Поддерживающие временные ряды в MSSA
(продолжение)

Ткаченко Егор Андреевич, группа 19.Б04

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Кафедра статистического моделирования
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.

21 декабря 2021г.

Базовые определения

Временной ряд

Вещественный временной ряд длины N_p:

$$\mathsf{F}_p = (f_0^{(p)}, \ldots, f_{N_p-1}^{(p)}), f_j^{(p)} \in \mathbb{R}.$$

Многомерный временной ряд

Многомерный временной ряд F — набор s временных рядов F_p длин N_p:

$$\{\mathsf{F}_p, p = 1, \ldots, s\}$$

Определения

Траекторная матрица

L-Траекторная матрица ряда F_p:

$$\mathcal{T}_{SSA}(\mathsf{F}_p) = \begin{pmatrix} f_0^{(p)} & f_1^{(p)} & \dots & f_{K-1}^{(p)} \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & \dots & f_K^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1}^{(p)} & f_L^{(p)} & \dots & f_{N_p-1}^{(p)} \end{pmatrix};$$

для многомерного ряда F: $\quad \mathcal{T}_{MSSA}(\mathsf{F}) = [\mathcal{T}_{SSA}(\mathsf{F}_1) : \ldots : \mathcal{T}_{SSA}(\mathsf{F}_s)]$.

Из траекторной матрицы можно восстановить ряд.

Ранг

Ранг ряда F_p (многомерного ряда F) — это ранг его траекторной матрицы: $r_p = \operatorname{rank} \mathcal{T}_{SSA}(\mathsf{F}_\mathrm{p}) \quad (r_{MSSA} = \operatorname{rank} \mathcal{T}_{MSSA}(\mathsf{F}))$

Применение SSA и MSSA

Вход: Ряд F_1 для SSA или многомерный ряд F для MSSA;
длина окна $L \leq N_1$ для SSA или $L \leq N_p$ для MSSA;
ранг аппроксимирующего ряда r.

Алгоритм

1. Получение L-траекторной матрицы $\mathbf{X}$ временного ряда: $\mathbf{X} = \mathcal{T}_{SSA}(\mathsf{F}_1)$ для SSA или $\mathbf{X} = \mathcal{T}_{MSSA}(\mathsf{F})$ для MSSA.
2. Методом SVD матрица $\mathbf{X}$ раскладывается на сумму d матриц $\mathbf{X}_i$ ранга 1, где: $d = \operatorname{rank} \mathbf{X}$.
3. Первые r матриц $\mathbf{X}_i$ складываются и восстанавливаются в ряд (SSA) или многомерный ряд (MSSA)

Выход: Аппроксимирующий ряд конечного ранга r.

Линейная рекуррентная формула; управляемый ЛРФ ряд

Ряд $\mathsf{F}_\mathrm{p} = (f_i)_{i=0}^{N_p-1}$ — управляемый ЛРФ, если существуют такие $a_1, \ldots, a_d$, что:

$$f_{i+d} = \sum_{k=1}^{d} a_k f_{i+d-k},\ 0 \le i \le N_p - 1 - d,\ a_d \neq 0,\ t < N_p - 1.$$

Замечание

Ряд конечного ранга является управляемым ЛРФ.

Прогноз ряда

Прогноз вещественного временного ряда F_p:

$$\overset{\sim}{\mathsf{f}}_{N_p} = \sum_{k=1}^{L-1} a_k f_{N_p-k}.$$

Задача

Пусть имеется временной ряд $F_1 = S_1 + R_1$, где

- Сигнал S_1 — ряд управляемый ЛРФ.
- Шум R_1 — ряд без структуры.

Задача: спрогнозировать сигнал S_1.

Пусть помимо ряда F_1 имеется временной ряд F_2.

Идея: использование ряда F_2 может улучшить прогноз сигнала S_1.

- Второй ряд дает алгоритму больше данных, которые могут улучшить ЛРФ.
- Второй ряд может сделать прогноз хуже, если его структура отличается от первого.

Ошибка прогноза $\widetilde{\mathsf{S}}$ сигнала S_1

$\mathrm{MSE}(\widetilde{\mathsf{S}}, \mathsf{S}_1) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=N}^{N+N_f-1} (\widetilde{s}_i - s_i)^2$

Поддерживающий ряд (для прогноза)

Ряд F_2 — поддерживающий, если $\mathrm{MSE}(\widetilde{\mathsf{S}}_{\mathrm{MSSA}}, \mathsf{S}_1) < \mathrm{MSE}(\widetilde{\mathsf{S}}_{\mathrm{SSA}}, \mathsf{S}_1)$

Вопрос: Как понять, что ряд поддерживающий?

Согласованность

- Сигналы $\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2$ полностью согласованы, если $r_{MSSA} = r_1 = r_2$
- Сигналы $\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2$ полностью не согласованы, если $r_{MSSA} = r_1 + r_2$

Численные эксперименты

Гипотеза

Если сигналы рядов согласованы и шум второго небольшой, то ряд F_2 — поддерживающий.

Вопрос

На сколько можно исказить сигнал второго ряда, прежде чем он перестанет быть поддерживающим?

Шаблоны рядов в экспериментах:

1. $s_j^{(i)} = \exp(j\lambda_i)$
2. $s_j^{(i)} = \cos(\frac{2\pi j}{12})\exp(j\lambda_i)$
3. $s_j^{(i)} = \cos(\frac{2\pi j}{T_i})$
4. $s_j^{(i)} = \cos(\frac{2\pi j}{12}) + \exp(j\lambda_i)$

Шумы $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ — независимые белые гауссовские шумы со средними, равными 0, и дисперсиями σ_1^2, σ_2^2, соответственно.

Планы

- Как по структуре рядов понять согласованность?
- Что если ранги рядов разные?