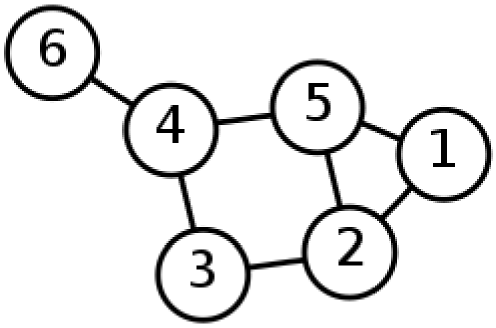
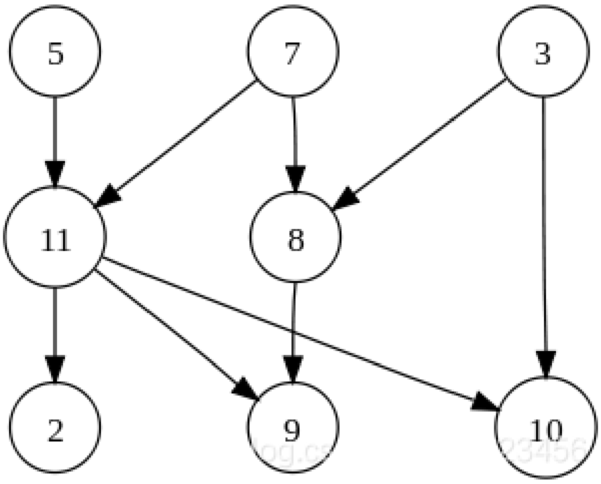
图是由顶点V VV集和边E EE集构成，因此图可以表示成G = (V , E) G=(V, E)G=(V,E)。



我们可以说这张图中，有点集V = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } V={1, 2, 3, 4, 5, 6}V={1,2,3,4,5,6}，边集E = { (1 , 2) , (1 , 5) , (2 , 3) , (2 , 5) , (3 , 4) , (4 , 5) , (4 , 6) } E={(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (4, 6)}E={(1,2),(1,5),(2,3),(2,5),(3,4),(4,5),(4,6)}。在无向图中，边(u , v) (u, v)(u,v)和边(v , u) (v, u)(v,u)是一样的，因此只要记录一个就行了。也就是说方向是无关的。



有向图也很好理解，就是加上了方向性，顶点(u , v) (u, v)(u,v)之间的关系和顶点(v , u) (v,u)(v,u)之间的关系不同。例如你欠我的钱和我欠你的钱是万万不能混淆的。

加权图：与加权图对应的就是无权图，或叫等权图。如果一张图不含权重信息，我们就认为边与边之间没有差别。不过，具体建模的时候，很多时候都需要有权重，比如对中国重要城市间道路联系的建模，总不能认为从北京去上海和从北京去广州一样远(等权)。

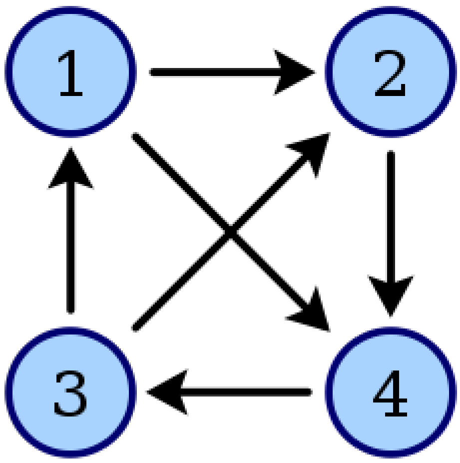
完全图：每一对顶点间都存在一条边的图。

无向图中，任意两个顶点间都有边，称为无向完全图。

两个重要关系：

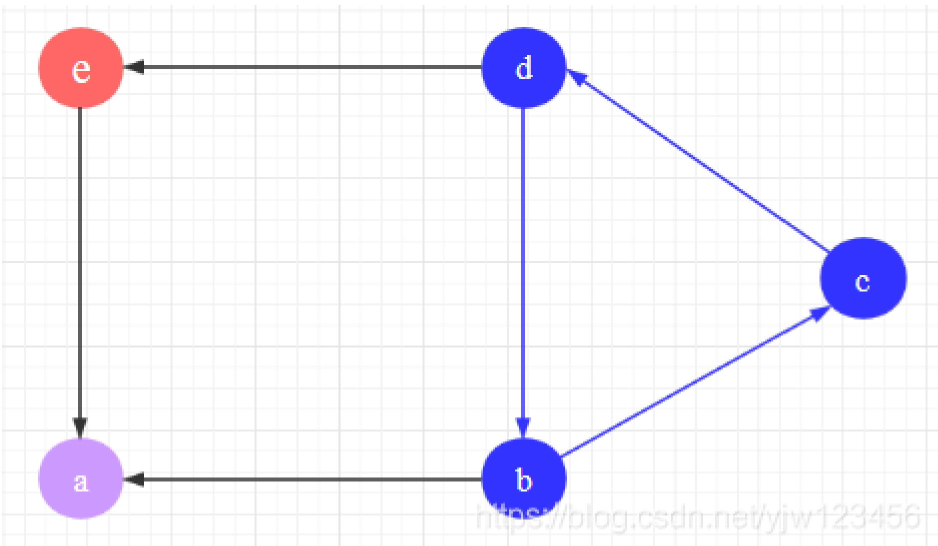
> **邻接(adjacency)**：邻接是两个顶点之间的一种关系。如果图包含(u , v) (u,v)(u,v)，则称顶点v vv与顶点u uu邻接。当然，在无向图中，这也意味着顶点u uu与顶点v vv邻接。 关联(incidence)：关联是边和顶点之间的关系。在有向图中，边(u , v) (u,v)(u,v)从顶点u uu开始关联到v vv，或者相反，从v vv关联到u uu。 注意，有向图中，边不一定是对称的，有去无回是完全有可能的。细化这个概念，就有了顶点的入度(in-degree)和出度(out-degree)。无向图中，顶点的度就是与顶点相关联的边的总数，没有入度和出度。在有向图中，我们以上图为

> 例，顶点10有2个入度，3 → 10 3\rightarrow103→10，11 → 10 11\rightarrow1011→10，但是没有从10指向其它顶点的边，因此顶点10的出度为0。
>
> **路径(path)**：依次遍历顶点序列之间的边所形成的轨迹。注意，依次就意味着有序，先1后2和先2后1不一样。 简单路径：没有重复顶点的路径称为简单路径。说白了，这一趟路里没有出现绕了一圈回到同一点的情况，也就是没有环。



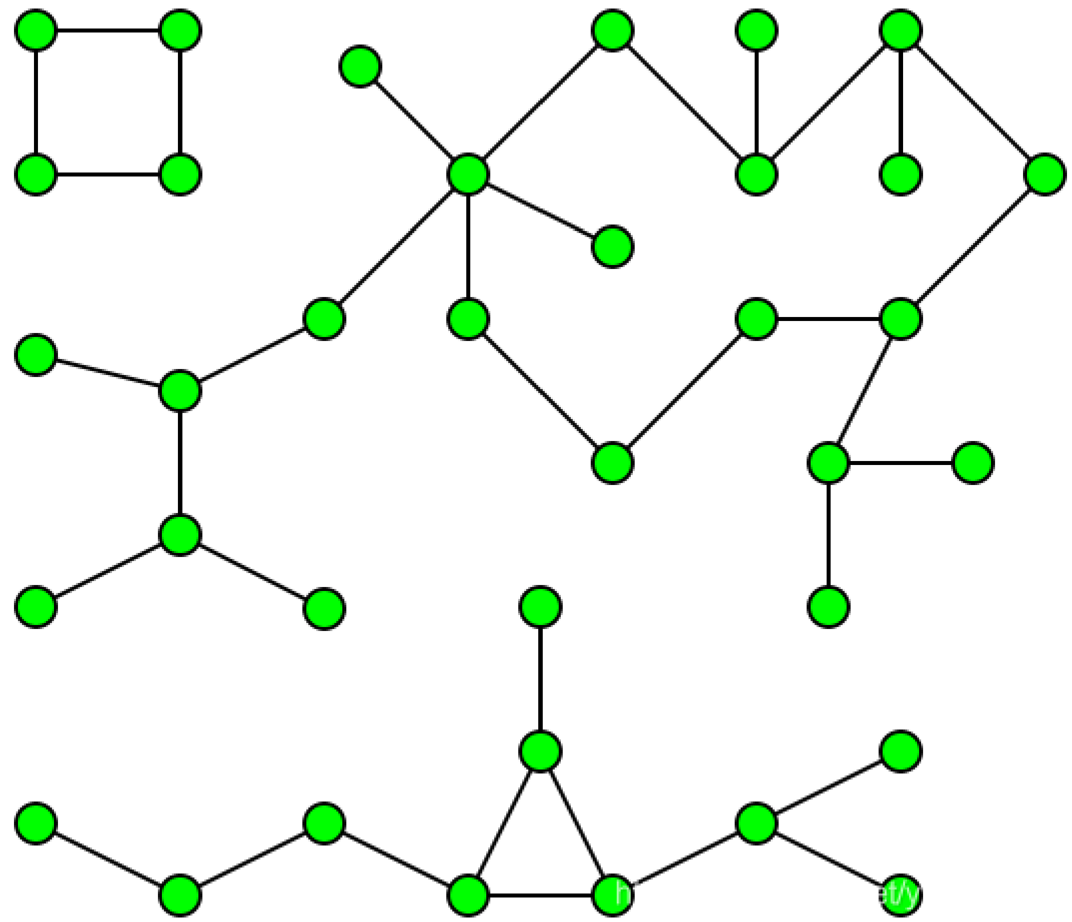
环：包含相同的顶点两次或者两次以上。上图中的顶点序列< 1 , 2 , 4 , 3 , 1 > <1,2,4,3,1><1,2,4,3,1>，1出现了两次，当然还有其它的环，比如< 1 , 4 , 3 , 1 > <1,4,3,1><1,4,3,1>。 **无环图**：没有环的图，其中，有向无环图有特殊的名称，叫做DAG(Directed Acyline Graph)（最好记住，DAG具有一些很好性质，比如很多动态规划的问题都可以转化成DAG中的最长路径、最短路径或者路径计数的问题）。

连通的：无向图中每一对不同的顶点之间都有路径。如果这个条件在有向图里也成立，那么就是强连通的。下图中的图不是连通的，因为看到a aa和d dd之间没有通路。

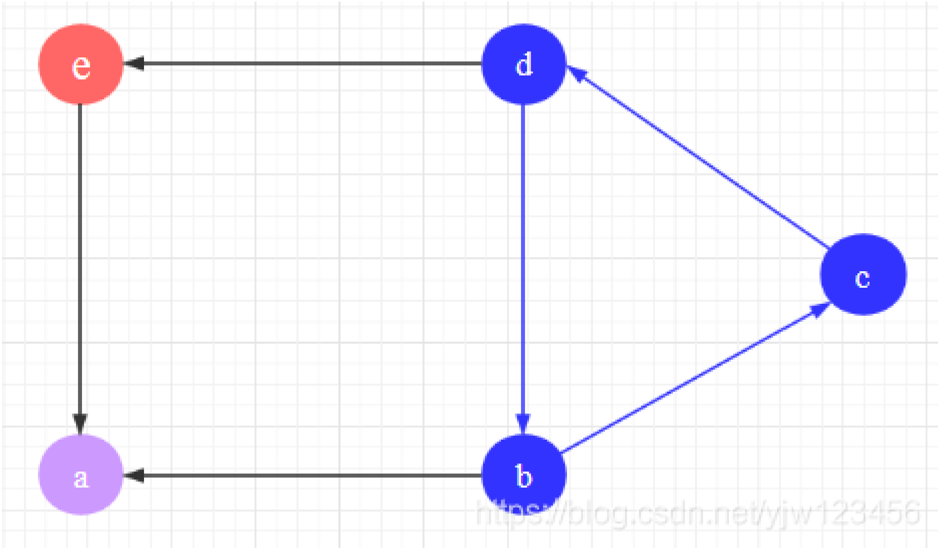


连通分量：不连通的图是由2个或者2个以上的连通子图组成的。这些不相交的连通子图称为图的连通分量。

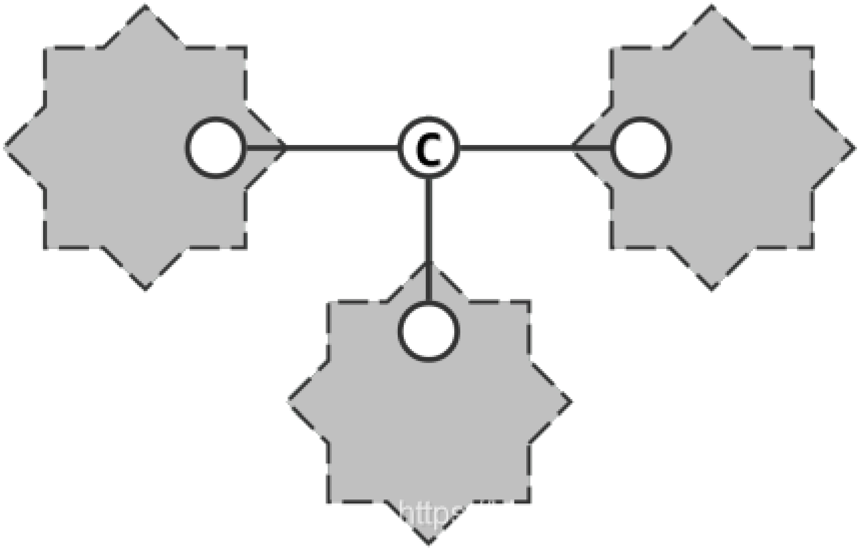
比如下图中有三个连通分量



有向图的连通分量：如果某个有向图不是强连通的，而将它的方向忽略后，任何两个顶点之间总是存在路径，则该有向图是弱连通的。若有向图的子图是强连通的，且不包含在更大的连通子图中，则可以称为有向图的强连通分量。 下图中，a aa、e ee没有到{ b , c , d } {b,c,d}{b,c,d}中的顶点的路径，所以各自是独立的连通分量。因此，图中有三个强连通分量，用集合写出来就是：{ { a } , { e } , { b , c , d } } {{a}, {e}, {b, c, d}}{{a},{e},{b,c,d}}（已经用不同颜色标出）。



关节点(割点)：某些特定的顶点对于保持图或连通分支的连通性有特殊的重要意义。如果移除某个顶点将使图或者分支失去连通性，则称该顶点为关节点。如下图中的c 。



关节点的重要性不言而喻。如果你想要破坏互联网，你就应该找到它的关节点。同样，要防范敌人的攻击，首要保护的也应该是关节点。在资源总量有限的前提下，找出关节点并给予特别保障，是提高系统整体稳定性和鲁棒性的基本策略。 桥(割边)：和关节点类似，删除一条边，就产生比原图更多的连通分支的子图，这条边就称为割边或者桥。

实现方式

常见的实现方式有两种

邻接矩阵

假定图中顶点数为v,邻接矩阵通过长、宽都为v的二维数组实现，若稀疏图(图中边的数目较少)通过邻接矩阵，会浪费很多内存空间。

邻接链表

通过代码实现时，我们进行一个优化，不使用链表这种数据结构，而是用集合（不会存在相同元素）。这种实现方式也可以叫做邻接集。

相关算法 无向图 无向图的深度优先搜索和广度优先搜索寻路

无向图的连通分量计算

有向图 在有向图中，边是有方向的。有向图中，顶点的出度为该顶点出发的边的总数，入度为指向该顶点的边的总数。

我们重点学习下有向图的算法，有：

有向图的可达性与寻路 环和有向无环图相关算法 包括调度问题、检测是否有环、拓扑排序 有向图的强连通分量计算算法详解 最小生成树 加权图是一种为每条边关联一个权值(可表示成本、时间等)的图模型。这种图能表示许多场景，如航空图中边表示航线，权值表示距离或费用。在航空图中，通常的问题是如何使距离或费用最小化。

我们可以通过加权无向图的最小生成树来解决这个问题。

图的生成树：是它的一颗含有其他所有顶点的无环连通子图。一幅加权无向图的最小生成树(MST)是它的一颗权值最小的生成树(树中所有边的权值之和最小)。

我们会一起学习计算最小生成树的两种经典算法：Prime算法和Kruskal算法。

首先有几个注意点：

只考虑连通图 边的权值可以表示距离、时间、费用或其他变量 边的权重可能是0或负数 所有边的权重都不相同 我们要在一幅加权连通无向图中找到它的最小生成树。

首先定义一下加权无向图的数据结构

最小生成树算法：Prim算法和Kruskal算法

最短路径 我经常用百度地图来获取从A地到B地最快的走法是什么。该问题的其实就是最短路径问题：找到从一个顶点到达另一个顶点的成本(时间)最小的路径。

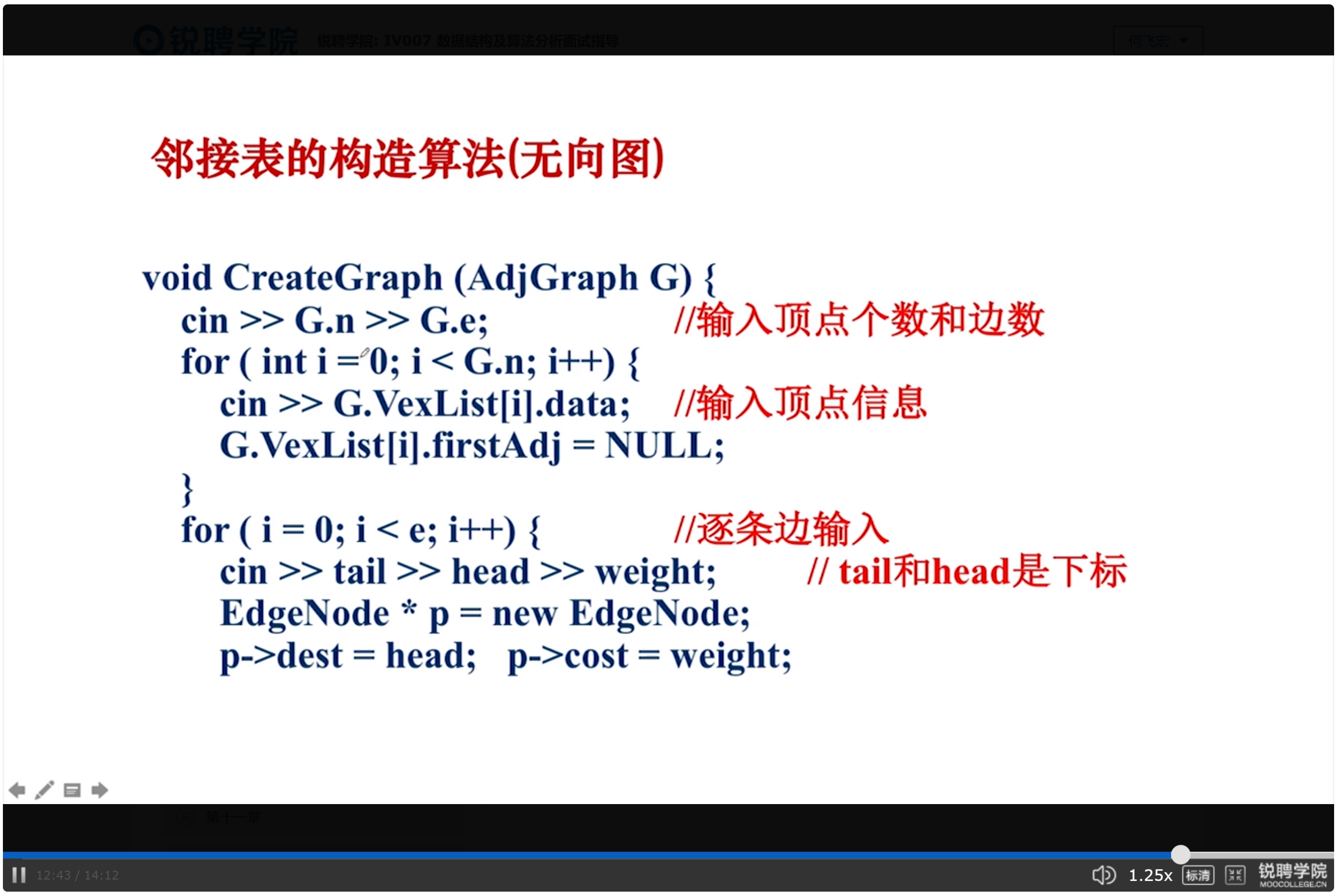
我们采用加权有向图模型作为数据结构。

在一幅加权有向图中，从顶点s到顶点t的最短路径是所有从s到t的路径中的权重最小者

单点最短路径：给定一幅加权有向图和一个起点s，找出最短(总权重最小)的那条路径。

首先定义加权有向图的数据结构

然后给出图的最短路径算法实现



邻接矩阵存储图结构

DFS算法

相关结构体定义

```
#include <stdio.h>
#define MAX_GRAPH 100
#define MAX_QUEUE 30

typedef struct
{
 char vex[MAX_GRAPH]; /* 顶点 */
 int edge[MAX_GRAPH][MAX_GRAPH]; /* 邻接矩阵 */
 int n; /* 当前的顶点数 */
 int e; /* 当前的边数 */
}GRAPH;

void Create(GRAPH *G); /* 图的邻接矩阵表示法 */
void DFS(GRAPH *G,int k); /* 深度优先遍历 */
int visited[MAX_GRAPH];

int main(int argc, char *argv[])
{
 int i;
 for(i = 0 ; i < MAX_QUEUE ; ++i)
  visited[i] = 0;
 GRAPH G;
 Create(&G);
```

主函数部分

```
}GRAPH;

void Create(GRAPH *G); /* 图的邻接矩阵表示法 */
void DFS(GRAPH *G,int k); /* 深度优先遍历 */
int visited[MAX_GRAPH];

int main(int argc, char *argv[])
{
 int i;
 for(i = 0 ; i < MAX_QUEUE ; ++i)
  visited[i] = 0;
 GRAPH G;
 Create(&G);
 DFS(&G,0);
 return 0;
}

void DFS(GRAPH *G,int k)
{
 int j;
 printf("访问顶点：%c\n",G->vex[k]);
 visited[k] = 1;

 for(j = 0 ; j < G->n ; ++j)
 {
  if(G->edge[k][j] != 0 && visited[j] == 0)
   DFS(G,j);
}
```

创建图

```
void Create(GRAPH *G)
{
 printf("输入顶点数: \n");
 scanf("%d",&G->n);
 printf("输入边数: \n");
 scanf("%d",&G->e);

 getchar();

 int i,j,k,w;
 printf("请输入端点(char型): \n");
 for(i = 0 ; i < G->n ; ++i) /* 建立表头 */
  scanf("%c",&G->vex[i]);

 for(i = 0 ; i < G->n ; ++i) /* 初始化邻接矩阵 */
  for(j = 0 ; j < G->n ; ++j)
   G->edge[i][j] = 0;

 printf("请输入边: \n");
 for(k = 0 ; k < G->e ; ++k)
 {
  scanf("%d%d%d",&i,&j,&w); /* 输入(vi,vj)上的权w */
  G->edge[i][j] = w;
  G->edge[j][i] = w;
 }
}
```

深度优先遍历

```
void DFS(GRAPH *G,int k)
{
 int j;
 printf("访问顶点: %c\n",G->vex[k]);
 visited[k] = 1;

 for(j = 0 ; j < G->n ; ++j)
 {
  if(G->edge[k][j] != 0 && visited[j] == 0)
   DFS(G,j);
 }
}

void Create(GRAPH *G)
```

广度优先遍历

```
void BFS(GRAPH *G,int k)
{
 int queue[MAX_QUEUE]; /* 队列 */
 int front = -1,rear = -1,amount = 0;
 int visited[MAX_GRAPH]; /* 标记已经访问过的元素 */
 int i,j;

 for(i = 0 ; i < MAX_GRAPH ; ++i)
  visited[i] = 0;

 printf("访问顶点%c\n",G->vex[k]);
 visited[k] = 1;

 rear = (rear + 1) % MAX_QUEUE; /* 入队操作 */
 queue[rear] = k;
 front = rear;
 ++amount;

 while(amount > 0)
 {
  i = queue[front]; /* 出队操作 */
  front = (front + 1) % MAX_QUEUE;
  --amount;
```

```
 front = rear;
 ++amount;

 while(amount > 0)
 {
  i = queue[front]; /* 出队操作 */
  front = (front + 1) % MAX_QUEUE;
  --amount;

  for(j = 0 ; j < G->n ; ++j)
  {
   if(G->edge[i][j] != 0 && visited[j] == 0)
   {
    printf("访问顶点%c\n",G->vex[j]);
    visited[j] = 1;

    rear = (rear + 1) % MAX_QUEUE; /* 入队 */
    queue[rear] = j;
    ++amount;
   }
  }
 }
 printf("遍历结束\n");
}

void Create(GRAPH *G)
{
printf("输入顶点数: \n");
```