Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

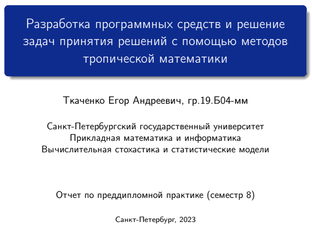
Ткаченко Егор Андреевич, гр.19.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по преддипломной практике (семестр 8)

Санкт-Петербург, 2023

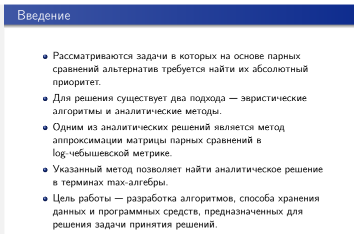
Решение задачи принятия решений



Научный руководитель д.ф.-м.н., доцент Кривулин Николай Кимович, кафедра статистического моделирования

Введение

- Рассматриваются задачи в которых на основе парных сравнений альтернатив требуется найти их абсолютный приоритет.
- Для решения существует два подхода — эвристические алгоритмы и аналитические методы.
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в log-чебышевской метрике.
- Указанный метод позволяет найти аналитическое решение в терминах max-алгебры.
- Цель работы — разработка алгоритмов, способа хранения данных и программных средств, предназначенных для решения задачи принятия решений.



В работе рассматриваются задачи принятия решений на основе парных сравнений.
Методы решения этих задач можно отнести к двум подходам - эвристические методы (эвристические значит не гарантирующие точного решения, но зачастую работающие быстрее) и аналитические.
Одно из таких аналитических решений - метод аппроксимации в log-чебышевской метрике.
этот метод очень позволяет найти аналитическое решение в терминах max-алгебры.

Цель работы - разработка алгоритмов, способа хранения данных и программных средств, предназначенных для решения задачи принятия решений

Многокритериальная задача

- Имеются n альтернатив $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ принятия решения.
- Имеются m критериев и для каждого дана матрица $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ парных сравнений альтернатив.
- $a_{ij}^{(k)} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива $\mathcal{A}_i$ превосходит альтернативу $\mathcal{A}_j$ в соответствии с критерием $k = 1, \ldots, m$.
- Дана матрица попарных сравнений критериев $\boldsymbol{C} = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее l.
- Требуется на основе матриц $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ определить вектор $\boldsymbol{x}$ абсолютных рейтингов альтернатив.

Подробнее про задачу:
имеются альтернативы принятия решений, например какого типа построить мост (арочный, балочный, висячий).
Имеются критерии например (цена, сложность время строительства) для каждого критерия дана матрица парных сравнений альтернатив, которая может быть получена например опросом экспертов, а парных потому что экспертное мнение будет точнее при выборе из 2 альтернатив чем из нескольких
элементы этих матриц отображают во сколько одна альтернатива лучше другой по каждому критерию.
Так же дана матрица парных сравнений критериев, элементы которой показывают во сколько один критерий важнее другого.

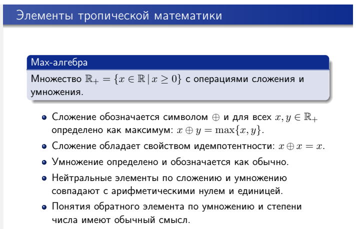
Задача - построить вектор абсолютных рейтингов альтернатив.

Элементы тропической математики

Max-алгебра

Множество $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.

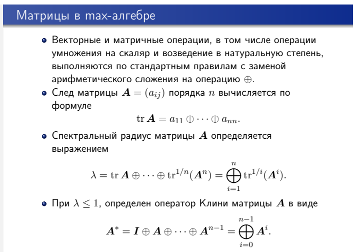
- Сложение обозначается символом $\oplus$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$.
- Сложение обладает свойством идемпотентности: $x \oplus x = x$.
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.



Про максалгебру:
Макс-умножить алгебра - это множество неотрицательных чисел с операциями сложения и умножения.
Сложение обозначается символом оплюс, и определено как максимум. так же сложение идемпотентно.
Умножение определено и обозначается как обычно для вещественных чисел.
нейтральные элементы - 0 для сложения (как наименьший из множества) и 1 для умножения (как в классической алгебре)
Возведение в степень определено как обычно, в том числе обратный элемент как -1 степень.

Матрицы в max-алгебре

- Векторные и матричные операции, в том числе операции умножения на скаляр и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию $\oplus$.
- След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n вычисляется по формуле
$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$
- Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ определяется выражением
$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$
- При $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде
$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i.$$



операции с матрицами и векторами определятся как обычно, с заменой арифметического сложения на операцию оплюс.
Вводятся такие понятия как:
След - максимальный элемент на диагонали.
Спектральный радиус - максимальное собственное число, в терминах максалгебры записывается как вот такая сумма.
Когда спектральный радиус матрицы меньше или равен 1, для нее можно определить оператор клини. он обозначается звездочкой.

Решение многокритериальной задачи парных сравнений

1 На основе матрицы $\boldsymbol{C}$ находится вектор весов критериев $\boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \qquad \lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{C}^{i}).$$

2 Если вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший $\boldsymbol{w}_1$ и наихудший $\boldsymbol{w}_2$ дифференцирующие векторы весов.

3 С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)}\boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)}\boldsymbol{A}_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы $\boldsymbol{B}$, вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для матрицы $\boldsymbol{D}$ — наихудший вектор.

Решение многокритериальной задачи парных сравнений
1 На основе матрицы $\boldsymbol{C}$ находится вектор весов критериев $\boldsymbol{w}$
$$\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \qquad \lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{C}^{i}).$$
2 Если вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший $\boldsymbol{w}_1$ и наихудший $\boldsymbol{w}_2$ дифференцирующие векторы весов.
3 С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:
$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)}\boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)}\boldsymbol{A}_i.$$
4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы $\boldsymbol{B}$, вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для матрицы $\boldsymbol{D}$ — наихудший вектор.

Определив базовые элементы максалгебры, можно рассмотреть алгоритм решения задачи парных сравнений.
1) Сначала матрица парных сравнений критериев нормируется и находится ее матрица клини. Линейная комбинация столбцов полученной матрицы является вектором весов критериев.
2) Если такой вектор не единственный с точностью до умножения на скаляр, то выбирается наилучший и наихудший дифференцирующий векторы.
3) С выбранными весами критериев строятся взвешенные матрицы парных сравнений альтернатив и для них повторяются действия пунктов 1 и 2.
4) Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы B, вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для матрицы D — наихудший вектор.
В итоге получаются наилучший и наихудший дифференцирующий векторы рейтингов альтернатив.

Наилучших и наихудших векторов может быть несколько.

Разработка структуры для хранения чисел

- Требуется структура основанная на целочисленных типах с точными операциями, например, для проверки на линейную независимость векторов.
- Введен класс объектов, характеризующийся тройками целых чисел.

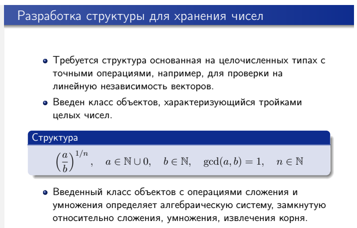
Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a,b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Введенный класс объектов с операциями сложения и умножения определяет алгебраическую систему, замкнутую относительно сложения, умножения, извлечения корня.

Решение задачи принятия решений

└─Разработка структуры для хранения чисел



проверки на линейную независимость векторов требует структуры основанной на целочисленных типах, с точными операциями
Поэтому был предложен класс объектов, характеризующийся тройками целых чисел.
предложенный класс объектов с операциями сложения (максимума) и умножения определяет алгебраическую систему, замкнутую относительно сложения, умножения, извлечения корня.
этой алгебраической системы достаточную для решения задачи парных сравнений при условии, что во входных матрицах — рациональные числа в рациональной степени.

Структура A

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{n}_1 = n_1/\gcd(n_1, n_2), \qquad \tilde{n}_2 = n_2/\gcd(n_1, n_2).$$

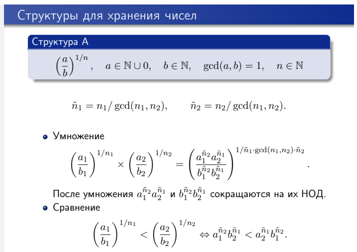
- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}}{b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}}\right)^{1/\tilde{n}_1 \cdot \gcd(n_1, n_2) \cdot \tilde{n}_2}.$$

  После умножения $a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}$ и $b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}$ сокращаются на их НОД.

- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1} < a_2^{\tilde{n}_1} b_1^{\tilde{n}_2}.$$


Структуры для хранения чисел
Структура A
$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$
$\tilde{n}_1 = n_1/\gcd(n_1, n_2), \qquad \tilde{n}_2 = n_2/\gcd(n_1, n_2).$
Умножение
$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}}{b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}}\right)^{1/\tilde{n}_1 \cdot \gcd(n_1, n_2) \cdot \tilde{n}_2}.$
После умножения $a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}$ и $b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}$ сокращаются на их НОД.
Сравнение
$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1} < a_2^{\tilde{n}_1} b_1^{\tilde{n}_2}.$

Структура A и отражает все такие числа.
Умножение определятся вот такой формулой с использованием наибольшего общего делителя для оптимизации.
Для вычисления максимума достаточно определить операции сравнения. Вот так ее можно свести к целочисленным операциям и сравнению целых чисел.

Извлечение корня и нахождение обратного работает очевидным образом.

Структура B

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad p_i \text{ — простые}, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Структура реализуется вектором пар натуральных и рациональных чисел с отдельным состоянием для 0.

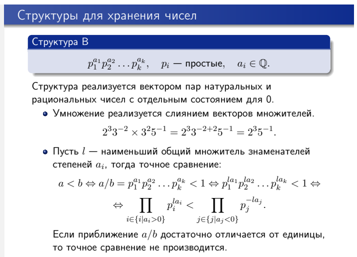
- Умножение реализуется слиянием векторов множителей.

$$2^3 3^{-2} \times 3^2 5^{-1} = 2^3 3^{-2+2} 5^{-1} = 2^3 5^{-1}.$$

- Пусть l — наименьший общий множитель знаменателей степеней a_i, тогда точное сравнение:

$$a < b \Leftrightarrow a/b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} < 1 \Leftrightarrow p_1^{la_1} p_2^{la_2} \dots p_k^{la_k} < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i \in \{i | a_i > 0\}} p_i^{la_i} < \prod_{j \in \{j | a_j < 0\}} p_j^{-la_j}.$$

Если приближение a/b достаточно отличается от единицы, то точное сравнение не производится.



Структура A имеет недостаток — с увеличением размера матриц, операция умножения замедляется, т.к. числа не помещаются в стандартные типы.

Структура B факторизует числа, но может хранить рациональные степени. Если добавить отдельное состояние для 0, то структура полностью содержит множество чисел необходимое для решения задачи принятия решений.

Умножение реализуется слиянием векторов множителей

Для сравнения находится отношение чисел, далее вычисляется наименьший общий множитель знаменателей степеней, и все степени умножаются на него, чтобы быть целыми. Сравнение с единицей от этого не изменится. Остается только вычислить произведение простых с положительными и с отрицательными степенями отдельно и сравнить их. Но это медленная процедура и перед ней быстро вычисляется приближение отношения и если оно достаточно далеко от 1, то медленная процедура не запускается.

Сравнение структур

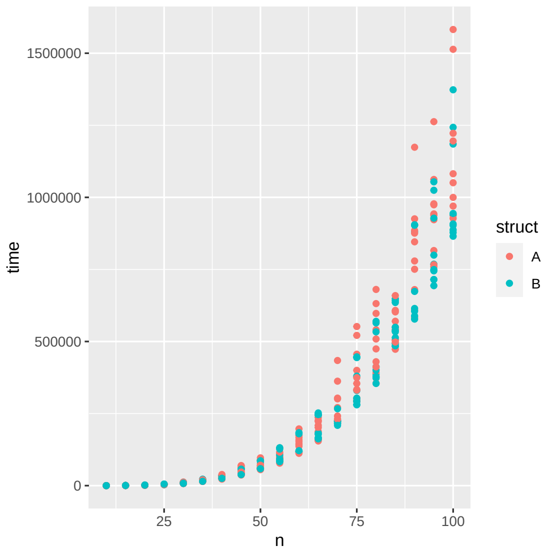
- Тест — вычисление $(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*$, где λ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ — случайно сгенерированная матрица парных сравнений $n \times n$.
- Асимптотика такого теста — $O(n^4(t_\times + t_\oplus))$, где $t_\times, t_\oplus$ — сложность (время) умножения и сложения чисел, соответственно.
- Для каждого значения n проведено по 10 тестов и найдено среднее время вычисления в миллисекундах.

Сравнение структур

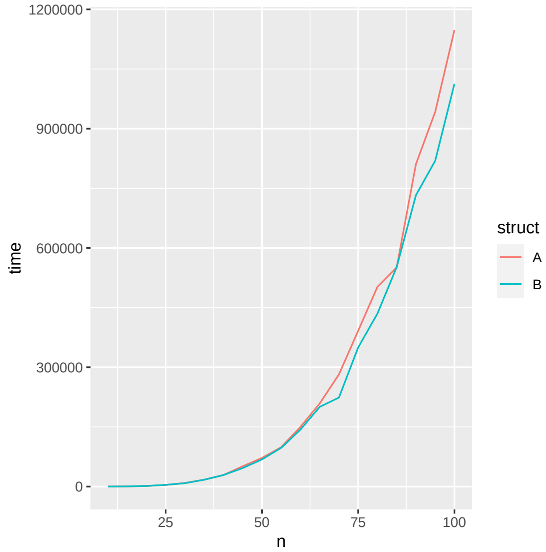
- Тест — вычисление $(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*$, где λ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ — случайно сгенерированная матрица парных сравнений $n \times n$.
- Асимптотика такого теста — $O(n^4(t_\times + t_\oplus))$, где $t_\times, t_\oplus$ — сложность (время) умножения и сложения чисел, соответственно.
- Для каждого значения n проведено по 10 тестов и найдено среднее время вычисления в миллисекундах.

Ожидается что Структура B медленнее с маленькими числами и быстрее с большими.
Для проверки этого Сравню структуры во времени вычисления $(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*$. Для случайно сгенерированных матриц парных сравнений A.
Асимптотически там $O(n^4)$ операций сложения и умножения.
Для каждого n от 10 до 100 с шагом 5 для каждой структуры проведено по 10 тестов. и получено время их выполнения в миллисекундах. все тестирование заняло 6 часов многопоточных вычислений.

Результат сравнения



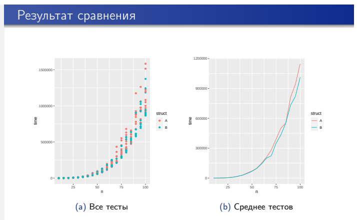
(a) Все тесты



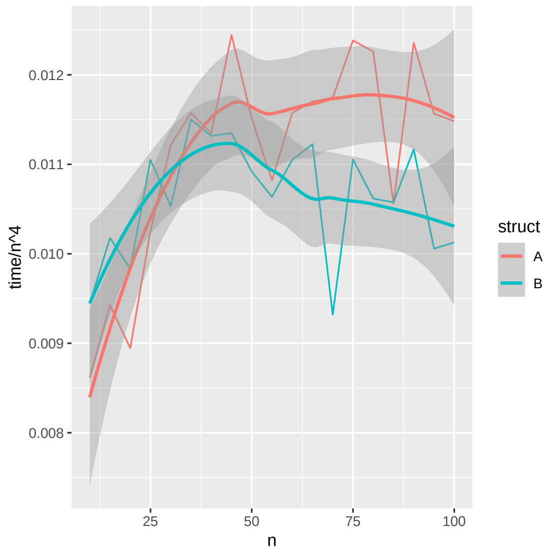
(b) Среднее тестов

Решение задачи принятия решений

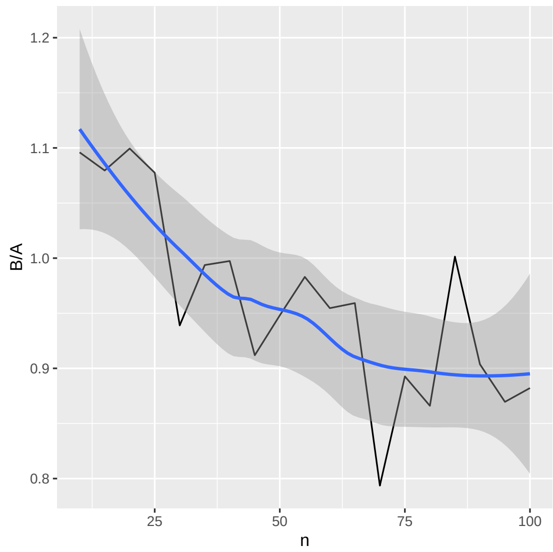
└─Результат сравнения



По оси x - размер матриц n, по оси y - время вычисления теста.
На левом графике изображены все тесты,
На правом линии, проходящие через среднее время выполнения.
Правый график хочется логарифмировать, но корректнее будет разделить на n^4

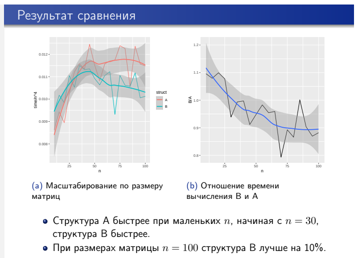


(a) Масштабирование по размеру матриц



(b) Отношение времени вычисления B и A

- Структура A быстрее при маленьких n, начиная с $n = 30$, структура B быстрее.
- При размерах матрицы $n = 100$ структура B лучше на 10%.



получится левый график. По нему видно, что структура A быстрее при маленьких n, а начиная с n = 30, структура B быстрее.
Если найти отношение времени выполнения B к A получится правый график, и из него видно, что при размерах матрицы n = 100 достигается преимущество структуры B на 10%.

Реализация

На языке C++ были реализованы:

- Описанные структуры
- Расширение библиотеки Eigen для работы с матрицами
- Элементы тропической математики
- Тестирование структур
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в LaTeX для матриц и структур

Решение задачи принятия решений

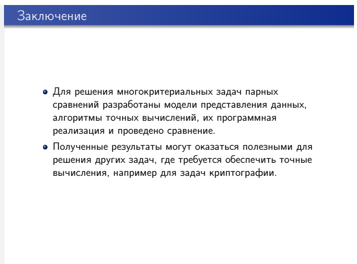
└Реализация

Реализация
На языке C++ были реализованы:
- Описанные структуры
- Расширение библиотеки Eigen для работы с матрицами
- Элементы тропической математики
- Тестирование структур
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в LaTeX для матриц и структур

Итак мною были реализованы:
описанные ранее структуры
Расширение библиотеки Eigen для работы с матрицами
элементы тропической математики
алгоритм решения задачи принятия решений на основе парных сравнений
методы вывода в латех для структур, матриц, и самого решения.

Заключение

- Для решения многокритериальных задач парных сравнений разработаны модели представления данных, алгоритмы точных вычислений, их программная реализация и проведено сравнение.
- Полученные результаты могут оказаться полезными для решения других задач, где требуется обеспечить точные вычисления, например для задач криптографии.



Для решения многокритериальных задач парных сравнений разработаны модели представления данных, алгоритмы точных вычислений, их программная реализация и проведено сравнение.

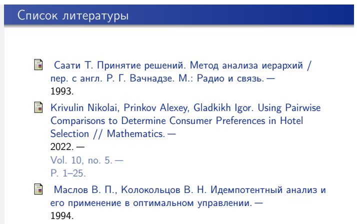
Полученные результаты могут оказаться полезными для решения других задач, где требуется обеспечить точные вычисления, например для задач криптографии.

Список литературы

- Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь. — 1993.
- Krivulin Nikolai, Prinkov Alexey, Gladkikh Igor. Using Pairwise Comparisons to Determine Consumer Preferences in Hotel Selection // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 5. — P. 1–25.
- Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — 1994.

Решение задачи принятия решений

└─Список литературы



На данном слайде представлен список основных источников, используемых в моей работе.