

Lineare Algebra Skript

Arif Hasanici

17. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Logik	3
1.1.1	Aussagenlogik	3
1.1.2	Prädikatenlogik	3
1.2	Mengen	3
1.2.1	Kardinalität	4
1.2.2	Verknüpfungen von Mengen	4
1.3	Relationen	5
1.3.1	Bestimmte Eigenschaften von Relationen	5
1.3.2	Funktion, Abbildung	5
1.4	Induktion	6
2	Lineare Gleichungssysteme	6
2.1	Einführung	6
2.2	LGS lösen	6
2.3	LGS aufstellen	7
2.4	Determinanten	7
2.5	Matrizen	8
3	Vektoren	9
3.1	Koordinatensysteme	9
3.2	Rechenoperationen	9
3.3	Gerade, Ebene	9
3.4	Skalarprodukt	9
3.5	Vektorprodukt	9
4	Gruppen, Körper, Vektorräume	9
4.1	Gruppen	9
4.2	Körper	9
4.3	Vektorraum	9
4.4	Basis	9
5	Lineare Abbildungen	9
5.1	Definition	9
5.2	Darstellung durch Matrix	9
5.3	Rechenoperationen	9
5.4	Eigenvektor und Eigenwert	9

1 Einleitung

1.1 Logik

1.1.1 Aussagenlogik

Die Aussagenlogik beschreibt einen Sachverhalt, dem man eindeutig einen Wahrheitswert (wahr, falsch) zuordnen kann. Weiter kann man diese Ausdrücke verknüpfen. $z = x \wedge y$, x und y müssen beide wahr sein damit z wahr ist.¹

Die Erfüllungsmenge eines aussagenlogischen Ausdrucks besteht aus allen Variablen x_i für die der gesamte Ausdruck wahr ist

$$z_1 \Rightarrow z_2$$

z_2 ist notwendig für z_1

z_1 ist hinreichend für z_2

1.1.2 Prädikatenlogik

Bei der Prädikatenlogik wird eine Aussage in Subjekt und Prädikat aufgeteilt. Das Subjekt dient als Platzhalter. Der Vorteil ist, dass nun allgemeinere Aussagen erstellt werden können. Beispiel: „ β studiert Maschinenbau“, wobei $s \in \text{Studenten}$.

Die Ergebnismenge besteht dann aus den Aussagen die zutreffen. Prädikate können wie in der Aussagenlogik verknüpft werden und außerdem werden noch sogenannte Quantoren eingeführt:

\forall : Der Allquantor sagt aus dass Prädikate für alle Elemente der einer Menge gelten
($\forall s \in \text{Studenten}$)

\exists : Der Existenzquantor Prädikat für mindestens ein Element der Menge wahr ist.

$\exists!$: Dieser Quantor bedeutet, dass das Prädikat für genau ein Subjekt (Element aus Menge) gilt.

1.2 Mengen

Eine Menge besteht aus eindeutig bestimmbar Objekten die real (z.B. Stifte) oder auch gedacht (z.B. Zahlen) sein können. Eindeutig bestimmbar heißt auch, dass Objekte nicht mehrmals auftauchen können so ist $M = 1,2,2,3 = 1,2,3$

Mengen können auf verschieden beschrieben werden:

Als Aufzählung: $M = \{1; 7; 12; 836\}$

durch Prädikat: $M = \{x \in G : P(x)\}$

Beispiel: $M = \{x \in \mathbb{N} : x > 5 \wedge x < 10\} = \{6, 7, 8, 9\}$

¹ x bzw. y sind Platzhalter. Beispielsweise könnte für x : $1 > 2$ stehen

verbal: „Menge aller Personen, die sich um 11:02 Uhr am 10.03.2020 im H004 befinden“

Außerdem können Mengen in in Beziehung zu einander stehen:

$A \subset B$: Hier ist A eine Teilmenge (Untermenge) von B, d.h. B hat alle Objekte aus A aber auch noch welche die A nicht hat (\subseteq heißt B kann gleich A sein, muss aber nicht)

$A = B$: Die Mengen haben die gleichen Objekte

$A \supset B$: Hier ist A die Obermenge von B (gleich wie oben, wird nur anders gelesen)

1.2.1 Kardinalität

Die Kardinalität einer Menge beschreibt die Mächtigkeit einer Menge bzw. die Anzahl der Elemente in einer Menge. Ist die Menge endlich so kommt eine endliche Zahl raus. Bei unendlichen Mengen wird die Mächtigkeit mit \aleph (aleph) angegeben. Um zu zeigen, dass man die Mächtigkeit einer Menge haben will, werden zwei Querstriche neben der Menge geschrieben. Beispiele:

$$|\emptyset| = |\{\}| = 0$$

$$|M| = |\{1; 2; 3; 1\}| = 3$$

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1$$

\mathbb{N} und \mathbb{Q} sind gleichmächtig weil sie als abzählbar gelten, d.h. man kann jeder Zahl in \mathbb{N} und \mathbb{Q} einen Index zuordnen, da man \mathbb{Q} als Bruch $\frac{p}{q}$, wobei $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, darstellen kann. π ist jedoch eine Zahl, die man nicht durch einen Bruch darstellen kann, weshalb die Zahl auch keine rationale Zahl ist, sondern eine reelle Zahl ($\pi \in \mathbb{R}$), oder auch die eulersche Zahl. Da man diesen Zahl keinen Index zuordnen kann (Beweis im Skript vom Prof) gilt \mathbb{R} mächtiger $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

1.2.2 Verknüpfungen von Mengen

Bei der Verknüpfung von Mengen erhält man je nach Verknüpfung wieder eine neue Menge. Verknüpfungen für Mengen sind:

Schnittmenge: $A \cup B$ liefert eine Menge mit allen Objekten die A und B gemeinsam haben. Gibt es keine gemeinsamen Objekte so entsteht die leere Menge.

Vereinigungsmenge: $A \cap B$ Liefert eine Menge die alle Objekte aus A und B in eine neue Menge vereinigt. Sind A und B gleich so ist die Ergebnismenge gleich A und B.

Differenzmenge : $A \setminus B$ Liefert eine Menge mit Objekten die A und B unterschiedlich haben.

Kartesisches Produkt²: $A \times B$ Liefert eine Menge welche die Objekte aus A mit den Objekten aus B paart.

Beispiel: $A = \{1; 2; 3\}$ und $B = \{2; 4\} \rightarrow A \times B = \{(1,2); (1,4); (2,1); (2,4); (3,1); (3,4)\}$ ³

1.3 Realtionen

Eine zweistellige Relation ist eine Teilmenge zwischen A und B ($REL \subseteq A \times B$), wobei A der Vorbereich von REL und B der Nachbereich von REL ist.

Beispiel: A = Menge aller Dozenten an der RWU

B = Menge aller Studenten an der RWU

a REL b : Dozent a unterrichtet Student b, wobei $a \in A, b \in B$

1.3.1 Bestimmte Eigenschaften von Relationen

\sim ersetzt REL weil schreibfaul

Eigenschaft	Bedingung
Symmetrie	$a \sim b \Rightarrow b \sim a$
Asymmetrie	$a \sim b \Rightarrow \neg b \sim a$
Antisymmetrie	$a \sim b \Rightarrow \neg b \sim a \vee a = b$
Reflexivität	$a \sim a$
Irreflexivität	$\neg a \sim a$
Transitivität	$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Relationen die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, heißen auch Äquivalenzrelationen. Außerdem kann man auch oft Klassen bilden.

Beispielsweise kann man die Reste beim teilen von zwei natürlichen Zahlen in Klassen packen. So kann bei $x \bmod 3$ immer nur 0, 1 oder 2 rauskommen. Jetzt packt man einfach alle x die das Ergebnis 0 produzieren in die Restklasse $\tilde{0}$ bzw. für 1 in $\tilde{1}$ und 2 in $\tilde{2}$. Mit Restklasse kann auch normal"gerchnet werden. So ist $\tilde{2} + \tilde{2} = \tilde{1}$ für $x \bmod 3$

1.3.2 Funktion, Abbildung

Eine Funktion ist eine spezielle Relation. Damit f eine Funktion von A nach B ist, muss folgendes gelten:

Zu jedem $x \in A$ darf es nur ein einziges $y \in B$ geben, also jedem x muss min. ein y Wert zugeordnet werde. Bei einer Funktion muss auch noch gelten, dass ein beliebiger x Wert nur einem y Wert zugeordnet wird. ($(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow (y = z)$)

A heißt auch Definitionsmenge und B heißt Zielmenge. der nachbereich (also die y Werte die von x in B "getroffen"werden) heißt auch Wertevorrat. Bei einer Funktion müssen also noch Mengen angegeben werden, damit diese richtig aufgestellt ist.

²wird auch Produktmenge genannt

³Man sieht hier das $A \times B \neq B \times A$

Schreibweise: $A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$ ⁴

Möchte man Funktionen hintereinander ausführen spricht man von der Komposition von Funktionen. Man schreibt $f \circ g$ oder $(f \circ g)(x)$ oder $f(g(x))$.

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 2 \Rightarrow f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$

Weitere Eigenschaften von Funktionen sind Injektivität ($\forall x_1, x_2: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, also jedem y Wert darf nur ein x-Wert zugeordnet werden) und Surjektivität ($\forall y \in B: \exists x \in A: f(x) = y$, also jedem y Wert wurde ein x zugeordnet). Ist eine Funktion injektiv und surjektiv nennt man die Funktion auch bijektiv. Funktionen können umgekehrt werden, also eine Funktion wird nach x aufgelöst. Im Normalfall bekommt man wieder eine Relation bei der Umkehrung, ist eine Funktion aber nicht injektiv so ist die Umkehrung der Funktion auch keine Funktion.

1.4 Induktion

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Einführung

Ein lineares Gleichungssystem hat m Gleichungen und n Unbekannte. Die Schreibweise ist:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Dabei sind a_{mn} die Koeffizienten und x_n die Unbekannten. Eine weitere Schreibweise ist die Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

\vec{x} ist der gesuchte Lösungsvektor.

2.2 LGS lösen

Um ein LGS zu lösen bietet sich der Gauß Algorithmus an. Allgemein gesagt versucht man das LGS in eine Treppenform zu bringen, also das man im unteren linken Bereich nur Nullen stehen hat. Dann kann man die Werte rücksubstituieren und bekommt das Ergebnis für das LGS.

⁴ $f(x) = 3x$ als Beispiel

2.3 LGS aufstellen

Beim Aufstellen von einem LGS gibt es keine genaue Regel. Man schaut einfach welche Größen variabel und welche konstant sind und schaut dann wie die Größen zusammenspielen und bringt sie dann zusammen.

2.4 Determinanten

Eine Determinante sagt aus ob ein LGS lösbar ist oder nicht. Der einfachste Fall ist wenn es 2 Gleichungen und 2 Unbekannte gibt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Um die Determinante zu berechnen werden die x Werte nicht gebraucht. Die Determinante ist definiert durch $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Ist $D \neq 0$ dann gibt es genau eine Lösung. Ist $D = 0$ können noch zwei Fälle auftreten. Wenn $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0 \wedge a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0$ dann gibt es unendlich viele Lösungen. Ist einer der Terme $\neq 0$ dann gibt es keine Lösung. Die Schreibweise lautet

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Weiter ist D_1 definiert als $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$

und D_2 ist definiert als: $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

Nach der Cramerschen Regel kann man x_1 und x_2 wie folgt berechnen:

$$x_1 = \frac{D}{D_1} \text{ und } x_2 = \frac{D}{D_2} \quad \text{Laplace Entwicklung:}$$

Formel von Sarrus:

Das Transponieren der Matrix ändert nicht die Determinante. Wird eine Reihe einer Matrix mit einem Faktor multipliziert, so wird auch der Wert der Determinante mit dem selben Wert multipliziert.

2.5 Matrizen

Addition: Matrizen werden addiert indem man die positionsgleichen Werte miteinander addiert.

Faktormultiplikation: Eine Matrix kann mit einem Faktor multipliziert werden, indem jedes Element der Matrix mit dem Faktor multipliziert wird.

Multiplikation: Matrizen können nur miteinander multipliziert werden, wenn die erste Matrix so viele Spalten hat wie die zweite Matrix Zeilen.⁵

Es entsteht eine neue Matrix C. Indem man jeweils das i-te Element aus der Zeile Von der Matrix A mit dem i-ten Element der Matrix B multipliziert und diese Produkte dann miteinander addiert.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Bei der Matrixinversion wird die Matrix A hingeschrieben (A muss quadratisch sein). Um jetzt A^{-1} zu bekommen schreibt man noch die Einheitsmatrix (muss gleicher Typ sein). nebdran. Nun wandelt man die matrix mithilfe vom Gaus Algorithmus in die Einheitsmatrix um. dabei wendet man jeden Rechenschritt um die zu bewirken auch an der Einheitsmatrix an. Die 'alte' Einheitsmatrix ist jetzt A^{-1} .

⁵ $(n \times m) * (m \times k) = (n \times k)$

3 Vektoren

3.1 Koordinatensysteme

3.2 Rechenoperationen

3.3 Gerade, Ebene

3.4 Skalarprodukt

3.5 Vektorprodukt

4 Gruppen, Körper, Vektorräume

4.1 Gruppen

4.2 Körper

4.3 Vektorraum

4.4 Basis

5 Lineare Abbildungen

5.1 Definition

5.2 Darstellung durch Matrix

5.3 Rechenoperationen

5.4 Eigenvektor und Eigenwert