# Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

Ткаченко Егор Андреевич, гр.19.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по преддипломной практике (семестр 8)

Санкт-Петербург, 2023

# Решение задачи принятия решений



Научный руководитель д.ф.-м.н., доцент Кривулин Николай Кимович, кафедра статистического моделирования

# Введение

- Рассматриваются задачи в которых на основе парных сравнений альтернатив требуется найти их абсолютный приоритет.
- Для решения существует два подхода — эвристические алгоритмы и аналитические методы.
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в log-чебышевской метрике.
- Указанный метод позволяет найти аналитическое решение в терминах max-алгебры.
- Цель работы — разработка алгоритмов, способа хранения данных и программных средств, предназначенных для решения задачи принятия решений.

## Многокритериальная задача

- Имеются $n$ альтернатив $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ принятия решения.
- Имеются $m$ критериев и для каждого дана матрица $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ парных сравнений альтернатив.
- $a_{ij}^{(k)} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива $\mathcal{A}_i$ превосходит альтернативу $\mathcal{A}_j$ в соответствии с критерием $k = 1, \ldots, m$.
- Дана матрица попарных сравнений критериев $\boldsymbol{C} = (c_{kl})$, где $c_{kl}$ показывает во сколько раз критерий $k$ важнее $l$.
- Требуется на основе матриц $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ определить вектор $\boldsymbol{x}$ абсолютных рейтингов альтернатив.

### Max-алгебра

Множество $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.

- Сложение обозначается символом $\oplus$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$.
- Сложение обладает свойством идемпотентности: $x \oplus x = x$.
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

# Матрицы в max-алгебре

- Векторные и матричные операции, в том числе операции умножения на скаляр и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию $\oplus$.
- След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка $n$ вычисляется по формуле
$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$
- Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ определяется выражением
$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$
- При $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде
$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i.$$

# Решение многокритериальной задачи парных сравнений

1 На основе матрицы $\boldsymbol{C}$ находится вектор весов критериев $\boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \qquad \lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{C}^{i}).$$

2 Если вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший $\boldsymbol{w}_1$ и наихудший $\boldsymbol{w}_2$ дифференцирующие векторы весов.

3 С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)} \boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)} \boldsymbol{A}_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы $\boldsymbol{B}$, вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для матрицы $\boldsymbol{D}$ — наихудший вектор.

# Разработка структуры для хранения чисел

- Требуется структура основанная на целочисленных типах с точными операциями, например, для проверки на линейную независимость векторов.
- Введен класс объектов, характеризующийся тройками целых чисел.

**Структура**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a,b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Введенный класс объектов с операциями сложения и умножения определяет алгебраическую систему, замкнутую относительно сложения, умножения, извлечения корня.

# Структуры для хранения чисел

## Структура A

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a,b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n_1 = n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2), \qquad n_2 = n_2^* \cdot \gcd(n_1, n_2).$$

- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}}{b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}}\right)^{1/n_1^* \cdot \gcd(n_1,n_2) \cdot n_2^*}.$$

После умножения $a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}$ и $b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}$ сокращаются на их НОД.

- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*} < a_2^{n_1^*} b_1^{n_2^*}.$$

## Структура B

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad p_i \text{ — простые}, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Структура реализуется вектором пар натуральных и рациональных чисел с отдельным состоянием для 0.

- Умножение реализуется слиянием векторов множителей.

$$2^3 3^{-2} \times 3^2 5^{-1} = 2^3 3^{-2+2} 5^{-1} = 2^3 5^{-1}.$$

- Пусть $l$ — наименьший общий множитель знаменателей степеней $a_i$, тогда точное сравнение:

$$a < b \Leftrightarrow a/b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} < 1 \Leftrightarrow p_1^{la_1} p_2^{la_2} \dots p_k^{la_k} < 1 \Leftrightarrow$$

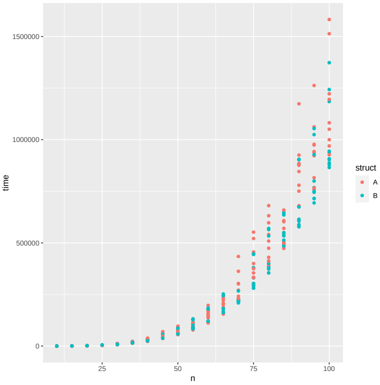
$$\Leftrightarrow \prod_{i \in \{i | a_i > 0\}} p_i^{la_i} < \prod_{j \in \{j | a_j < 0\}} p_j^{-la_j}.$$

Если приближение $a/b$ достаточно отличается от единицы, то точное сравнение не производится.

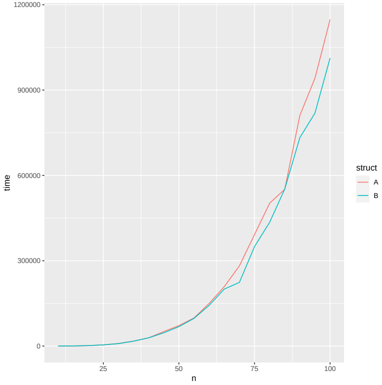
# Сравнение структур

- Тест — вычисление $(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})$, где $\lambda$ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ — случайно сгенерированная матрица парных сравнений $n \times n$.
- Асимптотика такого теста — $O(n^4(t_\times + t_\oplus))$, где $t_\times, t_\oplus$ — сложность (время) умножения и сложения чисел, соответственно.
- Для каждого значения $n$ проведено по 10 тестов и найдено среднее время вычисления в миллисекундах.

# Результат сравнения

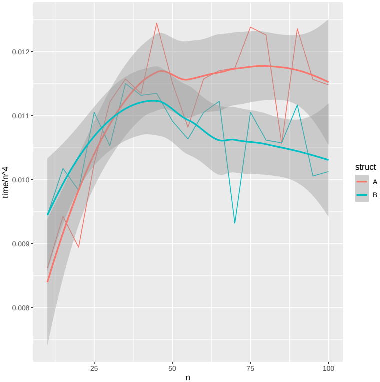



(a) Все тесты

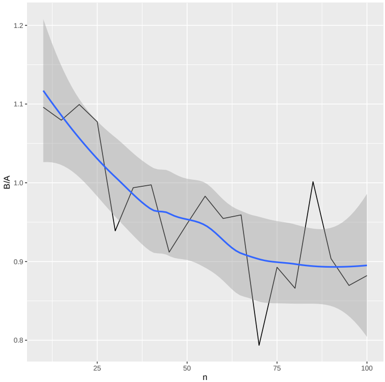



(b) Среднее тестов

# Результат сравнения




(a) Масштабирование по размеру матриц




(b) Отношение времени вычисления B и A

- Структура A быстрее при маленьких $n$, начиная с $n = 30$, структура B быстрее.
- При размерах матрицы $n = 100$ структура B лучше на 10%.

# Реализация

На языке C++ были реализованы:

- Описанные структуры
- Расширение библиотеки Eigen для работы с матрицами
- Элементы тропической математики
- Тестирование структур
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в LaTeX для матриц и структуры

# Заключение

- Для решения многокритериальных задач парных сравнений разработаны модели представления данных, алгоритмы точных вычислений, их программная реализация и проведено сравнение.
- Полученные результаты могут оказаться полезными для решения других задач, где требуется обеспечить точные вычисления, например для задач криптографии.