Lineare Algebra Zusammenfassung

28. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Logik

1.1.1 Aussagenlogik

Die Aussagenlogik beschreibt einen Sachverherhalt, dem man eindeutig einen Wahrheitswert (wahr, falsch) zuordnen kann. Weiter kann man diese Ausdrücke verknüpfen.
z = x ∧ y, x und y müssen beide wahr sein damit z wahr ist.[1]
Die Erfüllungsmenge eines aussagenlogischen Ausdrucks besteht aus allen Variablen x_i für die der gesamte Ausdruck wahr ist

$z_1 \Rightarrow z_2$

z_2 ist notwendig für z_1

z_1 ist hinreichend für z_2

1.1.2 Prädikatenlogik

Bei der Prädikatenlogik wird eine Aussage in Subjekt und Prädikt aufgeteilt. Das Subjekt dient als Platzhalter. Der Vorteil ist, dass nun allgemeinere Aussagen erstellt werden können. Beispiel: ß studiert Maschinenbau", wobei s ϵ Studenten.
Die Ergebnismenge besteht dann aus den Aussagen die zutreffen. Prädikate können wie in der Aussagenlogik verknüpft werden. Außerdem werden noch sogenannte Quantoren eingführt:

∀: Der Allqunator sagt aus dass Prädikate für alle Elemte der einer Menger gelten (∀ s ϵ Studenten)

∃: Der Existenzquantor Prädikat für mindestens ein Element der Menge wahr ist.

!∃: Dieser Qunator bedeutet, dass das Prädikat für genau ein Subjekt (Element aus Menge) gilt.

1.2 Mengen

Eine Menge besteht aus eindeutig bestimmbaren Objekten die real (z.B. Stifte) oder auch gedacht (z.B. Zahlen) sein können. Eindeutig bestimmbar heißt auch, dass Objekte nicht mehrmals auftauchen können so ist M = 1,2,2,3 = 1,2,3
Mengen können auf verschidene Weisen beschrieben werden:

Als Aufzählung: M = {1; 7; 12; 836 }

durch Prädikat: M = {x ϵ G : P(x)}
Beispiel: M = {x ϵ $\mathbb{N}$: x > 5   x < 10} = {6, 7, 8, 9}

[1] x bzw. y sind Platzhalter. Beispielsweise könnte für x: 1 > 2 stehen

verbal: „Menge aller Personen, die sich um 11:02 Uhr am 10.03.2020 im H004 befinden“

Außerdem können Mengen in in Beziehung zu einander stehen:

A $\subset$ B: Hier ist A eine Teilmenge (Untermenge) von B, d.h. B hat alle Objekte aus A aber auch noch welche die A nicht hat ($\subseteq$ heißt B kann gleich A sein, muss aber nicht)

A = B: Die Mengen haben die glecihen Objekte

A $\supset$ B: Hier ist A die Obermenge von B (gleich wie oben, wird nur anders gelesen)

1.2.1 Kardinalität

Die Kardinalität einer Menge beschreibt die Mächtigkeit einer Menge bzw. die Anzahl der Elemte in einer Menge. Ist die Menge endlich so kommt eine endliche Zahl raus. Bei unendlichen Mengen wird die Mächtigkeit mit $\aleph$ (aleph) angegeben. Um zu zeigen, dass man die Mächtigkeit einer Menge haben will, werden zwei Querstriche neben der Menge Gescrieben. Beispiele:

$|\emptyset| = |\{\}| = 0$

$|\mathrm{M}| = |\{1;\ 2;\ 3;\ 1\}| = 3$

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$|\mathbb{R}| = \aleph_1$

$\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig weil sie als abzählbar gelten, d.h. man kann jeder Zahl in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ einen Index zuorden, da man $\mathbb{Q}$ als Bruch $\frac{p}{q}$, wobei $p \epsilon \mathbb{N}$, $q \epsilon \mathbb{Z}$, darstellen kann. π ist jedoch eine Zahl, die man nicht durch einen Bruch darstellen kann, weshalb die Zahl auch keine rationale Zahl ist, sondern eine reele Zahl ($\pi \epsilon \mathbb{R}$), oder auch die eulersche Zahl. Da man diesen Zahl keinen Index zuordnen kann (Beweis im Skript vom Prof) gilt $\mathbb{R}$ mächtiger $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

1.2.2 Verknüpfungen von Mengen

Bei der Verknüpfung von Mengen erhält man je nach Verknüpfung wieder eine neue Menge. Verknüpfungen für Mengen sind:

Schnittmenge: A $\cup$ B liefert eine Menge mit allen Objekten die A und B gemeinsam haben. Gibt es keine gemeinsamen Objekte so entsteht die leere Menge.

Vereinigungsmenge: A $\cap$ B Liefert eine Menge die alle Objekte aus A und B in eine neue Menge vereinigt. Sind A und B gleich so ist die Ergebnismenge gleich A und B.

Differenzmenge : A \ B Liefert eine Menge mit Objekten die A und B unterschiedlich haben.

Kartesisches Produkt[2]: A × B Liefert eine Menge welche die Objekte aus A mit den Objekten aus B paart.
Beispiel: A = {1; 2; 3} und B = {2; 4} → A × B = {(1,2); (1,4); (2,1); (2,4); (3,1); (3,4)} [3]

1.3 Realtionen

Eine zweistellige Relation ist eine Teilmenge zwischen A und B (REL $\subseteq$ A × B), wobei A der Vorbereich von REL und B der Nachbereich von REL ist.
Beispiel: A = Menge aller Dozenten an der RWU
B = Menge aller Studenten an der RWU
a REL b : Dozent a unterrichtet Student b, wobei a ϵ A, b ϵ B

1.3.1 Bestimmte Eigenschaften von Relationen

$\sim$ ersetzt REL weil schreibfaul

Eigenschaft	**Bedingung**
Symmetrie	a $\sim$ b $\Rightarrow$ b $\sim$ a
Asymmetrie	a $\sim$ b $\Rightarrow$ $\neg b$ $\sim$ a
Antisymmetrie	a $\sim$ b $\Rightarrow$ $\neg b$ $\sim$ a $\vee$ a = b
Reflexivität	a $\sim$ a
Irreflexivität	$\neg a$ $\sim$ a
Transitivität	a $\sim$ b $\wedge$ b $\sim$ c $\Rightarrow$ a $\sim$ c

Relationen die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, heißen auch Äquivalenzrelationen. Außerdem kann man auch oft Klassen bilden.
Beispielsweise kann man die Reste beim teilen von zwei natürlichen Zahlen in Klassen packen. So kann bei x mod 3 immer nur 0, 1 oder 2 rauskommen. Jetzt packt man einfach alle x die das Ergebnis 0 produzieren in die Restklasse $\tilde{0}$ bzw. für 1 in $\tilde{1}$ und 2 in $\tilde{2}$. Mit Restklasse kann auch "normal"gerchnet werden. So ist $\tilde{2}$ + $\tilde{2}$ = $\tilde{1}$ für x mod 3

1.3.2 Funktion, Abbildung

Eine Funktion ist eine spezielle Relation. Damit f eine Funktion von A nach B ist, muss folgendes gelten:
Zu jedem x ϵ A darf es nur ein einziges y ϵ B geben. Bei einer Funktion muss auch noch gelten, dass ein beliebiger x Wert nur einem y Wert zugeordnet wird. ((x, y) ϵ f $\wedge$ (x, z) ϵ f → (y = z))
A heißt auch Definitionsmenge und B heißt Zielmenge. der Nachbereich (also die y Werte die von x in B "getroffen"werden) heißt auch Wertevorrat. Bei einer Funktion

[2] wird auch Produktmenge genannt
[3] Man sieht hier das A × B $\neq$ B × A

müssen also noch Mengen angegeben werden, damit diese richtig aufgestellt ist.
Schreibweise: A $\rightarrow$ B, x $\mapsto$ f(x)[4]
Möchte man Funktionen hintereinander ausführe spricht man von der Komposition von Funktionen. Man schreibt f $\circ$ g oder (f $\circ$ g)(x) oder f(g(x)).
Beispiel: f(x) = x^2 und g(x) = x + 2 $\Rightarrow$ f(g(x)) = f(x+2) = $(x+2)^2$
Weiter Eigenschaften on Funktionen sind Injektivität ($\forall x_1, x_2$: f(x_1) = f(x_2) $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$, also jedem y Wert darf wurde nur ein x-Wert zugeordnet werden) und Surjektivität ($\forall$ y ϵ B: $\exists$ x ϵ A: f(x) = y, also jedem y Wert wurde ein x zugeordnet). Ist eine Funktion injektiv und surjekitv nennt man die Funktion auch bijektiv. Funktionen können umgekehrt werden, also eine Funktion wird nach x aufgelöst. Im Normalfall bekommt man wieder eine Realtion bei der Umkehrung, ist eine Funktion aber bijektiv so ist die Umkehrung der Funktion auch eine Funktion.

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Einführung

Ein lineares Gleichungssystem hat m Gleichungen und n Unbekannte. Die Schreibweise ist:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n = b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}$$

Dabei sind a_{mn} die Koeffizienten und x_n die Unbekannten. Eine Weitere Schreibweise ist die Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ ist der gesuchte Lösungsvektor.

2.2 LGS lösen

Um ein LGS zu lösen bietet sich der Gaus Algorithmus an. Allgemein gesagt versucht man das LGS in eine Treppenform zu bringen, also das man im unteren linken Beriech nur Nullen stehen hat. Dann kan man die Werte rücksubstituieren und bekommt das Ergebnis für das LGS.

[4] f(x) = 3x als Beispiel

2.3 LGS aufstellen

Beim Aufstellen von einem LGS gibt es keine genaue Regel. Man schaut einfach welche Größen variabel und welche konstant sind und schaut dann wie die Größen zusammenspielen und bringt sie dann zusammen.

2.4 Determinanten

Eine Determinante sagt aus ob ein LGS lösbar ist oder nicht. Der einfachtse Fall ist wenn es 2 Gleichungen und 2 Unbekannte gibt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Um die Determinate zu berechnen werden die x Werte nicht gebraucht. Die Determinante ist definiert durch D $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. ist D $\neq 0$ dann gibt es genau eine Lösung. Ist D $= 0$ können noch zwei Fälle auftreten. Wenn $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0 \wedge a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0$ dann gibt es undendlich viele Lösungen . Ist einer der Terme $\neq 0$ dann gibt es keine Lösung. Die Schreibweise lautet

$$D = det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{Weiter ist } D_1 \text{ definiert als } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$$\text{und } D_2 \text{ ist definiert als: } D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Nach der Cramerschen Regel kann man x_1 und x_2 wie folgt berechnen:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \text{ und } x_2 = \frac{D_2}{D}$$

Das Transponieren der Matrix ändert nicht die Determinante. Wird eine Reihe einer Matrix mit einem Faktor multipliziert, so wird auch der Wert der Determinatne mit dem selben Wert multipliziert.

Laplace Entwicklung:

Mit der Laplace Entwicklung kann man Determinanten beliebig großer n $\times$ n Matrizen berechnen. Man entscheidet sich zuerst ob man nach einer Zeile oder Spalte entwickeln will. Wenn man nach einer Zeile entwickeln will multipliziert man die Adjunkten der Spalte mit der dazugehörigen Unterdetemniante und mit $(-1)^{ij}$. Wobei i die Zeile und j die Spalte ist. Die Unterdeterminante erhält man indem man die Zeile, in der sich Adjunkte befindet wegstreicht. Man erhält eine Matrix mit Rang = n - 1. Wenn man alle Unterdeterminante addiert, erhält man die Determinaten der eigentlichen Matrix. Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 60 + 36 = 0$$ [5]

Regel von Sarrus:

Die Regel von Sarrus ist auf alle 3 $\times$ 3 Matrizen anwendbar. Es gilt:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Wobei man Diagonale Elemente multipliziert und die Diagoneln dann zusammen addiert. Die Werte die 'unten' anfangen werden dann von den Werten die 'oben' anfangen subtrahiert

2.5 Matrizen

Addition: Matrizen werden addiert indem man die positionsgleichen Werte miteinander addiert.
Faktormultiplikation: Eine Matrix kann mit einem Faktor multipliziert werden, indem jedes Element der Matrix mit dem Faktor multipliziert wird.
Multiplikation: Matrizen können nur miteinander multipliziert werden, wenn die erste Matrix so viele Spalten hat wie die zweite Matrix Zeilen. [6]
Es entsthet eine neue Matrix C. Indem man jeweils das i-te Elemte aus der Zeile Von der Matrix A mit dem i-ten Element der Matrix B multipliziert und diese Produkte dann miteinander addiert.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Bei der Matrixinversion wird die Matrix A hingeschreiben (A muss quadratisch sein).

[5] Es wird nach der 2. Zeile entwickelt, wobei man eigetnlich jede Zeile Spalte zum entwickeln benutzen kann.
[6] (n $\times$ m) * (m $\times$ k) = (n $\times$ k)

Um jetzt A^{-1} zu bekommen sschreibt man noch die Einheitsmatrix nebenhin. Nun wandelt man die Matrix A mithifle vom Gaus Algorithmus in die Einheitsmatirx um. Dabei wendet man jeden Rechenschritt auch an der Einheitsmatrix an. Die 'alte' Einheitsmatrix ist jetzt A^{-1}.

3 Vektoren

Einen Vektor kann man entwder als Punkt darstellen oder als eine Strecke die vom Ursprung ausgeht. Wird ein Vektor als Strecke dargestellt wird auch deutlich das ein Vektor eine Länge und eine Richtung hat.

3.1 Koordinatensysteme

Unter gewissen Umständen möchte man ein anderes Koordinatensystem benutzen, um einen Vektor darzustellen.

3.1.1 Polarkoordinaten

Ein Vektor kann auch anstatt durch p_x und p_y durch einen Winkel und eine Länge beschrieben werden. Es gilt:
$p_x = r \cdot \cos\alpha$
$p_y = r \cdot \sin\alpha$
$r = |\vec{p}| = \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2}$
$\alpha = \arctan\frac{p_y}{p_x}$
Für den Wert von α muss aber darauf gechtet werden in welchen Quadranten sich der Vektor befindet. Die Strecke die $\frac{p_y}{p_x}$ liefert in einem Kreis mehrmals auftauchen kann und arctan immer nur den kleinsten Winkel liefert.

Quadrant	Winkel
Erster und Vierter Quadrant	$\alpha = \arctan\frac{p_y}{p_x}$
Zweiter Quadrant	$\alpha = \arctan\frac{p_y}{p_x} + \pi$
Dritter Quadrant	$\alpha = \arctan\frac{p_y}{p_x} - \pi$

3.1.2 Richtungscosinus

Bei dreidimensionalen Vektoren gilt:
$p_x = r \cdot \cos\alpha$
$p_y = r \cdot \sin\alpha$
$p_z = z$
$r = |\vec{p}| = \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2}$
$\alpha = \arctan \frac{p_y}{p_x}$

3.1.3 Kugel- Geokoordinaten

Die Kugelkoordinaten sind bestimmt für drei dimensionale Vektoren. Sie besteht aus eine Länge r (Radius) und den Winkel φ und θ. Hat man ein Drei dimensionales Koordinatensystem ist ϕ der Winkel zu positiven x-Achse (bei den Geokoordinaten der Winkel zum Nullmeridian) und θ der Winkel zur Positiven x-Achse (Bei Geokoordinaten der Winkel zur Äquatorebene (90 - θ)). Umrechenen der Koordinaten:

$$\begin{array}{l|l} x = r\sin\theta\cos\varphi & r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & \theta = \arccos\frac{z}{r} \\ z = r\cos\theta & \varphi = \arctan\frac{y}{x} \end{array}$$

3.1.4 Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten Bestehen aus eiem Winkel φ zur positiven x-Achse, dem Radius r und der Höhe z. Umrechnung:

$$\begin{array}{l|l} p_z = z & z = p_z \\ p_x = r\cdot\cos\varphi & \varphi = \arctan\frac{p_y}{p_x} \\ p_y = r\cdot\sin\varphi & r = \sqrt{{p_x}^2+{p_y}^2} \end{array}$$

3.2 Rechenoperationen

Addition: zwei Vektoren werden Komponentenweise addiert, also $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$

Strecke: will man die Strecke zweischen zwei Punkten A und B muss man A komponentenweise von B subtrahieren uund bekomm einen Vektor.

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix} B_1-A_1 \\ B_2-A_2 \\ . \\ . \\ . \\ B_n-A_n \end{pmatrix}$$

Betrag: $|\vec{v}|=|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ .v_n \end{pmatrix}|=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2,\ldots,v_n{}^2}$

3.3 Gerade, Ebene

Punkt-Richtungsform: Möchte man mit einem Vektor eine Gerade erstellen braucht man zuerst einen Punkt auf den die Gerade liegen kann. Einen Vektor der die Richtung angibt und einen Fakor ($k\epsilon\mathbb{R}$) für den Vektor. Um einen bestimmten Punkt auf der Gerade anzugeben kann man dann 'k' so wählen damit eben dieser Punkt erreicht wird.

Um eine Ebene darstellen zu können kommt noch ein weiter Vekor mit eigenm Fakotr dazu. [7] [8]

3.3.1 Winkelbestimmung

Gerade-Gerade: $\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

Gerade-Ebene $\sin(\alpha)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}$[9]

Ebene-Ebene $\cos(\alpha)=\frac{|\vec{n}_E\cdot\vec{n}_F|}{|\vec{n}_E|\cdot|\vec{n}_c ccF|}$

[7] g: $\vec{p}+t\cdot\vec{h}$,als Beispiel für eine Gerade

[8] E: $\vec{u}+t\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}$,als Beispiel für eine Ebene

[9] Hier wird der Winekle zwische $\vec{v}$ und den Normalevektor der Ebene angegeben. Will man den Winkel zwischen $\vec{v}$ muss man α noch von 90 Grad abziehen, Also $\alpha_E=\alpha-90$

3.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt wird auch inneres Produkt genannt und wird wie folgt berechnet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\angle \vec{u}\vec{v})$$

Um den Winkel zeischen u und v zu finden kann man folgende Formel nehmen:

$$\arccos \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Der Einheitsvektor eines Vektor berecnet sich durch:

$$\vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

3.5 Vektorprodukt

Durch das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) erhält man einen Vektor der rechtwinklig auf zwei anderen Vektoren liegt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

3.6 Anwendung

3.6.1 Ray-Tracing

Ray Tracing wird dazu verwendet um Beispielsweise einen reflektierenden Lichtstrahl auszurechnen. Dafür braucht man einen zuerst einen Lichtstrahl $\vec{v}$ und eine Ebene die den Lichtstrahl reflektieren kann. Man nimmt aber zur Berechnung den Winkel zum Normalevektor der Ebene. Den erhält man aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvekotren der Ebene. Der Ergbnissvektor durch seinen Betrag geteilt (normalisiert) und man erhält den Vektor $\vec{n}_0$. Um den reflektierenden Vektor $\vec{a}$ zu berechnen gilt folgende Formel:

$$\vec{a} = 2 \cdot (-\vec{v} * \vec{n}_0)\vec{n}_0 + \vec{v}$$

3.6.2 Lorenzkraft

Die Lorenzkraft kraft ist definert als

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

wobei q die Ladung ist, $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Ladungsträgers und $\vec{B}$ die Flussdichte vom Magnetfeld ist. Betrachtet man jetzt nicht nur einen Ladungsträger, sondern einen kompletten Stromfluss gilt folgendes

$$\vec{F}_L = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

wobei hier I die Stromstärke ist und l die Länge und Richtung des Drahtstück ist.

4 Gruppen, Körper, Vektorräume

4.1 Gruppen

Eine Gruppe ist eine algebraische Struktur und wird als Tupel von einer Menge und einer Verknüpfung angegeben (Beispiel (G,$\otimes$)). Eine Gruppe muss besonder Anforderungen erfüllen:

$\otimes$ muss eine innere Verknüpfung sein: $\otimes$: G $\times$ G $\rightarrow$ G

G_1: $\forall$ a,b,c ϵ G: (a $\otimes$ b) $\otimes$ c= a $\otimes$ (b $\otimes$) c (Assoziativgesetz)

G_2: Es gibt ein Element e ϵ G, dass für alle a ϵ G gilt:
$a \otimes e = e \otimes a = a$
e ist das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung

G_3: Zu jedem a ϵ G gibt es ein Element a^{-1} sodass gilt:
$a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = e$
a^{-1} ist das inverse Element bezüglich der Verknüpfung

G_4: (optional)
gilt $a \otimes b = b \otimes a$ gilt das Kummutativgesetz.
Wenn diese Regel (und alle davor auch) heißt die Gruppe kummutative oder auch abelsche Gruppe

4.1.1 Homomorphismus

Es sind zwei Gruppen A und B mit den Verknüpfungen $\otimes$ und $\cdot$ gegeben.
Außerdem ist eine Abbildung $\alpha : A \rightarrow B$ geben. Wenn jetzt für alle x,y ϵ A gilt:
$\alpha(x \otimes y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$
dann nennt man α einen Homomorphismus. Ist α außderdem noch bijekt, so ist α ein Isomorphismus.

4.2 Körper

Ein Korper ist ähnlich zu einer Gruppe nur dass es hier 2 Verknüpfungen gibt. Die Menge K mit den inneren Verknüpfungen + und $\cdot$ heißt Körper, wenn gilt:

(K,+) ist eine kommutative Gruppe ($e = 0$)

(K $\setminus$ {0},$\cdot$) ist auch eine kommutative Gruppe ($e = 1$)

Distributivgesetz muss gelten: $\forall a, b, c$ ϵ K: $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

4.3 Vektorraum

Man hat einen Vektorraum über dem Körper (K,+,$\cdot$)(K ist meistens $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) wenn für alle k,l ϵ K und für alle u,v,w ϵ V folgendes gilt:

V_1: V $\neq \emptyset$

V_2: + ist eine innere Verknüpfung (u + v ϵ V)

V_3: (u + v) + w = u + (v + w) (Assoziativgesetz)

V_4: es existiert ein neutrales Element[10] bezüglich '+' (meistens als 0 bezeichnet)

V_5: es existiert ein inverses Element bezühlich '+'

V_6: u + v = v + u (Kummutativgesetz)

V_7: $\cdot$ ist eine äußere Verknüpfung von V mit K (k $\cdot$ v ϵ V)

V_8: k $\cdot$ (l $\cdot$ v) = (k $\cdot$ l) $\cdot$ v (Assoziativgesetz für $\cdot$)

V_9: (k + l) $\cdot$ v = k $\cdot$ v + k $\cdot$ l (Distributivgesetz 1)

V_{10}: k $\cdot$ (u + v) = k $\cdot$ u + k $\cdot$ v

V_{11}: 1 $\cdot$ v = v, wobei 1 das neutrale Element der Verknüpfung $\cdot$ in K ist.

4.4 Basis

4.4.1 Linearkombination

Eine Linearkombination von Vektoren erhält man wenn jedem Vektor v_n ϵ V ein k ϵ $\mathbb{R}$ zuordnet und so $\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i$ erhält.
Vektoren heißen linear unabhängig wenn ihre Linearkombination nur durch die triviale lösung (alle $k_n = 0$) gleich 0 wird. Andernfalls sind die Vektoren linear abhängig

[10] heißt hier auch Nullvektor

4.4.2 Basis

Die Menge $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}\} \subset$ V heit Basis von V wenn

1. sich jeder Vektor aus V als Linearkombination von den Vektoren aus B darstellen lässt und

2. die Vektoren in B linear unabhängig sind.

Die Mächtigkeit einer der Basen eine Vektorraums nennt man auch die Dimension des Vektorraums
Der Rang einer Matrix lässt sich berechnen indem man die Zeilen bzw. Spalten als Vekotren betrachtet. Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen/Spaltenvktoren ist der Rang.

4.4.3 Basisumrechnung

Lösen durch LGS

Möchte man einen Vektor $\vec{v}$ (Basis A) in eine andere Basis (Basis B) umrechen braucht man zuerst Die Basis von $\vec{v}$ und dessen Wert $(v_1, v_2...)$ und die Basis in die man $\vec{v}$ umrechenen möchte. Gesucht wird dann $\vec{x}$ (Mit der anderen Basis). Da $\vec{v}$ und $\vec{x}$ die selben Vektoren abbilden können, kann man auch $\vec{v}$ als Linearkombination von der Basisi B angeben. Die Koeffizienten der Vektoren sind dann die Komponente von $\vec{x}$.
Beispiel:

$$\vec{v} = x_1 \cdot \vec{b_1} + x_2 \cdot \vec{b_2} + \cdots + x_n \cdot \vec{b_n}$$ [11]

Will man jetzt nun den Vektor $\vec{x}$ ausrechen, schreibt man die Vektoren aus und hat dann ein LGS welches man nach den einzelnen x-Werten auflöst.

Rücktransforamtion einer Basis in die Standardbasis

Ein besonder einfacher Fall für die Basistransformation ist, wenn man eine Basis B in die Standardbasis S Rücktransformieren will. Dafür stellt man eine Matrix auf, welche als Spalten die Vektoren der transfomierten Matix benutzt.

$$Tr \cdot \vec{b}_{1B} = \vec{b}_{1S}$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} = \vec{b}_{1S}$$

$$Tr \cdot \vec{b}_{2B} = \vec{b}_{2S}$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \vec{b}_{2S}$$ [12]

[11] Wobei n die Mächtigkeit der Basis A bzw. B ist.

[12] Beachte: $\vec{b}_{1B}$ und $\vec{b}_{1S}$ sind die Basisvektoren von B dargestellt in den beiden Basen B und der Standardbasis

Lösen durch Matrix

Hat man die Rücktransformationsmatrix Tr (von der Basis B) kann man diese inventieren und erhält die Transformationsmatrix T:

$$Tr^{-1} \cdot \vec{v}_S = T \cdot \vec{v}_S = \vec{v}_B$$

5 Lineare Abbildungen

5.1 Definition

$\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt lineare Abbildung (oder auch Homomorphismus) wenn für alle $\vec{x}$,$\vec{y}$ ϵ $\mathbb{R}^n$ und für alle k ϵ $\mathbb{R}$ gilt:

$$1 : \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$$

$$2 : \alpha(k \cdot \vec{x}) = k \cdot \alpha(\vec{x})$$

5.2 Darstellung durch Matrix

Hat man als Abbildungsvorschrift(Ïnput"von α) die vektoren der Standardbasis, sind die Ergebnisvektoren jeweils die Spalten der Abbildungsmatrix A. Beispiel:

$$\alpha(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \alpha(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \alpha(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\text{Es gilt also: } \alpha(\vec{x}) = \alpha(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

bzw. allgemein: $\alpha(\vec{x}) = \vec{y} = A \cdot \vec{x}$

Hat α als Input jetzt nicht die Vektoren der Standardbasis kann man die Abbildungsmatrix nun erstmal mit Unbekannten belegen, aber alle gegeben $\vec{x}$ und $\vec{y}$ einsetzen. Führt man jetzt die Matrixmultiplikation durch kann man ein LGS (vielleicht auch merhere kleine) aufstellen und lösen und erhält die Abbildungsmatrix A. Beispiel:
$\alpha(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$; $\alpha(\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

Durch Matrixmultiplikation erhält man folgende Terme

2a - b = 1 || -3a = 2

2c - d = 5 || -3c = 4

Jetzt kann man die einezelnen Werte für A berechenn und erhält A = $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -23 \end{pmatrix}$

5.3 Rechenoperationen

5.3.1 Addition

Hat man zwei Lineare Abiildungen α und β definert, Welche beide den selbe Definitions- und Bildvektorraum haben gilt folgendes für die Addition:

$$\vec{x} \mapsto (\alpha + \beta)(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) = A\vec{x} + B\vec{x} = (A + B)\vec{x}$$ [13]

5.3.2 Umkehrabbildung

Damit eine lineare Abbildung umkehrbar ist, müssen Definitions- und Bildvektorraum gleich sein. Ähnlich zu normalen Funktionen erhält man die Umkehrabbildung indem man die Gleichung nach x (hier: $\vec{x}$) auflöst:

$$\vec{y} = A\vec{x} \Rightarrow A^{-1} \cdot \vec{y} = A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$$

5.3.3 Komposition

Seien α und β zwei lineare Abbildungen mit ihren Abbildungsmatrizen A und B. Außerdem ist der Bildvektorraum von α der Definitionsvektorraum von β. Jetzt ist γ definiert als die Komposition von α und β. Es gilt:

$$\gamma(\vec{x}) = (\beta \circ \alpha)(\vec{x}) = \beta(\alpha(\vec{x})) = \beta(A\vec{x}) = B(A\vec{x}) = (B \cdot A)\vec{x} \Rightarrow C = B \cdot A$$

[13] Ähnlcihes gilt auch für die Multiplikation von α mit k

5.4 Eigenvektor und Eigenwert

5.4.1 Allgemeines

Ein Vektor $\vec{v}$ ist ein Eigenvektor von α wenn $\vec{v} \neq \vec{0}$, Definitions- und Bildvektorraum gleich sind und wenn gilt dass $\alpha(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ [14] λ wird dann auch als Eigenwert von $\vec{v}$ bezeichnet. Die Formel kann man auch in umformen:

$$\alpha(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Rightarrow (A - \lambda E) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

5.4.2 Eigenraum

Ist U Teilmenge von V und ist U wiederum ein Vektorraum so nennt man U einen Unterraum von V. wenn jetz noch gilt $\alpha(\vec{x})\epsilon U$ für alle $\vec{x}\epsilon U$ dann ist U der Eigenraum von α

5.4.3 Berechnung

Dadurch kann man ein homogenes LGS[15] bilden. Damit das LGS erfüllt wird, muss entweder $\vec{v} = \vec{0}$, was nach Definition verboten ist. Andernfalls schaut man welches λ eingetzt werden muss damit $det(A - \lambda E) = 0$ ergibt. Beispiel

$$det(\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 8 & -2 & 15 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} - \lambda \cdot E) = \chi(\lambda)^{16} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 3 \\ 8 & -2-\lambda & 15 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

Hier kann man die Regel von Saurus anwenden und kommt durch kürzen und zusammenfassen auf $(\lambda-2)(\lambda-5)^2$. Man hat jetzt 2 und 5 als Eigenwerte. Jetzt setzt man die Werte in das LGS ein und schaut ob die Eigenwerte auch Eigenvektoren produzieren.

5.4.4 algebraische und geometrische Vielfachheit

Wie im obigen Beipiel gesehen kann das charackteristische Polynom mehrere Nullstellen haebn. Man spticht hier von der algebraischen Vielfachheit κ vom Eigenwert λ. Die Dimension eines Eigenraums zu einem Eigenwert λ heißt geometrische Vielfachheit γ von λ. Dabei ist γ mindestens kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit aber mindestens 1.
Außerdem gilt: $\gamma = n - Rang(A - \lambda E)$, wobei n die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren sind,

[14] $\vec{v}$ ist ein Vektor der von α nur mit einem λ verlängert bzw. verkürzt wird
[15] Ein LGS bei dem "rechts"nur Nullen stehen
[16] $\chi(\lambda) = det(A-\lambda \cdot E)$ heißt charackteristisches Polynom und $det(A-\lambda \cdot E) = 0$ heißt charackteristische Gleichung

5.4.5 Jordanmatrix

Hat man eine Basis, welche aus Eigenvektoren besteht kann eine Abbildungsmatrix J aus den Bildern der Vektoren erstellen. Die Abbildungsmatrix ist dann eine Diagonalmatrix.

$$\begin{array}{ccc} \vec{x}_S & \xrightarrow{A} & \alpha(\vec{x}_S) \\ \downarrow T & & \uparrow T^{-1} \\ \vec{x}_B & \xrightarrow{J} & \alpha(\vec{x}_B) \end{array}$$