Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра Статистического Моделирования

«Научно-исследовательская работа» (семестр 8)

Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики.

Выполнил:
Ткаченко Егор Андреевич
группа 19.Б04-мм

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Кривулин Николай Кимович

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

Введение

Многокритериальные задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений составляют важный класс задач принятия решений, которые встречаются во многих областях научной и практической деятельности. Пусть имеется набор альтернатив принятия некоторого решения. Известны количественные результаты парных сравнений, при которых любые две альтернативы сравниваются между собой в соответствии с несколькими критериями. Результаты сравнений могут быть получены, например, путем опроса респондентов или с помощью других процедур сравнения. Требуется на основе относительных результатов парных сравнений определить абсолютный рейтинг каждой альтернативы для принятия решения. Такие задачи встречаются при принятии управленческих решений в менеджменте, изучении предпочтений покупателей в маркетинге, анализе социологических опросов в социологии, прогнозе результатов выборов в политологии и в других областях [1].

Одним из подходов к решению является метод аппроксимации матриц парных сравнений в log-чебышевской метрике [2, 3, 4, 5]. Этот подход позволяет получить аналитическое решение задачи в терминах max-алгебры – одной из алгебраических систем с идемпотентными операциями, которые изучает тропическая математика [6, 7, 8].

Численное решение задач оптимизации с помощью методов тропической математики, включая решение задачи принятия решений, требует применения новых программных инструментов, предназначенных для вычислений с идемпотентными операциями. Целью настоящей работы является разработка эффективных программных средств символьных вычислений с использованием max-алгебры.

В этом семестре была разработана и реализована вторая структура, проведены сравнения с прошлой.

Глава 1

Многокритериальная задача принятия решений

Рассмотрим задачу оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений, в которой n альтернатив $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ сравниваются попарно по m критериям. Пусть $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ обозначает матрицу порядка n, где элемент $a_{ij}^{(k)} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива $\mathcal{A}_i$ превосходит альтернативу $\mathcal{A}_j$ в соответствии с критерием $k = 1, \ldots, m$. Критерии также сравниваются попарно, а результаты их сравнений образуют матрицу $\boldsymbol{C} = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее для принятия решения, чем l. Необходимо на основе матриц парных сравнений $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ найти индивидуальный рейтинг каждой альтернативы [1].

Ниже будет рассмотрено решение задачи на основе log-чебышевской аппроксимации с применением методов тропической алгебры.

Глава 2

Элементы тропической математики

В этой главе приводятся основные обозначения и понятия тропической max-алгебры [6, 7, 8], которые потребуются в дальнейшем.

Max-алгеброй называется множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$ с операциями сложения и умножения. Сложение обозначается знаком $\oplus$, определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и обладает свойством идемпотентности: $x \oplus x = x$ для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$. Умножение определено и обозначается как обычно.

Векторные и матричные операции выполняются по обычным правилам с заменой арифметического сложения на операцию $\oplus$. Нулевой вектор обозначается символом $\mathbf{0}$. Для ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_j)$ определен мультипликативно сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_j^-)$, где $x_j^- = x_j^{-1}$, если $x_j \neq 0$, и $x_j^- = 0$ в противном случае. Для ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ определена мультипликативно сопряженная матрица $\boldsymbol{A}^- = (a_{ij}^-)$, где $a_{ij}^- = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq 0$, иначе $a_{ij}^- = 0$.

Вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, если существует набор чисел $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ такой, что $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$. Коллинеарность двух векторов имеет обычный смысл: векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются коллинеарными, если $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$ для некоторого $x \in \mathbb{R}_+$.

Множество всех линейных комбинаций $x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$ образует тропическое линейное пространство. Любой вектор $\boldsymbol{y}$ пространства выражается с помощью матрицы $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, составленной из этих векторов как столбцов, и вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ в виде $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Рассмотрим квадратные матрицы с элементами из max-алгебры. Единичная матрица обозначается символом $\boldsymbol{I}$ и имеет обычный вид. Целая неотрицательная степень квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ определена для всех натуральных p так, что $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1}$.

След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

Спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ называется число, которое вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$

При условии, что $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини (звезда Клини), который сопоставляет матрице $\boldsymbol{A}$ матрицу

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i.$$

Глава 3

Решение многокритериальной задачи парных сравнений

Рассмотрим многокритериальную задачу парных сравнений с матрицами парных сравнений альтернатив $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_m$ и матрицей сравнений критериев $\boldsymbol{C}$. Приведем алгоритм решения, который использует аппроксимацию матриц парных сравнений в log-чебышевской метрике и подробнее описанный в работах [2, 3, 4].

1. Для матрицы $\boldsymbol{C}$ находится спектральный радиус λ, составляется матрица $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$, а затем в параметрической форме определяется вектор весов критериев
$$\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \qquad \lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{C}^i).$$

2. Если вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший и наихудший дифференцирующие векторы весов.

   2.1. Наилучший дифференцирующий вектор весов имеет вид
$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{lk}^{-}\boldsymbol{P})\boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{0},$$
   где матрица $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_j)$ получена из $(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$ удалением линейно зависимых столбцов, матрица $\boldsymbol{P}_{lk}$ получена из $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ обнулением всех элементов, кроме p_{lk},
$$k = \arg\max_j \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{-}\boldsymbol{1}, \qquad l = \arg\max_i p_{ik}^{-1}.$$

   2.2. Наихудший дифференцирующий вектор весов имеет вид
$$\boldsymbol{w}_2 = (\Delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\boldsymbol{v}_2, \qquad \boldsymbol{v}_2 > \boldsymbol{0}, \qquad \Delta = \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\boldsymbol{1}.$$

3. С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:
$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)}\boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)}\boldsymbol{A}_i.$$

4. На основе матрицы $\boldsymbol{B}$ вычисляется наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив.

4.1. Для матрицы $\boldsymbol{B}$ находится спектральный радиус μ, составляется матрица $\mu^{-1}\boldsymbol{B}$, а затем определяется вектор рейтингов

$$\boldsymbol{x}_1 = (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^*\boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{u}_1 > \boldsymbol{0}, \qquad \mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{B}^i).$$

4.2. Если вектор рейтингов $\boldsymbol{x}_1$ не единственный, то строится наилучший дифференцирующий вектор

$$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{Q}_{lk}^{-}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{u}_1', \qquad \boldsymbol{u}_1' > \boldsymbol{0},$$

где матрица $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_j)$ получена из $(\mu^{-1}\boldsymbol{B})^*$ удалением линейно зависимых столбцов, матрица $\boldsymbol{Q}_{lk}$ получена из $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ обнулением всех элементов, кроме q_{lk},

$$k = \arg\max_j \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_j\boldsymbol{q}_j^{-}\boldsymbol{1}, \qquad l = \arg\max_i q_{ik}^{-1}.$$

5. На основе матрицы $\boldsymbol{D}$ вычисляется наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив.

5.1. Для матрицы $\boldsymbol{D}$ находится спектральный радиус ν, составляется матрица $\nu^{-1}\boldsymbol{D}$, а затем определяется вектор рейтингов

$$\boldsymbol{x}_2 = (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{u}_2 > \boldsymbol{0}, \qquad \nu = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{D}^i).$$

5.2. Если вектор рейтингов $\boldsymbol{x}_2$ не единственный, то строится наихудший дифференцирующий вектор

$$\boldsymbol{x}_2' = (\delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\boldsymbol{u}_2', \qquad \boldsymbol{u}_2' > \boldsymbol{0}, \qquad \delta = \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\boldsymbol{1}.$$

На всех этапах алгоритма может быть получен не единственный вектор (весов, рейтингов), а набор векторов, которые будут определять некоторое пространство решений. В этом случае, важной оказывается задача сокращения числа векторов в наборе за счет удаления векторов, линейно зависимых от остальных.

Глава 4

Разработка программных средств

4.1. Разработка структур для хранения чисел

При проверке линейной зависимости векторов использование типов с плавающей точкой может привести к неточным результатам, поэтому была разработана структура для хранения чисел основанная на целочисленных типах, для которых операции являются точными.

4.1.1. Структура A

В задаче принятия решений используются матрицы парных сравнений из натуральных и обратных натуральным чисел. Для аналитического решения задачи требуется предусмотреть точное выполнение операций умножения и извлечения корня натуральной степени. Рациональных чисел $\dfrac{a}{b}$ не достаточно из-за операции извлечения корня. Необходимо добавить к структуре числа корень целой степени: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n}$.

Такое представление чисел сужает max-алгебру на множество чисел

$$\left\{x = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} \mid a \in \mathbb{N} \cup 0, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Это множество замкнуто относительно операций сложения, умножения, извлечения корня целой степени, нахождения обратного элемента и линейно упорядочено.

С такой структурой операции и отношения определяются следующим образом:

- Умножение:
$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2} a_2^{n_1}}{b_1^{n_2} b_2^{n_1}}\right)^{1/n_1 n_2}.$$

- Сравнение:
$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1^{n_2}}{b_1^{n_2}}\right)^{1/n_1 n_2} < \left(\frac{a_2^{n_1}}{b_2^{n_1}}\right)^{1/n_1 n_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1^{n_2}}{b_1^{n_2}} < \frac{a_2^{n_1}}{b_2^{n_1}} \Leftrightarrow a_1^{n_2} b_2^{n_1} < a_2^{n_1} b_1^{n_2}.$$

- Обратный элемент относительно умножения:
$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}, \qquad a \neq 0.$$

Однако, если использовать приведенные формулы, числа будут увеличиваться очень быстро. Причем, часто n_1 и n_2 оказываются равными. Это мотивирует использовать НОД в формулах:

$$n_1 = n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2), \qquad n_2 = n_2^* \cdot \gcd(n_1, n_2).$$

- Умножение:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}}{b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}}\right)^{1/n_1^* \cdot \gcd(n_1,n_2) \cdot n_2^*}.$$

После умножения числитель и знаменатель сокращаются на их НОД.

- Сравнение:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*} < a_2^{n_1^*} b_1^{n_2^*}.$$

4.1.2. Структура B

Описанная ранее структура имеет недостаток — числитель и знаменатель становятся большими очень быстро с увеличением размера матриц. Из-за этого операция умножения замедляется, т.к. числа не помещаются в стандартные типы, для которых оптимизированы процессоры.

Идея второй структуры заключается в том, чтобы заменить умножение сложением, как это делает логарифмирование.

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Структура B представляет числа в виде, похожем на факторизацию, но степени простых рациональны:

$$x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad \text{где} \quad p_i\text{— простые}, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Структура реализуется вектором пар натуральных чисел и рациональных с отдельным состоянием для 0.

- Умножение реализуется слиянием векторов множителей. Когда простой делитель присутствует в обоих множителях, его степени складываются и если сумма не равна нулю, он добавляется в результат. Если простой делитель присутствует только в одном из множителей, он со своей степенью добавляется в результат.

  Например:

$$2^3 3^{-2} \times 3^2 5^{-1} = 2^3 3^{-2+2} 5^{-1} = 2^3 5^{-1}.$$

- Обратный по умножению получается изменением знака степеней простых.

$$x^{-1} = (p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k})^{-1} = p_1^{-a_1} p_2^{-a_2} \dots p_k^{-a_k}.$$

- Сравнение двух чисел можно свести к сравнению с единицей с помощью умножения одного аргумента на обратный по умножению второго аргумента (деления).

  Чтобы сравнить число с единицей, все степени простых умножаются на наименьший общий множитель l знаменателей степеней a_i, чтобы степени стали целыми. Далее находится два произведения — простых (возведенных в соответствующую степень) с положительными степенями и простых с отрицательными. Два произведения сравниваются как целые числа и определяют результат исходного сравнения.

$$a < b \Leftrightarrow a/b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} < 1 \Leftrightarrow p_1^{la_1} p_2^{la_2} \dots p_k^{la_k} < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i \in \{i | a_i > 0\}} p_i^{la_i} < \prod_{j \in \{j | a_j < 0\}} p_j^{-la_j}.$$

  Эта процедура медленная и зачастую избыточно точная, поэтому реализована более быстрая, но приближенная процедура сравнения.

  Для отношения сравниваемых чисел вычисляется приближенное значение в типе с плавающей точкой и если оно достаточно далеко от 1 (разница больше 10^{-15}), то используется результат сравнения приближения с 1, иначе запускается медленный и точный метод.

4.2. Матрицы

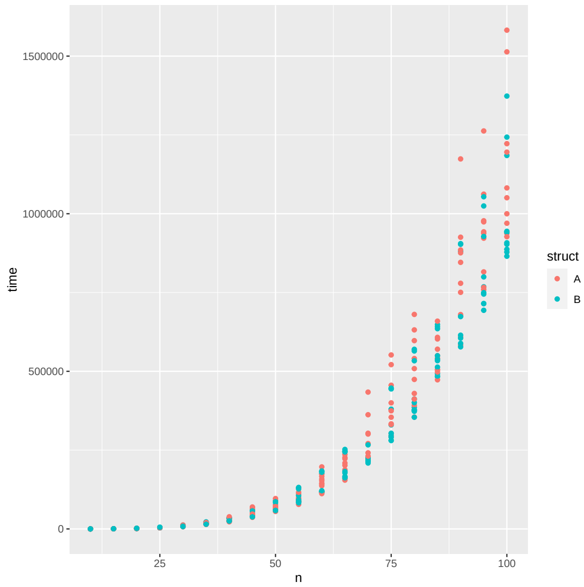
Было реализовано расширение библиотеки Eigen, позволяющее использовать описанные раньше структуры в матрицах.

4.3. Сравнение производительности структур

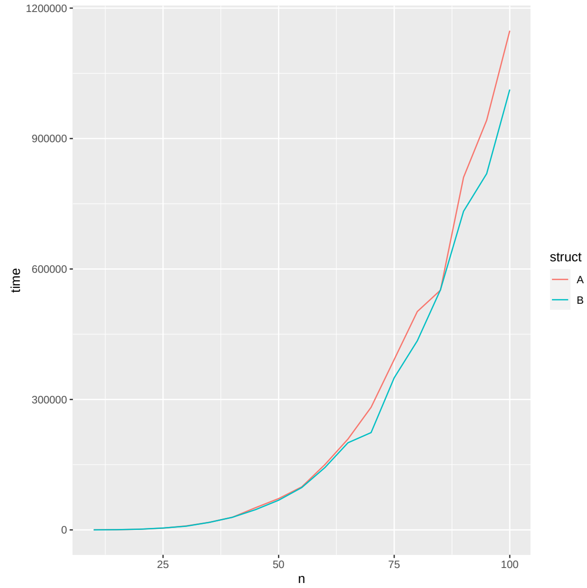
Структуры сравнивались по времени вычисления $(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})$, где λ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ — случайно сгенерированная матрица парных сравнений $n \times n$.

Асимптотика такого теста — $O(n^4(t_\times + t_\oplus))$, где $t_\times, t_\oplus$ — сложность (время) умножения и сложения чисел, соответственно.

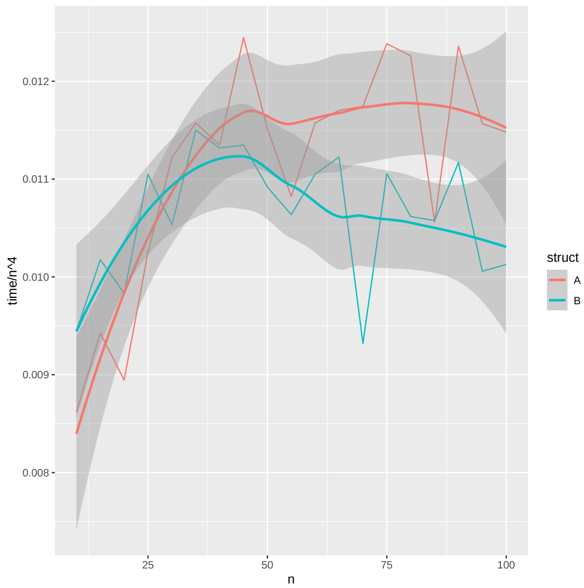
Для каждого значения n проведено по 10 тестов и найдено среднее время вычисления в миллисекундах.



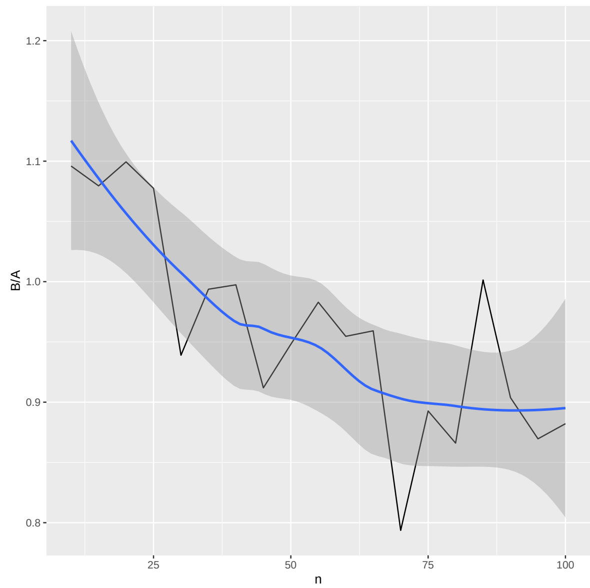
(*а*) Все тесты



(*б*) Среднее тестов



(*в*) Масштабирование по размеру матриц



(*г*) Отношение времени вычисления B и A

Рис. 4.1. Результаты тестирования.

Как видно из графика 4.1(г), при маленьких размерах матрицы структура A, а начиная примерно с $n = 30$, структура B становится быстрее. При размерах матрицы $n = 100$ (время вычисления порядка 20 минут) структура B лучше на 10%.

Заключение

Для решения многокритериальных задач парных сравнений разработана эффективная модель представления данных, алгоритмы точных вычислений и их программная реализация.

Полученные результаты могут оказаться полезными для решения других задач, где требуется обеспечить точные вычисления, например для задач криптографии.

Список литературы

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь. — 1993.
2. Кривулин Н. К., Агеев В. А. Методы тропической оптимизации в многокритериальных задачах оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та // Прикладная математика. 2019. — Т. 15. — С. 472–488.
3. Krivulin N., Sergeev S. Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method // Fuzzy Sets and Systems. — 2019.
4. Krivulin Nikolai, Prinkov Alexey, Gladkikh Igor. Using Pairwise Comparisons to Determine Consumer Preferences in Hotel Selection // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 5. — P. 1–25.
5. Кривулин Н. К., Абильдаев Т., Горшечникова В. Д., Капаца Д. и Магдич Е. А. // Мандрикова А. А. О решении многокритериальных задач принятия решений на основе парных сравнений // Компьютерные инструменты в образовании. — № 2. 2020. — С. 27–58.
6. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — 1994.
7. Butkovič P. Max-linear Systems: Theory and Algorithms. — 2010.
8. Heidergott B., Olsder G., Woude J. Van Der. — 2006.