

Kapitel 5

Lineare Algebra

5.1 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME UND MATRIZEN

Man begegnet Systemen von linearen Gleichungen in sehr vielen verschiedenen Zusammenhängen, etwa bei Mischungsverhältnissen von Substanzen oder bei der Bestimmung von Preisen mit zusätzlichen Nebenbedingungen, aber auch in der analytischen Geometrie. Hier drei Beispiele dafür:

Mischungsverhältnisse: Nehmen wir an, es stehen zwei Substanzen (zum Beispiel Flüssigkeiten) mit spezifischen Gewicht $a = 2$ kg/l bzw. $b = \frac{1}{2}$ kg/l zur Verfügung. Gesucht sei eine Mischung aus beiden Substanzen von vorgegebenem Gesamtvolumen $V = 100$ l und Gesamtgewicht $G = 110$ kg.

Bezeichnet man den Volumenanteil der ersten Substanz mit x und den der zweiten Substanz mit y , so führt diese Frage auf das folgende lineare Gleichungssystem in x und y :

$$\begin{aligned}x + y &= 100 \\ 2x + \frac{1}{2}y &= 110\end{aligned}$$

Dies Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, nämlich $x = 40$ und $y = 60$. Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt also $x : y = 4 : 6$.

Analytische Geometrie: Betrachten wir die von den Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ im 3-Raum erzeugte Ebene durch den Nullpunkt. Wir fragen nun, ob die Punkte $P(1/2/-1)$ und $Q(1/2/3)$ auf dieser Ebene liegen.

Bekanntermassen liegt ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten $(a/b/c)$ genau dann auf der fraglichen Ebene, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für geeignete Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Frage, ob der Punkt P auf der Ebene liegt, führt also auf das folgende lineare Gleichungssystem in den Unbekannten λ und μ :

$$\begin{aligned}1 &= \lambda - \mu \\ 2 &= \lambda + 2\mu \\ -1 &= -\lambda + \mu\end{aligned}$$

Dies System hat eine Lösung, nämlich $\mu = \frac{1}{3}$ und $\lambda = \frac{4}{3}$, der Punkt P liegt also auf der Ebene. Aber für den Punkt Q gilt das nicht. Denn das entsprechende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda - \mu \\ 2 &= \lambda + 2\mu \\ 3 &= -\lambda + \mu \end{aligned}$$

hat keine Lösung, weil die erste und dritte Gleichung nicht gleichzeitig erfüllt sein können (sonst wäre $1 = -3$).

Interpolation: Wir suchen jetzt ein quadratisches Polynom, so dass der zugehörige Graph durch drei vorgegebene Punkte verläuft. Genauer suchen wir ein Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $p(-2) = 4$, $p(-1) = 5$ und $p(1) = 4$. Setzen wir dies in den Ansatz für das Polynom ein, erhalten wir folgende Bedingungen an die noch unbekannten Koeffizienten a, b, c des Polynoms:

$$\begin{aligned} p(-2) &= 4a - 2b + c = 4 \\ p(-1) &= a - b + c = 5 \\ p(1) &= a + b + c = 4 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in a, b, c . Um die Lösungen zu finden, eliminieren wir zunächst die Unbekannte b . Dazu addieren wir einerseits das Doppelte der dritten zur ersten Zeile dazu und andererseits bilden wir die Summe aus der zweiten und der dritten Zeile und erhalten folgendes System in a, c :

$$\begin{aligned} 6a + 3c &= 12 \\ 2a + 2c &= 9 \end{aligned}$$

Ziehen wir nun von der ersten Zeile das Dreifache der zweiten Zeile ab, so fällt auch die Unbekannte a heraus und es folgt $-3c = -15$, das heisst $c = 5$. Setzt man nun in die früheren Gleichungen ein, erhält man die eindeutige Lösung, nämlich $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 5$. Das gesuchte Polynom lautet also:

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 5.$$

Diese drei Beispiele mögen zunächst genügen. Man schreibt Systeme von m linearen Gleichungen in n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n in der Regel in der folgenden Form auf:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dabei sind $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ oder in \mathbb{C} für $(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$ die Koeffizienten bzw. die Zeilenresultate. Der erste Index i von a_{ij} gibt die Zeile, und der zweite Index j die Variable an, bei der der Koeffizient steht. Aus den Koeffizienten eines

solchen Gleichungssystems können wir ein rechteckiges Zahlenschema bilden, eine sogenannte *Matrix*, die aus m Zeilen und n Spalten besteht:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man nennt A eine Matrix vom Typ $m \times n$. Die Zahlen a_{ij} sind die *Einträge* der Matrix. Dabei gibt der erste Index die Zeile und der zweite Index die Spalte an.

Die Variablen x_1, \dots, x_n werden zu einem Spaltenvektor der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ zusammengefasst. Das Einsetzen von Werten für die Variablen in die oben angegebenen Gleichungen wird als *Multiplikation* der Matrix A mit einem Spaltenvektor gedeutet:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Hier ein konkretes Beispiel. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dann lautet das Produkt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Oder ein Beispiel mit komplexen Zahlen:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + i(1+i) \\ 2i + (-1)(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also folgende Kurzschreibweise für das ursprüngliche lineare Gleichungssystem:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems können wir als Teilmenge der Menge aller Spaltenvektoren mit n reellen (bzw. komplexen) Koeffizienten auffassen, die mit

\mathbb{R}^n (bzw. \mathbb{C}^n) bezeichnet wird.

$$\mathbb{L} = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls nur reelle Lösungen gesucht werden, und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn auch komplexe Koeffizienten zugelassen sind.

Die Lösungsmenge kann man mithilfe des *Eliminationsverfahrens* (auch bekannt unter dem Namen Gauss-Verfahren) bestimmen, das jetzt erläutert werden soll. Die Idee besteht darin, das System schrittweise durch Manipulation der Zeilen, die der Elimination einer Variablen aus möglichst vielen Gleichungen entsprechen, zu vereinfachen, bis die Lösungen direkt ablesbar werden. Die einzelnen Schritte sind *elementare Zeilenumformungen* von folgender Art:

Typ (i): Zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuzugaddieren.

Typ (ii): Zwei Zeilen miteinander vertauschen.

Typ (iii): Eine Zeile mit einer festen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren.

Bei jeder dieser elementaren Zeilenumformungen bleibt die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems unverändert!

5.1.1 BEISPIEL Wir betrachten das folgende System aus 3 Gleichungen in 4 Unbekannten über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccccl} 2x_1 + & & 4x_3 + & 2x_4 & = & 10 \\ x_1 + & x_2 + & 5x_3 + & 2x_4 & = & 7 \\ x_1 + & 2x_2 + & 8x_3 + & 4x_4 & = & 12 \end{array}.$$

Hier lauten also Koeffizientenmatrix bzw. Ergebnisvektor:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Jetzt notieren wir die *erweiterte Matrix*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right).$$

Zunächst soll erreicht werden, dass in der ersten Spalte unterhalb der ersten Zeile Nullen stehen. Für das entsprechende Gleichungssystem bedeutet das, die Variable x_1 aus den Zeilen 2 und 3 zu eliminieren. Wir teilen deshalb die erste Zeile durch 2 und ziehen dann die erste Zeile von der zweiten und der dritten ab. Wir erhalten:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 7 \end{array} \right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$
$$\begin{array}{rclcl} x_1 + & 6x_2 + & x_3 + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_3 + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 1 \end{array}.$$

Hier zu guter Letzt noch ein Beispiel über den komplexen Zahlen:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - & 5ix_2 - & 8x_3 = -2i \\ 2ix_1 + & 11x_2 + & 4ix_3 = 14 \\ ix_1 + & 5x_2 + & ix_3 = 6 \end{array}.$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5i & -8 \\ 2i & 11 & 4i \\ i & 5 & i \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2i \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5i & -8 & -2i \\ 2i & 11 & 4i & 14 \\ i & 5 & i & 6 \end{array} \right).$$
$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 2 & -5i & -8 & -2i \\ 2i & 11 & 4i & 14 \end{array} \right).$$
$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 0 & 5i & -10 & 10i \\ 0 & 1 & 2i & 2 \end{array} \right).$$

Dann vertauschen wir die zweite und die dritte Zeile und ziehen von der neuen dritten Zeile das $(5i)$ -fache der neuen zweiten Zeile ab. Das liefert:

$$(A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 0 & 1 & 2i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Das entsprechende Gleichungssystem besteht also eigentlich nur aus zwei unabhängigen Bedingungen und lautet:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 - 5ix_2 + x_3 & = & -6i \\ x_2 + 2ix_3 & = & 2 \end{array}.$$

Wir können $x_3 = z \in \mathbb{C}$ beliebig wählen, dann ergibt sich aus den beiden Gleichungen durch Einsetzen:

$$x_2 = 2 - 2iz \quad \text{und} \quad x_1 = -6i + 5i(2 - 2iz) - z = 4i + 9z.$$

Die Lösungsmenge lautet also hier

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4i + 9z \\ 2 - 2iz \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\} = \begin{pmatrix} 4i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Hier gibt es einen freien komplexen Parameter.

Die entscheidenden Eigenschaften der vereinfachten erweiterten Matrix sind hier zusammengefasst:

5.1.4 DEFINITION Eine Matrix M hat *Zeilenstufenform*, wenn es eine Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass folgendes gilt:

- Die Zeilen unterhalb der r -ten Zeile sind Nullzeilen, das heisst ihre sämtlichen Einträge sind Nullen.
- Die ersten r Zeilen sind *keine* Nullzeilen, jeweils der erste von Null verschiedene Eintrag (wenn man von links nach rechts liest) ist eine Eins.
- Markiert man die führenden Einsen in den ersten r Zeilen, erhält man eine nach rechts absteigende Treppe. Oder anders gesagt: Steht die führende Eins in Zeile i jeweils in der Spalte s_i , so gilt: $s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_r$.

In dieser Situation wird die Zahl r als *Rang* der Matrix M bezeichnet.

5.1.5 SATZ Jede beliebige Matrix M lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.

Beweis. Dazu sucht man die erste Spalte von M mit einem Eintrag $a \neq 0$, transportiert diesen Eintrag durch Zeilenvertauschung in die erste Zeile und dividiert dann die erste Zeile durch a . So erhält man an dieser Stelle die erste führende Eins. Jetzt zieht man geeignete Vielfache der ersten Zeile von allen anderen Zeilen ab, um die anderen Einträge derselben Spalte zu Null zu machen. Das Resultat hat folgende Form

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & & & & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \dots & & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & & & 0 & 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ M' \end{array} \right).$$

Jetzt bearbeitet man M' entsprechend weiter, bis die Zeilenstufenform erreicht ist. q.e.d.

Kommen wir jetzt wieder zurück zu linearen Gleichungssystemen. Sei A eine $m \times n$ -Matrix und b ein Spaltenvektor mit m Einträgen, jeweils aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei weiter $M = (A | b)$ die erweiterte Matrix, gebildet aus M durch Anfügung der Spalte b . Um das Gleichungssystem zu lösen, bringen wir zunächst M durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform $M' = (A' | b')$. Wie schon bemerkt, hat das neue System dieselben Lösungen wie das alte, es gilt: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = b\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A' \cdot x = b'\}$. Aber man kann, wie in den Beispielen gezeigt, die Lösungsmenge des in Zeilenstufenform geschriebenen Systems direkt ablesen. Dabei stellen wir folgendes fest:

5.1.6 BEMERKUNG Sei A eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen aus \mathbb{K} in Zeilenstufenform von Rang r , also mit genau r Nichtnullzeilen. Dann ist $r \leq n$, denn die führenden Einsen in den Nichtnullzeilen müssen in verschiedenen Spalten stehen. Sei weiter $b \in \mathbb{K}^m$. Für das Gleichungssystem $Ax = b$ gilt:

- (1) Das System hat keine Lösung in \mathbb{K}^n , falls $r < m$ und $b_i \neq 0$ für ein $i > r$.
- (2) Sind die Bedingungen aus (1) nicht erfüllt, so gibt es zwei Möglichkeiten.
 - (i) Ist $r = n$, so hat das System eine eindeutige Lösung.
 - (ii) Ist $r < n$, so gibt es unendlich viele Lösungen (genauer enthält die allgemeine Lösung $n - r$ freie Parameter).

Ist b der Nullvektor, so kann der erste Fall nie eintreten.

Es ist jetzt noch nicht geklärt, ob die Zahl $n - r$ der freien Parameter der Lösungsmenge im Fall 2(ii) durch das ursprüngliche lineare Gleichungssystem bereits eindeutig festgelegt ist oder nicht. Es wird sich aber im nächsten Kapitel herausstellen, dass diese Anzahl eindeutig ist und die Dimension des Lösungsraums angibt.

Schauen wir uns den Fall $n = 3$ und $m \leq 3$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ noch einmal genauer an. In diesem Fall ist die Lösungsmenge \mathbb{L} eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes, die wir geometrisch beschreiben wollen. Nehmen wir an, A sei eine Matrix von Rang r .

1.Fall: $m = 1$. Hier haben wir nur eine Gleichung, nämlich $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1$. Ist $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, so ist der Rang $r = 0$ und \mathbb{L} ist leer, falls $b_1 \neq 0$, bzw. $\mathbb{L} = \mathbb{R}^3$, falls $b_1 = 0$. Sind nicht alle a_j gleichzeitig Null, so handelt es sich bei der Gleichung um eine Ebenengleichung. Die Lösungsmenge ist also eine Ebene und hat daher zwei freie Parameter. Falls $b_1 = 0$, besteht \mathbb{L} aus allen Vektoren x , die auf dem Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

2.Fall: $m = 2$. Hier sind zwei Gleichungen simultan zu erfüllen. Enthält A keine Nullzeile, so ist \mathbb{L} die Schnittmenge von zwei Ebenen E_1 und E_2 . Es gibt daher die folgenden Möglichkeiten:

Lage der Ebenen	$E_1 \not\parallel E_2$	$E_1 = E_2$	$E_1 \neq E_2$ und $E_1 \parallel E_2$
r	2	1	1
\mathbb{L}	Gerade	Ebene	leer

3.Fall: $m = 3$. Falls A keine Nullzeile enthält, ist die Lösungsmenge der Durchschnitt von 3 Ebenen. Hier gibt es die folgenden Möglichkeiten:

r	3	2	1
\mathbb{L}	Punkt	Gerade oder leer	Ebene oder leer