Analysis Formelsammlung

3. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

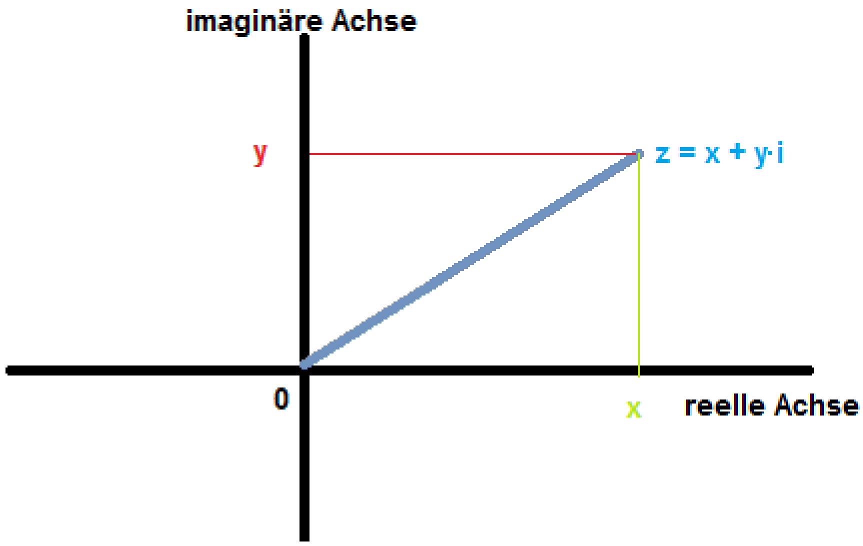
1.1 Definitionen

1.1.1 Definitionen

Die Menge der Komplexen Zahlen werden mit dem Symbol beschrieben.
Sei z ein Element aus $\mathbb{C}$ so gilt:

$$z \,\epsilon\, \mathbb{C} : (z = x + iy \,|\, x, y \,\epsilon\, \mathbb{R})$$

Wobei x der reele Anteil und y der imaginäre Anteil der komplexen Zahl ist.



1.1.2 Formen

Kartesische Form $z = x + y * i$

Trigonometrische Form $r(cos\varphi + i * sin\varphi)$

Herleitung: Es gilt: $x = r * \cos\varphi$, $y = r * \sin\varphi$
$z = x + i * y = r * cos\varphi + i * r * sin\varphi = r(cos\varphi + i * sin\varphi)$,
$r = |z|$

Berechnung von φ**:** Je nachdem, in welchem Quadranten sich z befindet, ändert sich die Formel leicht um φ zu bestimmen.

Allgemein gilt $sin\varphi = \frac{y}{|z|} \rightarrow \varphi = arcsin(\frac{y}{|z|})$

- Quadrant 1: $\varphi = \varphi_{Rechenr}$
- Quadrant 2 : $\varphi = \pi - \varphi_{Rechner}$
- Quadrant 3 : $\varphi = \pi + |\varphi_{Rechner}|$
- Quadrant 4: $\varphi = \varphi_{Rechenr}$

Exponentialform $r * e^{i\varphi}$

Herleitung: Es gilt:$e^{i\varphi} = cos\varphi + i * sin\varphi$
$z = r * (e^{i\varphi} = cos\varphi + i * sin\varphi) = r * e^{i\varphi}$, φ wird wie oben berechnet.

1.1.3 Grundrechenarten

Addieren $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) * i$

Subtrahieren $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2) * i$

Multiplizieren beim multiplizieren wird unterschieden ob mit einem konstanten Faktor oder einer weiteren komplexen Zahl multipliziert wird.

- mit einem Faktor: $a * z = a * x + a * y * i$
- mit einer Komplexen Zahl: $z_1 * z_2 = x_1 * x_2 - y_1 * y_2 + (x_1 * y_2 + x_2 * y_1) * i$

Dividieren $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + (-x_1 * y_2 + x_2 * y_1) * i}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$

Betrag $|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Komplex Konjugiert $z = x \pm y * i \rightarrow z^* = x \mp y * i$

1.1.4 Radiezieren

Wenn aus einer Komplexen Zahl z die n-te Wurzel gezogen wird, entstehen somit auch n verschieden Wurzeln. die allgemeine Formel dafür lautet

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} * e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{m}{n} * 2\pi)}$$

Das n bleibt immer konstant und m startet bei 0 und wird bis $m = n - 1$ hochgezählt wodurch man die n Wurzel herbekommt, lediglich φ und $|z|$ müssen wie oben beschrieben berechnet werden und ggf. muss z in die Exponentialform gebracht werden, um die Berechnungen zu erleichtern.

2 Funktionen

2.1 Nulstellen

$f(x)$ hat Nulstellen wenn gilt x_0 $f(x_0) = 0$

2.2 Symmetrie

Eine Funktion heißt gerade (spiegelsymmetrisch) wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

Eine Funktion heißt ungerade(punktsymmetrisch): $f(-x) = -f(x)$

2.3 Monotonoie

Die Definition für die Monotonie wird unten aufgelistet. Es gilt außerdem: $x_1 < x_2$

- monoton wachsen: $f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monton wachsend: $f(x_1) < f(x_2)$
- monton fallend: $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monton fallend: $f(x_1) > f(x_2)$

2.4 Periodizät

Wenn ein p exisitert mit dem gilt $f(x \pm p) = f(x)$ und $x \pm p$ ist im Definitionsbereich, ist f periodisch mit der Periode p,
p kann auch $\pm k * p$ sein, wobei $k \epsilon \mathbb{N}^*$. Kleinstes positives p nennt man die primitive Periode

2.5 Umkehrfunktion

Funktion f heißt umkehrbahr wenn gilt:

$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oder

wenn f streng monoton ist.

Definitions- und Wertebereich sind bei der Umkehrfunktion "vertauscht".

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, formt man $f(x)$ nach$x$ um und vertauscht danach x und y wodurch man f^{-1} erhält. Oft muss der Definitionsbereich dabei eingeschrängt werden, da z.B. ist die Parabel nur für $x \geq 0$ monton ist (bzw. $x \leq 0$).

2.6 Grenzwert einer Funktion

Exestiert ein g für das gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

so ist g der Grenzwert von f. x_n wird durch den limes immer höher, g kann auch gegen unendlich gehen und g muss auch nicht im Wertebereich . Wenn g nicht inm Wertebereich liegt, so ist g auch die Asymptote.
lim kann auch gegen $-\infty$ oder auch gegen einen Punkt gehen.

2.7 Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion heißt stetig im Punkt x_0:

$f(x_0)$ ist definiert: Beispielsweiße ist $\frac{1}{x}$ nicht stetig in $\mathbb{R}$ jedoch in $\mathbb{R} \setminus 0$ da hier $x_0 = 0$ nicht definiert ist (nicht definierte Werte werden bei der Überprüfung der Stetigkeit nicht berücksichtigt)

$lim_{x\to x_0} : f(x) existiert$: An allen derfinierten Punkten muss ein Grenzwert nach x_0 vorliegen. Es dürfen sozusagen keine Lücken vorhanden sein ($\frac{1}{x}$ mit $\mathbb{R}$ hat z.B. eine Lückefür $x_0 = 0$). Sprü

$lim_{x\to x_0} : f(x) = f(x_0)$: Der Grenzwert an Stelle x_0 muss glecih dem Funktionswert an Stelle x_0 sein.

Ist eine Funktion in jedem Punkt stetig, heißt die komplette Funktion stetig.

2.8 Tabelle mit Funktionen und deren Eigenschaften

2.8.1 Polynomfunktion

Definition $f(x) = a_n * x^n ... a_1 * x + a_0$ wobei n auch der Grad der Funktion ist

Symmetrie Eine Polynomfunktion ist gerade, wenn alle Polynome eine gerad Potenzen haben und ist ungerade, wenn alle Polynome ungerade Exponente haben.

2.8.2 Gebrochenrationale Funktion

Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m * x^m ... a_1 * x + a_0}{b_n * x^n ... b_1 * x + b_0}$ $g(x)$ unf $h(x)$ sind wiedereum Polynomfunktionen. Außerdem wird unterschieden zwischen:

- $n > m$: echt gebrochenrational und
- $n \leq m$ unecht gebrochenrational

Nullstellen $f(x)$ hat Nulstellen wo $g(x)$ Nulstellen hat aber $h(x) \neq 0$ ist.

Pol $f(x)$ hat Pole wo $h(x)$ Nulstellen hat. Wichtig ist, dass zuerst umgerechnet werden muss, da sich teilweise Terme aus dem Bruch rauskürzen könnten. Die Anzahl der Nullstellen in $h(x)$ wird mit k bezeichnet und man spricht von eimem Pol k-ter Ordnung. Ist k gerade, gibt es keinen Vorzeichenwechsel am Pol, ist k ungerade gibt es einen Vorzeichenwechsel.

Asymptote Um die Asymptote zu finden muss zuerst zwischen einer echten und unechten gebrochenrationalen Funktion unterschieden werden.

- Echt gebrochenrational: hat eine Asymptote bei $y = 0$.
- Unecht gebrochenrational: $f(x)$ wird durch Polynomdivison in seine Linearkombination aufgeteilt. $f(x)$ kann nun in eine Polynomfunktion $p(x)$ und eine echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$ augeteilt werden

  $$f(x) = p(x) + r(x)$$

  $r(x)$ strebt gegen 0 weshalb die Asymptote von $p(x)$ gleich der Asymptote von $f(x)$ ist.

Symmetrie je nachdem welche Symmetire die Polynomfunktione haben ist auch die gebrochenrationale Funktoin eine andere Symmetrie.

- Haben $g(x)$ und $h(x)$ die gleiche Symmetrie ist $f(x)$ auch gerade.
- Haben $g(x)$ und $h(x)$ verschiedene Symmetrien so ist $f(x)$ ungerade.
- Haben entweder $g(x)$ oder $h(x)$ (oder beide) keine Symmetire so hat $f(x)$ auch keine Symmetrie.

2.8.3 Potenzfunktion

Funktion $f(x) = x^n$

Symmetrie ist n gerade dann ist auch $f(x)$ gerade

- Ist n gerade dann so ist auch $f(x)$ gerade
- Ist n ungerade dann so ist auch $f(x)$ ungerade

2.9 Kurvendiskussion

Extrema $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

  Maximum $f''(x) < 0$

  Minimum $f''(x) > 0$

Wendepunkt $f'(x) \neq 0 \wedge f''(x) = 0,$

Sattelpunkt $f'(x) = f''(x) = 0$

3 Differntialrechnung

3.1 Ableitungregeln Funktion

Art der Funktion	Funktion	Ableitung
Konstante Funktion	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
Gerade	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n * x^{n-1}$
Exponentialfunktion	$f(x) = a^x$ $f(x) = a^x = e^{xln(a)}$ $f(x) = x^x = e^{x*ln(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{ln(a) * a^x}$ $f'(x) = e^{ln(a)*x} * ln(a)$ $f'(x) = e^{x*ln(x)} * (ln(x) + 1)$
Logarithmusfunktion	$f(x) = ln(x)$ $f(x) = log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{1}{ln(a) * x}$
Trigonometrische Funktionen	$f(x) = sin(x)$ $f(x) = cos(x)$ $f(x) = tan(x)$ $f(x) = cotan(x)$	$f'(x) = cos(x)$ $f'(x) = -sin(x)$ $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$ $f'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$
Arkusfunktionen	$f(x) = arsin(x)$ $f(x) = arcos(x)$ $f(x) = artan(x)$ $f(x) = arcocotan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
Hyperbolfunktion	$f(x) = sinh(x)$ $f(x) = cosh(x)$ $f(x) = tanh(x)$ $f(x) = cotan(x)$	$f'(x) = cosh(x)$ $f'(x) = -sinh(x)$ $f'(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}$ $f'(x) = -\frac{1}{sinh^2(x)}$
Areafunktion	$f(x) = arsinh(x)$ $f(x) = arcosh(x)$ $f(x) = artanh(x)$ $f(x) = arcotan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

3.2 Ableitungsregeln Arithmetik

Regeln	Funktion	Ableitung
Summenregel	f(x) = u(x) + v(x)	f(x)' = u(x)' + v(x)'
Faktorregel	f(x) = c(x) * u(x)	f(x)' = c(x) * u(x)'
Produktregel	f(x) = u(x) * v(x)	f(x)' = u(x)' * v(x) + u(x) * v(x)'
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f(x) = \frac{u(x)' * v(x) - v(x) * u'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	f(x) = u(v(x))	f = u'(v(x)) * v(x)'

4 Integralrechnung

Die Integralrechnung ist die Umkehrung zur Differntialrechnung, weshalb man die Tabelle von der Differntialrechnung nutzen kann indem man sie von rechts nach links lesen kann. Wird eine Funktion f integriert erhält man die Stammfunktion F. Man schreibt auch:

unbestimmtes Integral $\int f(x)dx = F(x)$

bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ wobei a und b das Intervall angeben in dem man integrieren möchte.

4.1 Rechenregeln

Faktorregel $\int c * f(x)dx = c * \int f(x)dx$

Summenregel $\int f(x) + g(x)dx = F(x) + G(x)$

4.2 Integrationsmethoden

partielle Integration $\int f(x) * g(x)dx = F(x) * g(x) - \int F(x) * g'(x)dx$

Hier sollte man schauen, dass man (wenn möglich) die Funktionen zum integrieren und differenzieren so wählt, dass sie im nächsten Schritt 'einfacher' werden. Teilweise hilft es auch wenn nur $f(x)$ vorhanden ist, $g(x) = 1$ zu setzen da ja $1 * f(x) = f(x)$ ergibt.

Integration durch Substitution $\int f(x) \, * \, g(x) \, dx = \int d(F(x) \, + \, C) \, * \, g(x) \, dx$

Sei nun $F(x)+C = u$ und $F(x)+C$ so gewählt dass man $u = g(x)$, bzw. u möglichst ähnlich zu $g(x)$ ist. Dann gilt wiedereum: $\int 1 * u \, du$

Hier wurde jetzt $F(x)$ substituiert. Jetzt kann man, je nach Form der Gleichung schauen welche Regeln man anwednen kann, bzw. ob man in der Ableitungstabelle nachschauen ob direkt integriert werden kann. In diesem Fall kann man einfach integrieren:

$\frac{1}{2}u^2$ jetzt wird noch rücksubstituiert und man komtt auf das Ergebnis: $\frac{1}{2}(F(x)+c)^2$

0 1 2 30 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+