

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра Статистического Моделирования

«Научно-исследовательская работа» (семестр 7)

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ
РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТРОПИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ.

Выполнил:

Ткаченко Егор Андреевич
группа 19.Б04-мм

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор
Кривулин Николай Кимович

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи принятия решений	3
2. Определение тропической математики	3
3. Алгоритм решения задачи	3
Глава 1. Разработка структуры для хранения чисел	4
Глава 2. Реализация матриц и алгоритма	5
2.1. Вывод решения	5
2.2.	5
2.3. Пример работы программы	5
Заключение	12

Введение

1. Постановка задачи принятия решений
2. Определение тропической математики
3. Алгоритм решения задачи

(на какую статью сослаться?)

Глава 1

Разработка структуры для хранения чисел

Для аналитического решения задачи принятия решения структура должна поддерживать операцию умножения, извлечения корня n -ой степени и отношение линейного порядка. Рациональных чисел $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$) не хватит из-за операции извлечения корня. Достаточно добавить к структуре числа корень целой степени $(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

С такой структурой операции умножения

Глава 2

Реализация матриц и алгоритма

2.1. Вывод решения

Для удобства я дописал к каждому классу метод вывода в latex.

2.2.

2.3. Пример работы программы

Задача:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 5 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 1/5 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 1/3 & 1 & 6 & 7 \\ 1/7 & 1/6 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/6 & 1/4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1/2 & 1 & 6 \\ 4 & 1/4 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 1/2 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/7 \\ 2 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ 1/7 & 1/6 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Нужные степени матрицы C :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 5/3 \\ 25 & 5 & 1 & 5 & 5 \\ 25 & 25 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 25 & 25 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 25 & 25 & 5 & 25 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 125 & 25 & 5 & 25 & 25 \\ 25 & 15 & 15 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 125 & 25 & 5 & 25 & 25 \\ 125 & 125 & 25 & 5 & 25 \\ 125 & 125 & 125 & 25 & 125 \\ 125 & 125 & 125 & 125 & 125 \\ 75 & 75 & 25 & 25 & 25 \end{pmatrix}$$

$$C^5 = \begin{pmatrix} 125 & 125 & 125 & 125 & 125 \\ 625 & 125 & 25 & 125 & 125 \\ 625 & 625 & 125 & 125 & 125 \\ 625 & 625 & 625 & 125 & 625 \\ 375 & 125 & 125 & 75 & 125 \end{pmatrix}$$

Спектральный радиус матрицы C :

$$\lambda_C = \text{tr} C \oplus \dots \oplus \text{tr}^{1/5}(C^5) = (125)^{1/4} \approx 3.3437$$

Матрица $\lambda^{-1}C$ и ее степени:

$$\begin{aligned}
 (\lambda^{-1}C)^1 &= \begin{pmatrix} (1/125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/10125)^{1/4} \\ (5)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} \\ (5)^{1/4} & (5)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} \\ (1/125)^{1/4} & (5)^{1/4} & (5)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (5)^{1/4} \\ (81/125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/78125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} \end{pmatrix} \\
 (\lambda^{-1}C)^2 &= \begin{pmatrix} (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/2025)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (1/25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} & (81/15625)^{1/4} & (1/15625)^{1/4} \end{pmatrix} \\
 (\lambda^{-1}C)^3 &= \begin{pmatrix} (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} & (1/1953125)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} \\ (1/3125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (1/5)^{1/4} & (81/3125)^{1/4} & (81/3125)^{1/4} & (1/3125)^{1/4} & (81/3125)^{1/4} \end{pmatrix} \\
 (\lambda^{-1}C)^4 &= \begin{pmatrix} (1)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/390625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} \\ (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/390625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} \\ (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (81/625)^{1/4} & (81/625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} & (1/625)^{1/4} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Матрица клини:

$$\begin{aligned}
 (\lambda^{-1}C)^* &= I \oplus (\lambda^{-1}C)^1 \oplus (\lambda^{-1}C)^2 \oplus (\lambda^{-1}C)^3 \oplus (\lambda^{-1}C)^4 = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (1/5)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/125)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (5)^{1/4} & 1 & (1/5)^{1/4} & (1/25)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (5)^{1/4} & 1 & (1/5)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (125)^{1/4} & (25)^{1/4} & (5)^{1/4} & 1 & (5)^{1/4} \\ (81/125)^{1/4} & (81/625)^{1/4} & (81/3125)^{1/4} & (81/15625)^{1/4} & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Линейно независимые столбцы:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (1/25)^{1/4} \\ (5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (125)^{1/4} & (5)^{1/4} \\ (81/125)^{1/4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} (1/125)^{1/4} \\ (1/25)^{1/4} \\ (1/5)^{1/4} \\ (1)^{1/4} \\ (81/15625)^{1/4} \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} (1/125)^{1/4} & (1/125)^{1/4} \\ (1/25)^{1/4} & (1/25)^{1/4} \\ (1/5)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \\ (1)^{1/4} & (1)^{1/4} \\ (1/125)^{1/4} & (1/5)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} (1)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (6561/125)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1296/125)^{1/4} & (81)^{1/4} \\ (256)^{1/4} & (16)^{1/4} & (1)^{1/4} & (81)^{1/4} \\ (81)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (1)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} (1)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (6561/125)^{1/4} \\ (25)^{1/4} & (1)^{1/4} & (1296/125)^{1/4} & (81)^{1/4} \\ (256)^{1/4} & (16)^{1/4} & (1)^{1/4} & (81)^{1/4} \\ (81)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (2401/5)^{1/4} & (1)^{1/4} \end{pmatrix}$$

Нужные степени матрицы B :

$$B^2 = \begin{pmatrix} (614656/5)^{1/4} & (15752961/625)^{1/4} & (15752961/625)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} \\ (6561)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} & (6561/5)^{1/4} \\ (6561)^{1/4} & (614656/5)^{1/4} & (614656/5)^{1/4} & (1679616/125)^{1/4} \\ (614656/5)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} (4032758016/625)^{1/4} & (1475789056/25)^{1/4} & (1475789056/25)^{1/4} & (4032758016/625)^{1/4} \\ (49787136/5)^{1/4} & (15752961/5)^{1/4} & (15752961/5)^{1/4} & (15752961/5)^{1/4} \\ (157351936/5)^{1/4} & (4032758016/625)^{1/4} & (4032758016/625)^{1/4} & (49787136/5)^{1/4} \\ (49787136/5)^{1/4} & (1475789056/25)^{1/4} & (1475789056/25)^{1/4} & (4032758016/625)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} (377801998336/25)^{1/4} & (9682651996416/3125)^{1/4} & (9682651996416/3125)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} \\ (4032758016/5)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} & (326653399296/625)^{1/4} \\ (1032386052096/625)^{1/4} & (377801998336/25)^{1/4} & (377801998336/25)^{1/4} & (1032386052096/625)^{1/4} \\ (377801998336/25)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} \end{pmatrix}$$

Спектральный радиус матрицы B :

$$\lambda_B = \text{tr} B \oplus \dots \oplus \text{tr}^{1/4}(B^4) = (614656/5)^{1/8} \approx 4.32721$$

Матрица $\lambda^{-1}B$ и ее степени:

$$(\lambda^{-1}B)^1 = \begin{pmatrix} (5/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} \\ (3125/614656)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} & (6561/7503125)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (5/2401)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^{-1}B)^2 = \begin{pmatrix} (1)^{1/8} & (43046721/1024000000)^{1/8} & (43046721/1024000000)^{1/8} & (43046721/1024000000)^{1/8} \\ (1076168025/377801998336)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (1076168025/377801998336)^{1/8} & (1)^{1/8} & (1)^{1/8} & (1)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$(\lambda^{-1}B)^3 = \begin{pmatrix} (43046721/1920800000)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (215233605/40282095616)^{1/8} & (215233605/40282095616)^{1/8} & (215233605/40282095616)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Матрица клини:

$$(\lambda^{-1}B)^* = I \oplus (\lambda^{-1}B)^1 \oplus (\lambda^{-1}B)^2 \oplus (\lambda^{-1}B)^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & 1 & (6561/65536)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (1)^{1/8} & 1 & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & 1 \end{pmatrix}$$

Линейно независимые столбцы:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (2401/1280)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & 1 & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (1)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (1)^{1/8} \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1280/2401)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} \\ (1)^{1/8} \end{pmatrix}$$

Нужные степени матрицы D :

$$D^2 = \begin{pmatrix} (614656/5)^{1/4} & (15752961/625)^{1/4} & (15752961/625)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} \\ (6561)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} & (6561/5)^{1/4} \\ (6561)^{1/4} & (614656/5)^{1/4} & (614656/5)^{1/4} & (1679616/125)^{1/4} \\ (614656/5)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} & (194481/5)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} (4032758016/625)^{1/4} & (1475789056/25)^{1/4} & (1475789056/25)^{1/4} & (4032758016/625)^{1/4} \\ (49787136/5)^{1/4} & (15752961/5)^{1/4} & (15752961/5)^{1/4} & (15752961/5)^{1/4} \\ (157351936/5)^{1/4} & (4032758016/625)^{1/4} & (4032758016/625)^{1/4} & (49787136/5)^{1/4} \\ (49787136/5)^{1/4} & (1475789056/25)^{1/4} & (1475789056/25)^{1/4} & (4032758016/625)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$D^4 = \begin{pmatrix} (377801998336/25)^{1/4} & (9682651996416/3125)^{1/4} & (9682651996416/3125)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} \\ (4032758016/5)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} & (326653399296/625)^{1/4} \\ (1032386052096/625)^{1/4} & (377801998336/25)^{1/4} & (377801998336/25)^{1/4} & (1032386052096/625)^{1/4} \\ (377801998336/25)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} & (119538913536/25)^{1/4} \end{pmatrix}$$

Спектральный радиус матрицы D :

$$\lambda_D = \text{tr} D \oplus \dots \oplus \text{tr}^{1/4}(D^4) = (614656/5)^{1/8} \approx 4.32721$$

Матрица $\lambda^{-1}D$ и ее степени:

$$(\lambda^{-1}D)^1 = \begin{pmatrix} (5/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} \\ (3125/614656)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} & (6561/7503125)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (5/2401)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (5/614656)^{1/8} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^{-1}D)^2 = \begin{pmatrix} (1)^{1/8} & (43046721/1024000000)^{1/8} & (43046721/1024000000)^{1/8} & (43046721/1024000000)^{1/8} \\ (1076168025/377801998336)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (1076168025/377801998336)^{1/8} & (1)^{1/8} & (1)^{1/8} & (1)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^{-1}D)^3 = \begin{pmatrix} (43046721/1920800000)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (215233605/40282095616)^{1/8} & (215233605/40282095616)^{1/8} & (215233605/40282095616)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} & (43046721/1920800000)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} \end{pmatrix}$$

Матрица клини:

$$(\lambda^{-1}D)^* = I \oplus (\lambda^{-1}D)^1 \oplus (\lambda^{-1}D)^2 \oplus (\lambda^{-1}D)^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & 1 & (6561/65536)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (1)^{1/8} & 1 & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & 1 \end{pmatrix}$$

Линейно независимые столбцы:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (2401/1280)^{1/8} & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & 1 & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (1)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (2401/1280)^{1/8} & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & (6561/65536)^{1/8} \\ (32805/614656)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} & (32805/614656)^{1/8} \\ (1)^{1/8} & (1)^{1/8} \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1280/2401)^{1/8} \\ (1280/2401)^{1/8} \\ (1)^{1/8} \end{pmatrix}$$

$$w_{best} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.750000 \\ 0.693288 & 0.693288 \\ 0.924384 & 0.693288 \\ 1.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

$$w_{worst} = \begin{pmatrix} 1.000000 \\ 0.924384 \\ 0.924384 \\ 1.000000 \end{pmatrix}$$

Заключение