量子コンピュータで学ぶ
量子プログラミング入門

MARU LABO

第一章　量子情報理論の三つの基本原理

本章の内容　　　　[全体目次 (./Contents.ipynb)](./Contents.ipynb)

量子情報理論には、次の三つの基本原理がある。

1. **重ね合わせの原理**

2. **観測の原理**

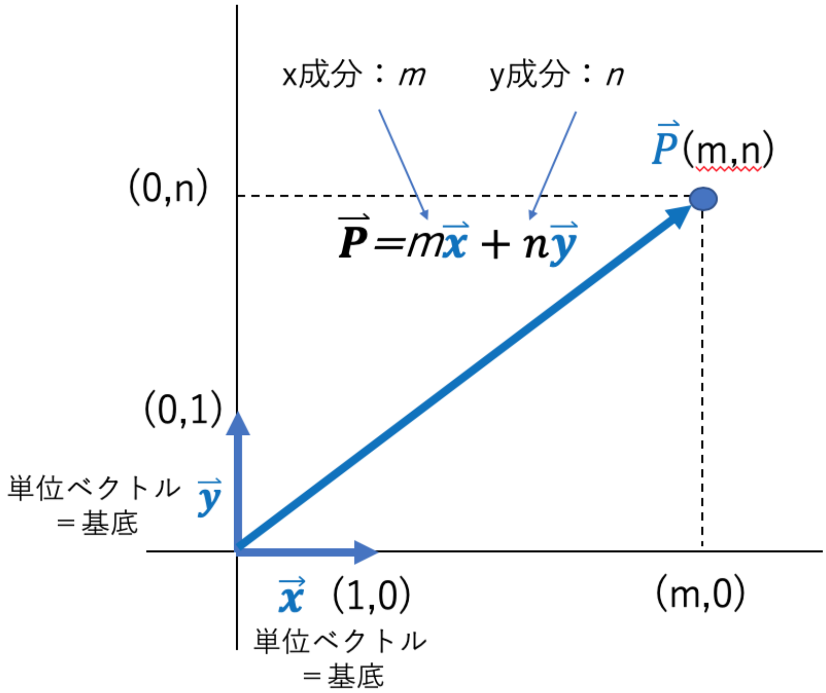
3. **ユニタリ発展の原理**

1. 重ね合わせの原理

qubitの状態は、互いに直交する二つのベクトルの和として、列ベクトルで表される。

x-y平面との類似で考える

- それは、x-y平面上の任意の点を表すベクトルが、x軸方向のベクトルとy軸方向のベクトルの和として表されるのと同じである。
- x-y平面で、二つのx軸方向の長さ1のベクトル(1,0) をx、y軸方向の長さ1のベクトル(0,1)をyとすると、原点から点P(m,n)に向かうベクトルPは、P=mx+ny=m(1,0)+n(0,1) と表すことができる。
- この時、mをPの「x成分」、nをPの「y成分」という。
- また、二つの単位ベクトル x(1,0), y(0,1)を、**「基底」ベクトル**と呼ぶ。



qubitの場合の重ね合わせ

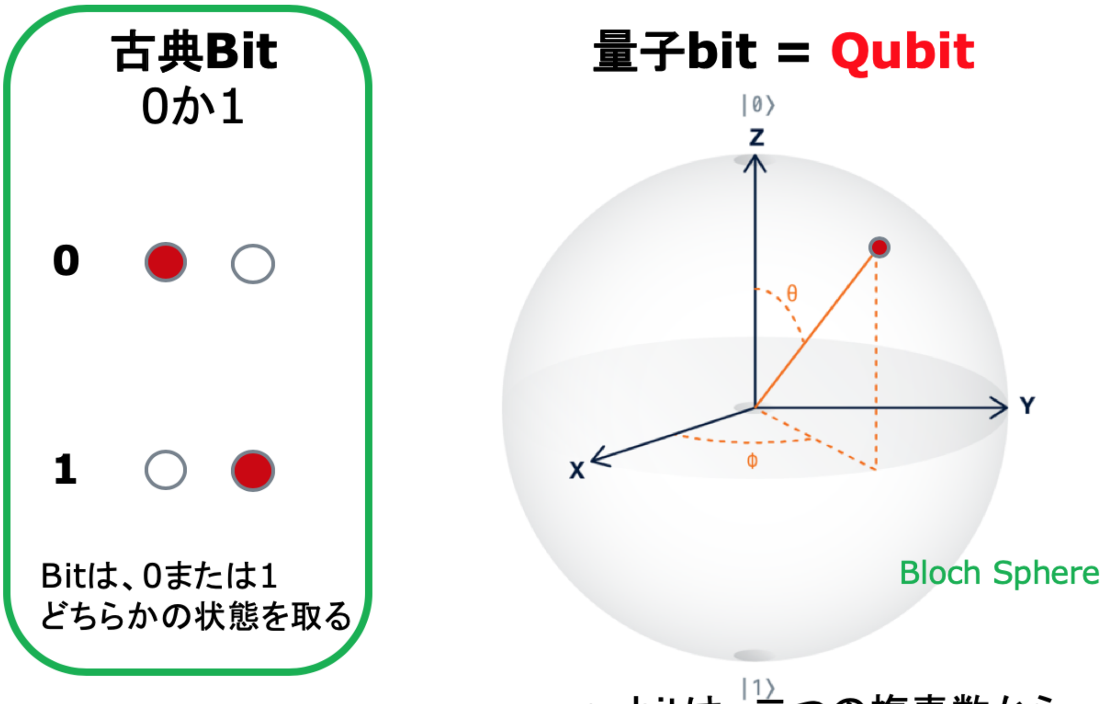
- x-y平面の場合ベクトルの成分は実数だが、qubitの重ね合わせの場合には、その成分は **複素数** となる。qubitの状態は、二つの複素数のペアで定義される。
- x-y平面の場合、基底 x(1,0), y(0,1)は、行ベクトルとして表現されるが、qubitの基底は、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と、**列ベクトル** で表現される。
- x-y平面の成分(m,n)を持つ任意のベクトルが、二つの基底ベクトル x(1,0), y(0,1)を用いて、(m,n)=m(1,0)+n(0,1)と表すことができるように、qubitの成分を$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$とする時、$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$と表すことができる。
- ただし、qubitの成分 α, βは、次の条件を満たす。$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

ket記法

- Aが列ベクトルの時、それを$|A\rangle$と表す。これを **ket記法** と呼ぶ。
- qubitの基底である二つの列ベクトルを、$|0\rangle, |1\rangle$と表す。すなわち、$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$とする。
- この時、任意のqubitの状態$|\psi\rangle$は、$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ （ただし$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$）と表される。

一般化

- qubitの状態は、二つの複素数を成分とする列ベクトルで表現されるが、任意の量子状態$|\psi\rangle$は、n個の基底$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \cdots, |n-1\rangle$を持つn個の複素数$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{n-1}$を成分とする列ベクトルで表現される。
$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha|2\rangle + \cdots + \alpha_{n-1}|n-1\rangle$
- この時、各成分の絶対値の二乗を全て加えた値は、１に等しくなければならない。
$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha|_2|^2 + \cdots + |\alpha_{n-1}|^2 = 1$



bitは、整数値を取り、離散的

qubitは、二つの複素数からなり、連続的

qubitを決める複素数c_0,c_1は、それぞれ2つの実数からなるが、$|c_0|^2+|c_1|^2=1$という条件があるので、自由度は一つ減って、qubitを決めるのは、3つの実数である。

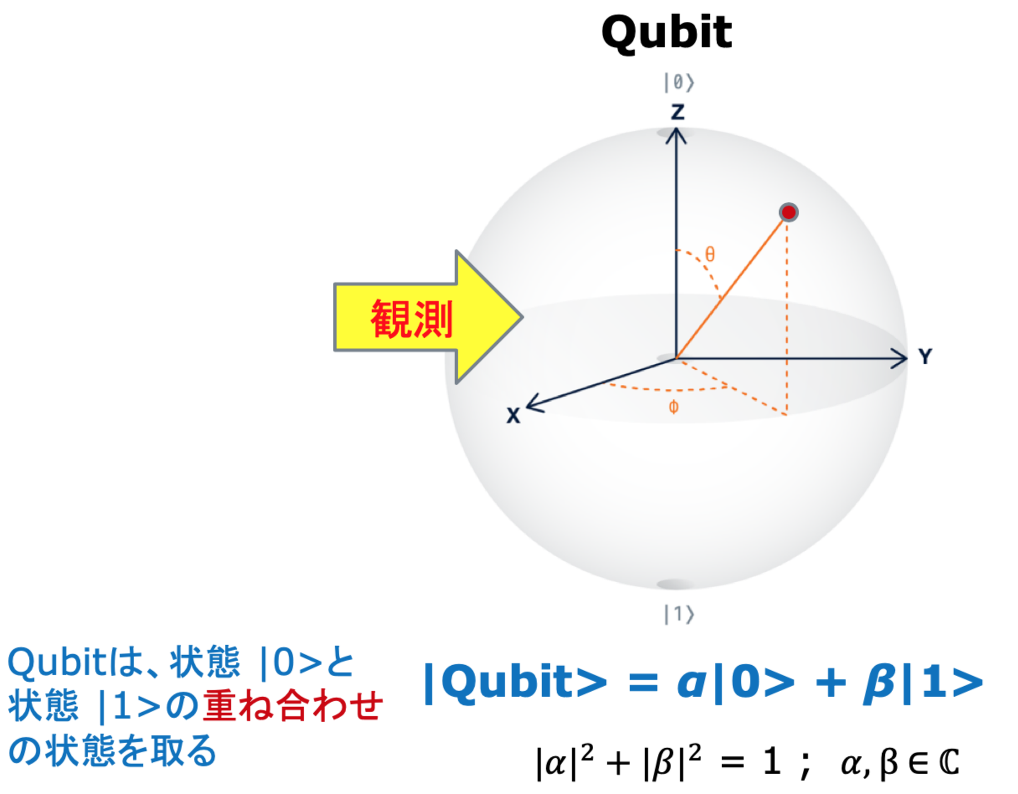
2. 観測の原理

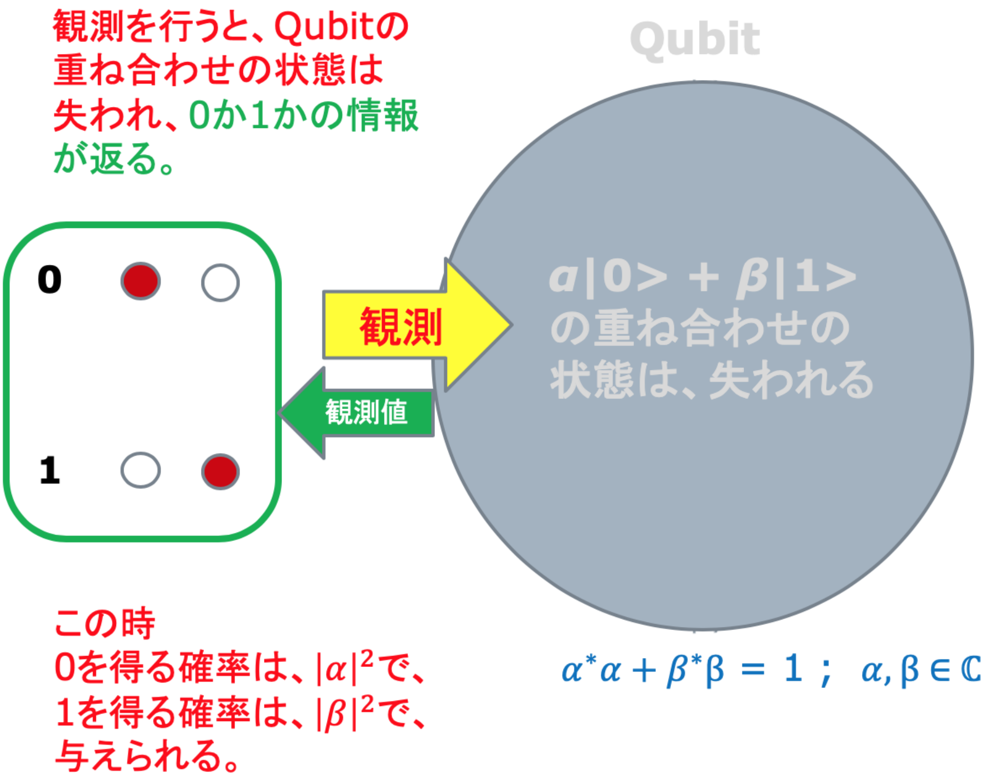
qubitを観測すると、重ね合わせの状態は失われて、古典bit 0か1が観測される

一般に、n個の基底からなる量子の状態を観測すると、重ね合わせの状態は失われて、その基底の一つが観測される。

qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$を観測した時、$|0\rangle$ (古典bit 0に対応)が観測される確率は$|\alpha|^2$、$|1\rangle$ (古典bit 1に対応)が観測される確率は$|\beta|^2$に等しい

一般に、先の量子の状態 $|\psi\rangle$を観測した時、重ね合わせの状態が失われて、基底$|i\rangle$が観測される確率は、$|\alpha_i|^2$に等しい。 $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha|_2|^2 + \cdots + |\alpha_{n-1}|^2 = 1$という条件は、観測によって、いずれかの基底が観測されるという条件と等しい。





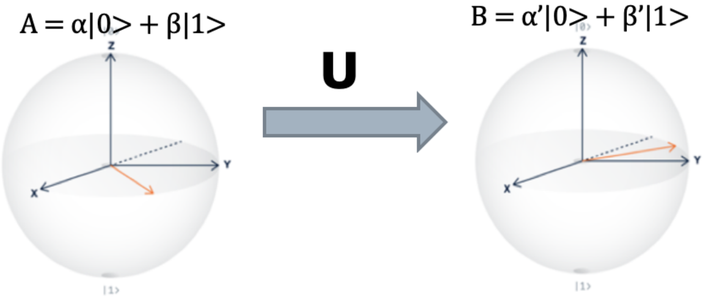
3. ユニタリ発展の原理

量子の状態$|\psi_0\rangle$が$|\psi_1\rangle$に変化したとする。この時、$|\psi_1\rangle = U|\psi_1\rangle$となるユニタリ行列$U$が存在する

ユニタリ行列

- UU† = U†U = I (単位行列)を満たす行列を、ユニタリ行列と呼ぶ。
- ユニタリ変換Uは、幾何的には、ベクトルの長さを変えないベクトルの回転である。
- 量子の状態ベクトル |A>は、このユニタリ演算子によって、他の状態 |B> に変換される。

U |A> = |B>



数学的準備 1

量子コンピュータを理解するのに、
なぜベクトルと行列の計算が必要なのか?

- 量子の状態は、ベクトルとして表現される。
- 量子の状態の変化は、ベクトルの変化として表現される。
- あるベクトルを他のベクトルに変化させる作用を持つものを「演算子」という。
- 演算子は、行列で表現される。

量子の状態Aが状態Bに変わったとしよう。それは、
量子の状態ベクトル|A>が状態ベクトル|B>に変わったということ。
この変化を引き起こした演算子をUとすると、

|B> = U(|A>) = U|A>

と書くことができる。ここで、|A>, |B>はベクトルで、Uは行列である。

□ 例えば、qubitの状態 $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$が、$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}$ に変わったとしよう。
この変化を起こす演算子（行列）が、$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$であることは、
次の計算でわかる。

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

量子の状態の変化は、
行列とベクトルの積で
計算できる！

行ベクトルと列ベクトルのスカラー倍と和

□ $m\,(a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ a_n) = (ma_1\, ma_2\, ma_3 \ldots\ ma_n)$

□ $m \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mb_1 \\ mb_2 \\ mb_3 \\ \vdots \\ mb_n \end{pmatrix}$

□ $(a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ a_n) + (b_1\, b_2\, b_3 \ldots\ b_n) = (a_1{+}b_1\ \ldots\ a_n{+}b_n)$

□ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

行列のスカラー倍

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

行列の和

二つの行列は、それが同じ型を持つならば互いに加えることができる。
***m* 行 *n* 列の行列同士の和は、成分ごとの和である。**

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 & 6+(-2) \\ -7+3 & 8+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

行ベクトルと列ベクトルの内積

- 行ベクトルと列ベクトルの次数が等しい時、その「内積」を、次の式で定義する。

- Row・Column $= (a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

行列と列ベクトルの積

n行m列の行列と m次の列ベクトルの積は、n 次の列ベクトルになる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{c_1} \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \boxed{c_2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

c_nは、行列Aのn行目とBとの内積：$a_{n1}b_1+a_{n2}b_2+ \ldots + a_{nm}b_m$

行列の積

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

c_{ij}は、行列Aのi行目 $(a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ \ldots\ a_{im})$と
行列Bのj列目$(b_{j1}\ b_{j2}\ b_{j3}\ \ldots\ b_{jm})^T$ との内積：
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+ \ldots + a_{im}b_{mj}$

行列の転置 Transpose

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列の転置の例 Transpose

例えば、 A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の時、

A^{T}= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ である。

行列Aのすべての要素の、複素共役をとることをA*で表す。
例えば、 B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3i \\ 4 & 5+i & 6 \\ -7i & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の時、
B^*= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3i \\ 4 & 5-i & 6 \\ 7i & 8 & 9 \end{pmatrix}$ である。

行列 M の複素共役 $M^\dagger$

行列Mの複素共役を、Mの転置行列 M^{T} の各要素の複素共役をとったものとし、$M^\dagger$ で表す。

$$\mathrm{M}^\dagger = \left[\mathrm{M}^T\right]^*.$$

[前の章へ (./0_index.ipynb)](./0_index.ipynb) [全体目次 (./Contents.ipynb)](./Contents.ipynb) [次の章へ (./2_circuit.ipynb)](./2_circuit.ipynb)

In [ ]:

```

```