

Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

Ткаченко Егор Андреевич, группа 19.Б04-мм

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кривулин Н.К.

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по научно-исследовательской работе

Санкт-Петербург, 2023

- Существуют задачи принятия решений на основе парных сравнений.
- Для их решения существует два вида методов — эвристические алгоритмы и строго обоснованные математические решения (аналитические методы).
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в \log -чебышевской метрике. Данный метод хорошо записывается в терминах \max -алгебры.
- Цель работы — разработать программные средства, решающие задачи принятия решений.

Однокритериальная задача

- Существует n альтернатив $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ принятия решения.
- Дана матрица парных сравнений $A = (a_{ij})$ порядка n , где $a_{ij} > 0$ — во сколько раз альтернатива \mathcal{A}_i лучше \mathcal{A}_j .
- Требуется на основе парных сравнений определить вектор x абсолютных рейтингов альтернатив.

Многокритериальная задача

- Существует n альтернатив $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ принятия решения.
- Существует m критериев и для каждого дана матрица парных сравнений A_k .
- Дана матрица попарных сравнений критериев $C = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее l .
- Требуется на основе матриц C и A_1, \dots, A_m определить вектор x абсолютных рейтингов альтернатив.

Мах-умножить алгебра

Множество $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.

- Сложение обозначается символом \oplus и для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$.
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

Матрицы в max-умножить алгебре

- Векторные и матричные операции, в том числе операции со скалярами и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию \oplus .
- След матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n

$$\text{tr } A = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Спектральный радиус матрицы A

$$\lambda = \text{tr } A \oplus \cdots \oplus \text{tr}^{1/n}(A^n) = \bigoplus_{i=1}^n \text{tr}^{1/i}(A^i).$$

- При $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини матрицы A

$$A^* = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i.$$

- 1 На основе матрицы C находится вектор весов критериев w

$$w = (\lambda^{-1} C)^* v, \quad v > 0, \quad \lambda = \bigoplus_{i=1}^m \text{tr}^{1/i}(C^i).$$

- 2 Если вектор w не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший w_1 и наихудший w_2 дифференцирующие векторы весов.
- 3 С помощью векторов $w_1 = (w_i^{(1)})$ и $w_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$B = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(1)} A_i, \quad D = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(2)} A_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы B (D) вычисляется наилучший (наихудший) вектор рейтингов альтернатив.

Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n_1 = n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2), \quad n_2 = n_2^* \cdot \gcd(n_1, n_2).$$

- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}}{b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}}\right)^{1/n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2) \cdot n_2^*}.$$

После умножения $a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}$ и $b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}$ сокращаются на их НОД.

- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*} < a_2^{n_1^*} b_1^{n_2^*}.$$

Были реализованы:

- Описанная ранее структура $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$
- Элементы тропической математики
 - След матрицы
 - Тропический определитель
 - Транспонированная матрица
 - Спектральный радиус
 - Матрица клини
 - Проверка линейной зависимости векторов
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в \LaTeX для матриц и структуры

- С такой неинтуитивной алгеброй приятно иметь калькулятор.
- В ходе решения задачи принятия решений числа могут стать очень большими, что может быть проблемой при больших размерностях входных матриц. Уже разработана более оптимизированная для \max -умножить алгебры структура и ведется ее реализация.
- Разработанная структура может пригодиться и в других областях. Например, отсутствие ошибок округления важно для криптографии.