Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

Ткаченко Егор Андреевич

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Н. К. Кривулин
Рецензент: Старший преподаватель, Высшая школа интеллектуальных систем и суперкомпьютерных технологий СПбПУ Петра Великого В. А. Пархоменко

7 июня 2023 г.

Введение

- Рассматриваются задачи в которых на основе парных сравнений альтернатив требуется найти их абсолютный приоритет.
- Для решения существует два подхода — эвристические алгоритмы и аналитические методы.
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в log-чебышевской метрике.
- Указанный метод позволяет найти аналитическое решение в терминах max-алгебры.
- Цели работы — решение задач принятия решений и разработка алгоритмов, способа хранения данных и программных средств, предназначенных для решения задачи принятия решений.

Многокритериальная задача

- Имеются n альтернатив $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ принятия решения.
- Имеются m критериев и для каждого дана матрица $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ парных сравнений альтернатив.
- $a_{ij}^{(k)} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива $\mathcal{A}_i$ превосходит альтернативу $\mathcal{A}_j$ в соответствии с критерием $k = 1, \dots, m$.
- Дана матрица попарных сравнений критериев $\boldsymbol{C} = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее l.
- Требуется на основе матриц $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_m$ определить вектор $\boldsymbol{x}$ абсолютных рейтингов альтернатив.

Max-алгебра

Множество $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.

- Сложение обозначается символом $\oplus$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$.
- Сложение обладает свойством идемпотентности: $x \oplus x = x$.
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

Матрицы в max-алгебре

- Векторные и матричные операции, в том числе операции умножения на скаляр и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию $\oplus$.
- След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n вычисляется по формуле
$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$
- Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ определяется выражением
$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$
- При $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде
$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i.$$

1. На основе матрицы $\boldsymbol{C}$ находится вектор весов критериев $\boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \qquad \lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{C}^{i}).$$

2. Если вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший $\boldsymbol{w}_1$ и наихудший $\boldsymbol{w}_2$ дифференцирующие векторы весов.
3. С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)}\boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)}\boldsymbol{A}_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы $\boldsymbol{B}$, вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для матрицы $\boldsymbol{D}$ — наихудший вектор.

Разработка структуры для хранения чисел

- Требуется структура основанная на целочисленных типах с точными операциями, например, для проверки на линейную независимость векторов.
- Введен класс объектов, характеризующийся тройками целых чисел.

Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a,b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Введенный класс объектов с операциями сложения и умножения определяет алгебраическую систему, замкнутую относительно сложения, умножения, извлечения корня.

Структуры для хранения чисел

Структура A

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a,b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{n}_1 = n_1/\gcd(n_1,n_2), \qquad \tilde{n}_2 = n_2/\gcd(n_1,n_2).$$

- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}}{b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}}\right)^{1/\tilde{n}_1 \cdot \gcd(n_1,n_2) \cdot \tilde{n}_2}.$$

  После умножения $a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}$ и $b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}$ сокращаются на их НОД.
- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1} < a_2^{\tilde{n}_1} b_1^{\tilde{n}_2}.$$

Структура B

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad p_i \text{ — простые}, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Структура реализуется вектором пар натуральных и рациональных чисел с отдельным состоянием для 0.

- Умножение реализуется слиянием векторов множителей.

$$2^3 3^{-2} \times 3^2 5^{-1} = 2^3 3^{-2+2} 5^{-1} = 2^3 5^{-1}.$$

- Пусть l — наименьший общий множитель знаменателей степеней a_i, тогда точное сравнение:

$$a < b \Leftrightarrow a/b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} < 1 \Leftrightarrow p_1^{la_1} p_2^{la_2} \dots p_k^{la_k} < 1 \Leftrightarrow$$

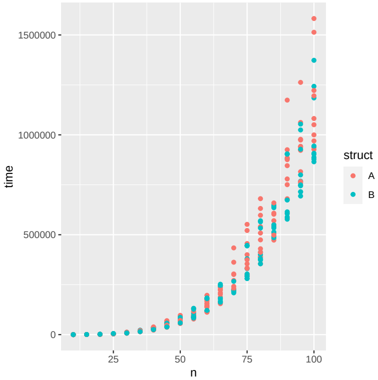
$$\Leftrightarrow \prod_{i \in \{i | a_i > 0\}} p_i^{la_i} < \prod_{j \in \{j | a_j < 0\}} p_j^{-la_j}.$$

Если вещественное приближение a/b достаточно отличается от единицы, то точное сравнение не производится.

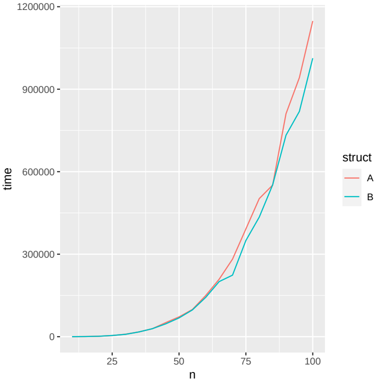
Сравнение структур

- Тест — вычисление $(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*$, где λ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ — случайно сгенерированная матрица парных сравнений $n \times n$.
- Асимптотика такого теста — $O(n^4(t_\times + t_\oplus))$, где $t_\times, t_\oplus$ — сложность (время) умножения и сложения чисел, соответственно.
- Для каждого значения n проведено по 10 тестов и найдено среднее время вычисления в миллисекундах.

Результат сравнения

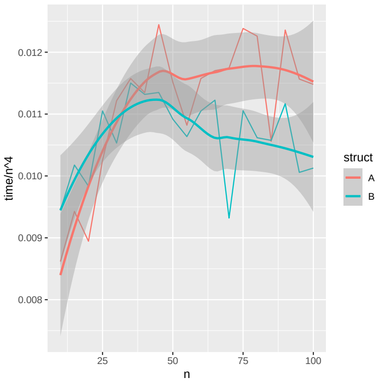


(a) Все тесты

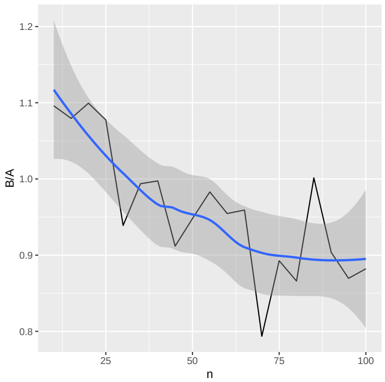


(b) Среднее тестов

Результат сравнения



(a) Масштабирование по размеру матриц



(b) Отношение времени вычисления B и A

- Структура A быстрее при маленьких n, начиная с $n = 30$, структура B быстрее.
- При размерах матрицы $n = 100$ структура B лучше на 10%.

Пример решения практической задачи

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 1/3 & 1 & 9 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1/7 & 1/9 & 1 & 1/7 & 1/5 & 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 7 & 1 & 1/4 & 7 & 1/3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 2 & 1/7 & 1/5 & 1 & 1/6 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1/3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1/3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1/7 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1/6 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1/5 \\ 9 & 1 & 4 \\ 5 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат работы программы

$$\boldsymbol{x}_{best} = \begin{pmatrix} 2^2 3^{-2} \\ 2^{9/5} 3^{-19/10} 5^{1/5} 7^{-1/5} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1048576/3486784401)^{1/10} \\ (6553600/56950811883)^{1/10} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.44444 \\ 0.40374 \\ 1.00000 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_{worst} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2^{-1/10} 3^{4/5} 5^{-2/5} 7^{-1/10} & 2^{-1/10} 3^{4/5} 5^{-2/5} 7^{-1/10} \\ 2^{-1/10} 3^{4/5} 5^{-2/5} 7^{-1/10} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (6561/8750)^{1/10} & (6561/8750)^{1/10} \\ (6561/8750)^{1/10} & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.00000 & 1.00000 \\ 0.97162 & 0.97162 \\ 0.97162 & 1.00000 \end{pmatrix}.$$

Реализация

На языке C++ были реализованы:

- Описанные структуры
- Расширение библиотеки Eigen для работы с матрицами
- Элементы тропической математики
- Тестирование структур
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в LaTeX для матриц и структур

Заключение

- Для решения многокритериальных задач парных сравнений разработаны модели представления данных, алгоритмы точных вычислений, их программная реализация и проведено сравнение.
- Полученные результаты могут оказаться полезными для решения других задач, где требуется обеспечить точные вычисления, например для задач криптографии.
- Исходный код находится в открытом доступе.
DOI: 10.5281/zenodo.7950762