

# Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

Ткаченко Егор Андреевич

Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Кафедра статистического моделирования

**Научный руководитель:** доктор физ.-мат. наук, профессор  
Н. К. Кривулин

4 июня 2023 г.

- Рассматриваются задачи в которых на основе парных сравнений альтернатив требуется найти их абсолютный приоритет.
- Для решения существует два подхода — эвристические алгоритмы и аналитические методы.
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в  $\log$ -чебышевской метрике.
- Указанный метод позволяет найти аналитическое решение в терминах  $\max$ -алгебры.
- Цель работы — разработка алгоритмов, способа хранения данных и программных средств, предназначенных для решения задачи принятия решений.

## Многокритериальная задача

- Имеются  $n$  альтернатив  $A_1, \dots, A_n$  принятия решения.
- Имеются  $m$  критериев и для каждого дана матрица  $A_k = (a_{ij}^{(k)})$  парных сравнений альтернатив.
- $a_{ij}^{(k)} > 0$  показывает во сколько раз альтернатива  $A_i$  превосходит альтернативу  $A_j$  в соответствии с критерием  $k = 1, \dots, m$ .
- Дана матрица попарных сравнений критериев  $C = (c_{kl})$ , где  $c_{kl}$  показывает во сколько раз критерий  $k$  важнее  $l$ .
- Требуется на основе матриц  $C$  и  $A_1, \dots, A_m$  определить вектор  $x$  абсолютных рейтингов альтернатив.

## Мах-алгебра

Множество  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  с операциями сложения и умножения.

- Сложение обозначается символом  $\oplus$  и для всех  $x, y \in \mathbb{R}_+$  определено как максимум:  $x \oplus y = \max\{x, y\}$ .
- Сложение обладает свойством идемпотентности:  $x \oplus x = x$ .
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

- Векторные и матричные операции, в том числе операции умножения на скаляр и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию  $\oplus$ .
- След матрицы  $A = (a_{ij})$  порядка  $n$  вычисляется по формуле

$$\text{tr } A = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Спектральный радиус матрицы  $A$  определяется выражением

$$\lambda = \text{tr } A \oplus \cdots \oplus \text{tr}^{1/n}(A^n) = \bigoplus_{i=1}^n \text{tr}^{1/i}(A^i).$$

- При  $\lambda \leq 1$ , определен оператор Клини матрицы  $A$  в виде

$$A^* = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i.$$

- 1 На основе матрицы  $C$  находится вектор весов критериев  $w$

$$w = (\lambda^{-1}C)^*v, \quad v > 0, \quad \lambda = \bigoplus_{i=1}^m \text{tr}^{1/i}(C^i).$$

- 2 Если вектор  $w$  не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший  $w_1$  и наихудший  $w_2$  дифференцирующие векторы весов.
- 3 С помощью векторов  $w_1 = (w_i^{(1)})$  и  $w_2 = (w_i^{(2)})$  строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$B = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(1)} A_i, \quad D = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(2)} A_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для матрицы  $B$ , вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для матрицы  $D$  — наихудший вектор.

- Требуется структура основанная на целочисленных типах с точными операциями, например, для проверки на линейную независимость векторов.
- Введен класс объектов, характеризующийся тройками целых чисел.

## Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Введенный класс объектов с операциями сложения и умножения определяет алгебраическую систему, замкнутую относительно сложения, умножения, извлечения корня.

## Структура A

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{n}_1 = n_1 / \gcd(n_1, n_2), \quad \tilde{n}_2 = n_2 / \gcd(n_1, n_2).$$

- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}}{b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}}\right)^{1/\tilde{n}_1 \cdot \gcd(n_1, n_2) \cdot \tilde{n}_2}.$$

После умножения  $a_1^{\tilde{n}_2} a_2^{\tilde{n}_1}$  и  $b_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1}$  сокращаются на их НОД.

- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{\tilde{n}_2} b_2^{\tilde{n}_1} < a_2^{\tilde{n}_1} b_1^{\tilde{n}_2}.$$



## Структура В

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad p_i \text{ — простые, } a_i \in \mathbb{Q}.$$

Структура реализуется вектором пар натуральных и рациональных чисел с отдельным состоянием для 0.

- Умножение реализуется слиянием векторов множителей.

$$2^3 3^{-2} \times 3^2 5^{-1} = 2^3 3^{-2+2} 5^{-1} = 2^3 5^{-1}.$$

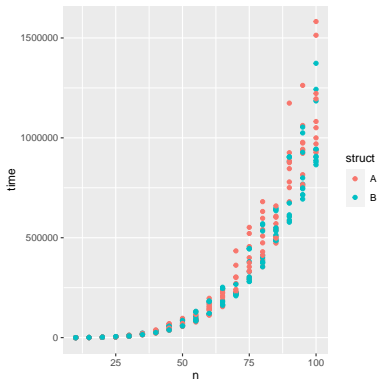
- Пусть  $l$  — наименьший общий множитель знаменателей степеней  $a_i$ , тогда точное сравнение:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a/b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} < 1 \Leftrightarrow p_1^{la_1} p_2^{la_2} \dots p_k^{la_k} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \prod_{i \in \{i | a_i > 0\}} p_i^{la_i} < \prod_{j \in \{j | a_j < 0\}} p_j^{-la_j}. \end{aligned}$$

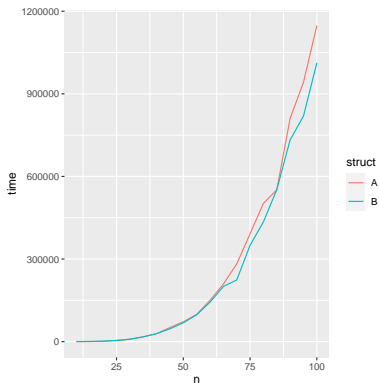
Если приближение  $a/b$  достаточно отличается от единицы, то точное сравнение не производится.

- Тест — вычисление  $(\lambda^{-1}A)^*$ , где  $\lambda$  — спектральный радиус матрицы  $A$ ,  $A$  — случайно сгенерированная матрица парных сравнений  $n \times n$ .
- Асимптотика такого теста —  $O(n^4(t_{\times} + t_{\oplus}))$ , где  $t_{\times}, t_{\oplus}$  — сложность (время) умножения и сложения чисел, соответственно.
- Для каждого значения  $n$  проведено по 10 тестов и найдено среднее время вычисления в миллисекундах.

# Результат сравнения

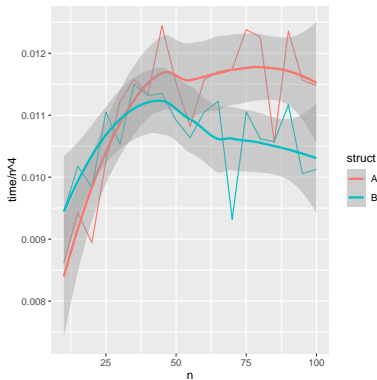


(a) Все тесты

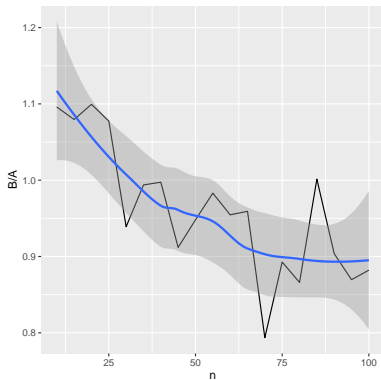


(b) Среднее тестов

# Результат сравнения



(a) Масштабирование по размеру матриц



(b) Отношение времени вычисления B и A

- Структура A быстрее при маленьких  $n$ , начиная с  $n = 30$ , структура B быстрее.
- При размерах матрицы  $n = 100$  структура B лучше на 10%.

На языке C++ были реализованы:

- Описанные структуры
- Расширение библиотеки Eigen для работы с матрицами
- Элементы тропической математики
- Тестирование структур
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в  $\text{\LaTeX}$  для матриц и структур

- Для решения многокритериальных задач парных сравнений разработаны модели представления данных, алгоритмы точных вычислений, их программная реализация и проведено сравнение.
- Полученные результаты могут оказаться полезными для решения других задач, где требуется обеспечить точные вычисления, например для задач криптографии.



Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь. — 1993.



Krivulin Nikolai, Prinkov Alexey, Gladkikh Igor. Using Pairwise Comparisons to Determine Consumer Preferences in Hotel Selection // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 5. — P. 1–25.



Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — 1994.



Tkachenko E. A. Decision making with MaxAlgebra. — 2023. —

Access mode: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7950762>.