

Поддерживающие временные ряды в MSSA (продолжение)

Ткаченко Егор Андреевич, группа 19.Б04

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Кафедра статистического моделирования
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.

21 декабря 2021г.

Временной ряд

Вещественный временной ряд длины N_p :

$$F_p = (f_0^{(p)}, \dots, f_{N_p-1}^{(p)}), f_j^{(p)} \in \mathbb{R}.$$

Многомерный временной ряд

Многомерный временной ряд F — набор s временных рядов F_p длин N_p :

$$\{F_p, p = 1, \dots, s\}$$

Траекторная матрица

L -Траекторная матрица ряда F_p :

$$\mathcal{T}_{SSA}(F_p) = \begin{pmatrix} f_0^{(p)} & f_1^{(p)} & \cdots & f_{K-1}^{(p)} \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & \cdots & f_K^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1}^{(p)} & f_L^{(p)} & \cdots & f_{N_p-1}^{(p)} \end{pmatrix};$$

для многомерного ряда F : $\mathcal{T}_{MSSA}(F) = [\mathcal{T}_{SSA}(F_1) : \dots : \mathcal{T}_{SSA}(F_s)]$.

Из траекторной матрицы можно восстановить ряд.

Ранг

Ранг ряда F_p (многомерного ряда F) — это ранг его траекторной матрицы: $r_p = \text{rank } \mathcal{T}_{SSA}(F_p)$ ($r_{MSSA} = \text{rank } \mathcal{T}_{MSSA}(F)$)

Применение SSA и MSSA

Вход: Ряд F_1 для SSA или многомерный ряд F для MSSA;
длина окна $L \leq N_1$ для SSA или $L \leq N_p$ для MSSA;
ранг аппроксимирующего ряда r .

Алгоритм

- 1 Получение L -траекторной матрицы \mathbf{X} временного ряда:
 $\mathbf{X} = \mathcal{T}_{SSA}(F_1)$ для SSA или $\mathbf{X} = \mathcal{T}_{MSSA}(F)$ для MSSA.
- 2 Методом SVD матрица \mathbf{X} раскладывается на сумму d матриц \mathbf{X}_i ранга 1, где: $d = \text{rank } \mathbf{X}$.
- 3 Первые r матриц \mathbf{X}_i складываются и восстанавливаются в ряд (SSA) или многомерный ряд (MSSA)

Выход: Аппроксимирующий ряд конечного ранга r .

Линейная рекуррентная формула; управляемый ЛРФ ряд

Ряд $F_p = (f_i)_{i=0}^{N_p-1}$ — управляемый ЛРФ, если существуют такие a_1, \dots, a_d , что:

$$f_{i+d} = \sum_{k=1}^d a_k f_{i+d-k}, \quad 0 \leq i \leq N_p - 1 - d, \quad a_d \neq 0, \quad t < N_p - 1.$$

Замечание

Ряд конечного ранга является управляемым ЛРФ.

Прогноз ряда

Прогноз вещественного временного ряда F_p :

$$\tilde{f}_{N_p} = \sum_{k=1}^{L-1} a_k f_{N_p-k}.$$

Пусть имеется временной ряд $F_1 = S_1 + R_1$, где

- Сигнал S_1 — ряд управляемый ЛРФ.
- Шум R_1 — ряд без структуры.

Задача: спрогнозировать сигнал S_1 .

Пусть помимо ряда F_1 имеется временной ряд F_2 .

Идея: использование ряда F_2 может улучшить прогноз сигнала S_1 .

- Второй ряд дает алгоритму больше данных, которые могут улучшить ЛРФ.
- Второй ряд может сделать прогноз хуже, если его структура отличается от первого.

Гипотеза

Если сигналы рядов согласованны и шум второго небольшой, то ряд F_2 — поддерживающий.

Вопрос

На сколько можно исказить сигнал второго ряда, прежде чем он перестанет быть поддерживающим?

Шаблоны рядов в экспериментах:

- ❶ $s_j^{(i)} = \exp(j\lambda_i)$
- ❷ $s_j^{(i)} = \cos(\frac{2\pi j}{12}) \exp(j\lambda_i)$
- ❸ $s_j^{(i)} = \cos(\frac{2\pi j}{T_i})$
- ❹ $s_j^{(i)} = \cos(\frac{2\pi j}{12}) + \exp(j\lambda_i)$

Шумы R_1, R_2 — независимые белые гауссовские шумы со средними, равными 0, и дисперсиями σ_1^2, σ_2^2 , соответственно.

- Как по структуре рядов понять согласованность?
- Что если ранги рядов разные?