

Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

Ткаченко Егор Андреевич

Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор
Н. К. Кривулин

4 июня 2023 г.

- Рассматриваются задачи в которых на основе парных сравнений альтернатив требуется найти их абсолютный приоритет.
- Для решения существует два подхода — эвристические алгоритмы и аналитические методы.
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в \log -чебышевской метрике.
- Указанный метод позволяет найти аналитическое решение в терминах \max -алгебры.
- Цель работы — разработка алгоритмов, способа хранения данных и программных средств, предназначенных для решения задачи принятия решений.

Многокритериальная задача

- Имеются n альтернатив A_1, \dots, A_n принятия решения.
- Имеются m критериев и для каждого дана матрица $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ парных сравнений альтернатив.
- $a_{ij}^{(k)} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива A_i превосходит альтернативу A_j в соответствии с критерием $k = 1, \dots, m$.
- Дана матрица попарных сравнений критериев $C = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее l .
- Требуется на основе матриц C и A_1, \dots, A_m определить вектор x абсолютных рейтингов альтернатив.

Мах-алгебра

Множество $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.

- Сложение обозначается символом \oplus и для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$.
- Сложение обладает свойством идемпотентности: $x \oplus x = x$.
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

- Векторные и матричные операции, в том числе операции умножения на скаляр и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию \oplus .
- След матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n вычисляется по формуле

$$\text{tr } A = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Спектральный радиус матрицы A определяется выражением

$$\lambda = \text{tr } A \oplus \cdots \oplus \text{tr}^{1/n}(A^n) = \bigoplus_{i=1}^n \text{tr}^{1/i}(A^i).$$

- При $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини матрицы A в виде

$$A^* = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i.$$

- 1 На основе матрицы C находится вектор весов критериев w

$$w = (\lambda^{-1}C)^*v, \quad v > 0, \quad \lambda = \bigoplus_{i=1}^m \text{tr}^{1/i}(C^i).$$

- 2 Если вектор w не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший w_1 и наихудший w_2 дифференцирующие векторы весов.
- 3 С помощью векторов $w_1 = (w_i^{(1)})$ и $w_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$B = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(1)} A_i, \quad D = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(2)} A_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы B , вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для матрицы D — наихудший вектор.

- Требуется структура основанная на целочисленных типах с точными операциями, например, для проверки на линейную независимость векторов.
- Введен класс объектов, характеризующийся тройками целых чисел.

Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Введенный класс объектов с операциями сложения и умножения определяет алгебраическую систему, замкнутую относительно сложения, умножения, извлечения корня.

Структура A

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{n}_1 = n_1 / \gcd(n_1, n_2), \quad \tilde{n}_2 = n_2 / \gcd(n_1, n_2).$$

- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}}{b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}}\right)^{1/\tilde{n}_1 \cdot \gcd(n_1, n_2) \cdot \tilde{n}_2}.$$

После умножения $a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}$ и $b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}$ сокращаются на их НОД.

- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1} < a_2^{\tilde{n}_1} b_1^{\tilde{n}_2}.$$

Структура В

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad p_i \text{ — простые, } a_i \in \mathbb{Q}.$$

Структура реализуется вектором пар натуральных и рациональных чисел с отдельным состоянием для 0.

- Умножение реализуется слиянием векторов множителей.

$$2^3 3^{-2} \times 3^2 5^{-1} = 2^3 3^{-2+2} 5^{-1} = 2^3 5^{-1}.$$

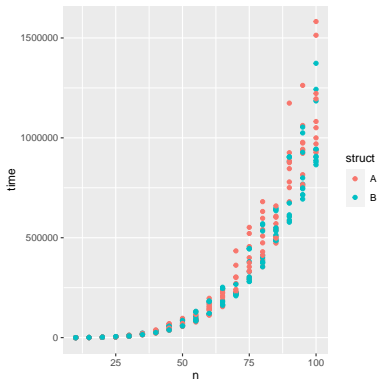
- Пусть l — наименьший общий множитель знаменателей степеней a_i , тогда точное сравнение:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a/b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} < 1 \Leftrightarrow p_1^{la_1} p_2^{la_2} \dots p_k^{la_k} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \prod_{i \in \{i | a_i > 0\}} p_i^{la_i} < \prod_{j \in \{j | a_j < 0\}} p_j^{-la_j}. \end{aligned}$$

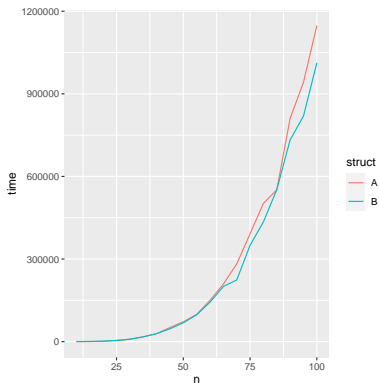
Если приближение a/b достаточно отличается от единицы, то точное сравнение не производится.

- Тест — вычисление $(\lambda^{-1}A)^*$, где λ — спектральный радиус матрицы A , A — случайно сгенерированная матрица парных сравнений $n \times n$.
- Асимптотика такого теста — $O(n^4(t_{\times} + t_{\oplus}))$, где t_{\times}, t_{\oplus} — сложность (время) умножения и сложения чисел, соответственно.
- Для каждого значения n проведено по 10 тестов и найдено среднее время вычисления в миллисекундах.

Результат сравнения

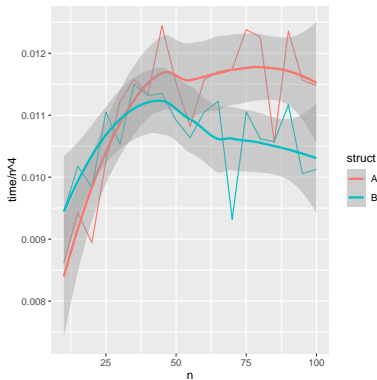


(a) Все тесты

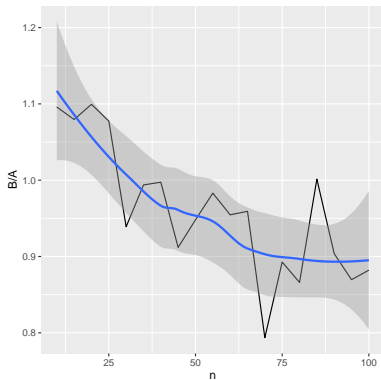


(b) Среднее тестов

Результат сравнения



(a) Масштабирование по размеру матриц



(b) Отношение времени вычисления B и A

- Структура A быстрее при маленьких n , начиная с $n = 30$, структура B быстрее.
- При размерах матрицы $n = 100$ структура B лучше на 10%.

На языке C++ были реализованы:

- Описанные структуры
- Расширение библиотеки Eigen для работы с матрицами
- Элементы тропической математики
- Тестирование структур
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в \LaTeX для матриц и структур

- Для решения многокритериальных задач парных сравнений разработаны модели представления данных, алгоритмы точных вычислений, их программная реализация и проведено сравнение.
- Полученные результаты могут оказаться полезными для решения других задач, где требуется обеспечить точные вычисления, например для задач криптографии.



Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь. — 1993.



Krivulin Nikolai, Prinkov Alexey, Gladkikh Igor. Using Pairwise Comparisons to Determine Consumer Preferences in Hotel Selection // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 5. — P. 1–25.



Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — 1994.



Tkachenko E. A. Decision making with MaxAlgebra. — 2023. —

Access mode: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7950762>.