Lineare Algebra Skript

Arif Hasanic

18. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Logik

1.1.1 Aussagenlogik

Die Aussagenlogik beschreibt einen Sachverherhalt, dem man eindeutig einen Wahrheitswert (wahr, falsch) zuordnen kann. Weiter kann man diese Ausdrücke verknüpfen.
z = x ∧ y, x und y müssen beide wahr sein damit z wahr ist.[1]
Die Erfüllungsmenge eines aussagenlogischen Ausdrucks besteht aus allen Variablen x_i für die der gesamte Ausdrucke wahr ist

$z_1 \Rightarrow z_2$

z_2 ist notwendig für z_1

z_1 ist hinreichend für z_2

1.1.2 Prädikatenlogik

Bei der Prädikatenlogik wird eine Aussage in Subjekt und Prädikt aufgeteilt. Das Subjekt dient als Platzhalter. Der Vorteil ist, dass nun allgemeinere Aussagen erstellt werden können. Beispiel: ß studiert Maschinenbau", wobei s ϵ Studenten.
Die Ergebnismenge besteht dann aus den Aussagen die zutreffen. Prädikate können wie in der Aussagenlogik verknüpft werden und außerdem werden noch sogenannte Quantoren eingführt:

∀: Der Allqunator sagt aus dass Prädikate für alle Elemte der einer Menger gelten (∀ s ϵ Studenten)

∃: Der Existenzquantor Prädikat für mindestens ein Element der Menge wahr ist.

!∃: Dieser Qunator bedeutet, dass das Prädikat für genau ein Subjekt (Element aus Menge) gilt.

1.2 Mengen

Eine Menge besteht aus eindeutig bestimmbaren Objekten die real (z.B. Stifte) oder auch gedacht (z.B. Zahlen) sein können. Eindeutig bestimmbar heißt auch, dass Objekte nicht mehrmals auftauchen können so ist M = 1,2,2,3 = 1,2,3
Mengen könenn auf verschiden beschrieben werden:

Als Aufzählung: M = {1; 7; 12; 836 }

durch Prädikat: M = {x ϵ G : P(x)}
Beispiel: M = {x ϵ $\mathbb{N}$: x > 5   x < 10} = {6, 7, 8, 9}

[1]x bzw. y sind Platzhalter. Beispielsweise könnte für x: 1 > 2 stehen

verbal: „Menge aller Personen, die sich um 11:02 Uhr am 10.03.2020 im H004 befinden“

Außerdem können Mengen in in Beziehung zu einander stehen:

$A \subset B$: Hier ist A eine Teilmenge (Untermenge) von B, d.h. B hat alle Objekte aus A aber auch noch welche die A nicht hat ($\subseteq$ heißt B kann gleich A sein, muss aber nicht)

$A = B$: Die Mengen haben die glecihen Objekte

$A \supset B$: Hier ist A die Obermenge von B (gleich wie oben, wird nur anders gelesen)

1.2.1 Kardinalität

Die Kardinalität einer Menge beschreibt die Mächtigkeit einer Menge bzw. die Anzahl der Elemte in einer Menge. Ist die Menge endlich so kommt eine endliche Zahl raus. Bei unendlichen Mengen wird die Mächtigkeit mit $\aleph$ (aleph) angegeben. Um zu zeigen, dass man die Mächtigkeit einer Menge haben will, werden zwei Querstriche neben der Menge Gescrieben. Beispiele:

$|\emptyset| = |\{\}| = 0$

$|M| = |\{1;\ 2;\ 3;\ 1\}| = 3$

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$|\mathbb{R}| = \aleph_1$

$\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig weil sie als abzählbar gelten, d.h. man kann jder zahl in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ einen Index zuorden, da man $\mathbb{Q}$ als Bruch $\frac{p}{q}$, wobei $p\epsilon\mathbb{N}$, $q\epsilon\mathbb{Z}$, darstellen kann. π ist jedoch eine Zahl, die man nicht durch einen Bruch darstellen kann, weshalb die Zahl auch keine rationale Zahl ist, sondern eine reele Zahl ($\pi\epsilon\mathbb{R}$), oder auch die eulersche Zahl. Da man diesen Zahl keinen Index zuordnen kann (Beweis im Skript vom Prof) gilt $\mathbb{R}$ mächtiger $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

1.2.2 Verknüpfungen von Mengen

Bei der Verknüpfung von Mengen erhält man je nach Verknüpfung wieder eine neue Menge. Verknüpfungen für Mengen sind:

Schnittmenge: $A \cup B$ liefert eine Menge mit allen Objekten die A und B gemeinsam haebn. Gibt es keine Gemeinsamen Objekte so entsteht die leere Menge.

Vereinigungsmenge: $A \cap B$ Liefert eine Menge die Alle Objekte aus A und B in eine neue Menge vereinigt. Sind A und B glecih so ist die Ergebnismenge glecih A und B.

Differenzmenge : A $\setminus$ B Liefert eine Menge mit Objekten die A und B unterschiedlich haben.

Kartesisches Produkt[2]: A $\times$ B Liefert eine Menge welche die Objekte aus A mit den Objekten aus B paart.
Beispiel: A = {1; 2; 3} und B = {2; 4} $\rightarrow$ A $\times$ B = {(1,2); (1,4); (2,1); (2,4); (3,1); (3,4)}[3]

1.3 Realtionen

Eine zweistellige Relation ist eine Teilmenge zwischen A und B (REL $\subseteq$ A $\times$ B), wobei A der Vorbereich von REL und B der Nachbereich von REL ist.
Beispiel: A = Menge aller Dozenten an der RWU
B = Menge aller Studenten an der RWU
a REL b : Dozent a unterrichtet Student b, wobei a ϵ A, b ϵ B

1.3.1 Bestimmte Eigenschaften von Relationen

$\sim$ ersetzt REL weil schreibfaul

Eigenschaft	**Bedingung**
Symmetrie	a $\sim$ b $\Rightarrow$ b $\sim$ a
Asymmetrie	a $\sim$ b $\Rightarrow$ $\neg b$ $\sim$ a
Antisymmetrie	a $\sim$ b $\Rightarrow$ $\neg b$ $\sim$ a $\vee$ a = b
Reflexivität	a $\sim$ a
Irreflexivität	$\neg a$ $\sim$ a
Transitivität	a $\sim$ b $\wedge$ b $\sim$ c $\Rightarrow$ a $\sim$ c

Relationen die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, heißen auch Äquivalenzrelationen. Außerdem kann man auch oft Klassen bilden.
Beispielsweise kann man die Reste beim teilen von zwei natürlichen Zahlen in Klassen packen. So kann bei x mod 3 immer nur 0, 1 oder 2 rauskommen. Jetzt packt man einfach alle x die das Ergebnis 0 produzieren in die Restklasse $\tilde{0}$ bzw. für 1 in $\tilde{1}$ und 2 in $\tilde{2}$. Mit Restklasse kann auch normal"gerchnet werden. So ist $\tilde{2}$ + $\tilde{2}$ = $\tilde{1}$ für x mod 3

1.3.2 Funktion, Abbildung

Eine Funktion ist eine spezielle Relation. Damit f eine Funktion von A nach B ist, muss folgendes gelten:
Zu jedem x ϵ A darf es nur ein einziges y ϵ B geben, also jedem x muss min. ein y Wert zugeordnet werde. Bei einer Funktion muss auch noch gelten, dass ein beliebiger x Wert nur einem y Wert zugeordnet wird. ((x, y) ϵ f $\wedge$ (x, z) ϵ f $\rightarrow$ (y = z))
A heißt auch Definitionsmenge und B heißt Zielmenge. der nachbereich (also die y Werte die von x in B "getroffen"werden) heißt auch Wertevorrat. Bei einer Funktion müssen also noch Mengen angegeben werden, damit diese richtig aufgestellt ist.

[2] wird auch Produktmenge genannt
[3] Man sieht hier das A $\times$ B $\neq$ B $\times$ A

Schreibweise: A $\rightarrow$ B, x $\mapsto$ f(x)[4]
Möchte man Funktionen hintereinander ausführe spricht man von der Komposition von Funktionen. Man schreibt f $\circ$ g oder (f $\circ$ g)(x) oder f(g(x)).
Beispiel: f(x) = x^2 und g(x) = x + 2 $\Rightarrow$ f(g(x)) = f(x+2) = $(x+2)^2$
Weiter Eigenschaften on Funktionen sind Injektivität ($\forall x_1, x_2$: f(x_1) = f(x_2) $\Rightarrow$ x_1 = x_2, also jedem y Wert darf wurde nur ein x-Wert zugeordnet werden) und Surjektivität ($\forall$ y ϵ B: $\exists$ x ϵ A: f(x) = y, also jedem y Wert wurde ein x zugeordnet). Ist eine Funktion injektiv und surjekitv nennt man die Funktion auch bijektiv. Funktionen können umgekehrt werden, also eine FUnktion wird nach x aufgelöst. Im normalfall bekommt man wieder eine Realtion bei der Umkehrung, ist eine Funktion aber nijektiv so ist die Umkehrung der Funktion auch eine Funktion.

1.4 Induktion

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Einführung

Ein lineares Gleichungssystem hat m Gleichungen und n Unbekannte. Die Schreibweise ist:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n &= b_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dabei sind a_{mn} die Koeffizienten und x_n die Unbekannten. Eine Weitere Schreibweise ist die Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \quad \vec{x} \text{ ist der gesuchte Lösungsvektor.}$$

2.2 LGS lösen

Um ein LGS zu lösen bietet sich der Gaus Algorithmus an. Allgemein gesagt versucht man das LGS in eine Treppenform zu bringen, also das man im unteren linken Beriech nur Nullen stehen hat. Dann kan man die Werte rücksubstituieren und bekommt das Ergebnis für das LGS.

[4] f(x) = 3x als Beispiel

2.3 LGS aufstellen

Beim Aufstellen von einem LGS gibt es keine genaue Regel. Man schaut einfach welche Größen variabel und welche konstant sind und schaut dann wie die Größen zusammenspielen und bringt sie dann zusammen.

2.4 Determinanten

Eine Determinante sagt aus ob ein LGS lösbar ist oder nicht. Der einfachtse Fall ist wenn es 2 Gleichungen und 2 Unbekannte gibt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Um die Determinate zu berechnen werden die x Werte nicht gebraucht. Die Determinante ist definiert durch D = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. ist D $\neq 0$ dann gibt es genau eine Lösung. Ist D $= 0$ können noch zwei Fälle auftreten. Wenn $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0 \wedge a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0$ dann gibt es undendlich viele Lösungen . Ist einer der Terme $\neq 0$ dann gibt es keine Lösung. Die Schreibweise lautet

$$\mathrm{D} = \det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Weiter ist D_1 definiert als $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$

und D_2 ist definiert als: $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

Nach der Cramerschen Regel kann man x_1 und x_2 wie folgt berechnen:

$x_1 = \frac{D}{D_1}$ und $x_2 = \frac{D}{D_2}$ Laplace Entwicklung:

Formel von Sarrus:

Das Transponieren der Matrix ändert nicht die Determinante. Wird eine Reihe einer Matrix mit einem Faktor multipliziert, so wird auch der Wert der Determinatne mit dem selben Wert multipliziert.

2.5 Matrizen

Addition: Matrizen werden addiert indem man die positionsgleichen Werte miteinander addiert.
Faktormultiplikation: Eine Matrix kann mit einem Faktor multipliziert werden, indem jedes Element der Matrix mit dem Faktor multipliziert wird.
Multiplikation: Matrizen können nur miteinander multipliziert werden, wenn die erste Matrix so viele Spalten hat wie die zweite Matrix Zeilen. [5]
Es entsthet eine neue Matrix C. Indem man jeweils das i-te Elemte aus der Zeile Von der Matrix A mit dem i-ten Element der Matrix B multipliziert und diese Produkte dann miteinander addiert.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Bei der Matrixinversion wird die Matrix A hingeschreiben (A muss quadratisch sein). Um jetzt A^{-1} zu bekommen scchreibt man noch die Einheitsmatrix (muss gleciher Typ sein). nebdran. Nun wandelt man die matrix mithifle vom Gaus Algorithmus in die Einheitsmatirx um. dabei wendet man jeden Rechenschritt um die zu bewirken auch an der Einheitsmatrix an. Die 'alte' Einheitsmatrix ist jetzt A^{-1}.

[5] (n × m) * (m × k) = (n × k)

3 Vektoren

Einen Vektor kann man entwder als Punkt darstellen oder als eine Strecke die vom Ursprung ausgeht. Wird ein Vektor als Strecke dargestellt wird auch deutlich das ein Vektor eine Länge und eine Richtung hat.

3.1 Koordinatensysteme

Unter gewissen Umständen möchte man ein anderes Koordinatensystem benutzen, um einen Vektor darzustellen.

3.1.1 Polarkoordinaten

Ein Vektor kann auch anstatt durch p_x und p_y durch einen Winkel und eine Länge beschrieben werden. Es gilt:

$p_x = r \cdot \cos\alpha$
$p_y = r \cdot \sin\alpha$
$r = |\vec{p}| = \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2}$
$\alpha = \arctan\dfrac{p_y}{p_x}$

Für den Wert von α muss aber darauf gechtet werden in welchen Quadranten sich der Vektor befindet. Die Strecke die $\dfrac{p_y}{p_x}$ liefert in einem Kreis mehrmals auftauchen kann und arctan immer nur den kleinsten Winkel liefert.

Quadrant	Winkel
Erster und Vierter Quadrant	$\alpha = \arctan\dfrac{p_y}{p_x}$
Zweiter Quadrant	$\alpha = \arctan\dfrac{p_y}{p_x} + \pi$
Dritter Quadrant	$\alpha = \arctan\dfrac{p_y}{p_x} - \pi$

3.1.2 Richtungscosinus

Bei dreidimensinalen Vektoren gilt:

$p_x = r \cdot \cos\alpha$
$p_y = r \cdot \cos\alpha$
$p_z = r \cdot \cos\alpha$
$r = |\vec{p}| = \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2}$
$\alpha = \arctan\dfrac{p_y}{p_x}$

3.1.3 Geokoordinaten

3.1.4 Zylinderkoordinaten

3.2 Rechenoperationen

Addition: zwei Vektoren werden Komponentenweise addiert, also $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

Strecke: will man die Strecke zweischen zwei Punkten A und B muss man A komponentenweise von B subtrahieren uund bekomm einen Vektor. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \\ . \\ . \\ . \\ B_n - A_n \end{pmatrix}$

3.3 Gerade, Ebene

Punkt-Richtungsform: Möchte man mit einem Vektor eine Gerade erstellen braucht man zuerst einen Punkt auf den die Gerade liegen kann. Einen Vektor der die Richtung angibt und einen Fakor ($k \epsilon \mathbb{R}$) für den Vektor. Um einen bestimmten Punkt auf der Gerade anzugeben kann man dann 'k' so wählen da,it eben dieser Punkt erreicht wird. Um eine Ebene darstellen zu können kommt noch ein weiter Vekor mit eigenm Fakotr dazu.

3.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt wird auch inneres Produkt genannt und wird wie folgt berechnet: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\angle \vec{u}\vec{v})$

Um den Winkel zeischen u und v zu finden kann man folgende Formel nehmen: $\arccos \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Der Einheitsvektor eines Vektor berecnet sich durch: $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

3.5 Vektorprodukt

Durch das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) erhält man einen Vektor der rechtwinklig auf zwei anderen Vektoren liegt:

$\vec{a} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$

4 Gruppen, Körper, Vektorräume

4.1 Gruppen

4.2 Körper

4.3 Vektorraum

4.4 Basis

5 Lineare Abbildungen

5.1 Definition

5.2 Darstellung durch Matrix

5.3 Rechenoperationen

5.4 Eigenvektor und Eigenwert