

# Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

Ткаченко Егор Андреевич, группа 19.Б04-мм

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кривулин Н.К.

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по научно-исследовательской работе (семестр 7)

Санкт-Петербург, 2023

- Существуют задачи принятия решений на основе парных сравнений.
- Для их решения существует два вида методов — эвристические алгоритмы и строго обоснованные математические решения (аналитические методы).
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в  $\log$ -чебышевской метрике. Данный метод хорошо записывается в терминах  $\max$ -алгебры.
- Цель работы — разработать программные средства, решающие задачи принятия решений.

## Однокритериальная задача

- Существует  $n$  альтернатив  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  принятия решения.
- Дана матрица парных сравнений  $A = (a_{ij})$  порядка  $n$ , где  $a_{ij} > 0$  — во сколько раз альтернатива  $\mathcal{A}_i$  лучше  $\mathcal{A}_j$ .
- Требуется на основе парных сравнений определить вектор  $x$  абсолютных рейтингов альтернатив.

## Многокритериальная задача

- Существует  $n$  альтернатив  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  принятия решения.
- Существует  $m$  критериев и для каждого дана матрица парных сравнений  $A_k$ .
- Дана матрица попарных сравнений критериев  $C = (c_{kl})$ , где  $c_{kl}$  показывает во сколько раз критерий  $k$  важнее  $l$ .
- Требуется на основе матриц  $C$  и  $A_1, \dots, A_m$  определить вектор  $x$  абсолютных рейтингов альтернатив.

## Мах-умножить алгебра

Множество  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  с операциями сложения и умножения.

- Сложение обозначается символом  $\oplus$  и для всех  $x, y \in \mathbb{R}_+$  определено как максимум:  $x \oplus y = \max\{x, y\}$ .
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

# Матрицы в max-умножить алгебре

- Векторные и матричные операции, в том числе операции со скалярами и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию  $\oplus$ .
- След матрицы  $A = (a_{ij})$  порядка  $n$

$$\text{tr } A = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Спектральный радиус матрицы  $A$

$$\lambda = \text{tr } A \oplus \cdots \oplus \text{tr}^{1/n}(A^n) = \bigoplus_{i=1}^n \text{tr}^{1/i}(A^i).$$

- При  $\lambda \leq 1$ , определен оператор Клини матрицы  $A$

$$A^* = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i.$$

- 1 На основе матрицы  $C$  находится вектор весов критериев  $w$

$$w = (\lambda^{-1}C)^*v, \quad v > 0, \quad \lambda = \bigoplus_{i=1}^m \text{tr}^{1/i}(C^i).$$

- 2 Если вектор  $w$  не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший  $w_1$  и наихудший  $w_2$  дифференцирующие векторы весов.
- 3 С помощью векторов  $w_1 = (w_i^{(1)})$  и  $w_2 = (w_i^{(2)})$  строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$B = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(1)} A_i, \quad D = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(2)} A_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы  $B$  ( $D$ ) вычисляется наилучший (наихудший) вектор рейтингов альтернатив.

## Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n_1 = n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2), \quad n_2 = n_2^* \cdot \gcd(n_1, n_2).$$

- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}}{b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}}\right)^{1/n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2) \cdot n_2^*}.$$

После умножения  $a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}$  и  $b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}$  сокращаются на их НОД.

- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*} < a_2^{n_1^*} b_1^{n_2^*}.$$

Были реализованы:

- Описанная ранее структура  $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$
- Элементы тропической математики
  - След матрицы
  - Тропический определитель
  - Транспонированная матрица
  - Спектральный радиус
  - Матрица клини
  - Проверка линейной зависимости векторов
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в  $\text{\LaTeX}$  для матриц и структуры



- С такой неинтуитивной алгеброй приятно иметь калькулятор.
- В ходе решения задачи принятия решений числа могут стать очень большими, что может быть проблемой при больших размерностях входных матриц. Уже разработана более оптимизированная для  $\max$ -умножить алгебры структура и ведется ее реализация.
- Разработанная структура может пригодиться и в других областях. Например, отсутствие ошибок округления важно для криптографии.