Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра Статистического Моделирования

«Научно-исследовательская работа» (семестр 7)

Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики.

Выполнил:
Ткаченко Егор Андреевич
группа 19.Б04-мм

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Кривулин Николай Кимович

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

Введение

1. Постановка задачи принятия решений

1.1. Однокритериальная задача парных сравнений

Дано n альтернатив $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ принятия решения, которые сравниваются попарно. Результаты сравнений записываются в виде матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n, где элемент $a_{ij} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива $\mathcal{A}_i$ превосходит альтернативу $\mathcal{A}_j$. Требуется на основе относительных результатов парных сравнений определить вектор $\boldsymbol{x}$ абсолютных рейтингов альтернатив.[1]

1.2. Многокритериальная задача парных сравнений

Рассмотрим задачу оценки рейтингов альтернатив, в которой n альтернатив $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ сравниваются попарно по m критериям. Пусть $\boldsymbol{A}_k$ обозначает матрицу порядка n результатов парных сравнений альтернатив в соответствии с критерием $k = 1, \ldots, m$. Критерии также сравниваются попарно, а результаты их сравнений образуют матрицу $\boldsymbol{C} = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее для принятия решения, чем l. Необходимо на основе матриц парных сравнений $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ найти абсолютный индивидуальный рейтинг каждой альтернативы.[1]

2. Определение тропической математики

Max-умножить алгебра — множество $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ с операциями $(\oplus, \times)$ — максимум и умножение.

След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n вычисляется по формуле $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.

Спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ называется число, которое вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$

При условии, что $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини (звезда Клини), который сопоставляет матрице $\boldsymbol{A}$ матрицу

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i.$$

3. Алгоритм решения задачи

1. Для матрицы $\boldsymbol{C}$ находится спектральный радиус λ, составляется матрица $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$, а затем в параметрической форме определяется вектор весов критериев

$$\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \qquad \lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{C}^{i}). \tag{1}$$

2. Если вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший и наихудший дифференцирующие векторы весов.

   2.1. Наилучший дифференцирующий вектор весов находится в параметрическом виде с использованием вектора параметров $\boldsymbol{v}_1$ по формуле:

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{lk}^{-}\boldsymbol{P})\boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

   где матрица $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_j)$ получена из $(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}$ вычеркиванием линейно зависимых столбцов, матрица $\boldsymbol{P}_{lk}$ получена из $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ обнулением всех элементов, кроме p_{lk}, а индексы k и l определяются, исходя из условий:

$$k = \arg\max_{j} \boldsymbol{1}^{T}\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{-}\boldsymbol{1}, \qquad l = \arg\max_{i} p_{ik}^{-1}. \tag{3}$$

   2.2. Наихудший дифференцирующий вектор весов находится в параметрическом виде с использованием вектора параметров $\boldsymbol{v}_2$ по формулам:

$$\boldsymbol{w}_2 = (\Delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{T} \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}_2, \qquad \boldsymbol{v}_2 > \boldsymbol{0}, \qquad \Delta = \boldsymbol{1}^{T}(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{1}. \tag{4}$$

3. С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы (или одна сумма, когда векторы совпадают) матриц парных сравнений альтернатив:

$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)}\boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)}\boldsymbol{A}_i. \tag{5}$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2.1 на основе взвешенной суммы $\boldsymbol{B}$ вычисляется вектор рейтингов альтернатив, соответствующий наилучшему дифференцирующему вектору весов критериев.

5. Аналогично, по формулам пунктов 1 и 2.2 на основе взвешенной суммы $\boldsymbol{D}$ вычисляется вектор рейтингов альтернатив, соответствующий наихудшему дифференцирующему вектору весов критериев.

Глава 1

Разработка структуры для хранения чисел

В задаче принятия решений даются матрицы парных сравнений из натуральных и обратных натуральным чисел. Для аналитического решения задачи принятия решения структура должна поддерживать операцию умножения, извлечения корня n-ой степени и отношение линейного порядка. Рациональных чисел $\dfrac{a}{b}$ не достаточно из-за операции извлечения корня. Необходимо добавить к структуре числа корень целой степени: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n}$.

С такой структурой операции и отношения определяются следующим образом:

- Умножение:
$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2} a_2^{n_1}}{b_1^{n_2} b_2^{n_1}}\right)^{1/n_1 n_2}.$$

- Сравнение:
$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1^{n_2}}{b_1^{n_2}}\right)^{1/n_1 n_2} < \left(\frac{a_2^{n_1}}{b_2^{n_1}}\right)^{1/n_1 n_2} \Leftrightarrow \frac{a_1^{n_2}}{b_1^{n_2}} < \frac{a_2^{n_1}}{b_2^{n_1}} \Leftrightarrow a_1^{n_2} b_2^{n_1} < a_2^{n_1} b_1^{n_2}.$$

- Обратный элемент относительно умножения:
$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$$

Однако, если использовать такие формулы, числа будут увеличиваться очень быстро. Причем, часто n_1 и n_2 оказываются равными. Это мотивирует использовать НОД в формулах:

$$n_1 = n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2), \qquad n_2 = n_2^* \cdot \gcd(n_1, n_2)$$

- Умножение:
$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}}{b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}}\right)^{1/n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2) \cdot n_2^*}.$$

- Сравнение:
$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*} < a_2^{n_1^*} b_1^{n_2^*}.$$

Глава 2

Реализации

Помимо класса для хранения чисел и выполнения операций с ними были реализованы базовые понятия из max-алгебры.

2.1. Матрицы

Были реализованы нахождение следа, тропического определителя, транспонированный матрицы, спектрального радиуса, матрицы Клини, проверку линейной зависимости вектора от набора векторов, выбор лнз набора векторов из данных, нахождение лучших и худших дифференцирующих векторов.

Например, реализация нахождения лучшего дифференцирующего вектора:

```
Matrix BestVector()
{
    T lambda = SpectralRadius();
    Matrix P((*this / lambda).Kleene().Span());

    vector<uint> k;
    T max_value = -1;
    for (uint j = 0; j < P.cols(); j++)
    {
        Matrix col_j(P.getCol(j));
        T tmp = (col_j * col_j.Transpose()).sum();
        if (tmp > max_value)
        {
            k.clear();
            max_value = tmp;
        }
        if (tmp == max_value)
        {
            k.push_back(j);
        }
    }
    vector<uint> l(k.size(), 0);
    for (uint it = 0; it < k.size(); it++)
    {
```

```
        for (uint i = 0; i < P.rows(); i++)
        {
            if (P[i][k[it]] < P[l[it]][k[it]])
            {
                l[it] = i;
            }
        }
    }

    Matrix result(P * (Identity<T>(P.cols()) +
                  P.filter(l[0], k[0]).Transpose() * P));
    for (uint i = 1; i < k.size(); i++)
    {
        result.cbind(P * (Identity<T>(P.cols()) +
                     P.filter(l[1], k[1]).Transpose() * P));
    }

    return result.Span().normCol();
}
```

2.2. Вывод решения

К каждому классу был добавлен метод вывода в latex.

Пример такого метода для класса чисел "MaxMultiFraction":

```
std::string to_latex(const MaxMultiFraction &fraction)
{
    std::string result = to_string(fraction.numerator_);
    if (fraction.denominator_ != 1)
    {
        result = result + "/" + to_string(fraction.denominator_);
    }

    if (fraction.root_ != 1)
    {
        result = "(" + result + ")^{1/" + to_string(fraction.root_) + "}";
    }
    return result;
}
```

2.3. Пример работы программы

Задача:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 5 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 1/5 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1/5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 1/3 & 1 & 6 & 7 \\ 1/7 & 1/6 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/6 & 1/4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1/2 & 1 & 6 \\ 4 & 1/4 & 1/6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 1/2 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/7 \\ 2 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ 1/7 & 1/6 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нужные степени матрицы C:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 5/3 \\ 25 & 5 & 1 & 5 & 5 \\ 25 & 25 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 25 & 25 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 25 & 25 & 5 & 25 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 125 & 25 & 5 & 25 & 25 \\ 25 & 15 & 15 & 5 & 15 \end{pmatrix},$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 125 & 25 & 5 & 25 & 25 \\ 125 & 125 & 25 & 5 & 25 \\ 125 & 125 & 125 & 25 & 125 \\ 125 & 125 & 125 & 125 & 125 \\ 75 & 75 & 25 & 25 & 25 \end{pmatrix}, \qquad C^5 = \begin{pmatrix} 125 & 125 & 125 & 125 & 125 \\ 625 & 125 & 25 & 125 & 125 \\ 625 & 625 & 125 & 125 & 125 \\ 625 & 625 & 625 & 125 & 625 \\ 375 & 125 & 125 & 75 & 125 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус матрицы C:

$$\lambda_C = \mathrm{tr} C \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/5}(C^5) = (125)^{1/4} \approx 3.3437$$

Матрица $\lambda^{-1}C$ и ее степени:

$$(\lambda^{-1}C)^1 = \begin{pmatrix} (1/125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/10125)^{1/4} \\ (5)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} \\ (5)^{1/4} & (5)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} \\ (1/125)^{1/4} & (5)^{1/4} & (5)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (5)^{1/4} \\ (81/125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^{-1}C)^2 = \begin{pmatrix} (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/2025)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (1/25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (81/15625)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^{-1}C)^3 = \begin{pmatrix} (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} & (1/1953125)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} \\ (1/3125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (1/5)^{1/4} & (81/3125)^{1/4} & (81/3125)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} & (81/3125)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^{-1}C)^4 = \begin{pmatrix} (1)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/390625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} \\ (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/390625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} \\ (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (81/625)^{1/4} & (81/625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} \end{pmatrix}$$

Матрица клини:

$$(\lambda^{-1}C)^* = I \oplus (\lambda^{-1}C)^1 \oplus (\lambda^{-1}C)^2 \oplus (\lambda^{-1}C)^3 \oplus (\lambda^{-1}C)^4 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (1/5)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (5)^{1/4} & 1 & (1/5)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (5)^{1/4} & 1 & (1/5)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (125)^{1/4} & (25)^{1/4} & (5)^{1/4} & 1 & (5)^{1/4} \\ (81/125)^{1/4} & (81/625)^{1/4} & (81/3125)^{1/4} & (81/15625)^{1/4} & 1 \end{pmatrix}$$

Линейно независимые столбцы:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (1/25)^{1/4} \\ (5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (125)^{1/4} & (5)^{1/4} \\ (81/125)^{1/4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} (1/125)^{1/4} \\ (1/25)^{1/4} \\ (1/5)^{1/4} \\ (1)^{1/4} \\ (81/15625)^{1/4} \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} (1/125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} \\ (1/25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (1)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (1/125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} (1)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (6561/125)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1296/125)^{1/4} & (81)^{1/4} \\ (256)^{1/4} & (16)^{1/4} & (1)^{1/4} & (81)^{1/4} \\ (81)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (1)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} (1)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (6561/125)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1296/125)^{1/4} & (81)^{1/4} \\ (256)^{1/4} & (16)^{1/4} & (1)^{1/4} & (81)^{1/4} \\ (81)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (1)^{1/4} \end{pmatrix}$$

Спектральный радиус матрицы B:

$$\lambda_B = \mathrm{tr} B \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/4}(B^4) = (614656/5)^{1/8} \approx 4.32721$$

Матрица $\lambda^{-1}B$:

$$\lambda^{-1}B = \begin{pmatrix} (5/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} \\ (3125/614656)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} & (6561/7503125)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (5/2401)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} \end{pmatrix}$$

Матрица клини:

$$(\lambda^{-1}B)^* = I \oplus (\lambda^{-1}B)^1 \oplus (\lambda^{-1}B)^2 \oplus (\lambda^{-1}B)^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & 1 & (6561/65536)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (1)^{1/8} & 1 & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & 1 \end{pmatrix}$$

Линейно независимые столбцы:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (2401/1280)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & 1 & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (1)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_{best} = \begin{pmatrix} 1 & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (1)^{1/8} \end{pmatrix}$$

Спектральный радиус матрицы D:

$$\lambda_D = \mathrm{tr} D \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/4}(D^4) = (614656/5)^{1/8} \approx 4.32721$$

Матрица $\lambda^{-1}D$:

$$\lambda^{-1}D = \begin{pmatrix} (5/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} \\ (3125/614656)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} & (6561/7503125)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (5/2401)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} \end{pmatrix}$$

Матрица клини:

$$(\lambda^{-1}D)^* = I \oplus (\lambda^{-1}D)^1 \oplus (\lambda^{-1}D)^2 \oplus (\lambda^{-1}D)^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & 1 & (6561/65536)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (1)^{1/8} & 1 & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & 1 \end{pmatrix}$$

Линейно независимые столбцы:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (2401/1280)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & 1 & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (1)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_{worst} = \begin{pmatrix} 1 \\ (1280/2401)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} \\ (1)^{1/8} \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$w_{best} \approx \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.750000 \\ 0.693288 & 0.693288 \\ 0.924384 & 0.693288 \\ 1.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}, \qquad w_{worst} \approx \begin{pmatrix} 1.000000 \\ 0.924384 \\ 0.924384 \\ 1.000000 \end{pmatrix}.$$

Заключение

С такой неинтуитивной алгеброй приятно иметь калькулятор.

В ходе решения задачи принятия решений числа могут стать очень большими, что может быть проблемой при больших размерностях входных матриц. Уже разработана более оптимизированная для макс-умножить алгебры структура и ведется ее реализация.

Список литературы

1. Кривулин Н. О решении многокритериальных задач принятия решений на основе парных сравнений. — 2019.