

Analysis Formelsammlung

24. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

1.1	Definitionen	
1.1.1	Definitionen	
1.1.2	Formen	
1.1.3	Grundrechenarten	
1.1.4	Radizieren	

2 Funktionen

2.1	Nulstellen	
2.2	Symmetrie	
2.3	Monotonie	
2.4	Periodizität	
2.5	Umkehrfunktion	
2.6	Grenzwert einer Funktion	
2.7	Stetigkeit einer Funktion	
2.8	Tabelle mit Funktionen und deren Eigenschaften	
2.8.1	Polynomfunktion	
2.8.2	Gebrochenrationale Funktion	
2.8.3	Potenzfunktion	

3 Differentialrechnung

3.1	Ableitungsregeln Funktion	
3.2	Ableitungsregeln Arithmetik	

4 Kurvendiskussion

5 Integralrechnung

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definitionen

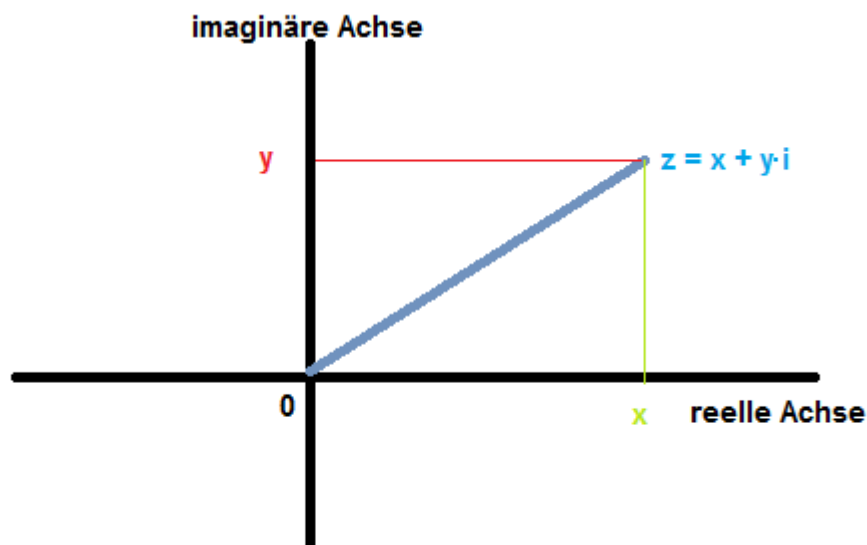
1.1.1 Definitionen

Die Menge der komplexen Zahlen werden mit dem Symbol beschrieben.

Sei z ein Element aus \mathbb{C} so gilt:

$$z \in \mathbb{C} : (z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R})$$

Wobei x der reelle Anteil und y der imaginäre Anteil der komplexen Zahl ist.



1.1.2 Formen

Kartesische Form $z = x + y \cdot i$

Trigonometrische Form $r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

Herleitung: Es gilt: $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$

$$z = x + i \cdot y = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

$$r = |z|$$

Berechnung von φ : Je nachdem, in welchem Quadranten sich z befindet, ändert sich die Formel leicht um φ zu bestimmen.

- Quadrant 1: $\varphi = \varphi_{\text{Rechner}}$
- Quadrant 2 : $\varphi = \pi - \varphi_{\text{Rechner}}$
- Quadrant 3 : $\varphi = \pi + |\varphi_{\text{Rechner}}|$
- Quadrant 4: $\varphi = \varphi_{\text{Rechner}}$

1 Komplexe Zahlen

Exponentialform $r * e^{i\varphi}$

Herleitung: Es gilt: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i * \sin\varphi$

$z = r * (e^{i\varphi} = \cos\varphi + i * \sin\varphi) = r * e^{i\varphi}$, φ wird wie oben berechnet.

1.1.3 Grundrechenarten

Addieren $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) * i$

Subtrahieren $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2) * i$

Multiplizieren beim multiplizieren wird unterschieden ob mit einem konstanten Faktor oder einer weiteren komplexen Zahl multipliziert wird.

- mit einem Faktor: $a * z = a * x + a * y * i$
- mit einer Komplexen Zahl: $z_1 * z_2 = x_1 * x_2 - y_1 * y_2 + (x_1 * y_2 + x_2 * y_1) * i$

Dividieren $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + (-x_1 * y_2 + x_2 * y_1) * i}{x_2^2 + y_2^2}$

Betrag $|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Komplex Konjugiert $z = x \pm y * i \rightarrow z^* = x \mp y * i$

1.1.4 Radizieren

Wenn aus einer Komplexen Zahl z die n -te Wurzel gezogen wird, entstehen somit auch n verschiedenen Wurzeln. die allgemeine Formel dafür lautet

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} * e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{m}{n}) * 2\pi}$$

Das n bleibt immer konstant und m startet bei 0 und wird bis $m = n - 1$ hochgeählt wodurch man die n Wurzel herbekommt, lediglich φ und $|z|$ müssen wie oben beschrieben berechnet werden und ggf. muss z in die Exponentialform gebracht werden, um die Berechnungen zu erleichtern.

2 Funktionen

2.1 Nulstellen

$f(x)$ hat Nulstellen wenn gilt $x_0 \mid f(x_0) = 0$

2.2 Symmetrie

Eine Funktion heißt gerade (spiegelsymmetrisch) wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

Eine Funktion heißt ungerade (punktsymmetrisch): $f(-x) = -f(x)$

2.3 Monotonie

Die Definition für die Monotonie wird unten aufgelistet. Es gilt außerdem: $x_1 < x_2$

- monoton wachsend: $f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton wachsend: $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend: $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton fallend: $f(x_1) > f(x_2)$

2.4 Periodizität

Wenn ein p existiert mit dem gilt $f(x \pm p) = f(x)$ und $x \pm p$ ist im Definitionsbereich, ist f periodisch mit der Periode p ,
 p kann auch $\pm k \cdot p$ sein, wobei $k \in \mathbb{N}^*$. Kleinstes positives p nennt man die primitive Periode

2.5 Umkehrfunktion

Funktion f heißt umkehrbar wenn gilt:

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ oder}$$

wenn f streng monoton ist.

Definitions- und Wertebereich sind bei der Umkehrfunktion "vertauscht".

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, formt man $f(x)$ nach x um und vertauscht danach x und y wodurch man f^{-1} erhält. Oft muss der Definitionsbereich dabei eingeschränkt werden, da z.B. ist die Parabel nur für $x \geq 0$ monoton (bzw. $x \leq 0$).

2 Funktionen

2.6 Grenzwert einer Funktion

Exestiert ein g für das gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

so ist g der Grenzwert von f . x_n wird durch den limes immer höher, g kann auch gegen unendlich gehen und g muss auch nicht im Wertebereich . Wenn g nicht inm Wertebereich liegt, so ist g auch die Asymptote.

lim kann auch gegen $-\infty$ oder auch gegen einen Punkt gehen.

2.7 Stetigkeit einer Funktion

2.8 Tabelle mit Funktionen und deren Eigenschaften

2.8.1 Polynomfunktion

Definition $f(x) = a_n * x^n \dots a_1 * x + a_0$ wobei n auch der Grad der Funktion ist

Symmetrie Eine Polynomfunktion ist gerade, wenn alle Polynome eine gerad Potenzen haben und ist ungerade, wenn alle Polynome ungerade Exponente haben.

2.8.2 Gebrochenrationale Funktion

Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m * x^m \dots a_1 * x + a_0}{b_n * x^n \dots b_1 * x + b_0} g(x)$ und $h(x)$ sind wiederum Polynomfunktionen. Außerdem wird unterschieden zwischen:

- $n > m$: echt gebrochenrational und
- $n \leq m$ unecht gebrochenrational

Nullstellen $f(x)$ hat Nulstellen wo $g(x)$ Nulstellen hat aber $h(x) \neq 0$ ist.

Pol $f(x)$ hat Pole wo $h(x)$ Nulstellen hat. Wichtig ist, dass zuerst umgerechnet werden muss, da sich teilweise Terme aus dem Bruch rauskürzen könnten. Die Anzahl der Nullstellen in $h(x)$ wird mit k bezeichnet und man spricht von einem Pol k -ter Ordnung. Ist k gerade, gibt es keinen Vorzeichenwechsel am Pol, ist k ungerade gibt es einen Vorzeichenwechsel.

Asymptote Um die Asymptote zu finden muss zuerst zwischen einer echten und unechten gebrochenrationalen Funktion unterschieden werden.

- Echt gebrochenrational: hat eine Asymptote bei $y = 0$.
- Unecht gebrochenrational: $f(x)$ wird durch Polynomdivision in seine Linear-kombination aufgeteilt. $f(x)$ kann nun in eine Polynomfunktion $p(x)$ und eine echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$ aufgeteilt werden

$$f(x) = p(x) + r(x)$$

$r(x)$ strebt gegen 0 weshalb die Asymptote von $p(x)$ gleich der Asymptote von $f(x)$ ist.

Symmetrie je nachdem welche Symmetrie die Polynomfunktion haben ist auch die gebrochenrationale Funktion eine andere Symmetrie.

- Haben $g(x)$ und $h(x)$ die gleiche Symmetrie ist $f(x)$ auch gerade.
- Haben $g(x)$ und $h(x)$ verschiedene Symmetrien so ist $f(x)$ ungerade.
- Haben entweder $g(x)$ oder $h(x)$ (oder beide) keine Symmetrie so hat $f(x)$ auch keine Symmetrie.

2.8.3 Potenzfunktion

Funktion $f(x) = x^n$

Symmetrie ist n gerade dann ist auch $f(x)$ gerade

- Ist n gerade dann so ist auch $f(x)$ gerade
- Ist n ungerade dann so ist auch $f(x)$ ungerade

3 Differentialrechnung

3.1 Ableitungsregeln Funktion

Art der Funktion	Funktion	Ableitung
Konstante Funktion	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
Gerade	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n * x^{n-1}$
Exponentialfunktion	$f(x) = a^x$ $f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$ $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) * a^x}$ $f'(x) = e^{\ln(a) * x} * \ln(a)$ $f'(x) = e^{x \ln(x)} * (\ln(x) + 1)$
Logarithmusfunktion	$f(x) = \ln(x)$ $f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{1}{\ln(a) * x}$
Trigonometrische Funktionen	$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x)$ $f(x) = \cotan(x)$	$f'(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
Arkusfunktionen	$f(x) = \arcsin(x)$ $f(x) = \arccos(x)$ $f(x) = \arctan(x)$ $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
Hyperbolfunktion	$f(x) = \sinh(x)$ $f(x) = \cosh(x)$ $f(x) = \tanh(x)$ $f(x) = \operatorname{coth}(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$ $f'(x) = \sinh(x)$ $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ $f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$
Areafunktion	$f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$ $f(x) = \operatorname{arcosh}(x)$ $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ $f(x) = \operatorname{arctan}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3.2 Ableitungsregeln Arithmetik

Regeln	Funktion	Ableitung
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f(x)' = u(x)' + v(x)'$
Faktorregel	$f(x) = c(x) * u(x)$	$f(x)' = c(x)' * u(x) + c(x) * u(x)'$
Produktregel	$f(x) = u(x) * v(x)$	$f(x)' = u(x)' * v(x) + u(x) * v(x)'$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f(x)' = \frac{u(x)' * v(x) - v(x)' * u(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$f' = u'(v(x)) * v(x)'$

4 Kurvendiskussion

Extrema $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Maximum $f''(x) < 0$

Minimum $f''(x) > 0$

Wendepunkt $f'(x) \neq 0 \wedge f''(x) = 0$,

Sattelpunkt $f'(x) = f''(x) = 0$

5 Integralrechnung