_1 + k_2 \vec{b}_2) = k_1 \vec{a} \circ \vec{b}_1 + k_2 \vec{a} \circ \vec{b}_2$$

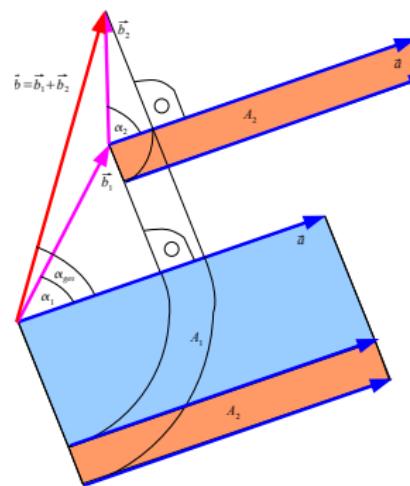
Da das Kommutativgesetz gilt, muss die Linearität nur für einen der Faktoren gezeigt werden! Wir zeigen es für den zweiten Faktor (ohne Skalare).

In der Skizze sieht man, wie sich die beiden Flächen aufaddieren:

$$A_1 = \vec{a} \circ \vec{b}_1 = |\vec{a}| |\vec{b}_1| \cos(\alpha_1)$$

$$A_2 = \vec{a} \circ \vec{b}_2 = |\vec{a}| |\vec{b}_2| \cos(\alpha_2)$$

$$A_{ges} = \vec{a} \circ (\vec{b_1} + \vec{b_2}) = |\vec{a}| |\vec{b_1} + \vec{b_2}| \cos(\alpha_{ges}) = A_1 + A_2$$



Standardskalarprodukt

Aus den Gesetzen für das Skalarprodukt lässt sich für die Vektorgeometrie einfach die Berechnung in Komponenten herleiten. Seien \vec{a} und \vec{b} Vektoren aus dem \mathbf{R}^3 mit der kanonischen Basis. Die Vektoren lassen sich mit dieser Basis in Komponentendarstellung beschreiben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$

Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ lässt sich nun mit den Gesetzen auseinander nehmen:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \circ (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z)$$

$$\begin{aligned}
 &= a_x b_x \vec{e}_x \circ \vec{e}_x + a_x b_y \vec{e}_x \circ \vec{e}_y + a_x b_z \vec{e}_x \circ \vec{e}_z + a_y b_x \vec{e}_y \circ \vec{e}_x + a_y b_y \vec{e}_y \circ \vec{e}_y + \\
 &\quad a_y b_z \vec{e}_y \circ \vec{e}_z + a_z b_x \vec{e}_z \circ \vec{e}_x + a_z b_y \vec{e}_z \circ \vec{e}_y + a_z b_z \vec{e}_z \circ \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Wegen den Zwischenwinkeln bei den Basisvektoren gilt:

$$\vec{e}_x \circ \vec{e}_x = \vec{e}_y \circ \vec{e}_y = \vec{e}_z \circ \vec{e}_z = 1$$

$$\vec{e}_x \circ \vec{e}_y = \vec{e}_x \circ \vec{e}_z = \vec{e}_y \circ \vec{e}_z = \dots = 0$$

Also gilt für das Standardskalarprodukt:

Standardskalarprodukt in Komponenten

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (4)$$

Weitere Skalarprodukte:

\mathbb{R}^n

Für den reellen Vektorraum der reellen n -tupel (a_1, a_2, \dots, a_n) ist das Skalarprodukt meist folgendermassen definiert:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \circ (b_1, b_2, \dots, b_n) := \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

Raum der Polynome

Im reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten wird das Skalarprodukt meist folgendermassen definiert:

$$p(x) \circ q(x) = \int_{x=-1}^1 p(x)q(x)dx$$

Norm und Winkel

Analog der Vektorgeometrie kann in einem euklid'schen Vektorraum der Betrag und der Winkel definiert werden:

Definition

In einem reellen Vektorraum mit Skalarprodukt versteht man unter

- dem Betrag eines Vektors v die Grösse:

$$\|v\| := \sqrt{v \circ v} \quad (5)$$

- dem Zwischenwinkel der Vektoren u, v die Grösse:

$$\angle(u, v) := \arccos \left(\frac{u \circ v}{\|u\| \|v\|} \right) \quad (6)$$

Beispiel

Die Seitenlängen und Innenwinkel des Dreiecks $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ und $C(-1, 4, -3)$ sollen berechnet werden.

Mit den Ortsvektoren zu den Eckpunkten:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{r}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

lassen sich die Verbindungsvektoren bestimmen:

$$\vec{a} = \vec{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 4 - 3 \\ -3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

$$\vec{b} = \vec{CA} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Seitenlängen entsprechen den Beträgen der Seitenvektoren:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}} = \sqrt{59}$$

$$b = |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}, c = |\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Fortsetzung

Für die Innenwinkel gilt weiter:

$$\alpha = \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \angle(\vec{c}, -\vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{c} \circ -\vec{b}}{|\vec{c}| |\vec{b}|}\right) = 1.9791$$

$$\beta = \angle(\vec{BC}, \vec{BA}) = \angle(\vec{a}, -\vec{c}) = 0.699$$

$$\gamma = \angle(\vec{CA}, \vec{CB}) = \angle(\vec{b}, -\vec{a}) = 0.4635$$

Beispiel

Im Vektorraum der Polynome soll der Abstand zwischen den Polynomen $p_1(x) = 1$ und $p_2(x) = x$ bestimmt werden:

Fortsetzung

Analog der Vektorgeometrie ist der Abstand gleich dem Betrag des Verbindungsvektors (Differenz aus End- und Anfangspunkt). Das Differenzpolynom lautet: $dp(x) = p_2(x) - p_1(x) = x - 1$. Den Betrag berechnet man mittels dem Skalarprodukt des Vektorraums, also:

$$\begin{aligned} \|dp(x)\| &= \sqrt{dp(x) \circ dp(x)} = \sqrt{\int_{x=-1}^1 dp^2(x) dx} \\ &= \sqrt{\int_{x=-1}^1 (x-1)^2 dx} = \sqrt{\int_{x=-1}^1 (x^2 - 2x + 1) 2dx} \\ &= \sqrt{\left. \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right|_{-1}^1} = \sqrt{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Aus der Winkeldefinition folgt unmittelbar:

Orthogonale Vektoren

Stehen zwei Vektoren rechtwinklig zueinander, so wird das Skalarprodukt dieser Vektoren gleich Null. Anstelle von rechtwinklig spricht man oft auch von **normal** oder **orthogonal**.

Beispiel

Gesucht sei ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, welcher rechtwinklig auf den beiden

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ steht und die Länge Eins

hat. Für den gesuchten Vektor macht man einen allgemeinen

Ansatz: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ mit den drei Unbekannten v_x , v_y und v_z .

Fortsetzung

Um die drei Unbekannten zu bestimmen braucht es drei Gleichungen:

- Betrag ist Eins: $\sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 1$
- Normal zu \vec{a} : $\vec{a} \circ \vec{v} = v_x + v_y = 0$
- Normal zu \vec{b} : $\vec{b} \circ \vec{v} = -v_x + 2v_z = 0$

Löst man in der zweiten und dritten Gleichung nach v_y ($v_y = -v_x$) und v_z ($v_z = \frac{1}{2}v_x$) auf und setzt dies in der ersten Gleichung ein, so erhält man:

$$v_x^2 + (-v_x)^2 + \left(\frac{1}{2}v_x\right)^2 = \frac{9}{4}v_x^2 = 1 \Rightarrow v_x = \pm \frac{2}{3}$$

Fortsetzung

Es gibt also zwei Vektoren, welche die Forderung erfüllen:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Auch in anderen euklid'schen Vektorräumen gibt es orthogonale Vektoren:

Beispiel

Im Vektorraum der Polynomfunktionen, stehen die Legendre-Polynome orthogonal zueinander! Wir zeigen dies für die beiden Polynome $P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ und $P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$.

Fortsetzung

Die Polynome sind orthogonal, wenn das entsprechende Skalarprodukt Null ergibt:

$$\begin{aligned}
 P_3 \circ P_4 &= \int_{x=-1}^1 P_3 P_4 dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 \frac{1}{16} (175x^7 - 255x^5 + 105x^3 - 9x) dx \\
 &= \left. \frac{1}{16} \left(\frac{175x^8}{8} - \frac{255x^6}{6} + \frac{105x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right) \right|_{-1}^1 = 0
 \end{aligned}$$

Orthonormale Basen

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass in einem euklid'schen Vektorraum orthogonale Vektoren definiert sind. Für die Beschreibung der Vektoren in einem Vektorraum eignet sich eine Basis mit solchen Vektoren sehr gut. Daher definieren wir:

Definition

Eine Basis $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eines euklid'schen Vektorraums \mathbf{V} nennt man eine orthonormale Basis, wenn:

- Jeder Basisvektor den Betrag 1 hat:
 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \|b_k\| = 1$
- Beliebige zwei Basisvektoren stehen orthogonal zueinander:
 $\forall k, p \in \{1, 2, \dots, n\}, k \neq p \Rightarrow b_k \circ b_p = 0$

Beispiel

Die kanonische Basis $B = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ist für den dreidimensionalen Vektorraum (der Vektorgeometrie) eine orthonormale Basis!

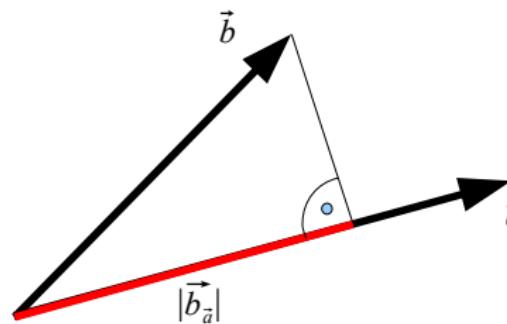
Beispiel

Neben der kanonischen Basis besitzt der dreidimensionale Vektorraum noch unendlich viele weitere orthonormale Basen. Eine davon ist:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Projektion

Sehr häufig werden Projektionen gebraucht. Erläutern wir den Begriff mit Hilfe der Vektorgeometrie. Seien \vec{a} und \vec{b} linear unabhängige Vektoren, so versteht man unter der Projektion des Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a} die Länge des Schattens, welcher der Vektor \vec{b} auf den Vektor \vec{a} wirft, wenn der Lichteinfall rechtwinklig zum Vektor \vec{a} ist:

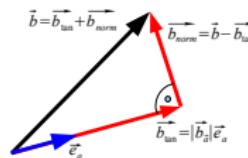


Projektion

Die Projektionslänge von \vec{b} auf \vec{a} ist gleich:

$$\left| \vec{b}_{\vec{a}} \right| = b_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \circ \vec{b} \quad (7)$$

Die Formel wird besonders einfach, wenn auf ein Vektor mit Länge Eins projiziert wird: $b_{e_a} = \vec{b} \circ \vec{e}_a$. Nun kann ein beliebiger Vektor \vec{b} (eindeutig) in eine Summe zerlegt werden, wobei der eine Anteil parallel zum Vektor \vec{a} verläuft und der zweite Anteil normal dazu:



Dieser Sachverhalt lässt sich folgendermassen formulieren:

Orthogonale Zerlegung

Theorem

Sei \mathbf{V} ein euklid'scher Vektorraum und $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine orthonormale Basis von \mathbf{V} , so lässt sich jeder beliebige Vektor $v \in \mathbf{V}$ wie folgt schreiben:

$$v = \sum_{k=1}^n (v \circ b_k) b_k = (v \circ b_1) b_1 + (v \circ b_2) b_2 + \dots + (v \circ b_n) b_n \quad (8)$$

Beispiel

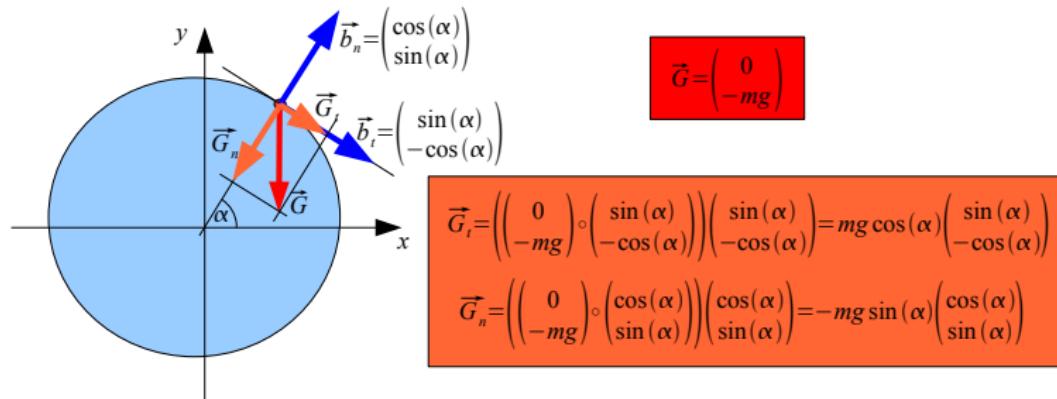
Ein Massenpunkt m befindet sich auf der Oberfläche einer Kugel. Die Gewichtskraft \vec{G} soll in einem beliebigen Punkt in eine normale und eine tangentiale Komponente zerlegt werden.

Fortsetzung

Mit der orthonormalen Basis:

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \vec{b}_t = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

lässt sich die Kraftzerlegung einfach durchführen!



Orthonormalisierung

Zerlegungen und Projektionen lassen sich mit orthonormalen Vektoren / Basen sehr einfach ausführen. Doch meist haben wir keine orthonormale Vektoren und die Frage ist, wie wir solche Vektoren finden können. Betrachten wir ein mögliches Vorgehen anhand einem Beispiel aus der Vektorgeometrie. Im dreidimensionalen reellen Raum seien die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ gegeben. Die lineare Hülle dieser}$$

Vektoren ist der Unterraum $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^3$ und die beiden Vektoren bilden eine Basis dieses Unterraums. In einem ersten Schritt wollen wir für diesen Unterraum eine orthonormale Basis entwickeln.

Dazu wandeln wir die gegebene Basis in die neue gesuchte Basis um. In einem ersten Schritt sucht man zwei orthogonale Vektoren in diesem Unterraum und danach werden diese normiert.

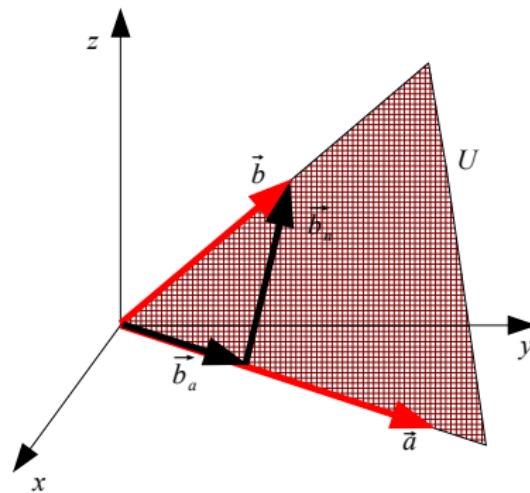
Ausgehend vom Vektor \vec{a} wird der zweite Vektor zerlegt in eine Komponente in Richtung von \vec{a} und eine dazu rechtwinklige Komponente:

$$\vec{b}_a = \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{b} \circ \vec{a}) \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}^2} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_n = \vec{b} - \vec{b}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

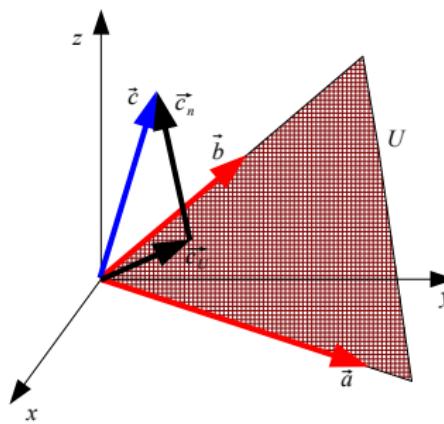
Normierung liefert dann eine orthonormale Basis:

$$\vec{o}_1 = \frac{1}{|\vec{b}_a|} \vec{b}_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{o}_2 = \frac{1}{|\vec{b}_n|} \vec{b}_n = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Wird nun der dritte Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ hinzugenommen (\vec{a}, \vec{b}

und \vec{c} bilden eine Basis des \mathbb{R}^3) so können wir die gefundene Basis nach einem analogen Prinzip erweitern. Wir zerlegen dazu den neuen Vektor in eine Summe eines Vektors im Unterraum \vec{c}_U und eine normal dazu stehende Komponente \vec{c}_n :



Es gilt nun sicher:

$$\vec{c} = \vec{c}_U + \vec{c}_n = \underbrace{(\vec{c} \circ \vec{o}_1) \vec{o}_1}_{\vec{c}_U} + (\vec{c} \circ \vec{o}_2) \vec{o}_2 + \underbrace{(\vec{c} \circ \vec{o}_3) \vec{o}_3}_{\vec{c}_n}$$

Dabei ist der Vektor \vec{o}_3 der noch zu bestimmende dritte Vektor der gesuchten orthonormalen Basis. Aber aus der Formel lässt sich einerseits \vec{c}_U bestimmen und damit auch \vec{c}_n :

$$\vec{c}_U = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{8}{21} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_n = \vec{c} - \vec{c}_U = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor \vec{c}_n steht nun normal zum Untervektorraum \mathbf{U} und daher auch normal zu den beiden orthonormalen Basisvektoren \vec{o}_1 und \vec{o}_2 des Unterraums. Um nun eine orthonormale Basis des dreidimensionalen Raumes zu bekommen, muss dieser dritte Vektor noch normiert werden:

$$\vec{o}_3 = \frac{1}{|\vec{c}_n|} \vec{c}_n = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Sinne könnte man in einem höher dimensionalen Raum weiterfahren!

Gram-Schmidt-Verfahren

Man kann jede Basis in eine orthonormale Basis umwandeln. Ein Verfahren dazu liefert das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren:

Theorem

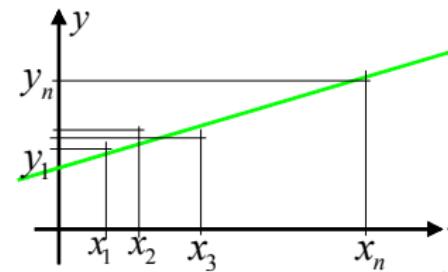
Ist $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ eine Basis des euklid'schen Vektorraums \mathbf{V} , so wird durch die Rekursionsformel:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, w_{i+1} = \frac{v_{i+1} - \sum_{k=1}^i (v_{i+1} \circ w_k) w_k}{\left\| v_{i+1} - \sum_{k=1}^i (v_{i+1} \circ w_k) w_k \right\|} \quad (9)$$

die Menge $B_2 = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ eine orthonormale Basis dieses Vektorraums.

Lineare Regression I

Als Beispiel der Orthonormalisierung betrachten wir ein grösseres Beispiel. Gegeben seien die Daten einer Messreihe $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ aus n Messungen. Zudem sei bekannt, dass die Messdaten einem linearen Zusammenhang $y = mx + b$ unterliegen (z.B. wurden über einem ohmschen Widerstand der Strom I und Spannung U gemessen - hier gilt das ohmsche Gesetz $U = RI$). In der Regel liegen die n Werte jedoch nicht auf einer Geraden, da sich bei Messungen Fehler einschleichen:



Ziel ist es nun, eine Gerade so zu bestimmen, dass sie die gegebenen Messwerte gut beschreibt. Die Bedeutung von diesem gut kann auf verschiedene Arten interpretiert werden. Wir lassen es zum jetzige Zeitpunkt noch offen.

Unter der Annahme, dass alle Messpunkte auf einer Geraden liegen, können durch das Einsetzen zweier Punkte in einem allgemeinen Ansatz ($y = mx + b$) für die gesuchte Gerade die beiden Parameter berechnet werden. Z.B. durch Einsetzen der Messpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) findet man für die Gerade:

$$y_1 = mx_1 + b$$

$$y_2 = mx_2 + b$$

Das lineare Gleichungssystem in Matrzenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Mit der Cramer'schen Regel die Parameter bestimmen:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2$$

$$D_m = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = y_1 - y_2$$

$$D_b = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$m = \frac{D_m}{D} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$$

$$\Rightarrow y = mx + b = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

Setzen wir aber mehr als zwei Punkte im Ansatz ein, so erhalten wir ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen mit 2 Unbekannten:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

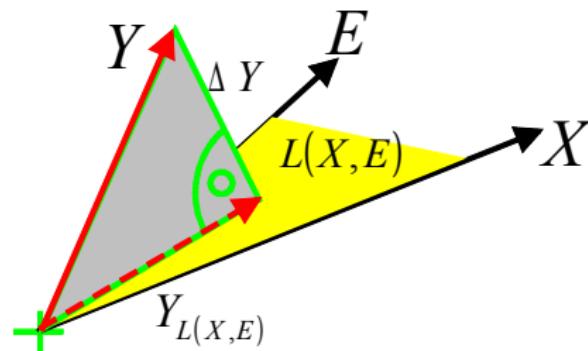
Dieses System ist nur lösbar, wenn alle Punkte auf einer Geraden liegen. Andernfalls ist das System widersprüchlich (leere Lösungsmenge).

Nun wechseln wir in einen n -dimensionalen reellen Raum (reelle n -Tupel) und interpretieren das lineare Gleichungssystem als Vektorgleichung in diesem Raum:

$$X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, E^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$mX^T + bE^T = Y^T$$

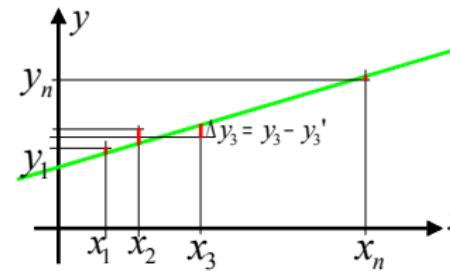


Da der Vektor Y nicht in der linearen Hülle der beiden Vektoren X und E liegt, ist die Vektorgleichung nicht lösbar! Die lineare Hülle $L(X, E)$ beinhaltet jedoch alle Vektoren Y' , mit möglichen Messwerten für die Messgröße y , so dass die Vektorgleichung lösbar wird und die Messwerte aus X und Y' auf einer Geraden liegen.

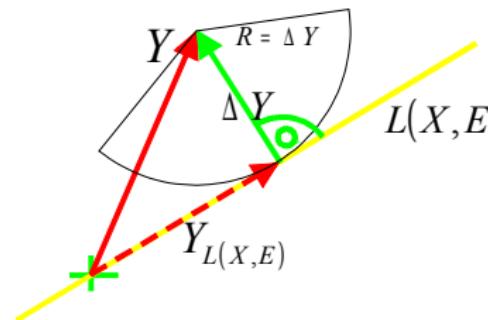
Die Idee für das weitere Vorgehen ist nun die Messwerte so anzupassen, dass die Messwerte auf der Geraden liegen. Welchen Vektor aus der linearen Hülle soll nun gewählt werden? Sei nun $Y' \in L(X, E)$ so beschreibt der Vektor

$$\Delta Y^T = Y^T - (Y')^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y'_1 \\ y_2 - y'_2 \\ \vdots \\ y_n - y'_n \end{pmatrix}$$

die Abweichungen zwischen Messwerten und den Punkten auf der Geraden!



Nun können wir auch etwas über die Bedeutung des gut aus der Aufgabenstellung aussagen. Wir wollen die Gerade so in die Messwerte einpassen, dass der Fehlervektor minimale Länge aufweist! Minimale Länge hat der Fehlervektor ΔY , wenn er normal zur linearen Hülle steht (wir werden die gleichen Überlegungen bei Abstandsproblemen in der Vektorgeometrie anwenden - in der Analysis löst man das Problem der linearen Regression dadurch, dass die Summe der Fehlerquadrate minimiert wird!):



Um den Vektor Y in die lineare Hülle zu projizieren bestimmen wir von der linearen Hülle eine orthonormale Basis. Beginnen wir mit der Normierung von E :

$$B_1 = \frac{E}{|E|}$$

Nun bestimmen wir die Projektion von X auf B_1 :

$$X_{B_1} = (X \circ B_1) B_1$$

Und die Brechnung des zweiten Basisvektors:

$$B_2 = \frac{X - X_{B_1}}{|X - X_{B_1}|}$$

Jetzt können wir den Y Vektor in die Summe $Y = Y_{L(X,E)} + \Delta Y$ zerlegen:

$$Y_{L(X,E)} = (Y \circ B_1) B_1 + (Y \circ B_2) B_2$$

$$\Delta Y = Y - Y_{L(X,E)}$$

Die Vektorgleichung $mX^T + bE^T = Y_{L(X,E)}^T$ und somit auch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = Y_{L(X,E)}^T$$

ist nun lösbar und liefert die gesuchten Parameterwerte m und b für die gesuchte Gerade.

Betrachten wir das Verfahren an einem Zahlenbeispiel. Wir suchen die Gerade für die folgende Messreihe:

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	4	6	7	9

Wir haben also die folgenden 6-Tupel:

$$X = (1, 2, 3, 4, 5, 6), Y = (1, 3, 4, 6, 7, 9)$$

Die Punkte im Ansatz eingesetzt liefert die Vektorgleichung:

$$m \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Als nächstes bestimmen wir von der linearen Hülle $L(X, E)$ die orthonormale Basis:

$$B_1 = \frac{E}{|E|} = \frac{(1, 1, 1, 1, 1, 1)}{\sqrt{6}}$$

$$B_2 = \frac{X - (X \circ B_1) B_1}{|X - (X \circ B_1) B_1|} = \frac{(-5, -3, -1, 1, 3, 5)}{\sqrt{70}}$$

Nun können wir den Y Vektor zerlegen:

$$Y_{L(X,E)} = (Y \circ B_1) B_1 + (Y \circ B_2) B_2 = \frac{(40, 94, 148, 202, 256, 310)}{35}$$

$$\Delta Y = Y - Y_{L(X,E)} = \frac{(-5, 11, -8, 8, -11, 5)}{35}$$

Das nun lösbarre lineare Gleichungssystem lautet:

$$(X^T, E^T) \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = Y_{L(X,E)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 40 \\ 94 \\ 148 \\ 202 \\ 256 \\ 310 \end{pmatrix}$$

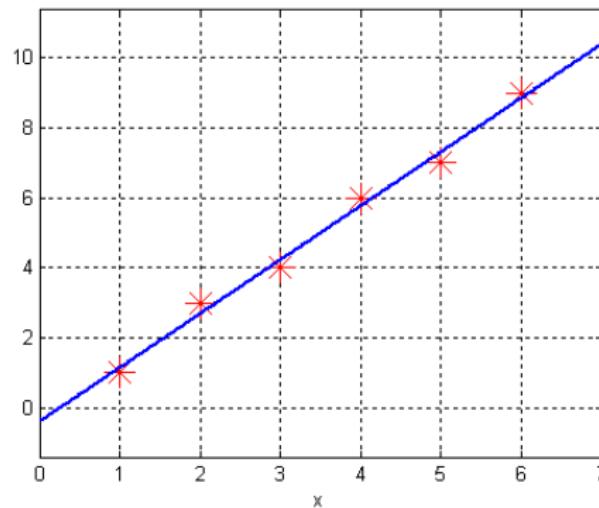
Die Lösung mit dem Gauss'schen Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{40}{35} \\ 2 & 1 & \frac{94}{35} \\ 3 & 1 & \frac{148}{35} \\ 4 & 1 & \frac{202}{35} \\ 5 & 1 & \frac{256}{35} \\ 6 & 1 & \frac{310}{35} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{40}{35} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{35} \\ 0 & 2 & -\frac{28}{35} \\ 0 & 3 & -\frac{42}{35} \\ 0 & 4 & -\frac{56}{35} \\ 0 & 5 & -\frac{70}{35} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{54}{35} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{35} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$m = \frac{54}{35}, b = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{54}{35}x - \frac{2}{5}$$

54/35 x-2/5



Matrizenräume

Im weiteren untersuchen wir drei spezielle Vektorräume, welche bei der Matrizenrechnung auftauchen. Dabei ergeben sich interessante Beziehungen zwischen dem Lösungsraum und der Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems.

Definition

Sei A eine $n \times m$ -Matrix. Der von den Zeilenvektoren von A aufgespannte Unterraum von \mathbf{R}^m nennt man *Zeilenraum* von A , analog spannen die Spaltenvektoren im \mathbf{R}^n den *Spaltenraum* von A auf. Der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ heißt *Nullraum* von A und ist ein Unterraum von \mathbf{R}^m .

Beispiel

Wir wollen die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ untersuchen:

- Zeilenraum: Der Zeilenraum von A ist gleich der linearen Hülle der Zeilenvektoren:

$$Z(A) = L((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)) =$$

$$\{z \in \mathbf{R}^3 : z = \lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(4, 5, 6) + \lambda_3(7, 8, 9)\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ A^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right\}$$

Fortsetzung

Umformungen (Gauss) zeigen, dass die Dimension des Zeilenraums 2 ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis des Zeilenraums ist somit:

$$B_{Z(A)} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$$

Fortsetzung

- Spaltenraum: Der Spaltenraum von A ist gleich der linearen Hülle der Spaltenvektoren:

$$S(A) = L((1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9)) =$$

$$\{z \in \mathbf{R}^3 : z = \lambda_1 (1, 4, 7) + \lambda_2 (2, 5, 8) + \lambda_3 (3, 6, 9)\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right\}$$

Auch hier kann eine Basis und die Dimension bestimmt werden (arbeiten mit Gauss und der transponierten Matrix!):

Fortsetzung

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis des zweidimensionalen Spaltenraums ist somit:

$$B_{S(A)} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$$

Fortsetzung

- Nullraum: Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems
 $Ax = 0$:

$$\text{null}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$$

Der Nullraum kann durch lösen des linearen Gleichungssystems noch besser beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{null}(A) = L((1, -2, 1))$$

Dimensionssatz

Für die neu eingeführten Räume gelten folgende Sätze:

Theorem

Der Zeilemraum $Z(A)$ und der Spaltenraum $S(A)$ haben die gleiche Dimension und es gilt:

$$rg(A) = \dim(Z(A)) = \dim(S(A)) \quad (10)$$

Theorem (Dimensionssatz)

Die Summe aus dem Rang einer $n \times m$ -Matrix A und der Dimension des Nullraums (nennt man auch den Defekt $def(A)$) der Matrix ist gleich der Spaltenzahl:

$$rg(A) + \dim(null(A)) = rg(A) + def(A) = m \quad (11)$$

Beziehungen zwischen den Matrizenräumen

Definition

Sei \mathbf{V} ein reeller Vektorraum und \mathbf{U} ein Unterraum von \mathbf{V} . Dann heißt ein Unterraum \mathbf{W} komplementär oder ein Komplement zu \mathbf{U} , wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- Die beiden Unterräume haben nur den Nullvektor gemeinsam:
 $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{0\}$
- Jeder Vektor des Vektorraums \mathbf{V} lässt sich als Summe von Vektoren aus \mathbf{U} und \mathbf{W} schreiben: $\mathbf{U} \cup \mathbf{W} = \mathbf{V}$

Man sagt dann auch: \mathbf{V} ist die direkte Summe von \mathbf{U} und \mathbf{W} und schreibt $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

Für die Matrizenräume einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gilt:
 $Z(A) \oplus null(A) = \mathbb{R}^m$ und $S(A) \oplus null(A^T) = \mathbb{R}^n$.

Bildet man Skalarprodukte aus Vektoren des Zeilenraums $Z(A)$ mit Vektoren aus dem Nullraum $null(A)$, so erhält man 0, d.h. die Vektoren stehen normal zueinander. Wir definieren:

Definition

Sei \mathbf{U} ein Unterraum des euklidischen Vektorraums \mathbf{V} . Ein Vektor v aus \mathbf{V} heisst orthogonal zu \mathbf{U} , wenn er zu jedem Vektor aus \mathbf{U} orthogonal ist. Die Menge \mathbf{W} aller zu \mathbf{U} orthogonalen Vektoren heisst orthogonales Komplement $\mathbf{W} = \mathbf{U}_\perp$ von \mathbf{U} .

Somit gilt für die Matrizenräume:

Theorem

Sei A eine $n \times m$ -Matrix, so gilt:

- Der Nullraum $null(A)$ und der Zeilenraum $Z(A)$ sind orthogonale Komplemente im \mathbb{R}^m .

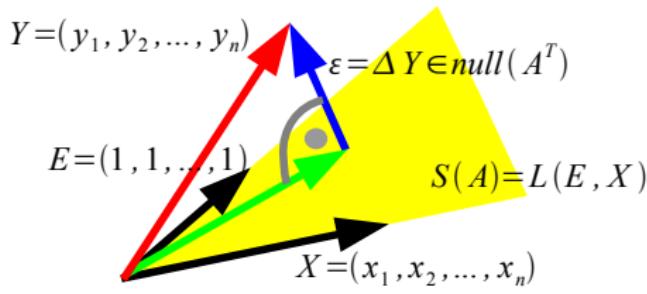
Theorem (Fortsetzung)

- Der Nullraum $\text{null}(A^T)$ und der Spaltenraum $S(A)$ sind orthogonale Komplemente im \mathbb{R}^n .

Die Matrizenräume und die gefundenen Erkenntnisse werden unter anderem bei den linearen Abbildungen verwendet. Hier betrachten wir als Anwendung überbestimmte lineare Gleichungssysteme. Als Beispiel soll noch einmal die lineare Regression dienen:

Gegeben seien also $n > 2$ Messpunkte und wir suchen eine lineare Funktion $y = mx + b$. Wenn die Messpunkte im Ansatz eingesetzt werden, erhalten wir n lineare Gleichungen in den beiden Unbekannten m und b . Im letzten Abschnitt haben wir das Problem gelöst, indem wir den Vektor der Messwerte Y in die lineare Hülle $L(E, X)$ projizierten, und so ein lösbares System erhalten haben.

Nun kann aber auch gesagt werden, dass der Fehlervektor ΔY normal auf der linearen Hülle steht. Die lineare Hülle entspricht dem Spaltenraum der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $A(m \times b)^T = Y$ und der Fehlervektor liegt somit im orthogonalen Komplement des Spaltenraums $S(A)$. Das orthogonale Komplement entspricht nun dem Nullraum der transponierten Koeffizientenmatrix.



$$A = (X^T E^T) = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} X \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Das homogene lineare Gleichungssystem $A^T z = 0$ beschreibt aber alle Vektoren z , die normal auf der Hülle des Spaltenraums $S(A)$ stehen. Daher gilt auch:

$$\epsilon = \Delta Y = Y - A \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} \in \text{null}(A^T)$$

$$A^T \epsilon = A^T \left(Y - A \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} \right) = 0$$

Umstellen ergibt:

$$\underbrace{A^T A}_{N} \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}}_{z} = \underbrace{A^T Y}_{b'} \Rightarrow Nz = b'$$

Normalensystem

Dieses neue lineare Gleichungssystem ist nun regulär und liefert die gesuchten Parameter für die lineare Regression. Es gilt allgemein:

Theorem

Sei $Ax = b$ ein singuläres, widersprüchliches lineares Gleichungssystem, so nennt man das lineare Gleichungssystem, welches durch beidseitiges Multiplizieren mit A^T von Links entsteht, das dazugehörige Normalensystem $(A^T A)x = (A^T b)$. Das Normalensystem ist ein reguläres lineares Gleichungssystem und die eindeutig bestimmte Lösung entspricht der Näherungslösung, so dass der Fehlervektor minimalen Betrag (minimale Summe der Fehlerquadrate) hat.

Lineare Regression II

Wir lösen das Beispiel mit den Messdaten

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	4	6	7	9

mit einem Normalensystem. Das singuläre lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

wird in das entsprechende Normalensystem umgewandelt:

$$A^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{54}{35} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Das neue reguläre System liefert wieder die selben Lösungen wie die Berechnungen im letzten Abschnitt!

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir für die lineare Regression noch eine Berechnungsvorschrift herleiten. Seien $X = (x_1, \dots, x_n)$ und $Y = (y_1, \dots, y_n)$ die gemessenen Daten so ergibt sich für die Koeffizientenmatrix des Normalensystems:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{pmatrix}$$

Analog für die Absolutglieder des Normalensystems:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k \end{pmatrix}$$

Mit den Hilfsgrößen:

$$s_x = \sum_{k=1}^n x_k, s_y = \sum_{k=1}^n y_k, s_{xx} = \sum_{k=1}^n x_k^2 = X \circ X, s_{xy} = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X \circ Y$$

lässt sich das Normalensystem in der folgenden einfachen Form schreiben:

$$\begin{pmatrix} s_{xx} & s_x \\ s_x & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{xy} \\ s_y \end{pmatrix}$$

Mit der Cramer'schen Regel findet man:

$$D = \begin{vmatrix} s_{xx} & s_x \\ s_x & n \end{vmatrix} = ns_{xx} - s_x^2, D_m = \begin{vmatrix} s_{xy} & s_y \\ s_x & n \end{vmatrix} = ns_{xy} - s_x s_y$$

$$D_b = \begin{vmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_x & s_y \end{vmatrix} = s_{xx} s_y - s_{xy} s_x$$

$$\Rightarrow m = \frac{D_m}{D} = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{ns_{xx} - s_x^2}, b = \frac{D_b}{D} = \frac{s_{xx} s_y - s_{xy} s_x}{ns_{xx} - s_x^2}$$

Beispiel

Bei einem schießen Wurf sind folgende Daten gemessen worden:

$x [m]$	3	5	8	12	17	24	27	33
$y = h [m]$	14.5	16.1	17.4	18.2	17.3	13	9.7	1.45

Aus diesen Daten sollen die Parameter der allgemeinen Wurfparabel möglichst gut bestimmt werden. Die allgemeine Formel des schießen Wurfes ist aus der Physik bekannt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$

Fortsetzung

Die Parameter sind also:

$$x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}$$

Wir wollen voraussetzen, dass x_0 , die x-Koordinate zur Zeit 0 genau bekannt ist:

$$x_0 = 0$$

Um dieses Beispiel zu lösen, eliminieren wir den Parameter t aus der Gleichung der Wurfparabeln:

$$x = x_0 + v_{x0}t$$

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Fortsetzung

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 + v_{y0} \frac{x - x_0}{v_{x0}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{x0}} \right)^2 \\
 &= x^2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2} g \frac{1}{v_{x0}^2} \right)}_a + x \underbrace{\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}} - g \frac{x_0}{v_{x0}^2} \right)}_b + \\
 &\quad \underbrace{\left(y_0 - x_0 \frac{v_{y0}}{v_{x0}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_0}{v_{x0}} \right)^2 \right)}_c \\
 &= ax^2 + bx + c
 \end{aligned}$$

Fortsetzung

Die Messpunkte in der Funktionsvorschrift eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3^2 & 3 & 1 \\ 5^2 & 5 & 1 \\ 8^2 & 8 & 1 \\ 12^2 & 12 & 1 \\ 17^2 & 17 & 1 \\ 24^2 & 24 & 1 \\ 27^2 & 27 & 1 \\ 33^2 & 33 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.5 \\ 16.1 \\ 17.4 \\ 18.2 \\ 17.3 \\ 13 \\ 9.7 \\ 1.45 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

Umwandeln in das entsprechende Normalsystem:

$$Ax = b \Rightarrow A^T Ax = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 2158197 & 76749 & 2925 \\ 76749 & 2925 & 129 \\ 2925 & 129 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25405 \\ 1397 \\ 108 \end{pmatrix}$$

Näherungslösung:

$$\begin{pmatrix} 2158197 & 76749 & 2925 & 25405 \\ 76749 & 2925 & 129 & 1397 \\ 2925 & 129 & 8 & 108 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.0398 \\ 0 & 1 & 0 & 0.9932 \\ 0 & 0 & 1 & 11.9944 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0398 \\ 0.9932 \\ 11.9944 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = -0.0398x^2 + 0.9932x + 11.9944$$

Die gesuchten Parameter lauten somit:

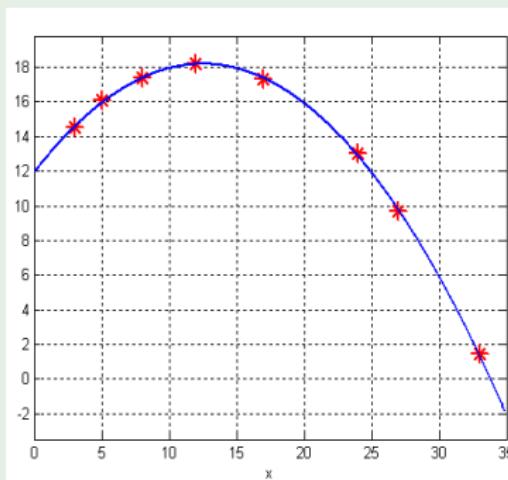
$$a = -\frac{g}{2v_{x0}^2} = -0.0398 \Rightarrow v_{x0} = \sqrt{\frac{9.81}{2 * 0.0398}} = 11.1014$$

$$b = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} - g \frac{x_0}{v_{x0}^2} = 0.9932 \Rightarrow v_{y0} = 0.9932 * 11.1014 = 11.0259$$

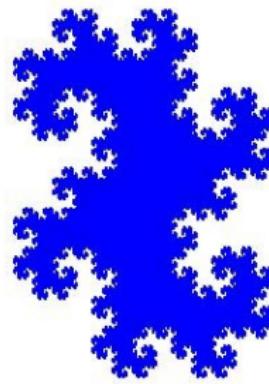
$$c = y_0 - x_0 \frac{v_{y0}}{v_{x0}} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x_0}{v_{x0}} \right)^2 = 11.9944 \Rightarrow y_0 = 11.9944$$

Fortsetzung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 11.9944 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11.1014 \\ 11.0259 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \end{pmatrix} t^2$$



6 Vektorgeometrie



6 Vektorgeometrie

- Einführung
- Rechenoperationen
 - Skalarprodukt
 - Vektorprodukt
 - Spatprodukt
 - Gesetze
- Geometrie
 - Die Gerade
 - Die Ebene
 - Normalformen
 - Schnittprobleme
 - Abstandsprobleme
 - Hesse'sche Normalform
 - Kreis und Kugel

Der Vektorraum der Vektorgeometrie

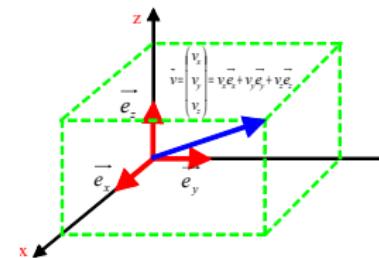
Als erstes wollen wir den Vektorraum für die Vektorgeometrie definieren. Wir betrachten im weiteren den Vektorraum der reellen n -Tupel (geschrieben als Spaltenvektoren) mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweise Multiplikation mit einem reellen Skalar:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \\ \lambda v_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dabei arbeiten wir normalerweise (ohne weitere Angaben) mit der kanonischen Basis. Darunter versteht man in einem reellen n -dimensionalen Raum die Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachsen ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \dots$). Ein Vektor beschreibt somit eine Linearkombination der Basisvektoren. Die Einträge im Vektor nennt man dann die Komponenten des Vektors.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \quad (3)$$



Punkte des n-dimensionalen reellen Raumes werden im Gegensatz zu den Vektoren als Zeilenvektoren geschrieben. Z.B. $A = (1, 2, 3)$ (oder kurz $A(1, 2, 3)$) bezeichnet den Punkt A im dreidimensionalen Raum mit den Koordinaten $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$ (Punkte werden normalerweise mit Grossbuchstaben bezeichnet!). Bei den Vektoren benötigen wir zweierlei Vektoren:

- **Ortsvektor:** Unter einem Ortsvektor versteht man einen Vektor der vom Ursprung des Koordinatensystems auf einen Punkt (Ort) zeigt:

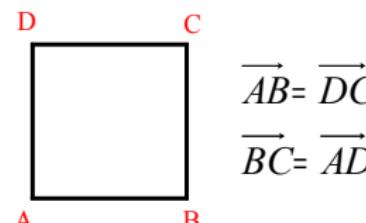
$$\vec{r}_A = \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad (4)$$

Bemerkung: Beim Punkt spricht man von Koordinaten und beim Vektor von Komponenten!

- **Verbindungsvektor:** Ein Vektor welcher zwei Punkte verbindet:

$$\vec{v} = \vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad (5)$$

Bemerkung: Vektoren sind im Gegensatz zu den Punkten im Raum nicht absolut. D.h. eine vektorielle Grösse ist nur in Bezug auf **Länge** und **Richtung** jedoch nicht bezüglich seiner Position im reellen Raum definiert. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit den vier Punkten A, B, C und D , so gilt:



Skalarprodukt

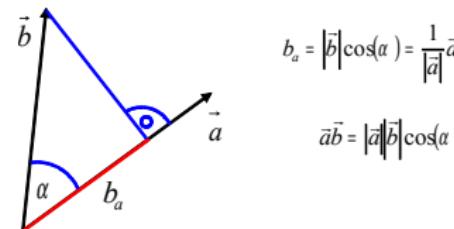
Im weiteren betrachten wir noch einige Vektormultiplikationen. Dies sind das Skalarprodukt (n -dimensionaler Raum), das Vektorprodukt (nur im dreidimensionalen Raum) und das Spatprodukt (ebenfalls nur im dreidimensionalen Raum).

Definition

Unter dem Skalarprodukt zweier n -dimensionaler Vektoren versteht man:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k \quad (6)$$

Die geometrische Interpretation des Skalarproduktes lässt sich mittels Projektion sehr einfach geben:



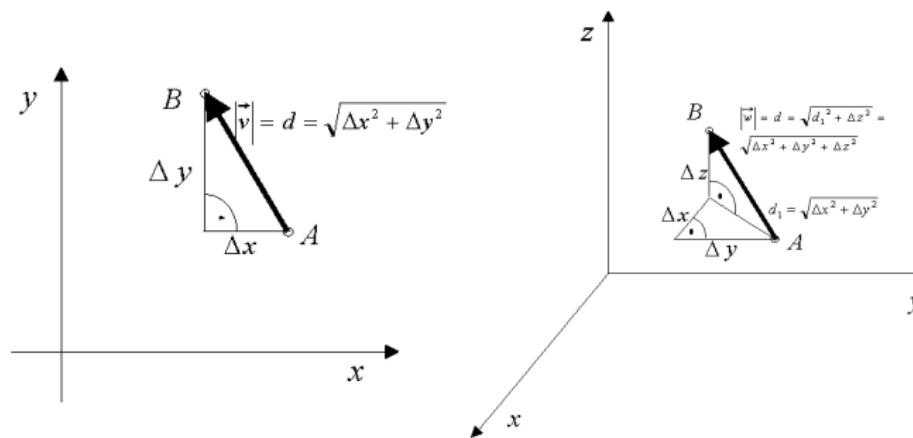
Mit dem Skalarprodukt kann die Längen- und Winkelmessung im \mathbb{R}^n definiert werden:

Der Betrag eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ist gleich:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \quad (7)$$

Im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 ergeben sich die Formeln:

$$\left| \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \left| \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (8)$$

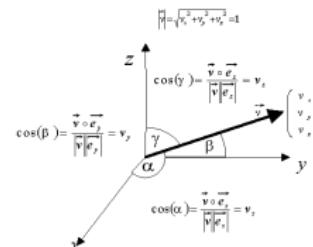


Der Winkel zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} im \mathbb{R}^n ist gleich:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (9)$$

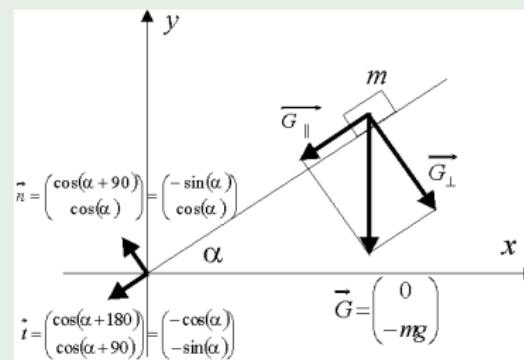
Insbesondere gilt:

- Das Skalarprodukt zweier normal (senkrecht) zueinander stehender Vektoren ist Null.
- Die Winkel eines Einheitsvektors gegenüber den Koordinatenachsen ist durch die Komponenten des Vektors definiert:



Beispiel

Eine Masse m befindet sich auf einer um den Winkel α geneigten Ebene. Wir wollen die Gewichtskraft \vec{G} so in zwei Summanden zerlegen, dass der eine Summand senkrecht und der zweite Summand tangential zur Oberfläche steht. Dazu projizieren wir den Vektor der Gewichtskraft einerseits in tangentiale und normale Richtung zur Oberfläche:



Fortsetzung

$$\vec{G}_\perp = \frac{\vec{G} \circ \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} mg \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ -mg \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{G}_\parallel = \frac{\vec{G} \circ \vec{t}}{|\vec{t}|^2} \vec{t} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -mg \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ -mg \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

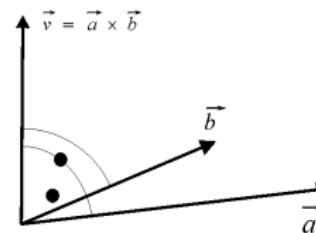
Definition

Unter dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der beiden dreidimensionalen Vektoren \vec{a} und \vec{b} versteht man den Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ a_x & b_x \\ a_z & b_z \\ a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \quad (10)$$

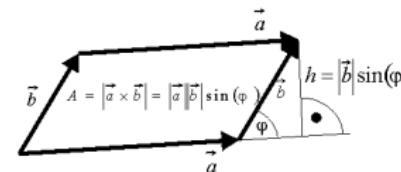
Das Vektorprodukt besitzt die folgenden drei Eigenschaften:

- Das Vektorprodukt steht normal (senkrecht) auf den Faktoren: $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{a} = 0, (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{b} = 0$

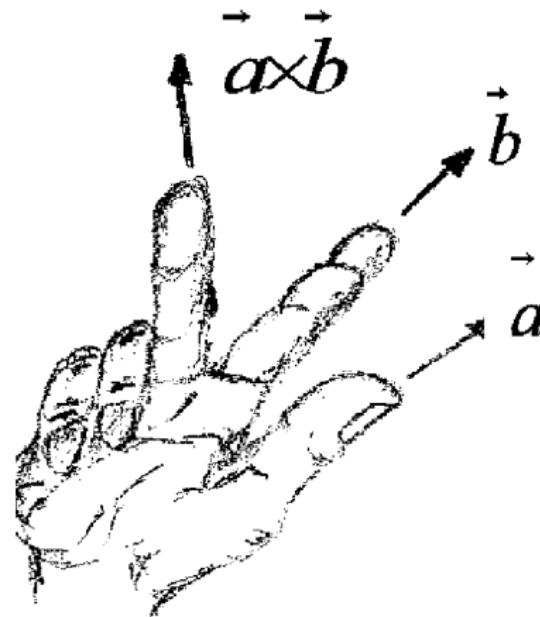


- Der Betrag des Vektorproduktes entspricht der Fläche des von den beiden Faktoren aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\varphi)$$



- Die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem (führt man die Vektoren in dieser Reihenfolge ineinander über, führen sie eine Drehung im gegenuhzeigersinn durch).



Beispiel

Wir suchen einen Einheitsvektor der normal zu den beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ steht. Mit dem Vektorprodukt finden wir einen orthogonalen Vektor:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nun noch auf die Länge Eins normieren:

$$\vec{e}_n = \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir suchen den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(1, 1)$, $B(3, 0)$ und $C(5, 4)$. Da das Vektorprodukt nur im \mathbf{R}^3 definiert ist, fügen wir bei den drei Punkten noch die z -Koordinate 0 hinzu. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} |(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

Spatprodukt

Als letztes Produkt führen wir noch das Spatprodukt ein (nur im \mathbb{R}^3 definiert):

Definition

Unter dem Spatprodukt der drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} versteht man die reelle Zahl:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \quad (11)$$

Führt man dieses Produkt komponentenweise durch, erhält man:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \right]$$

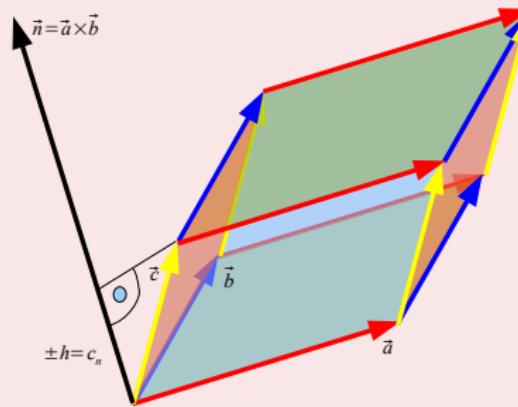
$$\begin{aligned}
 &= \left(\left(\begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array} \right) \right) \circ \left(\begin{array}{c} c_x \\ c_y \\ c_z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{c} c_x \\ c_y \\ c_z \end{array} \right) \\
 &= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Theorem

Das Spatprodukt der drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} entspricht der Determinante der 3×3 Matrix mit den drei Vektoren als Spalten:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (12)$$

Das Spatprodukt bestimmt (bis auf das Vorzeichen) den Inhalt des Spats (Parallelepiped):



Dabei ist das Vektorprodukt $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor der normal auf der Grundfläche des Spats steht. Dabei entspricht die Länge dieses Vektors gerade der Fäche des Parallelogramms ($A_G = |\vec{n}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$).

Um den Inhalt des Spats zu bestimmen braucht man noch die Höhe des Spats. Dies entspricht jedoch der Projektionslänge des Vektors \vec{c} auf den berechneten Normalenvektor - also:

$$h = \pm \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} \circ \vec{c}. \text{ Für den Inhalt erhält man somit:}$$

$$V = A_G h = \pm |\vec{n}| \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} \circ \vec{c} = \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$$

Das Resultat wird positiv, wenn die drei Vektoren in der gegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, andernfalls wird das Resultat negativ!

Beispiel

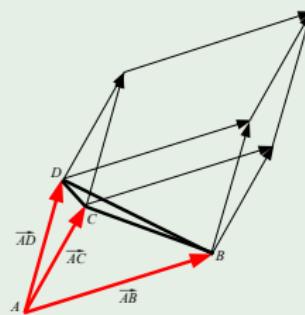
Gesucht sei das Volumen des Tetraeders mit den vier Eckpunkten $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -2)$, $C(0, 3, 1)$ und $D(5, -1, 5)$.

Fortsetzung:

Die drei Verbindungsvektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

spannen ein Parallelepiped auf, welches ein 6 mal grösseres Volumen als der Tetraeder besitzt.



Fortsetzung:

Also gilt:

$$V = \left| \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6} 22 \right| = \frac{11}{3}$$

Neben der Volumenberechnung kann mittels dem Spatprodukt geprüft werden, ob drei Vektoren im \mathbb{R}^3

- linear unabhängig sind,
- ein Rechts- oder ein Linkssystem bilden!

Gesetze für die Multiplikation

Für die Vektormultiplikationen gelten die folgenden Gesetze:

- Kommutativgesetz für das Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a} \quad (13)$$

- Das Vektorprodukt ist antikommutativ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (14)$$

- Das Skalarprodukt ist bilinear:

$$(\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}) \circ \vec{c} = \lambda_1 \vec{a} \circ \vec{c} + \lambda_2 \vec{b} \circ \vec{c} \quad (15)$$

$$\vec{a} \circ (\lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}) = \lambda_1 \vec{a} \circ \vec{b} + \lambda_2 \vec{a} \circ \vec{c} \quad (16)$$

- Das Vektorprodukt ist bilinear:

$$(\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda_1 \vec{a} \times \vec{c} + \lambda_2 \vec{b} \times \vec{c} \quad (17)$$

$$\vec{a} \times (\lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}) = \lambda_1 \vec{a} \times \vec{b} + \lambda_2 \vec{a} \times \vec{c} \quad (18)$$

- Vertauschen der Faktoren verändert das Vorzeichen:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = - [\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = \dots \quad (19)$$

- Das Spatprodukt ist linear in den Faktoren:

$$[\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = \lambda_1 [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + \lambda_2 [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \quad (20)$$

- Es gilt der Entwicklungssatz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c} \quad (21)$$

- Lagrange'sche Identität:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \circ \vec{c})(\vec{b} \circ \vec{d}) - (\vec{b} \circ \vec{c})(\vec{a} \circ \vec{d}) \quad (22)$$

Diese Gesetze können verwendet werden, um Vektorterme umzuformen und zu vereinfachen. Wir wollen einige Terme vereinfachen:

Beispiel

$$((\vec{a} \times 2\vec{b}) \circ \vec{c}) ((\vec{b} \times \vec{a}) \circ 5\vec{c}) ((3\vec{c} \times \vec{a}) \circ \vec{b}) = ?$$

Fortsetzung:

$$\begin{aligned}
 &= \left(2 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right) \left(5 [\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] \right) \left(3 [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] \right) \\
 &= \left(2 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right) \left(-5 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right) \left(3 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right) \\
 &= -30 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^3 = -30 ((\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c})^3
 \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
 &(\vec{b} \times \vec{a}) \circ (\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) = ? \\
 &= \underbrace{(\vec{b} \times \vec{a}) \circ \vec{a}}_{=0} - 2 \underbrace{(\vec{b} \times \vec{a}) \circ \vec{b}}_{=0} + 3 (\vec{b} \times \vec{a}) \circ \vec{c} = -3 (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \\
 &\quad = -3 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]
 \end{aligned}$$

Beispiel

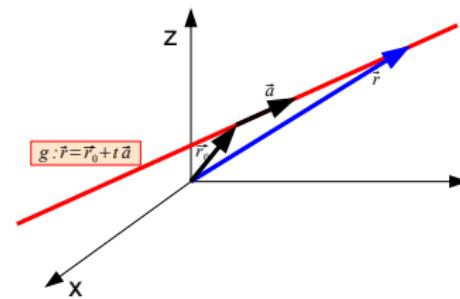
$$\begin{aligned} & (\vec{a} \times \vec{c}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \circ (\vec{b} - \vec{c}) = ? \\ &= \underbrace{(\vec{a} \times \vec{c}) \circ \vec{a}}_{=0} - (\vec{a} \times \vec{c}) \circ \vec{b} + \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c}) \circ \vec{b}}_{=0} - \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c}) \circ \vec{c}}_{=0} \\ &= -(\vec{a} \times \vec{c}) \circ \vec{b} = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \end{aligned}$$

Die Gerade - Parametergleichung

Unter einer Geraden versteht man die Menge aller Punkte, welche die Gleichung

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} \quad (23)$$

erfüllen. Dabei bezeichnet \vec{r} einen variablen Ortsvektor auf die Gerade, \vec{r}_0 einen festen Ortsvektor zu einem Punkt auf der Geraden, \vec{a} einen Richtungsvektor der Geraden und t ist der Parameter.



Wenn für den Parameter ein Wert eingesetzt wird, erhält man einen bestimmten Ortsvektor, der zu einem Punkt auf der Geraden zeigt. Im dreidimensionalen Raum gibt es (eigentlich) nur diese Möglichkeit eine Gerade zu beschreiben. Wir werden sehen, dass im zweidimensionalen Raum auch eine parameterfreie Beschreibung existiert. Die Beschreibung von Raumkurven mit Parametern findet man häufig in der Physik mit der Zeit als Parameter.

Beispiel

Wir suchen die Gerade durch die beiden Punkte $A(1, 1, 2)$ und $B(4, -2, 0)$. Den Richtungsvektor entspricht dem Verbindungsvektor der beiden Punkte:

$$\vec{a} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

Als festen Punkt kann man den Punkt B wählen und erhält somit:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}_B + t\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3t \\ -2 - 3t \\ -2t \end{pmatrix}$$

Da der Richtungsvektor bei der Parametergleichung beliebig mit einer reellen Zahl ungleich 0 gestreckt werden kann und ein beliebiger Punkt auf der Geraden für den festen Punkt gewählt werden kann, ist die im Beispiel gefundene Parametergleichung eine von unendlich vielen Beschreibungsmöglichkeiten der Geraden mittels Parametergleichung. Es gilt:

Es gibt unendlich viele Parametergleichungen für eine Gerade!

Beispiel

Bestimme die Punkte auf der Geraden des vorigen Beispiels für die Parameterwerte 1, 2 und 3:

$$t_1 = 1 \Rightarrow \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 - 3t_1 \\ -2 - 3t_1 \\ -2t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1(1, -5, -2)$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 - 3t_2 \\ -2 - 3t_2 \\ -2t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(-2, -8, -4)$$

$$t_3 = 3 \Rightarrow \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 4 - 3t_3 \\ -2 - 3t_3 \\ -2t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow P_3(-5, -11, -6)$$

Mit einer Parametergleichung lassen sich durch das Einsetzen von Werten für den Parameter einfach Punkte berechnen. Das Prüfen, ob ein gegebener Punkt auf einer Geraden liegt oder ob zwei gegebene Parametergleichungen die gleiche Gerade beschreiben ist jedoch aufwendiger:

Beispiel

Liegen die Punkte $C(1, 2, 3)$ und $D(10, 4, 4)$ auf der Geraden des Einführungsbeispiels? Dazu setzt man den zu prüfenden Punkt in der Gleichung ein und prüft ob es einen entsprechenden Parameterwert gibt. Zuerst für den Punkt C :

$$\vec{r}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3t \\ -2 - 3t \\ -2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3t = -5 \\ -3t = 4 \\ -2t = 3 \end{vmatrix} \Rightarrow L_t = \{\}$$

Der Punkt C liegt nicht auf der gegebenen Geraden!

Fortsetzung:

Analog für den Punkt D :

$$\vec{r}_D = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3t \\ -2 - 3t \\ -2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3t = 6 \\ -3t = 6 \\ -2t = 4 \end{vmatrix} \Rightarrow L_t = \{-2\}$$

Der Punkt D liegt also auf der Geraden.

Beispiel

Beschreiben die beiden Gleichungen die selbe Gerade?

$$g : \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 2 + t \\ 2 - 3t \\ 2t \end{pmatrix}, h : \vec{r}_h = \begin{pmatrix} 6 - 2t \\ -10 + 6t \\ 8 - 4t \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

Als erstes prüfen wir, ob die beiden Geraden linear abhängige Richtungsvektoren besitzen, also ob die Geraden parallel sind:

$$\vec{a_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a_h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a_h} = -2\vec{a_g} \Rightarrow \vec{a_g} \parallel \vec{a_h}$$

Die beiden Geraden haben somit die gleiche Richtung! Nun muss noch geprüft werden, ob die Geraden identisch sind. Also ob der Punkt $P_g(2, 2, 0)$ auf der Geraden h bzw. $P_h(6, -10, 8)$ auf g liegt. Wir sehen P_h liegt auf g und die Geraden sind identisch:

$$\vec{r_H} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + t \\ 2 - 3t \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} t = 4 \\ -3t = -12 \\ 2t = 8 \end{vmatrix} \Rightarrow L_t = \{4\}$$

Gerade - Koordinatengleichung

Im zweidimensionalen Raum lässt sich eine Gerade auch durch eine Koordinatengleichung beschreiben. Wir leiten diese Koordinatengleichung allgemein aus der Parametergleichung her:

Herleitung

Gesucht sei die Gerade durch die beiden Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$. Mit dem Verbindungsvektor $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ lautet die Parametergleichung wie folgt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung kann als lineares Gleichungssystem mit zwei

Fortsetzung:

Gleichungen und den drei Unbekannten x , y und t aufgefasst werden:

$$\begin{vmatrix} x & -(x_2 - x_1)t & = & x_1 \\ y & -(y_2 - y_1)t & = & y_1 \end{vmatrix}$$

In diesem System kann die Unbekannte t eliminiert werden:

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

In dieser letzten Gleichung kommt nun der Parameter nicht mehr vor. Es werden die Punkte auf der Geraden nur durch die entsprechenden Variablen in der Gleichung beschrieben. Stellt man diese letzte Gleichung noch um, erhält man die Koordinatengleichung der Geraden in Normalform:

Fortsetzung:

$$\underbrace{\frac{1}{x_2 - x_1}}_A x + \underbrace{\frac{-1}{y_2 - y_1}}_B y + \underbrace{\left(\frac{y_1}{y_2 - y_1} - \frac{x_1}{x_2 - x_1} \right)}_C = 0$$

Also:

$$Ax + By + C = 0 \quad (24)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Koeffizient B ungleich Null ist, kann nach y aufgelöst werden und man erhält die lineare Funktion:

$$y = \frac{-A}{B} x + \frac{-C}{B} = mx + b$$

Dabei bezeichnet m die Steigung und b den y -Achsenabschnitt der Geraden.

Beispiel

Bestimme von der Geraden g die Koordinatengleichung.

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 2 - 3t \end{pmatrix}$$

Das entsprechende Gleichungssystem lautet:

$$\left| \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{array} \right| \Rightarrow t = x - 1 = \frac{2 - y}{3}$$

Nach der Elimination des Parameters erhält man:

$$x - 1 = \frac{2 - y}{3} \Rightarrow 3x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = -3x + 5$$

Die Gerade schneidet also die y -Achse bei $b = 5$ und hat eine Steigung von $m = -3$.

Für die Gerade gibt es weitere Darstellungsformen der Koordinatengleichung:

Zweipunkt-Form

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (25)$$

Punkt-Steigungs-Form

$$y - y_P = m(x - x_P) \quad (26)$$

Achsenabschnitts-Form

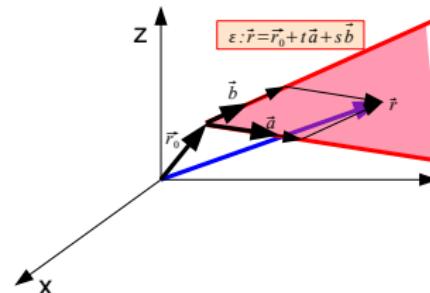
$$\frac{x}{x_A} + \frac{y}{y_A} = 1 \quad (27)$$

Die Ebene - Parametergleichung

Unter einer Ebene versteht man die Menge aller Punkte, die die Gleichung

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} + s\vec{b} \quad (28)$$

erfüllen. Dabei bezeichnet \vec{r} einen variablen Ortsvektor auf die Ebene, \vec{r}_0 einen festen Ortsvektor zu einem Punkt auf der Ebene, die linear unabhängigen Vektoren \vec{a}, \vec{b} sind Richtungsvektoren der Ebene und t, s die Parameter.



Der Aufbau der Ebenengleichung ist analog demjenigen der Geradengleichung. Es kommt einfach ein zweiter Richtungsvektor hinzu, um die Ausdehnung der Ebene in ihren zwei Dimensionen zu beschreiben. Um eine Ebenengleichung aufzustellen braucht es dann eben drei Punkte und nicht nur zwei wie bei der Geraden:

Beispiel

Wir suchen die Ebene durch die drei Punkte $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ und $C(x_C, y_C, z_C)$.

Die beiden Richtungsvektoren:

$$\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

Als festen Punkt wählen wir den Punkt A. Somit finden wir:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_A + t\vec{a} + s\vec{b} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_A + t(x_B - x_A) + s(x_C - x_A) \\ y_A + t(y_B - y_A) + s(y_C - y_A) \\ z_A + t(z_B - z_A) + s(z_C - z_A) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Analog zur Parametergleichung der Geraden gilt:

Es gibt unendlich viele Parametergleichungen für eine Ebene!

Beispiel

Bestimme die Punkte auf der Ebene ϵ für die Parameterpaare $t_1 = 1, s_1 = 4$ und $t_2 = -3, s_2 = 5$:

$$\epsilon : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 - t + 3s \\ 2 + 3t - s \\ 1 - t + 3s \end{pmatrix}$$

Werte einsetzen:

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 - t_1 + 3s_1 \\ 2 + 3t_1 - s_1 \\ 1 - t_1 + 3s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1(15, 1, 12)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 - t_2 + 3s_2 \\ 2 + 3t_2 - s_2 \\ 1 - t_2 + 3s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -14 \\ 19 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(22, -14, 19)$$



Beispiel

Liegen die Punkte $C(1, 2, 3)$ und $D(10, 8, 7)$ auf der Ebene des letzten Beispiels? Dazu setzt man den zu prüfenden Punkt in der Gleichung ein und prüft ob es entsprechende Parameterwerte gibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - t + 3s \\ 2 + 3t - s \\ 1 - t + 3s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -t + 3s = -3 \\ 3t - s = 0 \\ -t + 3s = 2 \end{vmatrix} \Rightarrow L_{t,s} = \{\}$$

Der Punkt C liegt nicht auf der gegebenen Ebene!

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - t + 3s \\ 2 + 3t - s \\ 1 - t + 3s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -t + 3s = 6 \\ 3t - s = 6 \\ -t + 3s = 6 \end{vmatrix} \Rightarrow L_{t,s} = \{(3, 3)\}$$

Der Punkt D liegt auf der gegebenen Ebene!

Ebene - Koordinatengleichung

Die Ebene im dreidimensionalen Raum lässt sich wie die Gerade im \mathbf{R}^2 auch durch eine Koordinatengleichung beschreiben. Wir leiten diese Koordinatengleichung bei einem Beispiel aus der Parametergleichung her:

Herleitung

Gesucht sei die Ebene durch die drei Punkte $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, -2, 0)$ und $P_3(3, 0, 5)$. Mit den Verbindungsvektoren

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ lautet die}$$

Parametergleichung wie folgt:

Fortsetzung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t + 2s \\ 1 - 3t - s \\ 1 - t + 4s \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung kann als lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten interpretiert werden:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & -t & -2s & 1 \\ y & +3t & +s & 1 \\ z & +t & -4s & 1 \end{array} \right|$$

In der dritten Gleichung kann nach s aufgelöst werden und dieses s wird dann in den beiden anderen Gleichungen eingesetzt:

Fortsetzung:

$$s = \frac{z + t - 1}{4} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x & -z & -3t & = & 1 \\ 4y & +z & +13t & = & 5 \end{vmatrix}$$

Das selbe Prinzip für den Parameter t :

$$t = \frac{5 - 4y - z}{13} \Rightarrow 13x + 6y - 5z - 14 = 0$$

Dies lässt sich nun allgemein schreiben:

Die Ebene im \mathbb{R}^3 kann als Koordinatengleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{29}$$

geschrieben werden.

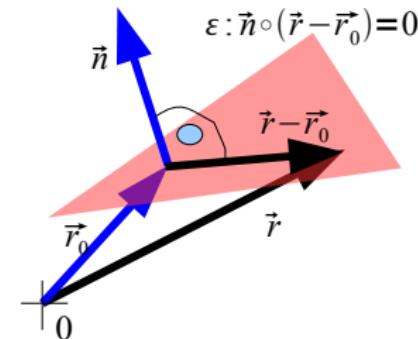
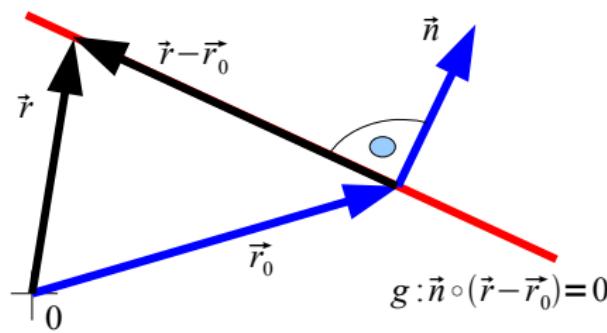
Normalformen

Sei \vec{n} ein Vektor der normal zur einer Geraden (im \mathbb{R}^2) bzw. einer Ebene (im \mathbb{R}^3) steht. Nun steht dieser Vektor natürlich auch normal zu jedem Vektor der parallel zur Geraden bzw. Ebene liegt. Sei weiter ein Ortsvektor \vec{r}_0 zu einem Punkt auf der Geraden bzw. der Ebene und ein (variabler) Ortsvektor \vec{r} auf einen beliebigen Punkt auf der Geraden bzw. der Ebene gegeben, so ist der Verbindungsvektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ dieser beiden Punkte sicher parallel zur Geraden bzw. Ebene. Dies führt nun auf die Normalengleichung:

Normalengleichung

Eine Gerade im zweidimensionalen Raum und eine Ebene im dreidimensionalen Raum lässt sich mit Hilfe eines Punktes und einem Normalenvektor mittels der Normalengleichung beschreiben:

$$\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (30)$$



Sei nun (für eine Ebene):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Wir finden somit:

$$\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

$$\underbrace{n_x}_{A} x + \underbrace{n_y}_{B} y + \underbrace{n_z}_{C} z + \underbrace{(-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0)}_{D} = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

Beispiel

Wir suchen die Ebene durch die drei Punkte $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ und $C(0, -1, 5)$. Wir bestimmen die beiden Verbindungsvektoren:

$$\vec{a} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt dieser beiden Verbindungsvektoren liefert einen Normalenvektor der Ebene (steht normal auf der Ebene):

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

Die Ebenengleichung lautet somit:

$$\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$14x - 7y - 7 = 0 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Beispiel

Gesucht sei eine zur Ebene $\epsilon : 5x - 3y + 2z - 4 = 0$ parallele Ebene durch den Punkt $P_0(1, 3, -2)$. Um mit der Normalform zu arbeiten, benötigt man neben dem gegebenen Punkt noch den Normalenvektor. Parallele Ebenen haben parallele

Fortsetzung:

Normalenvektoren. Für die gesuchte Ebene kann also der Normalenvektor der gegebenen Ebene verwendet werden. Die Komponenten des Normalenvektors sind nun aber gerade die Koeffizienten der Normalengleichung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Ebenengleichung lautet somit:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \\ z - (-2) \end{pmatrix} = 0$$

$$5x - 3y + 2z + 8 = 0 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Schnittprobleme

In diesem Abschnitt wollen wir die im letzten Abschnitt beschriebenen Objekte miteinander schneiden. Wir suchen also die Menge der Punkte die auf allen zu schneidenden Objekten liegen. Da es verschiedene Möglichkeiten gibt die Objekte zu beschreiben, gibt es auch verschiedene Möglichkeiten das Schnittobjekt zu bestimmen. Wir betrachten drei mögliche Fälle:

Beispiel

Wir suchen den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebenen ϵ :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

$$\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnittprobleme löst man dadurch, dass ein gesuchter Schnittpunkt auf allen zu schneidenden Objekten liegen muss, d.h. die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes erfüllen alle gegebenen Gleichungen. Da hier also die Koordinaten gleich sein müssen, können wir sie gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2+t \\ -1-t \\ 3+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-u+4v \\ 1+3u \\ u+2v \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

Die beiden Vektoren sind genau dann gleich, wenn die jeweiligen Komponenten übereinstimmen:

$$\left| \begin{array}{l} t + u - 4v = -2 \\ -t - 3u = 2 \\ 2t - u - 2v = -3 \end{array} \right|$$

In diesem linearen Gleichungssystem kann man nun nach den Parametern auflösen, welche in den gegebenen Gleichungen eingesetzt den gesuchten Schnittpunkt ergeben:

$$t = -\frac{7}{4}, u = -\frac{1}{12}, v = -\frac{5}{24}$$

Fortsetzung:

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir suchen den Schnittpunkt der Geraden

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Ebene $\epsilon : 2x - y + 3z + 5 = 0$. Hier haben wir nun für das eine Objekt eine Beschreibung mittels Parametern und für das zweite Objekt eine Beschreibung mittels Koordinatengleichung.

Fortsetzung:

Hier bestimmen wir das Schnittobjekt durch das Einsetzen der Komponenten der Parametergleichung in die Koordinatengleichung:

$$2(1 + 4t) - (2 + t) + 3(1 + 0t) + 5 = 0 \Rightarrow 7t + 8 = 0 \Rightarrow t = -\frac{8}{7}$$

Mit dem berechneten Parameter erhalten wir nun den Schnittpunkt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{7} \\ \frac{6}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir suchen die Schnittgerade der beiden Ebenen

$$\epsilon_1 : x + y + z + 1 = 0 \text{ und } \epsilon_2 : x - y + 2z - 3 = 0.$$

Fortsetzung:

Hier sind beide Objekte mittels Koordinatengleichung gegeben.

Wir erhalten somit ein (lineares) Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{array} \right|$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems beschreibt nun das Schnittobjekt (Gerade im \mathbf{R}^3):

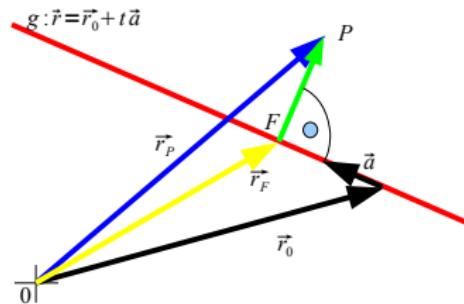
$$\mathbf{L} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \left(\frac{2-3z}{2}, \frac{z-4}{2}, z \right) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-3z}{2} \\ \frac{z-4}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abstandsprobleme

Nun betrachten wir Abstandsprobleme. Bei einem Abstandsproblem sucht man in der Regel die kürzeste Entfernung zwischen zwei Objekten (Punkte, Geraden und Ebenen). Denken wir uns als Beispiel eine Gerade und einen Punkt der nicht auf dieser Geraden liegt. Verbinden wir nun einzelne Punkte der Geraden mit dem festen Punkt so haben diese Verbindungsvektoren eine bestimmte Länge. Wir suchen nun den Punkt auf der Geraden, so dass der entstehende Verbindungsvektor minimale Länge aufweist. Diesen Punkt mit kürzester Entfernung bezeichnet man meist als den Fusspunkt. Neben dem Fusspunkt interessiert oft auch die kürzeste Entfernung.

Es gibt unterschiedliche Vorgehensweisen um solche Abstandsprobleme zu lösen. Anhand von drei Beispielen betrachten wir die häufigsten Ansätze:



Beispiel

Gegeben sei die Gerade g und der Punkt $P(1, 2, 3)$. Wir suchen den Fußpunkt und die kürzeste Entfernung der beiden Objekte.

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

Da der gesuchte Punkt auf der Geraden liegt machen wir folgenden Ansatz:

$$\vec{r}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_F \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun finden wir den folgenden Verbindungsvektor:

$$\vec{FP} = \vec{r}_P - \vec{r}_F = \begin{pmatrix} 1 - t_F \\ 1 + t_F \\ 2 - t_F \end{pmatrix}$$

Damit der Verbindungsvektor minimale Länge aufweist, muss er senkrecht zur Geraden stehen. Wenden wir das Skalarprodukt an:

$$\vec{FP} \circ \vec{a} = 0$$

Fortsetzung:

$$\begin{pmatrix} 1 - t_F \\ 1 + t_F \\ 2 - t_F \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3t_F + 2 = 0 \Rightarrow t_F = \frac{2}{3}$$

Und somit lautet der gesuchte Fußpunkt:

$$\vec{r}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Und für die Distanz:

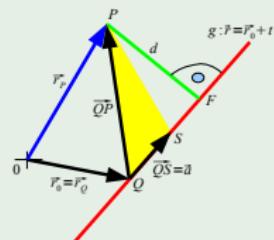
$$d = |\vec{FP}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{18}}{3} = \sqrt{2}$$

Beispiel

Bestimme die kürzeste Entfernung zwischen der Geraden g und dem Punkt $P(1, 1, 1)$.

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn nur die kürzeste Entfernung gesucht ist, gibt es eine einfache Berechnungsformel. Zur Herleitung:



Fortsetzung:

Wir verwenden dazu zwei verschiedene Möglichkeiten die Fläche des Dreiecks PQS zu berechnen:

Die Fläche des Dreiecks lässt sich einerseits mit dem Vektorprodukt berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{QS} \times \vec{QP} \right|$$

Andererseits lässt sich die Fläche mit der Formel Grundlinie mal Höhe durch 2 bestimmen:

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{QS} \right| d$$

Durch das Gleichsetzen der beiden Formeln finden wir eine Gleichung in der wir nach der Distanz d auflösen können:

Fortsetzung:

$$d = \frac{|\vec{QS} \times \vec{QP}|}{|\vec{QS}|} = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0)|}{|\vec{a}|}$$

Nun müssen wir nur noch einsetzen:

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0)|}{|\vec{a}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \sqrt{14}$$

Auch für den Abstand eines Punktes zu einer Ebene in Parameterdarstellung gibt es die beiden eben besprochenen Verfahren.

Beispiel

Wir suchen den (kürzesten) Abstand des Punktes $P(0, 1, 2)$ zur Ebene ε :

$$\varepsilon : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} + s\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

In einer ersten Variante wird ein Ansatz für den Fußpunkt gemacht und der Verbindungsvektor des Punktes zu diesem Fußpunkt bestimmt:

Fortsetzung:

$$\vec{FP} = \vec{r_P} - \vec{r_F} = \begin{pmatrix} -1 - 2t + s \\ t - 3s \\ 1 + 4s \end{pmatrix}$$

Da dieser Vektor normal zur Ebene steht, muss er auch normal zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene stehen (Skalarprodukt wird Null):

$$\vec{a} \circ \vec{FP} = 0 \Rightarrow -5t + 5s = 2, \vec{b} \circ \vec{FP} = 0 \Rightarrow 5t - 26s = 3$$

Aus dem entstehenden linearen Gleichungssystem können die Parameterwerte für den Fusspunkt bestimmt werden:

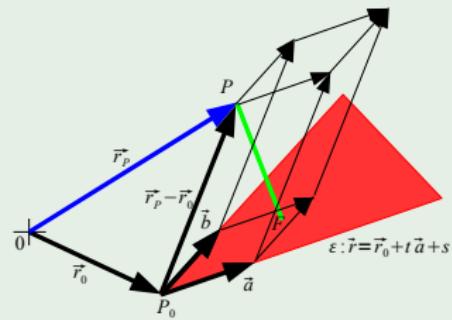
$$\left| \begin{array}{l} -5t + 5s = 2 \\ 5t - 26s = 3 \end{array} \right| \Rightarrow t = -\frac{5}{21}, s = -\frac{67}{105}$$

Fortsetzung:

Für den Fusspunkt und den Abstand gilt somit:

$$\vec{r}_F = \begin{pmatrix} \frac{122}{105} \\ -\frac{71}{105} \\ \frac{373}{105} \end{pmatrix}, d = |\vec{FP}| = \frac{\sqrt{72429}}{105} = 2.563$$

In einer zweiten Variante wird untenstehendes Spatvolumen auf zwei verschiedene Varianten beschrieben:



Fortsetzung:

Volumenberechnung mittels Spatprodukt:

$$V = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}_P - \vec{r}_0]$$

Volumenberechnung mittels Grundfläche (Vektorprodukt) und Spathöhe:

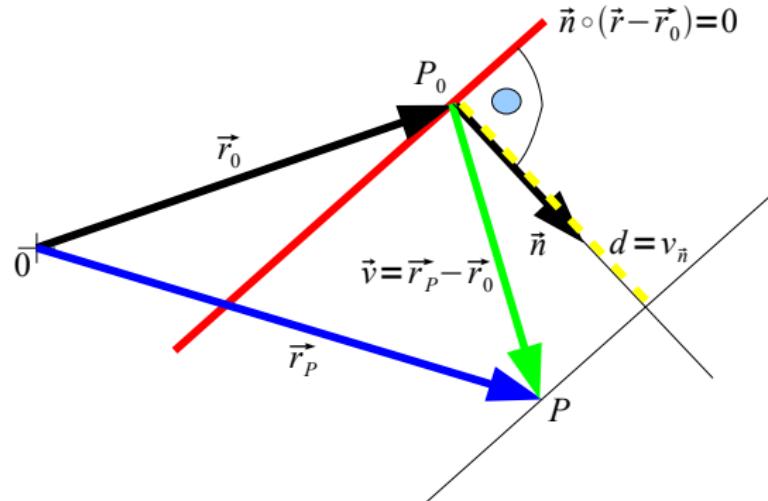
$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| d$$

Formeln gleichsetzen und nach der gesuchten Distanz auflösen liefert eine direkte Berechnungsformel:

$$d = \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}_P - \vec{r}_0]}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{r}_P - \vec{r}_0)}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Hesse'sche Normalform

Eine weitere Möglichkeit Abstände zu bestimmen basiert auf dem Prinzip der Projektion:



Die Projektionslänge des Verbindungsvektors zwischen einem beliebigen Punkt auf der Gerade bzw. der Ebene zum gegebenen Punkt auf den Normalenvektor lässt sich mit dem Skalarprodukt beschreiben:

$$d = v_{\vec{n}} = \frac{\vec{n} \circ \vec{v}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_P - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|}$$

Der Zähler des letzten Terms entspricht fast der Normalform der Geraden bzw. der Ebene. Anstelle des variablen Vektors auf einen beliebigen Punkt auf der Geraden bzw. der Ebene ist nun der Punkt in der Normalform eingesetzt, von welchem man den Abstand bestimmen möchte. Betrachten wir daher noch einmal die Normalform $\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. Diese Gleichung können wir beidseitig durch die Länge des Normalenvektors dividieren:

$$\frac{\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|} = 0$$

Diese neue Gleichung beschreibt immer noch das gleiche Objekt. D.h. wenn wir einen Punkt der Geraden bzw. der Ebene einsetzen, so ist die Gleichung erfüllt ($0 = 0$). Wird nun aber in dieser Gleichung ein Punkt eingesetzt, welcher nicht auf der Geraden bzw. der Ebene liegt, so ist die Gleichung nicht erfüllt, doch der Wert auf der linken Seite liefert (bis auf das Vorzeichen) gerade die kürzeste Entfernung des eingesetzten Punktes zum Objekt!

Hesse'sche Normalform

Sei \vec{n} Normalenvektor einer Geraden (im \mathbb{R}^2) bzw. einer Ebene (im \mathbb{R}^3) und \vec{r}_0 ein Ortsvektor auf einen Punkt der Geraden bzw. Ebene, so beschreibt die Hesse'sche Normalform

$$\frac{\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|} = 0 \quad (31)$$

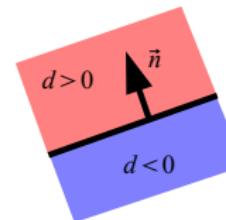
alle Punkte (\vec{r}) der Geraden bzw. der Ebene.

Fortsetzung:

Wird anstelle eines Punktes der Geraden bzw. der Ebene ein beliebiger anderer Punkt (\vec{r}_P) eingesetzt, so liefert die linke Seite der Hesse'schen Normalform die kürzeste Distanz des Punktes zur Geraden bzw. zur Ebene:

$$d = \pm \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_P - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|} \quad (32)$$

Das Vorzeichen dieses letzten Ausdrucks ist positiv, wenn der Normalenvektor zum eingesetzten Punkt hinzeigt, andernfalls ist das Resultat negativ!



Es gibt viele verschiedene Anwendungen für die Hesse'sche Normalform. Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel

Bestimme die kürzeste Entfernung des Ursprungs zur Ebene $\varepsilon : 3x - 12y + 4z + 39 = 0$. Die gegebene Normalform wird in die entsprechende Hesse'sche Normalform umgewandelt. Dazu benötigen wir den Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{3^2 + (-12)^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$$

Beidseitiges dividieren der Normalform durch den Betrag des Normalenvektors liefert die Hesse'sche Normalform:

$$\frac{3x - 12y + 4z + 39}{13} = 0$$

Fortsetzung:

Setzen wir nun den Ursprung in der Gleichung ein erhalten wir die gesuchte (kürzeste) Distanz:

$$d = \left| \frac{3(0) - 12(0) + 4(0) + 39}{13} \right| = 3$$

Es ergeben sich die folgenden Koordinatengleichungen:

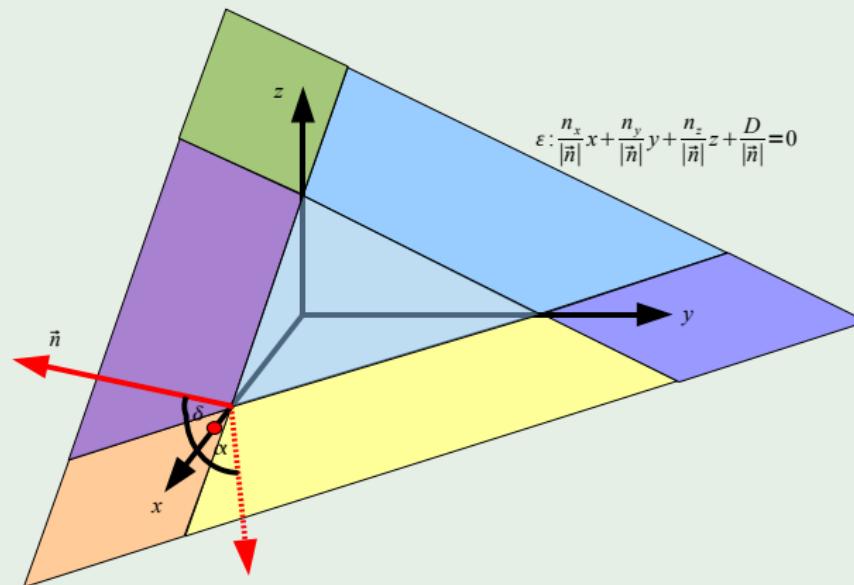
Koordinatengleichung der Hesse'schen Normalform

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \quad \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad (33)$$

Die Abstände einer Geraden bzw. einer Ebene zum Ursprung ergeben sich also zu $d_g = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ bzw. $d_\varepsilon = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Beispiel

Bestimme die Schnittwinkel einer Ebene mit den drei Koordinatenachsen.



Fortsetzung:

Dabei kann der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor einer Geraden (z.B. die Koordinatenachsen) mittels Skalarprodukt bestimmt werden. Um den gesuchten Schnittwinkel zwischen Ebene und Gerade zu erhalten, muss dann der Ergänzungswinkel auf 90° berechnet werden. Also für das gegebene Problem:

$$\alpha = 90^\circ - \arccos \left(\frac{\vec{n} \circ \vec{e}_x}{|\vec{n}|} \right) = 90^\circ - \arccos \left(\frac{n_x}{|\vec{n}|} \right)$$

Durch umstellen findet man:

$$\arccos \left(\frac{n_x}{|\vec{n}|} \right) = 90^\circ - \alpha$$

Fortsetzung

$$\frac{n_x}{|\vec{n}|} = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\frac{n_x}{|\vec{n}|} = \cos(90^\circ) \cos(\alpha) + \sin(90^\circ) \sin(\alpha)$$

$$\frac{n_x}{|\vec{n}|} = \sin(\alpha)$$

Die Koeffizienten in der Hesse'schen Normalform sind also gerade die Sinuswerte der Schnittwinkel mit den Koordinatenachsen (oder die Kosinuswerte der Winkel gegen den Normalenvektor):

$$\frac{n_x}{|\vec{n}|}x + \frac{n_y}{|\vec{n}|}y + \frac{n_z}{|\vec{n}|}z + \frac{D}{|\vec{n}|} = 0 \Rightarrow \sin(\alpha)x + \sin(\beta)y + \sin(\gamma)z + \frac{D}{|\vec{n}|} = 0$$

Beispiel

Wir suchen den Inkreismittelpunkt des Dreiecks mit den Punkten $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ und $C(x_C, y_C)$. Dieses Problem lösen wir mit zwei verschiedenen Varianten. Bei der ersten Variante werden wir zwei Winkelhalbierende bestimmen und diese schneiden. Bei der zweiten Variante werden wir den Radius mit der Distanzmessung mittels Hesse'schen Normalform berechnen. Bei beiden Varianten braucht man die Seitengeraden des Dreiecks. Für die Gerade durch A und B finden wir (Zweipunktform):

$$g_c : y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y_B - y_A)}_{n_x} x + \underbrace{(-(x_B - x_A))}_{n_y} y + \underbrace{(x_B y_A - x_A y_B)}_c = 0$$

Fortsetzung:

Für die drei Punkte $A(1, 4)$, $B(5, 2)$ und $C(6, 6)$ ergeben sich die drei Geraden also zu (HNF):

$$a : (y_C - y_B)x - (x_C - x_B)y + (x_C y_B - x_B y_C) = 0 \Rightarrow 4x - y - 18 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x - y - 18}{\sqrt{17}} = 0$$

$$b : (y_C - y_A)x - (x_C - x_A)y + (x_C y_A - x_A y_C) = 0 \Rightarrow 2x - 5y + 18 = 0$$

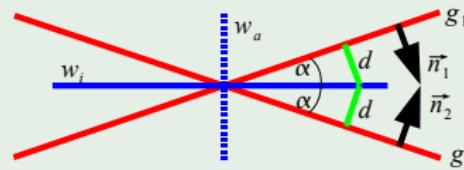
$$\Rightarrow \frac{2x - 5y + 18}{\sqrt{29}} = 0$$

$$c : (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + (x_B y_A - x_A y_B) = 0 \Rightarrow -2x - 4y + 18 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x - 2y + 9}{\sqrt{5}} = 0$$

Fortsetzung:

Um nun zwei Winkelhalbierende zu bestimmen, nützen wir die Eigenschaft, dass jeder Punkt auf der Winkelhalbierenden gleiche Entfernung von den beiden Geraden aufweist:



Eine Winkelhalbierende erhält man somit durch das Gleichsetzen der Hesse'schen Normalformen der Geraden. Dabei muss jedoch auf die Richtung der Normalenvektoren geachtet werden (innere und äussere Winkelhalbierende). Für das Dreieckproblem legt man am besten alle Normalenvektoren so, dass sie ins innere des Dreiecks zeigen - wenn ein gegenüberliegender Eckpunkt in die

Fortsetzung:

Hesse'sche Normalform eingesetzt wird erhält man ein positives Resultat, andernfalls muss die Hesse'sche Normalform mit minus Eins multipliziert werden!:

$$A \in HNF(a) : \frac{4(1) - (4) - 18}{\sqrt{17}} < 0 \Rightarrow \frac{-4x + y + 18}{\sqrt{17}} = 0$$

$$B \in HNF(b) : \frac{2(5) - 5(2) + 18}{\sqrt{29}} > 0$$

$$C \in HNF(c) : \frac{-(6) - 2(6) + 9}{\sqrt{5}} < 0 \Rightarrow \frac{x + 2y - 9}{\sqrt{5}} = 0$$

- Winkelhalbierende zwischen a und b ($HNF(a) = HNF(b)$):

Fortsetzung:

$$\frac{-4x + y + 18}{\sqrt{17}} = \frac{2x - 5y + 18}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{17} + 4\sqrt{29})x + (-5\sqrt{17} - \sqrt{29})y + 18\sqrt{17} - 18\sqrt{29} = 0$$

- Winkelhalbierende zwischen a und c ($HNF(a) = HNF(c)$):

$$\frac{-4x + y + 18}{\sqrt{17}} = \frac{x + 2y - 9}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{17} + 4\sqrt{5})x + (2\sqrt{17} - \sqrt{5})y - 9\sqrt{17} - 18\sqrt{5} = 0$$

Den Inkreismittelpunkt ist nun gleich dem Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden:

$$\Rightarrow M(4.14, 3.87)$$

Fortsetzung:

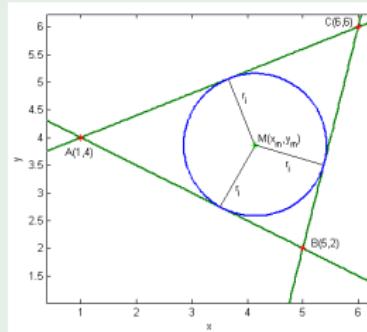
Wäre auch noch der Inkreisradius gesucht, kann der gefundene Inkreismittelpunkt in einer der drei Hesse'schen Normalformen der Seitengeraden eingesetzt werden. Diese Tatsache nutzen wir nun in der zweiten, viel einfacheren Variante. Wenn der gesuchte Inkreismittelpunkt $M(x_m, y_m)$ in den Hesse'schen Normalformen der drei Seitengeraden eingesetzt wird, erhält man jeweils den noch nicht bekannten Inkreisradius r_i . Es ergibt sich also ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten x_m , y_m und r_i :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{-4x_m + y_m + 18}{\sqrt{17}} = r_i \\ \frac{2x_m - 5y_m + 18}{\sqrt{29}} = r_i \\ \frac{x_m + 2y_m - 9}{\sqrt{5}} = r_i \end{array} \right|$$

Fortsetzung:

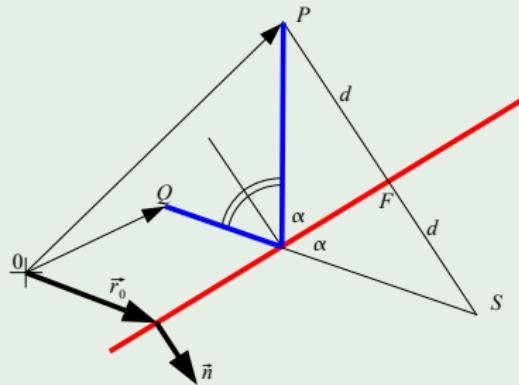
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 & -\sqrt{17} \\ 2 & -5 & -\sqrt{29} \\ 1 & 2 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ r_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ r_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.14 \\ 3.87 \\ 1.29 \end{pmatrix}$$



Beispiel

Im Punkt $Q(1, 1, 1)$ sei eine Lichtquelle angebracht. Gesucht ist die Richtung des Lichtstrahls, welcher gespiegelt an der Ebene $\varepsilon : x + 2y - 2z + 7 = 0$ den Punkt $P(3, 3, -1)$ trifft. In der nachstehenden Skizze sieht man, dass der Punkt P an der Ebene ε gespiegelt werden muss:



Fortsetzung:

Um den Spiegelpunkt zu erhalten, addieren wir zum Ortsvektor von P den Verbindungsvektor von P nach S . Dieser Verbindungsvektor ist gleich dem Einheitsnormalenvektor multipliziert mit der (negativen) zweifachen Entfernung des Punktes P zur Ebene:

$$\vec{r}_S = \vec{r}_P + 2d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{r}_P - 2 \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_P - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{r}_P - 2 \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_P - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

Für die gegebenen Daten erhält man den folgenden Spiegelpunkt:

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \frac{(3) + 2(3) - 2(-1) + 7}{3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Die Richtung des gesuchten Richtstrahls ist nun gleich dem Verbindungsvektor \vec{QS} .

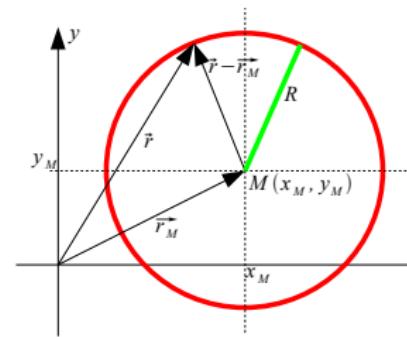


Kreis und Kugel

Als weitere Ortskurven betrachten wir Kreise und Kugeln. Wir wollen also alle Punkte beschreiben, welche von einem gegebenen Punkt (dem Mittelpunkt) konstanten Abstand (Radius) aufweisen.

Der Kreis bzw. die Kugel mit Mittelpunkt \vec{r}_M und Radius R ist gegeben durch die Vektorgleichung:

$$|\vec{r} - \vec{r}_M| = R \quad (34)$$



Die Koordinatengleichung erhalten wir durch einfaches ausrechnen (hier für den Kreis):

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \right| = R$$

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = R$$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$$

Koordinatengleichung Kreis und Kugel

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2 \quad (35)$$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2 \quad (36)$$

Die Binome können jetzt noch ausmultipliziert werden:

$$x^2 + (-2x_M)x + y^2 + (-2y_M) + (x_M^2 + y_M^2 - R^2) = 0$$

Oder dann allgemeiner:

Kegelschnittgleichung

Ein Kegelschnitt (Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel) lässt sich durch die Gleichung:

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0 \quad (37)$$

beschreiben. Für einen Kreis muss $A = C$ gelten. Analog gilt die Gleichung im \mathbf{R}^3 :

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + Ez^2 + Fz + G = 0 \quad (38)$$

Beispiel

Bestimme von der Kugel k den Mittelpunkt und den Radius.

$$k : 3x^2 - 24x + 3y^2 - 6y + 3z^2 + 12z - 12 = 0$$

Damit die Gleichung überhaupt eine Kugel beschreibt, müssen die Koeffizienten vor den quadratischen Termen gleich sein! Hier finden wir den Faktor 3 und durch diesen kann die gegebene Gleichung dividiert werden:

$$x^2 - 8x + y^2 - 2y + z^2 + 4z - 4 = 0$$

Nun wendet man die Methode der quadratischen Ergänzung an, um wieder die Binome zu erhalten

$$(x^2 - 8x = x^2 - 2 * 4 * x + (-4)^2 - (-4)^2 = (x - 4)^2 - 16):$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + (z + 2)^2 - 4 - 4 = 0$$

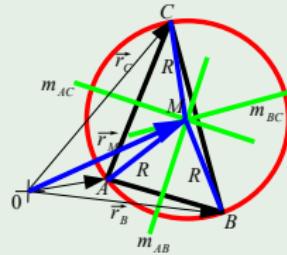
Fortsetzung:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - (-2))^2 = 5^2$$

Der gesuchte Mittelpunkt liegt also bei $M(4, 1, -2)$ und die Kugel hat den Radius $R = 5$.

Beispiel

Gesucht ist die Kreisgleichung des Kreises durch die drei Punkte $A(4, -1)$, $B(7, 2)$ und $C(2, 6)$.



Fortsetzung:

Wir wenden hier zwei verschiedene Varianten an. In einem ersten Verfahren schneiden wir zwei Mittelsenkrechten um den Mittelpunkt des gesuchten Kreises zu erhalten. Von einer Mittelsenkrechten kennen wir einen Punkt und den Normalenvektor:

$$m_{AB} : \vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \Rightarrow \vec{AB} \circ \left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2} \right) = 0$$

$$3x + 3y - 18 = 0$$

Analog für die beiden anderen Mittelsenkrechten:

$$m_{AC} : -2x + 7y - \frac{23}{2} = 0, m_{BC} : -5x + 4y + \frac{13}{2} = 0$$

Fortsetzung:

Schneiden zweier Mittelsenkrechten ($m_{AB} \cap m_{AC}$):

$$\begin{vmatrix} 3x + 3y - 18 = 0 \\ -2x + 7y - \frac{23}{2} = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow M\left(\frac{61}{18}, \frac{47}{18}\right)$$

Den Radius erhalten wir als Länge eines Verbindungsvektors vom Mittelpunkt zu einem der gegebenen Eckpunkte (z.B. zum Punkt A):

$$R = |\vec{MA}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{11}{18} \\ \frac{65}{18} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{2173}{162}} = 3.66$$

In einer zweiten Variante wird für die Kreisgleichung ein allgemeiner Ansatz gemacht. Damit ein lineares Gleichungssystem entsteht, wählt man am besten den Kegelschnittansatz:

$$x^2 + Bx + y^2 + Dy + E = 0.$$

Fortsetzung:

Im Ansatz die drei gegebenen Punkte einsetzen:

$$\left| \begin{array}{l} 4B - D + E = -17 \\ 7B + 2D + E = -53 \\ 2B + 6D + E = -40 \end{array} \right| \Rightarrow x^2 - \frac{61}{9}x + y^2 - \frac{47}{9}y + \frac{44}{9} = 0$$

Gleichung mit quadratischer Ergänzung in Mittelpunktsform umwandeln:

$$\left(x - \frac{61}{18} \right)^2 + \left(y - \frac{47}{18} \right)^2 = \frac{2173}{162}$$

Aus der letzten Gleichung können die gesuchten Größen herausgelesen werden!

Beispiel

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kreise:

$$k_1 : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

$$k_2 : (x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 6^2$$

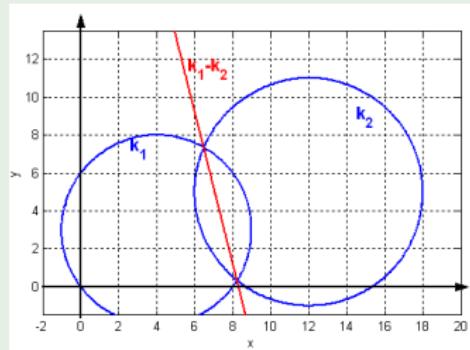
Um die beiden Schnittpunkte zu bestimmen, muss das „nicht“ lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0 \\ x^2 - 24x + y^2 - 10y = -133 \end{array} \right|$$

gelöst werden! Dies kann z.B. durch Auflösen der einen Gleichung nach einer Variablen und anschliessendem Einsetzen in der verbleibenden Gleichung erfolgen!

Fortsetzung:

Einfacher geht es, indem wir die beiden Kreisgleichungen voneinander subtrahieren, so dass in der neuen Gleichung keine quadratischen Terme mehr auftreten: $k_1 - k_2 : 16x + 4y = 133$. Diese neue Gleichung beschreibt eine Gerade. Stellen wir die Gleichungen graphisch dar, so sehen wir, dass diese Gerade die beiden gesuchten Schnittpunkte beinhaltet:



Fortsetzung:

Dieses Verfahren funktioniert immer und die Geradengleichung beinhaltet die gesuchten Schnittpunkte. Wir erhalten also ein neues Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0 \\ 16x + 4y = 133 \end{array} \right| \Rightarrow y = \frac{133 - 16x}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + \left(\frac{133 - 16x}{4} \right)^2 - 6 \left(\frac{133 - 16x}{4} \right) = 0$$

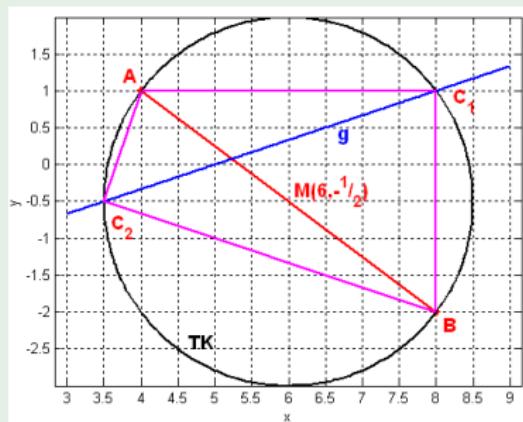
Wir erhalten eine quadratische Gleichung:

$$272x^2 - 4000x + 14497 = 0 \Rightarrow x_1 = 6.48, x_2 = 8.23$$

Nun können die dazugehörigen y -Werte und somit die Schnittpunkte bestimmt werden: $S_1(6.48, 7.34), S_2(8.23, 0.33)$.

Beispiel

Gegeben seien die Punkte $A(4, 1)$ und $B(8, -2)$ und die Gerade $g : x + y = 1$. Gesucht sei der Punkt C auf der Geraden, so dass das Dreieck ABC in C rechtwinklig ist. Um den gesuchten Punkt zu bestimmen, bilden wir über der Strecke AB den Thaleskreis und schneiden diesen mit der Geraden g .



Beispiel

Mittelpunkt und Radius des Thaleskreis:

$$\vec{r_M} = \frac{1}{2} (\vec{r_A} + \vec{r_B}) = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, R = |\vec{AM}| = \frac{5}{2}$$

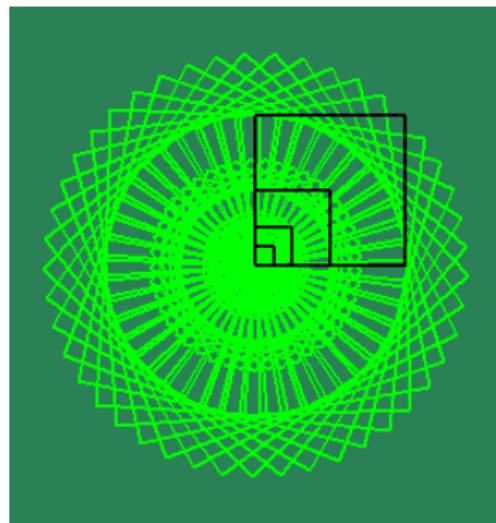
Die Gleichung des Thaleskreis lautet somit:

$$(x - 6)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x^2 - 12x + y^2 + y = -\frac{123}{4}$$

Thaleskreis mit der Geraden schneiden:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 12x + y^2 + y = -\frac{123}{4} \\ x + y = 1 \end{array} \right| \Rightarrow C_1(8, 1), C_2\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

7 Lineare Abbildungen



7

Lineare Abbildungen

- Einführung
 - Definition
 - Abbildungsmatrix
- Kern und Bild
 - Vektorräume Kern und Bild
 - Dimensionsformel
- Verkettung von linearen Abbildungen
 - Verkettung
 - Umkehrabbildung
- Geometrische Abbildungen
 - Einführung
 - Wichtige geometrische Abbildungen

Definition lineare Abbildung

Lineare Abbildungen sind Funktionen zwischen zwei Vektorräumen. Als Argument und als Resultat einer linearen Abbildungen haben wir also Vektoren. Abbildungen zwischen Vektorräumen gibt es unendlich viele und sehr verschiedenartige. Wir betrachten hier die einfachsten Abbildungen:

Definition

Seien \mathbf{V} und \mathbf{W} Vektorräume über den Körper \mathbf{K} . Eine Abbildung $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ heisst linear (oder ein **Homomorphismus**), wenn für alle $v, w \in \mathbf{V}, \lambda \in \mathbf{K}$ folgendes gilt:

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \quad (1)$$

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad (2)$$

Beispiel

Die Projektionsabbildung $p_{xy} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $p_{xy}(x, y, z) = (x, y)$ ist eine lineare Abbildung. Diese Abbildung ist linear, da die beiden Abbildungsgesetze gelten:

$$p_{xy}((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = p_{xy}((x_1, y_1, z_1)) + p_{xy}((x_2, y_2, z_2))$$

$$p_{xy}((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$p_{xy}(\lambda(x, y, z)) = \lambda p_{xy}((x, y, z))$$

$$p_{xy}((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) = \lambda(x, y)$$

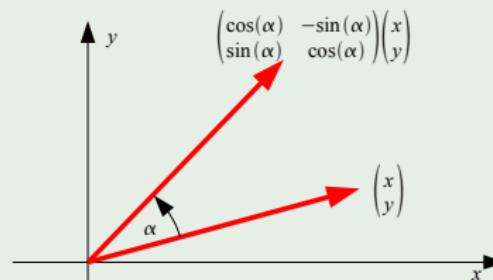
$$(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Beispiel

Eine sehr interessante lineare Abbildung ist die folgende:

$$d_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, d_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hier werden Punkte (oder Ortsvektoren zu Punkten) des zweidimensionalen Raumes um den Ursprung um den Winkel α im gegenuhzeigersinn rotiert.



Fortsetzung:

Diese Abbildung ist linear, da die beiden Abbildungsgesetze gelten:

$$d_\alpha ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = d_\alpha ((x_1, y_1)) + d_\alpha ((x_2, y_2))$$

$$d_\alpha (\lambda(x, y)) = \lambda d_\alpha ((x, y))$$

Verallgemeinerung dieses Sachverhalts:

Theorem

Jede $n \times m$ -Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung zwischen den m - und n -dimensionalen Vektorräumen \mathbf{R}^m und \mathbf{R}^n :

$$A : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Um die Vielfalt linearer Abbildungen zu zeigen betrachten wir noch ein weiteres Beispiel (mit einem allgemeineren Vektorraum):

Beispiel

Aus der Analysis ist bekannt, dass das Differential (und auch das Integral) eine lineare Operation ist. D.h. es gelten die folgenden Ableitungsregeln:

- Summenregel:

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

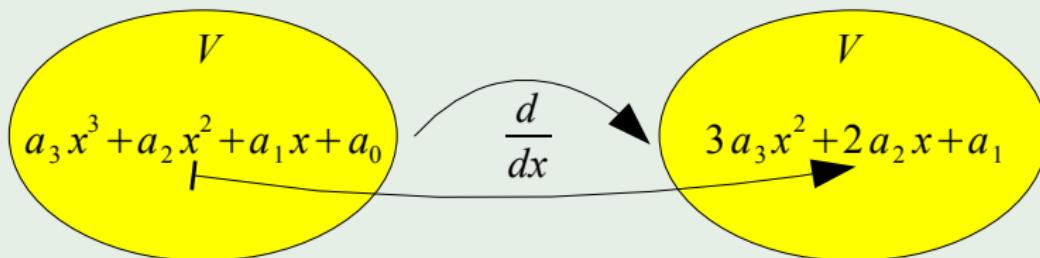
- Regel konstanter Faktor:

$$\frac{d}{dx} (\lambda f(x)) = \lambda \frac{d}{dx} f(x)$$

Fortsetzung:

So ist die Ableitung von Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten höchstens dritten Grades eine lineare Abbildung im Vektorraum der Polynome höchstens dritten Grades.

$$V = \{ \text{Menge aller Polynome höchstens dritten Grades} \}$$



Die Forderungen der Abbildungsgesetze bei linearen Abbildungen bewirken, dass eine Linearkombination unter der linearen Abbildung erhalten bleibt. Sei also f eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen \mathbf{V} und \mathbf{W} und sei $v \in \mathbf{V}$ als Linearkombination $v = k_1 b_1 + \dots + k_n b_n$ darstellbar, so kann der Funktionswert $f(v)$ ebenfalls als Linearkombination geschrieben werden:

$$f(v) = f(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n) = k_1 f(b_1) + \dots + k_n f(b_n)$$

Diese Tatsache bewirkt, dass eine lineare Abbildung aus den Funktionswerten der Basisvektoren eindeutig definiert ist.

Beispiel

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, wobei für die Vektorräume die kanonische Basis verwendet wird. Von der linearen Abbildung kennen wir die Funktionswerte der Basisvektoren:

Fortsetzung:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1, 1), f(0, 1, 0) = (1, 1, 0), f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

Wir suchen die Abbildungsvorschrift der linearen Abbildung f . D.h. wir suchen den Funktionswert eines beliebigen Vektors $v = (x, y, z)$. Da sich dieser Vektor als Linearkombination der Basisvektoren schreiben lässt $v = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, gilt nun für den gesuchten Funktionswert:

$$f(v) = f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1))$$

$$f(v) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1)$$

$$f(v) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0)$$

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x)$$

Es gilt also:

Theorem

Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder (Funktionswerte) der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

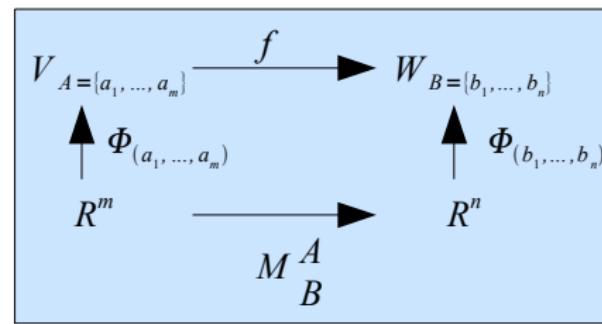
Weiter vorne haben wir gesehen, dass die Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Matrix immer eine lineare Abbildung beschreibt. Diesen Sachverhalt kann man auch umkehren. In einem allgemeinen, endlich dimensionalen Vektorraum \mathbf{V} mit der Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ lässt sich jeder Vektor $v \in \mathbf{V}$ des Vektorraums eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren schreiben:
 $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$. Diese Linearkombination lässt sich kurz auch als Spaltenvektor mit den Koeffizienten der Linearkombination ausdrücken: $v_B = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$.

Abbildungsmatrix

Theorem

Sind \mathbf{V} und \mathbf{W} endlich dimensionale Vektorräume mit den Basen $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ von \mathbf{V} und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von \mathbf{W} und $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ eine lineare Abbildung von \mathbf{V} nach \mathbf{W} , so existiert eine $n \times m$ -Matrix $M_B^A = M$, welche die lineare Abbildung beschreibt:

$$v \in \mathbf{V} \mapsto f(v) = M_B^A v = Mv \in \mathbf{W} \quad (4)$$



Dabei nennt man diese Matrix M_B^A die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung f . Sind die Basen der Vektorräume klar, kann die Basenbezeichnung weggelassen werden: $M_B^A = M$. Die (linearen) Abbildungen $\Phi_{(a_1, \dots, a_m)}$ und $\Phi_{(b_1, \dots, b_n)}$ sind die Basisisomorphismen für eine allfällige Basiszuordnung! Diese Abbildungsmatrix ist zu den gegebenen Basen eindeutig definiert und es gilt:

Theorem

Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Bilder (Funktionswerte) der Basisvektoren:

$$M_B^A = (f(a_1), \dots, f(a_m)) \quad (5)$$

Beispiel

Die Projektionsabbildung $p_{xy} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $p_{xy}(x, y, z) = (x, y)$ des Einführungsbeispiels lässt sich in der kanonischen Basis durch die folgende Abbildungsmatrix beschreiben:

$$M = \begin{pmatrix} p_{xy}(1, 0, 0) & p_{xy}(0, 1, 0) & p_{xy}(0, 0, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn das Produkt mit dem allgemeinen Spaltenvektor $v = (x, y, z)^T$ berechnet wird, erhält man die ursprüngliche Beschreibung der Abbildung (als Spaltenvektor).

$$Mv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir suchen für die lineare Abbildung $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ der Ableitung von Polynomen höchstens dritten Grades die Abbildungsmatrix. Dazu verwenden wir die folgende Basis $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ für den Vektorraum \mathbf{V} der Polynome. Es gilt also:

$$M = \left(\Phi_B^{-1}\left(\frac{d}{dx}1\right) \quad \Phi_B^{-1}\left(\frac{d}{dx}x\right) \quad \Phi_B^{-1}\left(\frac{d}{dx}x^2\right) \quad \Phi_B^{-1}\left(\frac{d}{dx}x^3\right) \right)$$

$$M = \left(\Phi_B^{-1}(0) \quad \Phi_B^{-1}(1) \quad \Phi_B^{-1}(2x) \quad \Phi_B^{-1}(3x^2) \right)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

Die Ableitung (z.B. $p(x) = 17x^3 + 2x^2 - 14$) kann nun durch Multiplikation mit der Abbildungsmatrix berechnet werden:

$$p_B = \Phi_B^{-1}(p(x)) = \Phi_B^{-1}(17x^3 + 2x^2 - 14) = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$d(p_B) = Mp_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} p(x) = \Phi_B(d(p_B)) = \Phi_B((0 \ 4 \ 51 \ 0)^T) = 51x^2 + 4x$$

Vektorräume Kern und Bild

Im weiteren betrachten wir zwei spezielle Vektorräume die im Zusammenhang mit linearen Abbildungen von grosser Bedeutung sind:

Definition

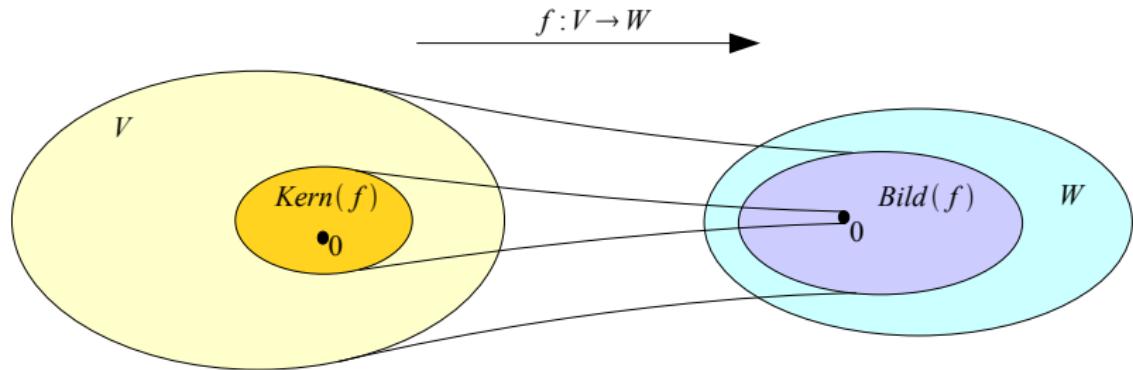
Sei $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\text{Bild}(f) := \{w \in \mathbf{W} : \exists v \in \mathbf{V}, w = f(v)\} \quad (6)$$

ein Untervektorraum von \mathbf{W} (alle möglichen Bilder die vorkommen können) und

$$\text{Kern}(f) := \{v \in \mathbf{V} : f(v) = 0\} \quad (7)$$

ein Untervektorraum von \mathbf{V} (alle Vektoren die auf den Nullvektor abgebildet werden).



Um diese beiden Vektorräume besser zu verstehen betrachten wir einige Beispiele:

Beispiel

Die Projektionsabbildung $p_{xy} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $p_{xy}(x, y, z) = (x, y)$ des Einführungsbeispiels hat als Bild die xy -Ebene (also den ganzen Vektorraum), da ja jeder Vektor in diese projiziert wird. Analytisch bekommt man das Bild einer linearen Abbildung als Spaltenraum der Abbildungsmatrix:

$$\begin{aligned} \text{Bild}(p_{xy}) &= S(M) = S \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &= \left\{ w \in \mathbf{R}^2 : w = \lambda_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) + \lambda_2 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) + \lambda_3 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right) \right\} \end{aligned}$$

Fortsetzung:

Der Kern der linearen Abbildung ist die z -Achse, da diese Punkte auf den Nullpunkt abgebildet werden. Analytisch ist der Kern gleich dem Nullraum der Abbildungsmatrix (also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Mv = 0$):

$$\text{Kern}(p_{xy}) = \text{null}(M) = \text{null} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kern}(p_{xy}) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel

Wir wollen das Bild und den Kern der Ableitungsabbildung
 $d : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ bestimmen.

$$Bild(d) = S(M) = S \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ p \in \mathbf{V} : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \\ 3\lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dies sind Polynome höchstens zweiten Grades ($\lambda_1 + 2\lambda_2x + 3\lambda_3x^2$).

$$Kern(d) = null(M) = \left\{ p \in \mathbf{V} : \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dies sind die konstanten Polynome ($p(x) = \lambda$).



Dimensionsformel

In den letzten Abschnitten haben wir gesehen, dass die linearen Abbildungen eng mit den Matrizen verknüpft sind. Mit dem Dimensionsatz bei den Matrizenräumen (Kap. 5) folgt nun sofort der Dimensionssatz für die linearen Abbildungen:

Theorem

Sei $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ eine lineare Abbildung und seien $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basen der endlich dimensionalen Vektorräume \mathbf{V} und \mathbf{W} . Im weiteren sei M die Abbildungsmatrix, so gilt:
 $rg(M) + dim(null(M)) = m$. Also gilt für die Vektorräume $Bild(f)$ und $Kern(f)$ die Dimensionsformel:

$$dim(Bild(f)) + dim(Kern(f)) = m = dim(\mathbf{V}) \quad (8)$$

Beispiel

Für die untersuchte Projektionsabbildung p_{xy} gilt:

$$\underbrace{\dim(\text{Bild}(f))}_{2} + \underbrace{\dim(\text{Kern}(f))}_{1} = m = 3$$

Beispiel

Für die untersuchte Ableitungsabbildung d gilt:

$$\underbrace{\dim(\text{Bild}(d))}_{3} + \underbrace{\dim(\text{Kern}(d))}_{1} = m = 4$$

Mit Hilfe der Dimensionsformel können die linearen Abbildungen analog zur Analysis (injektiv, surjektiv und bijektiv) klassifiziert werden!

Klassifizierung linearer Abbildungen

Klassifizierung

Monomorphismus Ein Monomorphismus zwischen Vektorräumen ist eine lineare Abbildung $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, die injektiv ist. Dies trifft genau dann zu, wenn die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix linear unabhängig sind, d.h.
 $\dim(\text{Kern}(f)) = 0$.

Epimorphismus Ein Epimorphismus zwischen Vektorräumen ist eine lineare Abbildung $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, die surjektiv ist. Dies trifft genau dann zu, wenn die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix \mathbf{W} erzeugen, d.h.
 $\dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\mathbf{W})$.

Klassifizierung (Fortsetzung)

Isomorphismus Ein Isomorphismus zwischen Vektorräumen ist eine lineare Abbildung $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, die bijektiv ist. Dies trifft genau dann zu, wenn die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix eine Basis von \mathbf{W} bilden, d.h. $\dim(\text{Kern}(f)) = 0 \wedge \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\mathbf{W})$. Die beiden Räume \mathbf{V} und \mathbf{W} bezeichnet man dann als isomorph.

Endomorphismus Ein Endomorphismus zwischen Vektorräumen ist eine lineare Abbildung $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, bei der die Räume \mathbf{V} und \mathbf{W} gleich sind, also $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. Die Abbildungsmatrix dieser Abbildung ist eine quadratische Matrix.

Klassifizierung (Fortsetzung)

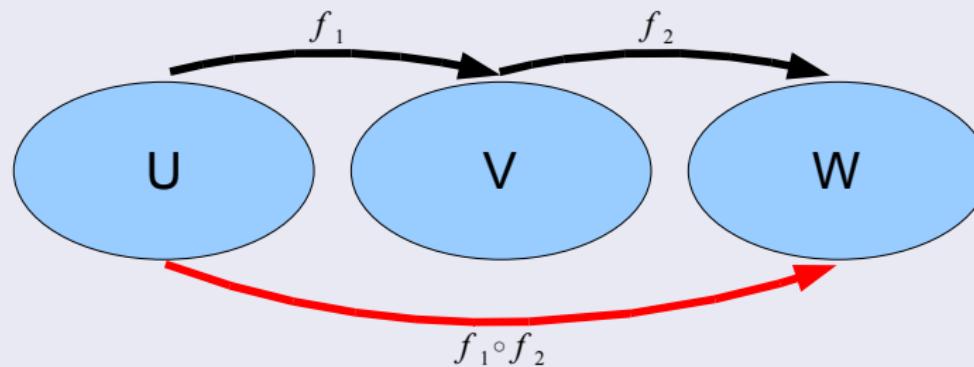
Automorphismus Ein Automorphismus zwischen Vektorräumen ist eine bijektive lineare Abbildung, bei der die Räume V und W gleich sind. Er ist also sowohl ein Isomorphismus als auch ein Endomorphismus. Die Abbildungsmatrix dieser Abbildung ist eine reguläre Matrix.

Verkettung von linearen Abbildungen

Theorem

Die Verkettung zweier linearer Abbildungen $f_1 : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ und $f_2 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ ist wieder eine lineare Abbildung:

$$f_1 \circ f_2 : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{W}, v \mapsto f_2(f_1(v)) \quad (9)$$



Beispiel

Gegeben seien die beiden linearen Abbildungen $f_1 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ und $f_2 : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ mit:

$$f_1(x, y, z) = (x + 2y - 2z, -2x + y + z, x + 2y - z, x - 2y + 2z)$$

$$f_2(a, b, c, d) = \left(\frac{8}{5}a + \frac{2}{5}b - \frac{4}{5}c + d, 2a + b - c + d \right)$$

Wir suchen die Verkettung der beiden Abbildungen $f_1 \circ f_2$:

$$f_2(f_1(x, y, z)) = f_2(x + 2y - 2z, -2x + y + z, x + 2y - z, x - 2y + 2z) =$$

$$\left(\frac{8}{5}(x + 2y - 2z) + \frac{2}{5}(-2x + y + z) - \frac{4}{5}(x + 2y - z) + (x - 2y + 2z), \right.$$

$$\left. 2(x + 2y - 2z) + (-2x + y + z) - (x + 2y - z) + (x - 2y + 2z) \right) = (x, y)$$

Die Verkettung ergibt die Projektionsabbildung p_{xy} !



Theorem

Seien M_1 und M_2 die Abbildungsmatrizen der linearen Funktionen $f_1 : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ und $f_2 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, so ist das Matrizenprodukt $M = M_2M_1$ die Abbildungsmatrix der Verkettung $f_1 \circ f_2 : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{W}$.

Beispiel

Die Abbildungsmatrizen der beiden Abbildungen des letzten Beispiels lauten:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

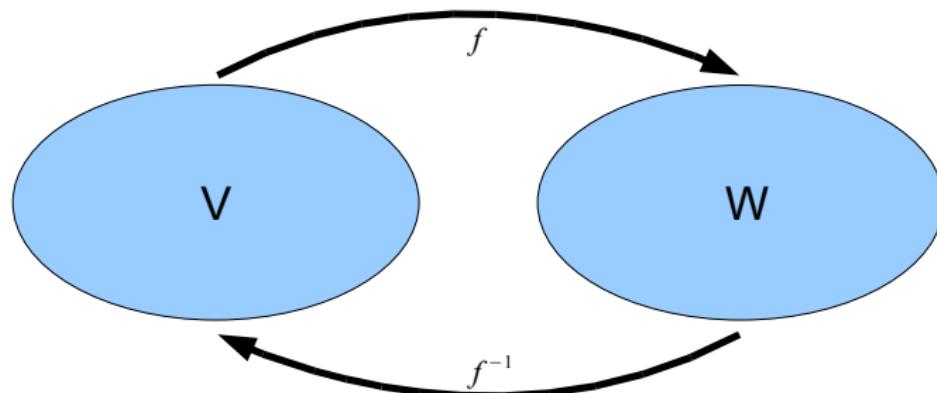
$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-4}{5} & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:

Die Abbildungsmatrix der Verkettung lautet somit:

$$\begin{aligned}
 M &= M_2 M_1 = \left(\begin{array}{cccc} \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-4}{5} & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Im folgenden beschränken wir uns auf Isomorphismen (bijektive Abbildungen). Ein Isomorphismus $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ besitzt eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$, so das folgendes gilt:
 $f \circ f^{-1} = id_{\mathbf{V}}$ bzw. $f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{W}}$. Dabei ist id die identische Abbildung, welche jeden Vektor auf sich selbst abbildet.



Theorem

Sei M die Abbildungsmatrix eines Isomorphismus $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, so ist die Inverse von M die Abbildungsmatrix der Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$.

Beispiel

Wir wollen hier ein ausführlicheres Beispiel behandeln. Wir betrachten den Vektorraum \mathbf{V} der Polynome höchstens zweiten Grades mit der Basis $B = \{1, x, x^2\}$. Im weiteren sei die Abbildung $L(p(x)) = (x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2} p(x) + p(x)$ gegeben. Zuerst zeigen wir, dass diese Abbildung linear ist:

- Summe:

$$\begin{aligned}
 L(p_1(x) + p_2(x)) &= (x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2}(p_1(x) + p_2(x)) + (p_1(x) + p_2(x)) \\
 &= \underbrace{(x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2} p_1(x) + p_1(x)}_{L(p_1(x))} + \underbrace{(x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2} p_2(x) + p_2(x)}_{L(p_2(x))} \\
 &= L(p_1(x)) + L(p_2(x))
 \end{aligned}$$

Fortsetzung:

- Konstanter Faktor:

$$\begin{aligned} L(\lambda p(x)) &= (x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2} (\lambda p(x)) + (\lambda p(x)) \\ &= \underbrace{\lambda (x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2} p(x)}_{L(p(x))} + \lambda p(x) = \lambda L(p(x)) \end{aligned}$$

Im weiteren suchen wir für den Basisisomorphismus Φ (
 $\Phi((1, 0, 0)^T) = 1$, $\Phi((0, 1, 0)^T) = x$ und $\Phi((0, 0, 1)^T) = x^2$) die
 Abbildungsmatrix der linearen Abbildung L . Dazu bestimmen wir
 die Bilder der Basisvektoren:

$$L(1) = (x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2}(1) + (1) = 1$$

Fortsetzung:

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(L(\Phi((1, 0, 0)^T))) = (1, 0, 0)^T$$

$$L(x) = (x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2}(x) + (x) = x$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(L(\Phi((0, 1, 0)^T))) = (0, 1, 0)^T$$

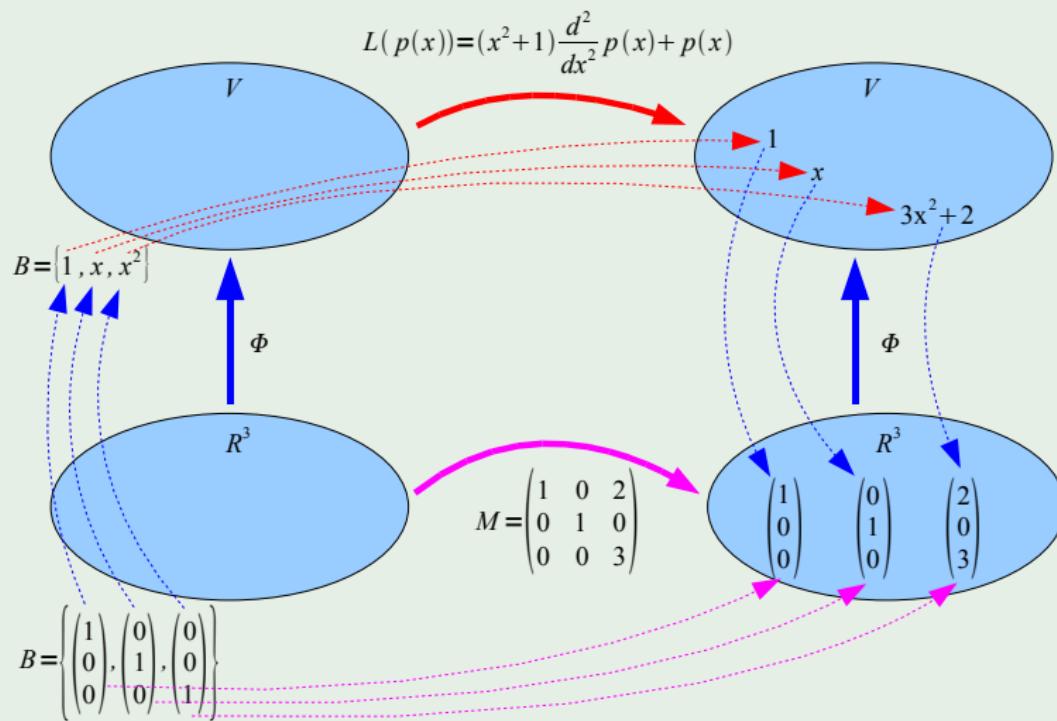
$$L(x^2) = (x^2 + 1) \frac{d^2}{dx^2}(x^2) + (x^2) = 3x^2 + 2$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(L(\Phi((0, 0, 1)^T))) = (2, 0, 3)^T$$

Die Abbildungsmatrix lautet somit:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung:



Fortsetzung:

Nun wollen wir von dieser Abbildung das Bild und den Kern bestimmen und die Abbildung entsprechend klassifizieren. Da die Abbildungsmatrix M regulär ist, gilt:

$$\dim(\text{Bild}(L)) + \dim(\text{Kern}(L)) = 3 + 0 = 3 = \dim(\mathbf{V})$$

D.h. der Kern der Abbildung hat die Dimension Null und besteht nur aus dem Nullpolynom $\text{Kern}(L) = \{0\}$ (nur das Nullpolynom wird durch die Abbildung auf das Nullpolynom abgebildet!). Das Bild der linearen Abbildung ist der gesamte Vektorraum (d.h. jedes Polynom von \mathbf{V} kommt als Funktionswert der linearen Abbildung vor!). Die lineare Abbildung ist somit ein Isomorphismus (invertierbar). Da die lineare Abbildung auf sich selbst operiert ist die Abbildung auch ein Endomorphismus und somit auch ein Automorphismus.

Fortsetzung:

Im weiteren suchen wir von diesem Isomorphismus die Umkehrabbildung. Dazu invertieren wir die Abbildungsmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Die entsprechende Umkehrabbildung lautet nun:

$$L^{-1}(p(x)) = L^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x + \left(-\frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{3}a_2\right)x^2$$

Zum Schluss suchen wir die Lösung der Differentialgleichung $(x^2 + 1)y'' + y = x^2$. Die linke Seite dieser Differentialgleichung entspricht gerade unserer linearen Abbildung L , also lässt sich die Differentialgleichung auch wie folgt schreiben:

Fortsetzung:

$L(y) = x^2$. D.h. wir suchen alle Polynome in \mathbf{V} , welche durch die lineare Abbildung auf das Polynom x^2 abgebildet werden. Wir können dieses Problem nun mittels Matrizen lösen. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit der inversen Abbildungsmatrix ergibt:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Eine Lösung des Problems ist das Polynom $p(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^2$.

Einführung geometrische Abbildungen

Wir betrachten lineare Abbildungen $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ (mit der kanonischen Basis) beschrieben durch die Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

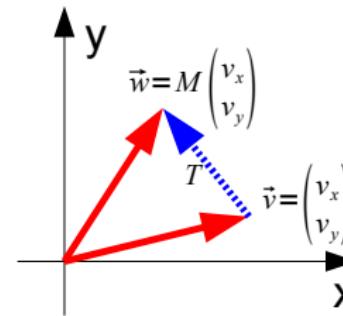
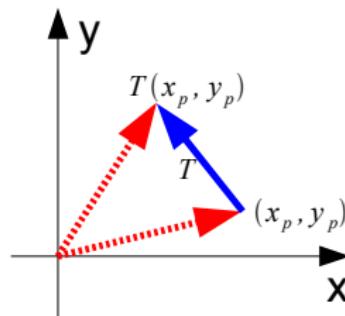
Diese Abbildung kann auf zwei verschiedene Arten interpretiert werden:

- Punkte-Abbildung: Hier wird ein Punkt (x, y) auf einen Bildpunkt $(ax + by, cx + dy)$ abgebildet:

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

- Vektor-Abbildung: Hier wird ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf einen neuen Vektor $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ abgebildet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$



Wichtige geometrische Abbildungen

Im weiteren interpretieren wir die Abbildung als Operationen auf Punkten des zweidimensionalen Raumes. Dazu wenden wir die Abbildungen auf die Ortsvektoren zu den Punkten an.
Wir untersuchen einige wichtige Abbildungen.

Nullabbildung

Sei M die Nullmatrix, so werden alle Punkte des zweidimensionalen Raumes durch die Abbildung auf den Nullpunkt (Ursprung) abgebildet!

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Identität

Sei M die Einheitsmatrix, so werden alle Punkte des zweidimensionalen Raumes durch die Abbildung auf sich selbst abgebildet!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung

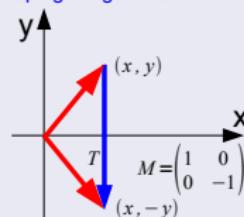
Hier untersuchen wir vier grundlegende Spiegelungen (an den Koordinatenachsen und an den Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen). Möchten wir z.B. alle Punkte des zweidimensionalen Raumes an der x -Achse spiegeln, so erhalten die transformierten Punkte die gleiche x -Koordinate und in der neuen y -Koordinate ein umgekehrtes Vorzeichen. Also:

Spiegelung (Fortsetzung)

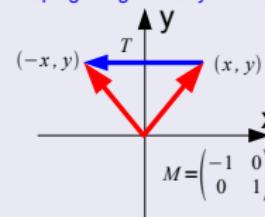
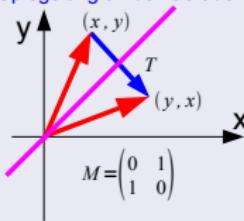
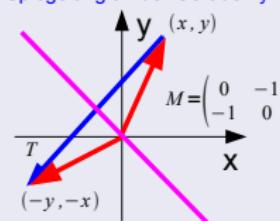
$$T(x, y) = (x, -y) \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für die weiteren Spiegelungen kann analog vorgegangen werden:

Spiegelung an der x-Achse



Spiegelung an der y-Achse

Spiegelung an der Geraden $y=x$ Spiegelung an der Geraden $y=-x$ 

Projektion

Hier untersuchen wir die Projektionen auf die Koordinatenachsen und auf eine Gerade durch den Ursprung. Die Abbildungsmatrix bestimmt man mit den Bildern der beiden Basisvektoren. Hier für die Projektion auf eine Gerade durch den Ursprung:

$$T(1, 0) = (\cos^2(\alpha), \cos(\alpha)\sin(\alpha))$$

$$T(0, 1) = (\sin(\alpha)\cos(\alpha), \sin^2(\alpha))$$

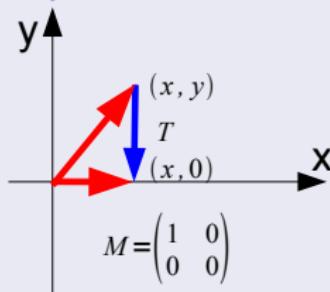
Die Spalten der Abbildungsmatrix als Bilder der Basisvektoren:

$$T(x, y) = (x\cos^2(\alpha) + y\sin(\alpha)\cos(\alpha), x\cos(\alpha)\sin(\alpha) + y\sin^2(\alpha))$$

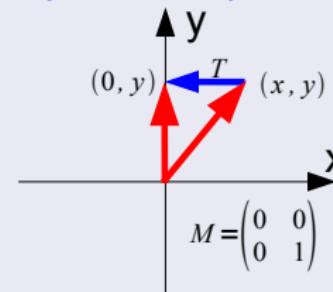
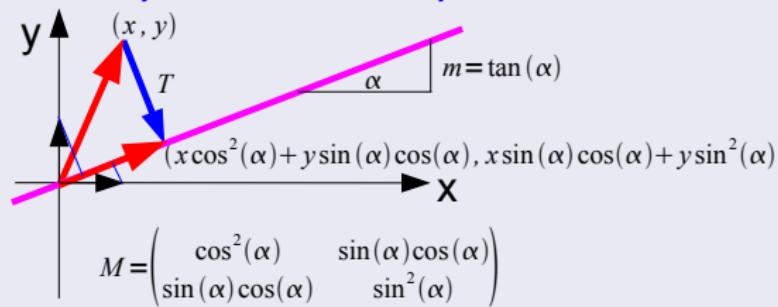
$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

Projektion (Fortsetzung)

Projektion auf die x-Achse



Projektion auf die y-Achse

Projektion auf die Geraden $y=m*x$ 

Rotation

Als nächstes führen wir Rotationen (im gegenuhzeigersinn) um den Ursprung aus. Um die Abbildungsmatrix zu erhalten, betrachten wir die Bilder der Basisvektoren:

$$T(1, 0) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

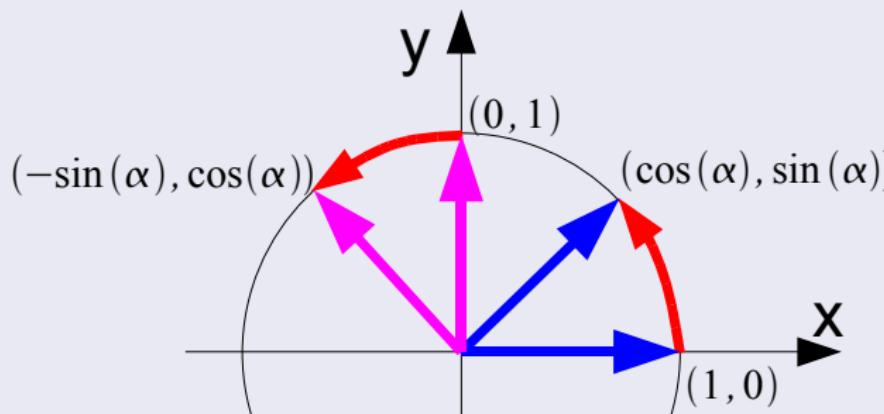
$$T(0, 1) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

Die Spalten der Abbildungsmatrix als Bilder der Basisvektoren:

$$T(x, y) = (x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

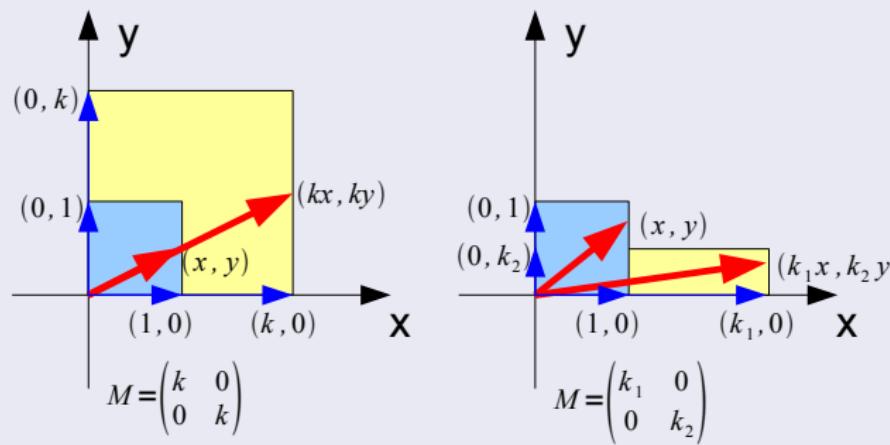
Rotation (Fortsetzung)



$$\rightarrow M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

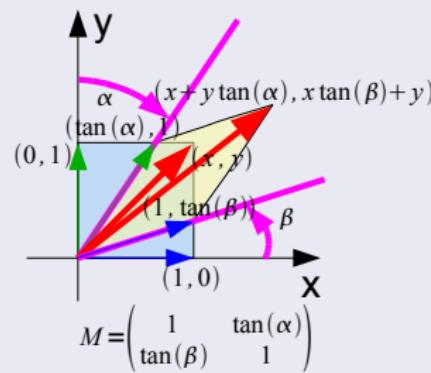
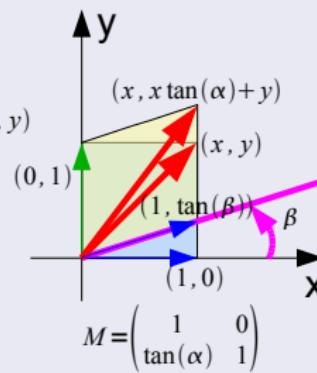
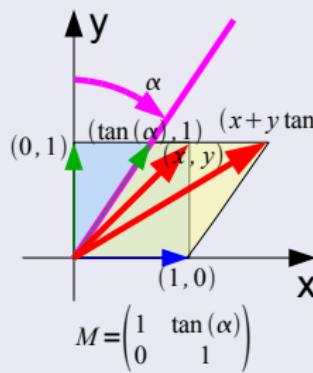
Streckung (Expansion) / Stauchung (Diletation)

Bei der folgenden Operation betrachten wir die Auswirkung der Operation auf die Punkte eines Rechteck. Die Operation bewirkt, dass die ursprünglichen Koordinaten mit einem Skalar multipliziert werden. Dabei kann in Richtung der beiden Koordinatenachsen mit unterschiedlichen Faktoren skaliert werden.



Scherrung

Auch hier betrachten wir die Auswirkung der Operation auf die Punkte eines Rechtecks. Die Operation bewirkt, dass die Seiten des Rechtecks gegenüber den Koordinatenachsen gedreht werden. Dabei kann die Scherrung in beiden Richtungen oder in eine einzelne Richtung angewandt werden.



1 Lineare Gleichungssysteme

- Einführung
 - Lineare Gleichungen
 - Matrizen
 - Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor
- Definition
 - Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsverfahren
 - Elementare Zeilenumformungen
 - Zeilenstufenform
 - Rang einer Matrix
- Lösungsfälle
 - Rang und lineare Gleichungssysteme
- Gauss'scher Algorithmus
 - Gauss'scher Algorithmus
 - Gauss-Jordan-Verfahren

2 Matrizenrechnung

- Rechenoperationen und Gesetze
 - Addition und Subtraktion
 - Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar
 - Matrizenmultiplikation
- Spezielle Matrizen
 - Quadratische Matrizen
 - Diagona- und Dreiecksmatrizen
 - Einheitsmatrizen
 - transponierte Matrix
 - symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen
 - Matrizen der elementaren Zeilenumformungen
 - reguläre und singuläre Matrizen
- Inversion
 - Definition Inverse
 - Berechnung der inversen
 - Gesetze für die Inverse

3 Determinante

- Determinante und lineare Gleichungssysteme
 - Zweireihige Determinante
 - Cramer'sche Regel
 - Dreireihige Determinante
- Determinante und Permutationen
- Definition
- Berechnungsmethoden und Gesetze
 - Determinante einer Dreiecksmatrix
 - Elementare Zeilenumformungen und Determinanten
 - Folgerungen und Gesetze
 - Laplace'scher Entwicklungssatz

4 Vektorräume

- Einführung
 - Vektoren und Translationen
 - Linearkombinationen und Gesetze
 - Lineare Unabhängigkeit
- Definition
 - Vektorraum
 - Untervektorraum
- Lineare Hülle, Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension
 - Lineare Hülle
 - Lineare Unabhängigkeit
 - Basis
 - Dimension

5 Euklid'sche Vektorräume

- Skalarprodukte
 - Einführung
 - Definition
 - Standardskalarprodukt
- Norm und Winkel
 - Definition
 - Orthogonale Vektoren
- Orthogonale Zerlegungen
 - Orthonormale Basen
 - Projektion
 - Orthogonale Zerlegung
 - Orthonormalisierung
- Matrizenräume
 - Definition
 - Dimensionssatz
 - Normalensystem

6 Vektorgeometrie

- Einführung
- Rechenoperationen
 - Skalarprodukt
 - Vektorprodukt
 - Spatprodukt
 - Gesetze
- Geometrie
 - Die Gerade
 - Die Ebene
 - Normalformen
 - Schnittprobleme
 - Abstandsprobleme
 - Hesse'sche Normalform
 - Kreis und Kugel

7 Lineare Abbildungen

- Einführung
 - Definition
 - Abbildungsmatrix
- Kern und Bild
 - Vektorräume Kern und Bild
 - Dimensionsformel
- Verkettung von linearen Abbildungen
 - Verkettung
 - Umkehrabbildung
- Geometrische Abbildungen
 - Einführung
 - Wichtige geometrische Abbildungen

Stichwortverzeichnis

- Adjunkte, 127
- Basis, 167
 - Standardbasis, 170
 - kanonische Basis, 170
- Determinante, 86
 - Definition, 110
 - dreireihige, 100
 - einer Dreiecksmatrix, 113
 - elementare Produkte, 109
 - elementare Zeilenumformungen, 115
 - Gesetze, 118
 - Laplace'scher Entwicklungssatz, 123
 - Regel von Sarrus, 101
 - und lineare Gleichungssysteme, 88
 - und Permutationen, 105
 - zweireihige, 92
- Ebene, 290
 - Koordinatengleichung, 295
 - Parametergleichung, 290
- Euklid'schen Vektorraum, 184
 - Gram-Schmidt-Verfahren, 211
 - Orthogonale Zerlegung, 203
 - Orthonormale Basen, 199
 - Orthonormalisierung, 205
- frei wählbare Variable, 6
- geometrische Abbildungen, 390
 - Identität, 393
 - Nullabbildung, 392
 - Projektion, 395
 - Rotation, 397
 - Scherrung, 400
 - Spiegelung, 393
 - Streckung, 399
 - Stauchung, 399
- Gerade, 278
- Gleichung, 4
 - Absolutteil, 4
 - Dimension Lösungsraum, 6
 - Koeffizienten, 4
 - Lösungsmenge, 5
 - linear, 4
 - Unbekannte, 4
- Inversion, 75
 - Berechnung, 79
 - Definition, 75
 - Gesetze, 85

Inversion, 75

Verfahren nach Gauss-Jordan, 81
mittels Adjunkte, 130

Kreis und Kugel, 339**lineare Abbildungen, 354**

Abbildungsmatrix, 363
Automorphismus, 377
Bild, 368
Definition, 354
Dimensionsformel, 373
Endomorphismus, 376
Epimorphismus, 375
Homomorphismus, 354
Isomorphismus, 376
Kern, 368
Monomorphismus, 375
Umkehrabbildung, 381
Verkettung, 378

Lineare Regression, 212**lineares Gleichungssystem, 11**

Absoltglieder, 12
Äquivalenzumformungen, 15
Cramer'sche Regel, 93
dazugehörige Normalensystem, 238
eindeutiger Lösungspunkt, 23
elementare Zeilenumformungen, 15
erweiterte Koeffizientenmatrix, 12
Gauss'scher Algorithmus, 33

lineares Gleichungssystem, 11

Gauss-Jordan-Verfahren, 46
homogen, 12
inhomogen, 12
Koeffizientenmatrix, 12
leere Lösungsmenge, 23
Lösungsmenge, 14
Matrzenschreibweise, 11
Näherungslösung, 238
Rang, 23
reguläres System, 23
Schnittgeraden, 29
singuläres System, 23
unendlich viele Lösungspunkte, 23
widersprüchliche Gleichung, 31

Matrix, 7

Definition, 7
Diagonalform, 46
Diagonalmatrizen, 62
Dreiecksmatrix, 63
Einheitsmatrix, 64
elementare Zeilenumformungen, 69
invertierbar, 75
Koeffizienten, 7
Kofaktor, 122
linear unabhängige Zeilen, 20
Minor, 120
nicht verschwindende Zeilen, 22
Produkt mit Spaltenvektor, 9

Matrix, 7

- Quadratische Matrizen, 61
- Rang, 20
- reguläre, 74
- schiefsymmetrische, 68
- singuläre, 74
- Spalten, 8
- symmetrische, 68
- Zeilen, 8
- Zeilenstufenform, 18

Matrizenräume, 226

- Dimensionssatz, 232
- direkte Summe, 233
- Komplement, 233
- Nullraum, 226
- orthogonales Komplement, 234
- Spaltenraum, 226
- Zeilenraum, 226

Matrizenrechnung, 50

- Addition, 53
- Falk'sches Schema, 59
- Gesetze Addition, 55
- Gesetze Multiplikation, 60
- Gleichheit von Matrizen, 52
- Linearkombinationen, 56
- Matrizenmultiplikation, 57
- Multiplikation mit Skalar, 54
- Subtraktion, 53
- transponierte Matrix, 65

Normalformen, 298

- Hesse'sche Normalform, 321
- Normalensystem, 238
- orthogonale Vektoren, 195
- Permutation, 105
- gerade, 108
- Matrixschreibweise, 106
- Transposition, 107
- Tupelschreibweise, 106
- ungerade, 108

Projektion, 201**Skalarprodukt, 183**

- Definition, 183
- Komponentendarstellung, 187
- Norm, 190
- Standardskalarprodukt, 187
- Zwischenwinkel, 190

Vektoren, 134

- Addition, 135
- Betrag, 182
- Kehrvektor, 136
- Linearkombinationen, 137
- Lineare Unabhängigkeit, 139
- Multiplikation mit Skalar, 136
- rechtwinklige, 182
- Skalarprodukt, 181

☒ Vektoren, 134

und Translationen, 134
Zwischenwinkel, 182

☒ Vektorgeometrie, 250

Abstandsprobleme, 310
Addition, 252
Betrag, 257
Multiplikation mit Skalar, 252
Ortsvektor, 254
Schnittpunkte, 304
Skalarprodukt, 256
Spatprodukt, 267
Vektorprodukt, 262
Vektorraum, 252
Verbindungsvektor, 255
Winkel, 259

☒ Vektorraum, 132

Basis, 167
Definition, 145
Dimension, 177
der Polynomfunktionen, 149
der reellen Matrizen, 148
der reellen n -Tupel, 147
endlich dimensional, 177
Lineare Hülle, 157
Lineare Unabhängigkeit, 162
unendlich dimensional, 177
Untervektorraum, 150

Literaturverzeichnis



H. Anton.

Lineare Algebra: Einführung, Grundlagen, Übungen .
Spektrum Akademischer Verlag, 1998.



L. Papula.

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2.
Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium .
Vieweg Verlag, 2001



S. Lipschutz.

Lineare Algebra: Theorie und Anwendungen.
McGraw-Hill Publ.Comp, 1982.