

Разработка программных средств и решение задач принятия решений с помощью методов тропической математики

Кривулин Н.К., Ткаченко Е.А. СПбГУ

д.ф.-м.н., профессор Кривулин Николай Кимович
Ткаченко Егор Андреевич

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра статистического моделирования

Санкт-Петербург, 2023

- Рассматриваются задачи в которых на основе парных сравнений альтернатив надо найти их абсолютный приоритет.
- Для решения существует два подхода — эвристические алгоритмы и аналитические методы.
- Одним из аналитических решений является метод аппроксимации матрицы парных сравнений в \log -чебышевской метрике. Данный метод хорошо записывается в терминах \max -алгебры.
- Цель работы — разработка алгоритмов, способа хранения данных и программных средств, предназначенных для решения задачи принятия решений.

Многокритериальная задача

- Существует n альтернатив $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ принятия решения.
- Существует m критериев и для каждого дана матрица парных сравнений $A_k = (a_{ij}^{(k)})$.
- $a_{ij}^{(k)} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива \mathcal{A}_i превосходит альтернативу \mathcal{A}_j в соответствии с критерием $k = 1, \dots, m$.
- Дана матрица попарных сравнений критериев $C = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее l .
- Требуется на основе матриц C и A_1, \dots, A_m определить вектор x абсолютных рейтингов альтернатив.

Мах-алгебра

Множество $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.

- Сложение обозначается символом \oplus и для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$.
- Умножение определено и обозначается как обычно.
- Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей.
- Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

- Векторные и матричные операции, в том числе операции со скалярами и возведение в натуральную степень, выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию \oplus .
- След матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n

$$\text{tr } A = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Спектральный радиус матрицы A

$$\lambda = \text{tr } A \oplus \cdots \oplus \text{tr}^{1/n}(A^n) = \bigoplus_{i=1}^n \text{tr}^{1/i}(A^i).$$

- При $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини матрицы A

$$A^* = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i.$$

- 1 На основе матрицы C находится вектор весов критериев w

$$w = (\lambda^{-1} C)^* v, \quad v > 0, \quad \lambda = \bigoplus_{i=1}^m \text{tr}^{1/i}(C^i).$$

- 2 Если вектор w не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший w_1 и наихудший w_2 дифференцирующие векторы весов.
- 3 С помощью векторов $w_1 = (w_i^{(1)})$ и $w_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$B = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(1)} A_i, \quad D = \bigoplus_{i=1}^m w_i^{(2)} A_i.$$

4. Повторяя действия пунктов 1 и 2 для лучшей матрицы B , вычисляется наилучший вектор рейтингов альтернатив, а для худшей матрицы D — наихудший вектор.

- Желается структура основанная на целочисленных типах с точными операциями из-за проверки на линейную независимость векторов.
- Введен класс объектов, характеризующийся тройками целых чисел.

Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Введенный класс объектов с операциями сложения и умножения определяет алгебраическую систему, замкнутую относительно сложения, умножения, извлечения корня.

Структура

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a \in \mathbb{N} \cup 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad \gcd(a, b) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n_1 = n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2), \quad n_2 = n_2^* \cdot \gcd(n_1, n_2).$$

- Умножение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} \times \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} = \left(\frac{a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}}{b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}}\right)^{1/n_1^* \cdot \gcd(n_1, n_2) \cdot n_2^*}.$$

После умножения $a_1^{n_2^*} a_2^{n_1^*}$ и $b_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*}$ сокращаются на их НОД.

- Сравнение

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1/n_1} < \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1/n_2} \Leftrightarrow a_1^{n_2^*} b_2^{n_1^*} < a_2^{n_1^*} b_1^{n_2^*}.$$

На языке C++ были реализованы:

- Описанная ранее структура $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$
- Элементы тропической математики
 - След матрицы
 - Тропический определитель
 - Транспонированная матрица
 - Спектральный радиус
 - Матрица клини
 - Проверка линейной зависимости векторов
- Решение многокритериальной задачи парных сравнений
- Метод вывода в \LaTeX для матриц и структуры

Пример решения практической задачи

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 1/3 & 1 & 9 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1/7 & 1/9 & 1 & 1/7 & 1/5 & 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 7 & 1 & 1/4 & 7 & 1/3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 2 & 1/7 & 1/5 & 1 & 1/6 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1/3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1/3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1/7 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1/6 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1/5 \\ 9 & 1 & 4 \\ 5 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат работы программы:

$$\mathbf{x}_{best} = \begin{pmatrix} (1048576/3486784401)^{1/10} \\ (6553600/56950811883)^{1/10} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.44444 \\ 0.40374 \\ 1.00000 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{worst} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (6561/8750)^{1/10} & (6561/8750)^{1/10} \\ (6561/8750)^{1/10} & 1 \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \begin{pmatrix} 1.00000 & 1.00000 \\ 0.97162 & 0.97162 \\ 0.97162 & 1.00000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- С такой неинтуитивной алгеброй приятно иметь калькулятор.
- В ходе решения задачи принятия решений числа могут стать очень большими, что может быть проблемой при больших размерностях входных матриц. Уже разработана более оптимизированная для \max -умножить алгебры структура и ведется ее реализация.
- Разработанная структура может пригодиться и в других областях. Например, отсутствие ошибок округления важно для криптографии.