EEC1713 – ONDAS GUIADAS

DOCENTE: VALDEMIR PRAXEDES DA SILVA NETO

DISCENTE: JOÃO GUILHERME DOMINGOS DE OLIVEIRA – 20191002796

CARTA DE SMITH

Dada as equações (1) e (2) de Γ e z_L respectivamente, deduzir as expressões de círculos utilizadas na carta de Smith.

$$\Gamma = \Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im} \qquad (1)$$

$$z_L = r + jx \qquad (2)$$

Logo, igualando as duas equações, a expressão que determina o valor de z_L em função do coeficiente de reflexão é mostrado nas equações (3) e (4).

$$z_L = \frac{1 + \Gamma e^{j\theta}}{1 - \Gamma e^{j\theta}} \qquad (3)$$

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im}}{1 - \Gamma_{Re} - j\Gamma_{Im}} \qquad (4)$$

A partir da equação (4) é possível encontrar as expressões de *r* e *x*, sendo correspondentes aos círculos das partes reais e imaginárias respectivamente na carta de Smith.

O primeiro passo, é multiplicar a equação (4) pela sua complexa conjugada tanto no numerador quanto no denominador.

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im}}{1 - \Gamma_{Re} - j\Gamma_{Im}} \cdot \frac{1 - \Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im}}{1 - \Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im}} \qquad (5)$$

$$= \frac{1 + \Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im} - {\Gamma_{Re}}^2 - j\Gamma_{Im}\Gamma_{Re} - \Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im} + j\Gamma_{Im}\Gamma_{Re} - {\Gamma_{Im}}^2}{1 - \Gamma_{Re} - j\Gamma_{Im} - \Gamma_{Re} + {\Gamma_{Re}}^2 + j\Gamma_{Im}\Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im} - j\Gamma_{Im}\Gamma_{Re} + {\Gamma_{Im}}^2} \qquad (6)$$

$$r + jx = \frac{1 - {\Gamma_{Re}}^2 - {\Gamma_{Im}}^2 + 2j\Gamma_{Im}}{1 - 2\Gamma_{Re} + {\Gamma_{Re}}^2 + {\Gamma_{Im}}^2} \qquad (7)$$

Observando a equação (7), é possível notar que o denominador pode ser simplificado por um produto notável de tipo $(a - b)^2$, o resultado é mostrado na equação (8).

$$r + jx = \frac{1 - {\Gamma_{Re}}^2 - {\Gamma_{Im}}^2 + 2j\Gamma_{Im}}{(1 - \Gamma_{Re})^2 + {\Gamma_{Im}}^2} \qquad (8)$$

Sendo então, os termos independentes do *j* a expressão que determina o *r* e o valor multiplicado por *j* a expressão de *x*, mostrados na equação (9) e (10).

$$r = \frac{1 - {\Gamma_{Re}}^2 - {\Gamma_{Im}}^2}{(1 - \Gamma_{Re})^2 + {\Gamma_{Im}}^2} \qquad (9)$$

$$x = \frac{2j{\Gamma_{Im}}^2}{(1 - \Gamma_{Re})^2 + {\Gamma_{Im}}^2} \qquad (10)$$

A partir das equações (9) e (10) é possível realizar manipulações, tais que, permitam expressar as equações que representem a parte gráfica da carta de Smith, que no caso, são equações de circunferências que são dadas como $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

O primeiro passo, em relação ao valor de *r*, é multiplicar os dois lados pelo denominador.

$$r - 2r\Gamma_{Re} + r{\Gamma_{Re}}^2 + r{\Gamma_{Im}}^2 = 1 - {\Gamma_{Re}}^2 - {\Gamma_{Im}}^2 \qquad (11)$$

$$r - 2r\Gamma_{Re} + r{\Gamma_{Re}}^2 + r{\Gamma_{Im}}^2 + {\Gamma_{Im}}^2 = 1 - {\Gamma_{Re}}^2 \qquad (12)$$

$${\Gamma_{Re}}^2(r + 1) - 2r\Gamma_{Re} + {\Gamma_{Im}}^2(r + 1) = 1 - r \qquad (13)$$

$${\Gamma_{Re}}^2 - \frac{2r\Gamma_{Re}}{(r + 1)} + {\Gamma_{Im}}^2 = \frac{1 - r}{(r + 1)} \qquad (14)$$

Logo, podemos ver que a equação (14) já apresenta uma certa semelhança com a equação simplificada de uma circunferência, logo podemos encontrar a equação utilizando o método de completar os quadrados de um lado da expressão e realizando a soma simples de frações do outro lado da igualdade, como mostrado nas equações (15) - (18).

$${\Gamma_{Re}}^2 - \frac{2r\Gamma_{Re}}{(r + 1)} + {\Gamma_{Im}}^2 + \left(\frac{r}{1 + r}\right)^2 = \frac{1 - r}{(r + 1)} + \left(\frac{r}{1 + r}\right)^2 \qquad (15)$$

$$a = \left(\frac{r}{1 + r}\right), b = {\Gamma_{Re}}^2 \to (a - b)^2 = \left(\Gamma_{Re} - \frac{r}{1 + r}\right)^2 * \qquad (16)$$

$$\left(\Gamma_{Re} - \frac{r}{1 + r}\right)^2 + {\Gamma_{Im}}^2 = \frac{1 - r}{(r + 1)} + \left(\frac{r}{1 + r}\right)^2 \qquad (17)$$

$$\frac{(1 - r)(r + 1) + r(r + 1)}{(1 + r)^2} = \frac{1 - r + r - r^2 + r^2}{(1 + r)^2} \ \# \qquad (18)$$

Portanto, após a manipulação das equações, encontras a equação que descreve os círculos dos valores resistivos da impedância e admitância.

$$\left(\Gamma_{Re} - \frac{r}{1 + r}\right)^2 + {\Gamma_{Im}}^2 = \left(\frac{1}{1 + r}\right)^2 \qquad (19)$$

Analisando a equação simplificada de uma circunferência e a equação encontrada e mostrada em (19), é possível analisar que as circunferências descritas possuem a coordenada central ($\frac{r}{1+r}, 0$) e raio $r = \frac{1}{1+r}$.

Para as expressões que descrevem os círculos das reatâncias na carta de Smith *x*, voltamos a equação (10) como ponto de partida. Utilizando o mesmo artifício que no caso anterior, multiplicamos os dois lados pelo denominador.

$$x - 2x\Gamma_{Re}{}^2 + x\Gamma_{Re}{}^2 + x\Gamma_{Im}{}^2 = 2\Gamma_{Im}{}^2 \tag{20}$$

$$\frac{x}{x}\left(1 - 2\Gamma_{Re}{}^2 + \Gamma_{Re}{}^2 + \Gamma_{Im}{}^2\right) = \frac{2\Gamma_{Im}{}^2}{x} \tag{21}$$

$$(\Gamma_{Re} - 1)^2 + \Gamma_{Im}{}^2 - \frac{2\Gamma_{Im}{}^2}{x} = 0 \tag{22}$$

Logo, é possível notar que na equação (22), será necessário, realizar o procedimento de completar o quadrado para encontrarmos a expressão em semelhança com a de uma circunferência.

$$(\Gamma_{Re} - 1)^2 + \Gamma_{Im}{}^2 - \frac{2\Gamma_{Im}{}^2}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{23}$$

$$a = \Gamma_{Im}{}^2, b = \left(\frac{1}{x}\right) \to (a-b)^2 = \left(\Gamma_{Im} - \frac{1}{x}\right)^2 * \tag{24}$$

Desta maneira, após as manipulações mostradas em (23) e (24), chegamos ao resultado da expressão que determina as circunferências no plano complexo da carta de Smith.

$$(\Gamma_{Re} - 1)^2 + \left(\Gamma_{Im} - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{25}$$

Desta forma, analogamente a análise do resultado obtido para *r* em (19), podemos deduzir que os círculos possuem a coordenada central $(1, \frac{1}{x})$ e raio $r = \frac{1}{x}$.