Image-Warping实验报告

王志强

2017 年 6 月 27 日

从输入和输出角度来看，图像变形问题可以转化以下的问题形式：

输入： 给定 n 对样本点 (p_i, q_i)，q_i，$p_i \in \mathbb{R}$，$i = 1, \cdots, n$；

输出： 一个至少连续函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 满足 $f(p_i) = q_i$，$i = 1, \cdots, n$

1 IDW(Inverse Distance Weighted Interpolation Methods)

IDW 插值算法是由 Shepard 提出来的，该方法要求找到满足以下形式的函数：

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p) f_i(p) \tag{1}$$

其中(1) 式还满足以下条件：

- $f_i(x)$ 满足 $f_i(p_i) = q_i$，它是对于点 p_i 的局部近似 $i = 1, 2, \cdots, n$. 对于 f_i，一般使用一次或二次多项式，而多项式系数可以根据数据点处的导数值来确定；

- $\omega_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 权函数且满足条件 $\omega_i(p_i) = 1, \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(p) = 1$，$\omega_i(p) \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

  Shepard 给出以下的一个简单的权函数：

$$\omega_i(p) = \frac{\sigma_i(p)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j(p)} \tag{2}$$

其中：$\sigma_i(p) = (d(p,\ p_j))^{-\mu}$，$d(p,\ p_j)$ 表示点 p 与点 p_j 的距离.

IDW 插值法是一种全局插值法，所以计算复杂度为 $\mathcal{O}(nN)$，其中 n 为样本点个数，而 N 表示需要变换的点的个数.

在确定 $f_i(p) = q_i + D_i(p - p_i)$ ，可考虑下面的误差函数

$$E_i(D) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \omega_i(p_j) \left\| q_i + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} (p_j - p_i) - q_j \right\|^2 \tag{3}$$

(3) 式可以写成如下的矩阵形式

$$E_i(D_i) = \left\| \hat{P}_i D_i^T - \hat{Q}_i \right\|_F^2 \tag{4}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} \end{pmatrix}, W_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{i1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\omega_{in}} \end{pmatrix}, P_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i2} \\ p_{i1} & p_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} \end{pmatrix} Q_i = \begin{pmatrix} q_{i1} & q_{i2} \\ q_{i1} & q_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ q_{i1} & q_{i2} \end{pmatrix} \hat{P}_i = W_i(P - P_i), D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \hat{Q}_i = W_i(Q - Q_i)$$

其中：$\omega_{ij} = \omega_i(p_j)$.
计算 $\min E_i(D_i) = \left\| \hat{P}_i D_i^T - \hat{Q}_i \right\|_F^2$，利用最小二乘法可以得到下面的式子

$$D_i = (\hat{P}_i^T \hat{P}_i)^{-1} \hat{P}_i Q_i \tag{5}$$

实验程序使用的局部近似函数为

$$f_i(x) = x + (q_i - p_i) \qquad \mu = 1 \tag{6}$$

2 RBF(Radial Basis Functions)

该方法是要求我们得到满足以下形式的插值函数

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R(d(p, p_i)) + p_m(p) \tag{7}$$

其中：$\alpha_i \in \mathbb{R}^2$ 是一个系数向量，$P_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一个 m 次的多项式函数，$R(x)$ 是关于实数 $d(p_i,\ p)$ 的函数.

系数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是根据 $f(p_i) = q_i$ 来确定的，通过上面的式子可以得到两个关于 α 的线性方程组，根据方程组就可以计算得出对应的 α.

常用的径向基函数有

薄板样条函数	$\phi(r) = r^2 \ln(r)$
Gauss函数	$\phi(r) = \exp(-cr^2)$
Multi-Quadric	$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$
Inverse Quadric	$\phi(r) = \dfrac{1}{1 + (\varepsilon r)^2}$

实验中取 $R(d)$ 为

$$R(d) = \left(d^2 + r^2\right)^{\frac{\mu}{2}}$$

其中：$r > 0$ 且 $\mu \neq 0$.

RBF 方法也是一种全局插值方法，因此计算复杂度为 $\mathcal{O}(nN)$，其中 n, N 的意义与之前意义是一样的，由于在求解系数 α 时会涉及到两个线性方程组的求解，其对应的复杂度为 $\mathcal{O}(n^3)$. 当 N 很大时，这部分的复杂度可以忽略不计的.

在程序实验中，选取的转变函数为

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left((d_i(\mathbf{p}))^2 + r^2\right)^{\frac{\mu}{2}} + \mathbf{p} \tag{8}$$

其中 r 是已知的.

3 实验结果

编程软件：Matlab

IDW 法测试结果

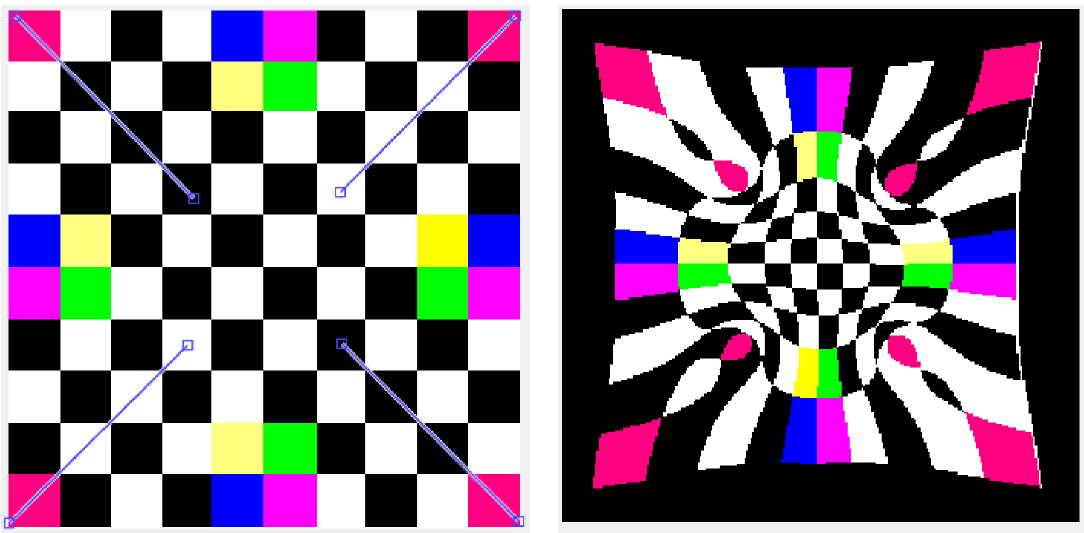

图 1: $\mu = 1$ 情形

RBF 测试结果：

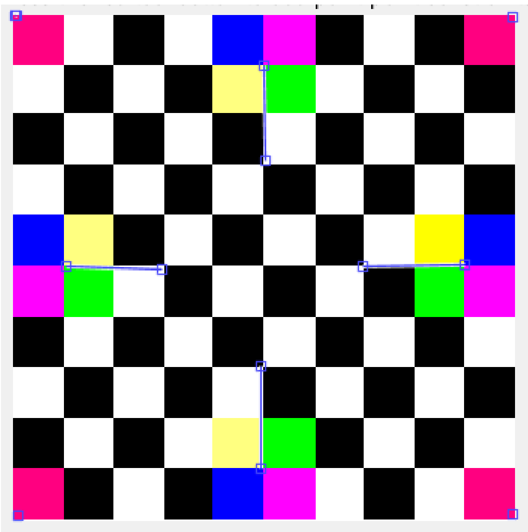

图 3: 原始图形以及插值结点选取

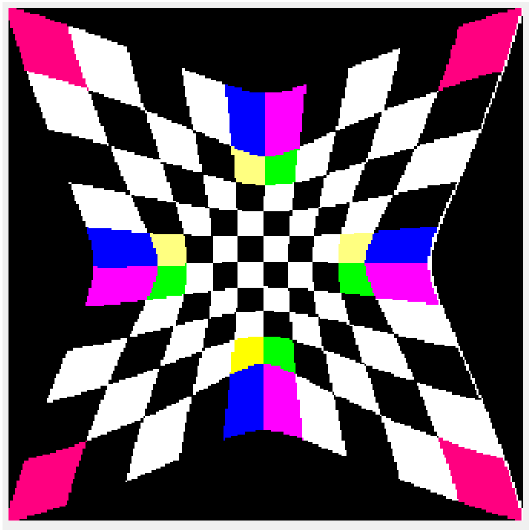

图 4: $r = 10$, $\mu = 1$情形

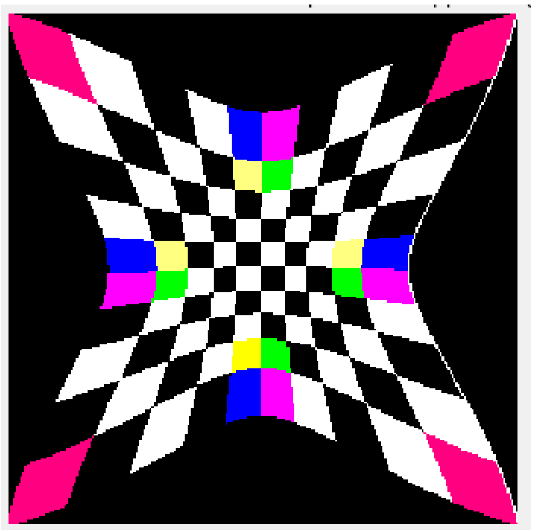

图 5: $r = 30$, $\mu = 1$ 情形

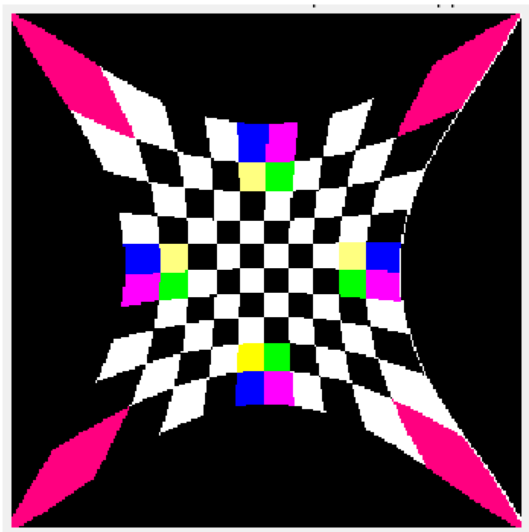

图 6: $r = 100$, $\mu = 1$ 情形