Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

Кривулин Н.К., Ткаченко Е.А. СПбГУ

д.ф.-м.н., профессор Кривулин Николай Кимович
Ткаченко Егор Андреевич

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра статистического моделирования

Санкт-Петербург, 2023

Введение

- Рассматриваются задачи в которых на основе парных сравнений альтернатив надо найти их абсолютный приоритет.
- Для решения существует два подхода — эвристические алгоритмы и аналитические методы.
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в log-чебышевской метрике. Данный метод хорошо записывается в терминах max-алгебры.
- Цель работы — разработка алгоритмов, способа хранения данных и программных средств, предназначенных для решения задачи принятия решений.

Многокритериальная задача

- Существует n альтернатив $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ принятия решения.
- Существует m критериев и для каждого дана матрица парных сравнений $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$.
- $a_{ij}^{(k)} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива $\mathcal{A}_i$ превосходит альтернативу $\mathcal{A}_j$ в соответствии с критерием $k = 1, \ldots, m$.
- Дана матрица попарных сравнений критериев $\boldsymbol{C} = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее l.
- Требуется на основе матриц $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ определить вектор $\boldsymbol{x}$ абсолютных рейтингов альтернатив.

Max-алгебра

Множество $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.

- Сложение обозначается символом $\oplus$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$.
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

Матрицы в max-алгебре

- Векторные и матричные операции, в том числе операции со скалярами и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию $\oplus$.
- След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$

- При $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини матрицы $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i.$$

Решение многокритериальной задачи парных сравнений

1. На основе матрицы $\boldsymbol{C}$ находится вектор весов критериев $\boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \qquad \lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{C}^{i}).$$

2. Если вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший $\boldsymbol{w}_1$ и наихудший $\boldsymbol{w}_2$ дифференцирующие векторы весов.
3. С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)} \boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)} \boldsymbol{A}_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для лучшей матрицы $\boldsymbol{B}$, вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для худшей матрицы $\boldsymbol{D}$ — наихудший вектор.

Разработка структуры для хранения чисел

- Желается структура основанная на целочисленных типах с точными операциями из-за проверки на линейную независимость векторов.
- Введен класс объектов, характеризующийся тройками целых чисел.

Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a,b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Введенный класс объектов с операциями сложения и умножения определяет алгебраическую систему, замкнутую относительно сложения, умножения, извлечения корня.

Структура для хранения чисел

Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a,b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n_1 = n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2), \qquad n_2 = n_2^* \cdot \gcd(n_1, n_2).$$

- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}}{b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}}\right)^{1/n_1^* \cdot \gcd(n_1,n_2) \cdot n_2^*}.$$

После умножения $a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}$ и $b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}$ сокращаются на их НОД.

- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*} < a_2^{n_1^*} b_1^{n_2^*}.$$

Реализация

На языке C++ были реализованы:

- Описанная ранее структура $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$
- Элементы тропической математики
  - След матрицы
  - Тропический определитель
  - Транспонированная матрица
  - Спектральный радиус
  - Матрица клини
  - Проверка линейной зависимости векторов
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в LaTeX для матриц и структуры

Пример решения практической задачи

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}
1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 7 & 1 \\
1/3 & 1 & 9 & 1 & 1 & 5 & 1 \\
1/7 & 1/9 & 1 & 1/7 & 1/5 & 1/2 & 1/4 \\
1/5 & 1 & 7 & 1 & 1/4 & 7 & 1/3 \\
1 & 1 & 5 & 4 & 1 & 5 & 3 \\
1/7 & 1/5 & 2 & 1/7 & 1/5 & 1 & 1/6 \\
1 & 1 & 4 & 3 & 1/3 & 6 & 1
\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix}
1 & 9 & 3 \\
1/9 & 1 & 1/5 \\
1/3 & 5 & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix}
1 & 7 & 4 \\
1/7 & 1 & 1/3 \\
1/4 & 3 & 1
\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix}
1 & 1/5 & 1/3 \\
5 & 1 & 2 \\
3 & 1/2 & 1
\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix}
1 & 6 & 3 \\
1/6 & 1 & 1/2 \\
1/3 & 2 & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix}
1 & 1/9 & 1/5 \\
9 & 1 & 4 \\
5 & 1/4 & 1
\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix}
1 & 1/7 & 1/4 \\
7 & 1 & 3 \\
4 & 1/3 & 1
\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_7 = \begin{pmatrix}
1 & 1/7 & 1/3 \\
7 & 1 & 3 \\
3 & 1/3 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Пример решения практической задачи

Результат работы программы:

$$\boldsymbol{x}_{best} = \begin{pmatrix} (1048576/3486784401)^{1/10} \\ (6553600/56950811883)^{1/10} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.44444 \\ 0.40374 \\ 1.00000 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_{worst} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (6561/8750)^{1/10} & (6561/8750)^{1/10} \\ (6561/8750)^{1/10} & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1.00000 & 1.00000 \\ 0.97162 & 0.97162 \\ 0.97162 & 1.00000 \end{pmatrix}.$$

Заключение

- С такой неинтуитивной алгеброй приятно иметь калькулятор.
- В ходе решения задачи принятия решений числа могут стать очень большими, что может быть проблемой при больших размерностях входных матриц. Уже разработана более оптимизированная для max-умножить алгебры структура и ведется ее реализация.
- Разработанная структура может пригодиться и в других областях. Например, отсутствие ошибок округления важно дли криптографии.