Simulations aléatoires
Master 1 MAPI3
Liste de projets

Année 2025–2026

Consignes

Objectif. L'objectif de ces projets de simulations aléatoires est de permettre aux étudiants de mettre en pratiques les compétences vues pendant le cours :

— Différentes méthodes de simulations de variables aléatoires.

— Analyse de résultats de simulations.

— Exploration de ces résultats, définition d'observables adaptées à la question posée.

— Présentation des résultats, génération de figure et construction d'un document présentant en contexte les résultats observés.

Évaluation Chaque projet sera évalué sous la forme suivante :

— Un rapport (évalué sur 6 points) par groupe, rendu le 30/11/2025. L'objectif du rapport est de décrire le modèle étudié, la problématique posée, l'algorithme utilisé pour simuler ce modèle (on pourra justifier la justesse d'un tel algorithme), ainsi que les résultats obtenus. La clarté du rapport ainsi que le choix judicieux des illustrations seront des éléments de la notation.

— Une présentation (évaluée sur 6 points) par élève, qui se tiendra courant décembre. Chaque élève présentera en 3 minutes son apport au projet et les résultats obtenus, suivi de 10min d'entretien sur des points techniques de la simulation ou du rapport.

Organisation Les projets seront menés par des groupes de 3 ou 4 élèves. Un groupe de 5 élèves ou plus recevra automatiquement la note de 0. Chaque groupe travaillera sur un sujet différent. Afin de choisir un sujet, un membre du groupe enverra un mail à Bastien Mallein <bastien.mallein@math.univ-toulouse.fr> à partir du 6/10/2025 à 9 :45, avec en copie les 3 autres membres du groupe, contenant les informations suivantes

— **Sujet.** "Projet de Simulation aléatoire 2025/2026"

— **Liste des membres du groupe** : Une liste contenant les noms et prénoms des 4 membres du groupe.

— **Projets envisagé** : Une liste ordonnée de (au moins) 5 sujets préférés par le groupe.

L'attribution se fera le 13/10/2025 selon les critères suivants :

— Les groupes ayant le mieux respecté les consignes verront leurs choix traités en priorité

— Les égalités seront traitées sur la base du "premier arrivé, premier servi".

— Une phase complémentaire d'attribution sera organisée pour les groupes sans projet.

Table des matières

1 Modélisation d'une épidémie 2

2 Simulation de population envahissante 4

3 Généalogie d'une population 6

4 Modèle de réacteur nucléaire 8

5 Règlement de comptes à OK Corral 10

6 Modèles de renforcement aléatoires 12

7 Percolation dans $\mathbb{Z}^2$ 14

8 Processus de coalescence aléatoire 16

9 Distribution quasi-stationnaire de population 18

10 Plus long chemin croissant dans un hypercube 20

11 Files d'attente et temps de service 21

12 Propagation d'une opinion dans une population 22

13 Epidemie de rumeur sur un réseau 23

14 Marche aléatoire autoévitante 24

15 Propagation d'un incendie dans une forêt 25

16 Formation de trafic routier et embouteillages 26

17 Dynamique de population proie-prédateur 27

18 Cascade d'avalanches dans un tas de sable 29

19 Modèle d'urnes sur $\mathbb{Z}$ 31

Chapitre 1

Modélisation d'une épidémie

Objectif. On cherche à mettre en place la simulation numérique d'un modèle stochastique de type SIR (*Susceptible–Infectieux–Rétabli*) afin d'étudier la dynamique d'une épidémie.

Description du modèle. On considère une population de taille N, dans laquelle chaque individu peut être dans l'un des trois états suivants :

— **Susceptible** (S) : individu sain mais pouvant être infecté,

— **Infecté** (I) : individu porteur de la maladie et pouvant la transmettre,

— **Rétabli** (R) : individu ayant guéri, supposé immunisé de façon permanente.

L'évolution de l'épidémie sera modélisée de la façon suivante :

— *Infection* : chaque individu infecté I crée un événement d'infection à taux β. Cet individu chaque autre individu susceptible S au bout d'un temps exponentiel de paramètre β/N

— *Guérison* : chaque individu infecté se rétablit avec un taux γ, et devient un individu rétabli R.

Le nombre d'individus susceptibles, infectés et rétablis au temps t est noté $(S(t), I(t), R(t))$. Il s'agit d'un processus de Markov en temps continu, avec les taux de transition suivants :

— passage de l'état (s, i, r) à l'état $(s-1, i+1, r)$ à taux $\beta si/N$

— passage de l'état (s, i, r) à l'état $(s, i-1, r+1)$ à taux γi.

Le paramètre-clé de ce modèle est le nombre de reproduction de base, correspondant au nombre moyen d'infectés créé par un individu nouvellement infecté dans une population saine

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Travail demandé.

1. **Implémentation du modèle.** Écrire un code Python permettant de simuler la trajectoire du processus $(S(t), I(t), R(t))$ à l'aide d'un algorithme stochastique.
2. **Expériences numériques.** Explorer le comportement de l'épidémie pour différentes valeurs de (β, γ, N), en répétant un grand nombre de simulations indépendantes. Étudier notamment :
   — la probabilité d'extinction rapide de l'épidémie,
   — la taille maximale du nombre d'infectés et le temps d'apparition de ce maximum,
   — la proportion finale d'individus infectés.
3. **Comparaison avec la théorie.** Justifier certaines des affirmations énoncées dans la présentation du modèle, ou les illustrer numériquement grâce aux expériences numériques.
4. **Analyse statistique et visualisation.** Produire des graphiques et des estimations (moyennes, intervalles de confiance, histogrammes) illustrant les phénomènes observés.

5. **Étude de variantes.** Implémenter une ou plusieurs variantes du modèle, par exemple celles mentionnées dans la section suivante. Comparer les résultats de ces variantes avec ceux du modèle de base.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   — introduction et description du modèle,
   — explications méthodologiques,
   — présentation des résultats numériques,
   — illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   — discussion et conclusion.

Extensions possibles.

— Dans le cas d'une maladie potentiellement mortelle, chaque individu pourrait avoir une probabilité p de passer dans l'état mort M, on pourra ainsi étudier l'impact à long terme de cette épidémie.

— On pourra étudier l'effet d'une vaccination initiale, où un certain pourcentage de la population est placé dans l'état rétabli R au temps $t = 0$. Alternativement, un individu vacciné pourrait avoir, à chaque tentative d'infection, une probabilité $\theta \in [0, 1]$ de ne pas devenir infecté.

— On pourra ajouter un état intermédiaire *Exposé* (modèle SEIR), où un individu a été contaminé, mais n'est pas encore contagieux.

— On pourra considérer une population structurée, où chaque individu infecte préférentiellement ses voisins. Par exemple, considérer une population de N foyers de 4 personnes, où on contamine avec probabilité $1/2$ un membre de son foyer au hasard, ou avec probabilité $1/2$ un membre de la population générale au hasard. On pourra bien sûr complexifier encore le modèle (ajouter des écoles, entreprises, hopitaux, etc.)

— On pourra implémenter des stratégies de contrôle (confinement, réduction de β au-delà d'un certain seuil d'infectés), et comparer leur efficacité.

Chapitre 2

Simulation de population envahissante

Objectif. On souhaite simuler la dynamique d'une population envahissante (crapeau-buffle en Australie, bourdon asiatique en Europe, etc.) se répendant dans un environnement. On cherche à observer et analyser comment une population, qui se reproduit et se déplace de façon aléatoire sans compétition, colonise progressivement son environnement.

Description du modèle. La population consiste initialement à un seul individu, placé en 0. Le modèle évolue par générations successives :

— Chaque individu engendre un nombre aléatoire d'enfants, selon une loi de probabilité donnée (par exemple une loi de Poisson de paramètre λ).

— Chaque enfant effectue un déplacement aléatoire à partir de la position de son parent, suivant une loi de pas (par exemple une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$).

La génération n est donc obtenue à partir de la génération $n-1$ en répétant ce mécanisme de reproduction et de déplacement pour chaque individu.

On note Z_n le nombre d'individus à la génération n, et $\{X_i^{(n)}\}_{1 \leq i \leq Z_n}$ leurs positions.

Travail demandé.

1. **Implémentation du modèle.** Écrire un code Python simulant ce processus, avec choix paramétrable de la loi de reproduction et de la loi de déplacement.
2. **Analyse statistique et visualisation.** Représenter graphiquement les positions des individus sur plusieurs générations. Produire à la fois des trajectoires individuelles typiques et des résumés statistiques (par exemple histogramme des positions).
3. **Expériences numériques.** Explorer le comportement du modèle pour différentes valeurs de λ (taux de reproduction moyen) et de σ^2 (variance des déplacements). Étudier notamment :
   — la probabilité d'extinction de la population,
   — la vitesse de propagation de la population (comportement du maximum des positions en fonction de la génération),
   — la croissance moyenne du nombre d'individus par génération
   — la loi de la position du maximum au temps n.
4. **Analyse et comparaison théorique.** Relier vos observations aux prédictions théoriques simples : extinction certaine si $\mathbb{E}[\text{descendance}] < 1$, croissance exponentielle si $\mathbb{E}[\text{descendance}] > 1$, propagation spatiale linéaire en n, etc.
5. **Étude de variantes.** Implémenter une ou plusieurs variantes du modèle, par exemple celles mentionnées dans la section suivante. Comparer les résultats de ces variantes avec ceux du modèle de base.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :

— introduction et description du modèle,
— explications méthodologiques,
— présentation des résultats numériques,
— illustrations pertinentes du modèle et des résultats
— discussion et conclusion.

Extensions possibles.

— Étudier des lois de déplacement différentes : gaussienne, loi à queue lourde (loi de Cauchy), déplacements discrets (± 1).
— Introduire un environnement spatial contraint : intervalle infécond où les individus meurent sans descendance, barrières absorbantes, etc. Observer l'effet sur la survie et la propagation.
— Ajouter une influence temporelle : modification de la loi de reproduction et/ou du déplacement au cours du temps.
— Introduire une forme de compétition entre les individus géographiquement proches, par exemple garder au plus un individu dans chaque intervalle $[i, i+1]$ choisi au hasard.

Chapitre 3

Généalogie d'une population

Objectif. L'objectif de ce projet est de modéliser et de simuler la généalogie d'une population finie. On cherche à comprendre comment les mécanismes aléatoires de reproduction influencent la diversité génétique et la coalescence des lignées ancestrales.

Description du modèle. On considère une population de taille constante N individus, évoluant par générations discrètes.

— Chaque individu de la génération $t+1$ choisit son parent uniformément au hasard parmi les N individus de la génération t.

— Les choix sont indépendants d'un individu à l'autre, et il est possible que plusieurs individus aient le même parent.

— On peut suivre l'évolution d'une ou plusieurs *lignées* d'individus au fil du temps, en remontant génération après génération.

Travail demandé.

1. **Implémentation du modèle.** Écrire un code Python simulant ce processus pour une population de taille N, sur un nombre donné de générations.
2. **Visualisation de généalogies.** Produire des graphes illustrant la généalogie d'un échantillon d'individus (par exemple leurs arbres ancestraux). Mettre en évidence la coalescence (fusion des lignées).
3. **Étude de la coalescence.** Simuler en remontant le temps temps jusqu'au plus récent ancêtre commun (MRCA) d'un échantillon de k individus dans cette population. Étudier statistiquement la distribution de ce temps.
4. **Étude de variantes.** Implémenter une ou plusieurs variantes du modèle, par exemple celles mentionnées dans la section suivante. Comparer les résultats de ces variantes avec ceux du modèle de base.
5. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   — introduction et description du modèle,
   — explications méthodologiques,
   — présentation des résultats numériques,
   — illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   — discussion et conclusion.

Extensions possibles.

— Ajouter un allèle à chaque individu, de telle sorte qu'un enfant hérite de l'allèle de son parent. Étudier l'évolution de la diversité de la population, le temps de fixation (instant où toute la population partage le même allèle) en fonction de la proportion de départ de chaque allèle.

— Étudier le modèle avec mutation : chaque enfant hérite de l'allèle de son parent, sauf avec probabilité μ où il change d'état ($A \leftrightarrow a$).

— Ajouter la sélection : les individus portant un allèle spécifique ont une probabilité plus élevée d'être choisis comme parents.

— Simuler des tailles de population variables. Etudier par exemple l'effet pour la diversité d'un goulot d'étranglement, où la population reste pendant quelques générations de taille $n \ll N$ avant de revenir à une population de taille N.

— Étudier un modèle sexué, où chaque individu sélectionne deux parents et hérite de la moitié du code génétique de chacun de ses parents. On pourra étudier en particulier la situation où les individus hétérozygotes (aA) sont favorisés par la sélection, ou défavorisés par la sélection.

— Définir des "iles" de population de telle sorte qu'un enfant choisisse avec plus grande probabilité son parent dans la même ile que son parent.

Chapitre 4

Modèle de réacteur nucléaire

Objectif L'objectif de ce projet est de modéliser et de simuler la dynamique des neutrons dans un domaine, à l'aide d'un processus stochastique. On étudiera, par simulation, les conditions de criticité d'un réacteur nucléaire : extinction de la population de neutrons, croissance explosive ou équilibre.

Description du modèle. On considère un domaine spatial (par exemple un intervalle 1D, ou un carré 2D) représentant la zone active du réacteur.

— Chaque neutron se déplace avec une vitesse fixée v entre deux changement d'états.
— Lorsqu'un neutron interagit avec le milieu, trois événements sont possibles :
    — **Diffusion** : le neutron change de vitesse (direction et module), mais continue de se déplacer.
    — **Absorption** : le neutron disparaît (il est absorbé par le milieu).
    — **Fission** : le neutron est absorbé et génère un nombre aléatoire de nouveaux neutrons (par exemple une loi de Poisson de paramètre λ) qui s'éloignent avec une nouvelle vitesse.

  Les taux d, a, f auxquels chacun de ces trois événements se produisent sont des paramètres du modèle, de même que le nombre d'enfants et la vitesse des neutrons.
— Si un neutron atteint le bord du domaine, il est perdu (absorption par fuite).

Le paramètre clé de ce modèle est le taux moyen de reproduction $\mathbb{E}[\text{descendance}]$:

$$\begin{cases} < 1 & \text{extinction quasi-certaine (sous-critique),} \\ = 1 & \text{situation critique,} \\ > 1 & \text{croissance exponentielle possible (sur-critique).} \end{cases}$$

Travail demandé.

1. **Implémentation du modèle.** Écrire un code Python simulant la trajectoire des neutrons dans le domaine.
2. **Visualisation.** Produire des graphiques représentant :
    — des trajectoires individuelles de neutrons,
    — l'évolution du nombre de neutrons par génération,
    — la distribution des positions des neutrons dans le domaine.
3. **Expériences numériques.** Explorer le comportement du système lorsque les paramètres du modèle évoluent, notamment
    — probabilité de diffusion / absorption / fission,
    — loi de reproduction lors d'une fission,
    — taille du domaine.

   Étudier notamment :

- la probabilité d'extinction,
  - le temps moyen jusqu'à extinction,
  - la croissance moyenne de la population en régime sur-critique.

4. **Étude de variantes.** Implémenter une ou plusieurs variantes du modèle, par exemple celles mentionnées dans la section suivante. Comparer les résultats de ces variantes avec ceux du modèle de base.
5. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles

- Simuler un domaine bidimensionnel avec des zones de matériaux différents (eau/graphite/fuel), dans lesquelles les taux de fission/absorption sont différents. Étudier l'effet de la géométrie sur la distribution des positions.
- Étudier l'effet de la taille du domaine sur la probabilité d'extinction.
- Ajouter des effets physiques dans la description du modèle :
  - les neutrons rapides diffusent d'avantage, la diffusion ralentit toujours un neutron, les neutrons lents sont d'avantage absorbés ou créent des fissions,
  - la fission n'est pas un phénomène instantané, mais prend un temps qu'on pourra modéliser par une loi exponentielle, les neutrons nouvellement créés sont rapides.
- La radioactivité naturelle crée régulièrement, de façon spontanée, de nouveaux neutrons dans le réacteur. Étudier l'effet de l'apparition de ces neutrons dans le cas d'un réacteur sous-critique, critique, surcritique.

Chapitre 5

Règlement de comptes à OK Corral

Objectif. On souhaite simuler un modèle stochastique pour décrire un affrontement entre deux groupes de tireurs (par exemple les « bandits » et les « marshals »). Chaque camp perd progressivement des combattants, et l'enjeu est de comprendre comment les effectifs initiaux et les règles de tir influencent l'issue du conflit.

Description du modèle. On considère deux groupes de taille initiale A_0 et B_0 :

— À chaque étape, chaque tireur du camp A vise un membre de B, et réciproquement. Les tirs sont supposés simultanés.

— Un tir atteint sa cible avec une probabilité p_A pour un tireur de A, et p_B pour un tireur de B.

— Chaque individu atteint est immédiatement retiré du système (éliminé).

On obtient ainsi une chaîne de Markov (A_t, B_t) décrivant l'évolution du nombre de survivants de chaque camp. Le conflit s'arrête dès qu'un des deux camps n'a plus de combattants.

On pourra également considérer une version en temps continu de ce modèle, où chaque membre du camp A tire, à taux λ_A, sur un membre du camp B, réciproquement chaque membre du camp B tire à taux λ_B sur un membre du camp A. À chaque tir, un membre est retiré de l'équipe d'en face.

Travail demandé.

1. **Implémentation du modèle.** Écrire une fonction simulant un affrontement entre deux groupes (A_0, B_0), et retournant l'issue (vainqueur, effectifs restants).
2. **Visualisation.** Représenter graphiquement :
   — l'évolution des effectifs A_t et B_t au cours du temps,
   — la distribution des temps de fin du conflit,
   — la probabilité de victoire de A en fonction des paramètres initiaux.
3. **Expériences numériques.** Explorer l'influence de :
   — les tailles initiales A_0, B_0,
   — les probabilités de succès p_A, p_B ou les taux de tir λ_A, λ_B,
   — la règle utilisée (tirs simultanés vs modèle proportionnel).

   De combien faut-il augmenter l'effectif de B si le taux de tir λ_A est doublé pour retrouver une
4. **Analyse et comparaison.** Comparer les résultats numériques avec les équations déterministes de Lanchester :
$$\frac{dA}{dt} = -\alpha B, \qquad \frac{dB}{dt} = -\beta A.$$
   Discuter des différences entre version stochastique et version déterministe.

5. **Étude de variantes.** Implémenter une ou plusieurs variantes du modèle, par exemple celles mentionnées dans la section suivante. Comparer les résultats de ces variantes avec ceux du modèle de base.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles.

- Introduire un 3e camp (impasse mexicaine ?), et des règles de combat adaptées.
- Ajouter une composante spatiale, les deux groupes sont réparties sur des lignes qui se font face, et la probabilité de succès d'un tir diminue avec la distance.
- Introduire différents états pour les combattants (blessure légère, incapacité temporaire, hors de combat)... qui modifient leur taux de tir sans nécessairement les éliminer s'ils sont touchés.

Chapitre 6

Modèles de renforcement aléatoires

Objectif. On cherche à de modéliser, simuler et analyser un schéma d'urne aléatoire, l'un des modèles fondamentaux en probabilités. Ces processus apparaissent dans de nombreux contextes : dynamique des opinions, renforcement en apprentissage, théorie des graphes aléatoires, biologie évolutive.

Description du modèle. On considère une urne contenant initialement r_0 boules rouges et b_0 boules bleues. Le processus évolue par étapes :

1. À chaque tirage, on choisit une boule au hasard (avec probabilité proportionnelle au nombre de boules de chaque couleur).
2. On replace cette boule dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.

Ainsi, les couleurs qui apparaissent tôt tendent à dominer le système (*effet de renforcement*). Plus généralement, on peut introduire un paramètre $c \geq 1$: à chaque tirage, on ajoute c boules supplémentaires de la couleur tirée.

Travail demandé.

1. **Implémentation du modèle.** Écrire une fonction simulant l'évolution de l'urne de Pólya, à partir de conditions initiales (r_0, b_0) et d'un paramètre c.
2. **Visualisation.** Représenter graphiquement :
   - l'évolution du nombre de boules de chaque couleur au cours du temps,
   - la proportion de boules rouges $\frac{R_t}{R_t+B_t}$.
3. **Expériences numériques.** Explorer le comportement du système pour différentes conditions initiales et valeurs de c. Étudier notamment :
   - la variabilité des proportions finales (simuler plusieurs trajectoires),
   - la convergence en loi de la proportion de rouges.
4. **Étude de variantes.** Implémenter une ou plusieurs variantes du modèle, par exemple celles mentionnées dans la section suivante. Comparer les résultats de ces variantes avec ceux du modèle de base.
5. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles. Pour enrichir le projet, vous pouvez :

— Étudier le cas à plus de deux couleurs.

— Introduire un paramètre de renforcement c variable selon la couleur.

— Comparer avec une version à renforcement négatif : lorsqu'on tire une couleur, on ajoute c boules de l'autre couleur.

— Proposer d'autres modèles de renforcements, lorsqu'on tire une boule bleue on ajoute une boule de chaque couleur, quand on tire une boule rouge on ajoute deux boules rouges.

— Étudier numériquement la vitesse de convergence vers la loi limite.

Chapitre 7

Percolation dans $\mathbb{Z}^2$

Objectif. L'objectif de ce projet est de simuler et d'analyser un modèle de **percolation** sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$. Ce modèle est fondamental en probabilités et physique statistique, et intervient dans l'étude des matériaux poreux, de la propagation d'un feu de forêt, ou encore des réseaux de communication.

Description du modèle. On considère un réseau carré de taille finie $N \times N$:

— Chaque site (ou arête) est déclaré *ouvert* avec probabilité p, *fermé* avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres.

— Un cluster est un ensemble connexe de sites (ou arêtes) ouverts.

— On dit qu'il y a *percolation* si un cluster relie le bord supérieur au bord inférieur (ou bien la gauche et la droite) du domaine.

Travail demandé.

1. **Implémentation.** Écrire un programme simulant une configuration aléatoire de percolation sur une grille $N \times N$, avec paramètre p. Identifier les clusters à l'aide d'un algorithme adapté.
2. **Visualisation.** Représenter graphiquement une configuration (sites ouverts/fermés, clusters colorés). Montrer un cluster traversant lorsqu'il existe.
3. **Expériences numériques.** Étudier expérimentalement :
   — la taille du plus grand cluster en fonction de p,
   — la probabilité d'existence d'un cluster traversant,
   — la distribution des tailles de clusters pour différentes valeurs de p.
4. **Analyse.** Comparer vos résultats avec les prédictions théoriques : existence d'un seuil critique p_c (par exemple $p_c = 1/2$ pour la percolation par arêtes sur $\mathbb{Z}^2$). Discuter l'effet de la taille finie N.
5. **Étude de variantes.** Implémenter une ou plusieurs variantes du modèle, par exemple celles mentionnées dans la section suivante. Comparer les résultats de ces variantes avec ceux du modèle de base.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   — introduction et description du modèle,
   — explications méthodologiques,
   — présentation des résultats numériques,
   — illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   — discussion et conclusion.

Extensions possibles Pour aller plus loin :

- Comparer percolation par sites et percolation par arêtes.
- Étudier l'effet de la taille de la grille N sur la probabilité de percolation (finite-size scaling), ou de la forme (grille rectangulaire $N \times M$)
- Étudier la taille moyenne du plus grand cluster près du seuil critique.
- Introduire un modèle de percolation dépendant, avec des corrélations spatiales entre arrêtes (corrélations spatiales).

Chapitre 8

Processus de coalescence aléatoire

Objectif L'objectif de ce projet est de simuler et d'analyser des processus de type **Λ-coalescents**, largement utilisés en génétique des populations et en biologie évolutive. Ces modèles permettent de représenter la généalogie d'espèces ou de virus dans des contextes où des individus peuvent avoir une descendance très importante.

Description du modèle On considère un échantillon de n individus. La dynamique d'un Λ-coalescent est la suivante :

— Si il y a b lignées, pour tout $2 \leq k \leq b$, chaque sous-ensemble de k lignées parmi les b peut fusionner en une seule lignée à un taux proportionnel à

$$\lambda_{b,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{b-k} \, \Lambda(dx),$$

où Λ est une mesure de probabilité sur $[0, 1]$.

— Quand un tel événement se produit, les k lignées se rassemblent en un ancêtre commun.

Cas particuliers classiques :

— Si $\Lambda = \delta_0$, alors chaque paire de lignées fusionne (coalesce) à taux unité.

— Si $\Lambda = \text{Beta}(2-\alpha, \alpha)$, on obtient le coalescent Beta, utilisé pour modéliser la généalogie de nombreuses espèces.

Travail demandé

1. **Implémentation.** Simuler des trajectoires de Λ-coalescents pour un échantillon de taille n (par exemple $n = 50$). Utiliser différentes mesures Λ (Kingman, uniforme, Beta).
2. **Visualisation.** Représenter graphiquement :
   — les arbres de coalescence obtenus,
   — le temps total jusqu'au MRCA (Most Recent Common Ancestor),
   — la distribution des tailles de fusions successives.
3. **Expériences numériques.** Étudier expérimentalement :
   — la vitesse de coalescence en fonction de n et du choix de Λ,
   — la distribution des temps de coalescence,
   — les différences qualitatives en fonction du choix de la mesure (par exemple, temps nécessaire pour passer d'une population de n lignées à $n/2$).
4. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   — introduction et description du modèle,
   — explications méthodologiques,
   — présentation des résultats numériques,
   — illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   — discussion et conclusion.

Extensions possibles Pour aller plus loin :

- Ajouter un phénomène de désintégration où à taux λ, chaque lignée se redivise ses éléments constituants. Étudier la taille typique d'une famille sous la mesure invariante.
- Comparer les temps au MRCA pour différents Λ.
- Étudier des coalescents en temps inhomogène (mesure Λ dépendant du temps).

Chapitre 9

Distribution quasi-stationnaire de population

Présentation Dans de nombreux modèles stochastiques en biologie, écologie ou physique, on étudie des processus qui finissent presque sûrement par s'éteindre. Un exemple typique est une population d'individus dont chaque individu se reproduit ou meurt au cours du temps. Bien que l'extinction soit certaine à long terme, le processus peut rester pendant longtemps dans un état « stationnaire conditionnel » : on parle alors de *distribution quasi-stationnaire*.

Ce projet vise à simuler un tel processus, à en observer les propriétés, et à estimer numériquement la distribution quasi-stationnaire associée.

Objectifs

— Simuler un processus de naissance-mort simple, par exemple une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, \dots\}$ avec transition :

$$n \to n+1 \quad \text{avec probabilité } \lambda\frac{n}{n+\mu}, \qquad n \to n-1 \quad \text{avec probabilité } \mu\frac{n}{n+\mu},$$

et absorption en 0.

— Étudier la loi de X_t conditionnellement à la survie ($X_t > 0$).

— Mettre en évidence l'apparition d'une loi quasi-stationnaire : après un temps suffisant, la distribution conditionnelle semble se stabiliser.

— Comparer cette loi avec celle obtenue avec la procédure suivante : on lance en parallèle N copies indépendantes de $(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(N)})$. Dès q'une des copies atteint 0, on réinitialise sa valeur en choisissant au hasard la valeur des $N-1$ autres copies de ce processus. On s'intéresse alors à la loi en temps long de $X^{(1)}$.

Travail demandé

1. Écrire un simulateur de la chaîne de Markov de naissance-mort avec absorption en 0.
2. Réaliser de nombreuses trajectoires et estimer expérimentalement la probabilité de survie jusqu'au temps t.
3. Pour des temps t fixés (par exemple $t = 20, 50, 100$), estimer la loi empirique de X_t conditionnée à la survie.
4. Comparer à la dynamique proposée avec plusieurs chaines lancées en simultané.
5. Vérifier la convergence de cette loi empirique vers une distribution stable.
6. Représenter graphiquement cette loi quasi-stationnaire estimée.
7. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   — introduction et description du modèle,
   — explications méthodologiques,

— présentation des résultats numériques,
— illustrations pertinentes du modèle et des résultats
— discussion et conclusion.

Extensions possibles

— Étudier un processus de Galton-Watson discret avec extinction certaine, et simuler la distribution quasi-stationnaire associée.
— Comparer les résultats numériques avec des approximations théoriques connues (par exemple par les vecteurs propres de la matrice de transition tronquée).
— Explorer la vitesse de convergence vers la distribution quasi-stationnaire.
— Étudier des variantes où plusieurs classes d'individus interagissent, et analyser s'il existe une distribution quasi-stationnaire commune.

Chapitre 10

Plus long chemin croissant dans un hypercube

Objectif. On souhaite étudier la longueur des plus longs chemins croissants dans l'hypercube $\{0,1\}^d$. Il s'agit d'un problème classique en écologie évolutive, où le développement d'une nouvelle capacité nécessite une mutation sur d loci différents. Cependant, les mutations ne peuvent pas être simultanées, il faut donc que chaque mutation, individuellement, soit bénéfique pour que la nouvelle mutation puisse être fixée dans la population.

On fixera la fitness de $(0,0,...,0)$ à 0, la fitness de $(1,1,...1)$ à 1, et toutes les autres fitness seront tirées uniformément au hasard entre 0 et 1.

Description du modèle. On considère l'hypercube $\{0,1\}^d$, dont les sommets sont les vecteurs binaires de longueur d, et dont deux sommets sont reliés par une arête si et seulement s'ils diffèrent d'une seule coordonnée. Chaque sommet $u \in \{0,1\}^d$ possède une fitness U_u de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de toutes les autres fitness.

Un chemin est dit *croissant* si, le long de ce chemin, ni la suite des fitness ni la suite des coordonnées ne décroit (autrement dit, à chaque étape, on modifie une coordonnée unique de 0 vers 1). On cherche à estimer la longueur du plus long chemin croissant dans l'hypercube, et en particulier s'il existe un chemin croissant de longueur d, reliant $(0,0,...,0)$ à $(1,1,...1)$.

Travail demandé.

1. Implémenter un algorithme pour étudier les chemins croissants de l'hypercube.
2. Étudier la loi de la longueur maximale en fonction de la valeur de d, et de la probabilité de relier $(0,0,...,0)$ à $(1,1,...1)$.
3. Étudier certaines des alternatives proposées au paragraphe suivant.
4. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles.

- Autoriser les fitness à décroitre d'une hauteur h entre deux pas successifs (c'est à dire qu'un chemin entre u et v est possible si $U_v > U_u - h$). Étudier ce qui se passe lorsque $h \to 0$.
- Considérer d'autres formes de graphes sous-jascent, comme $\{0,1,2\}^d$, où on cherchera à rejoindre $(2,2,...2)$.

Chapitre 11

Files d'attente et temps de service

Objectif. Étudier par simulation le comportement d'un système de files d'attente, afin de mettre en évidence la loi stationnaire et les temps d'attente moyens.

Description du modèle. On considère un système de files d'attente où les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ et sont servis un par un, avec 1 ou plusieurs guichets, avec des temps de service exponentiels de paramètre μ. La file est potentiellement infinie. On peut imaginer plusieurs situations (files d'atente dans un supermarché, à un péage, etc.) qui peuvent permettre aux clients de changer de file sous certaines conditions.

Travail demandé.

1. Implémenter l'évolution d'une file d'attente unique, où les clients arrivent les uns après les autres, et sont servis.
2. Étudier numériquement le temps d'attente moyen et la taille de la file en fonction des paramètres λ et μ.
3. Proposer une version généralisée où jusqu'à c clients peuvent être traités en même temps, et comparer les résultats à c files d'attentes, où les clients choisissent au hasard, ou de façon stratégique leur file.
4. Étudier numériquement le temps d'attente moyen et la taille moyenne de la file, et quelques extensions proposées ci-dessous.
5. Visualiser graphiquement l'évolution de la file au cours du temps et sa distribution stationnaire.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles.

- Vérifiez ce qui se passe lorsque le temps de service ne suit plus une loi exponentielle, où lorsque les différents serveurs possèdent une efficacité différente.
- Proposer un modèle où les clients doivent être servis de façon successive par 2 serveurs.
- Introduire une capacité maximale de clients, et analyser le nombre de pertes par unité de temps en fonction du nombre de serveurs. En introduisant un coût d'utilisation des serveurs, déterminer la valeur optimale de c en fonction de λ, μ et la capacité choisie.
- Étudier la variance du temps d'attente et la loi empirique des files.

Chapitre 12

Propagation d'une opinion dans une population

Objectif. Simuler et analyser la dynamique de propagation d'opinions dans une population structurée en réseau, afin d'étudier l'émergence d'un consensus ou la persistance de désaccords.

Description du modèle. Chaque individu est représenté par un sommet d'un graphe (ligne, grille, graphe aléatoire – chaque individu choisit au hasard k voisins). Chaque sommet possède une opinion binaire (0 ou 1). À chaque étape, un individu choisit un voisin au hasard et adopte son opinion. On observe la dynamique globale : extinction d'une opinion, consensus final, temps jusqu'au consensus.

Travail demandé.

1. Implémenter la dynamique de ce modèle sur différents graphes.
2. Simuler de nombreuses trajectoires et observer la distribution des temps de consensus.
3. Étudier l'effet du graphe sur le temps d'atteinte du consensus, et celui de la condition initiale sur l'état du consensus.
4. Analyser l'influence de la taille du graphe et du degré moyen sur les résultats.
5. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles.

- Considérer des opinions à plusieurs états (plus de deux choix possibles).
- Introduire un biais (certaines opinions sont plus « convaincantes »).
- Étudier l'effet d'agents rigides qui ne changent jamais d'opinion.
- Étudier l'effet 'd'influences externes', qui peuvent modifier de façon aléatoire l'opinion des agents.

Chapitre 13

Epidemie de rumeur sur un réseau

Objectif. Étudier, par simulation, la propagation d'une rumeur dans une population modélisée par un graphe, en mettant en évidence la taille finale de la population informée et les conditions de diffusion globale.

Description du modèle. On considère une population représentée par un graphe aléatoire : on fixe n sommets, et chaque paire de sommets est reliée par une arrête avec probabilité p/n, pour un certain $p > 0$ fixé. Chaque individu peut être dans l'un des trois états : ignorant, propagateur ou saturé. La dynamique : un propagateur rencontre ses voisins et leur transmet la rumeur avec une certaine probabilité. Après un temps aléatoire, il cesse de propager et devient saturé. Le processus se poursuit jusqu'à extinction.

Travail demandé.

1. Implémenter la dynamique de propagation sur différents graphes (on pourra considérer une ligne, un plan, etc.)
2. Simuler de nombreuses trajectoires et estimer la distribution de la taille finale de la rumeur.
3. Étudier l'impact de la densité du graphe sur la probabilité d'une diffusion large.
4. Visualiser la propagation au cours du temps sur un graphe de petite taille.
5. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   — introduction et description du modèle,
   — explications méthodologiques,
   — présentation des résultats numériques,
   — illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   — discussion et conclusion.

Extensions possibles.

— Étudier des graphes à degré variable (loi de puissance, réseaux sociaux).
— Introduire une rumeur et son démenti (si l'agent entend d'abord le démenti, il bloque la propagation de la rumeur, mais la probabilité de transmettre le démenti est plus faible que la rumeur).
— Ajouter une probabilité d'oubli de la rumeur pour les individus saturés.

Chapitre 14

Marche aléatoire autoévitante

Objectif. Étudier par simulation les propriétés d'une marche aléatoire auto-évitante sur $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^3$, en particulier la longueur moyenne avant blocage et les propriétés de diffusion.

Description du modèle. On considère une marche aléatoire partant de l'origine sur $\mathbb{Z}^d$ ($d = 2$ ou 3). À chaque étape, la particule choisit uniformément une direction parmi celles qui ne la ramènent pas sur un site déjà visité. Le processus s'arrête lorsqu'aucune direction n'est possible (blocage).

Travail demandé.

1. Implémenter une marche aléatoire auto-évitante et simuler de nombreuses trajectoires.
2. Estimer la longueur moyenne avant blocage en fonction de la dimension.
3. Étudier la forme spatiale de la marche et comparer avec une marche aléatoire simple.
4. Visualiser graphiquement des trajectoires typiques.
5. Analyser les fluctuations observées.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles.

- Étudier des variantes : auto-évitement partiel (à chaque passage sur un chemin passé, probabilité $p \in (0, 1)$ d'arrêter la marche), interactions attractives ou répulsives.
- Étudier le comportement asymptotique (exposants critiques, dimension fractale).
- Étudier le comportmeent de la marche auto-évitante conditionnée à ne pas s'être arrétée sur un temps long.

Chapitre 15

Propagation d'un incendie dans une forêt

Objectif. Modéliser et analyser la propagation d'un incendie dans une forêt à l'aide d'un modèle stochastique sur une grille, afin de comprendre les conditions menant à un feu généralisé ou à un feu limité.

Description du modèle. On considère une grille carrée dont chaque case peut être :

— un arbre sain,

— un arbre en feu,

— un arbre brûlé.

À chaque pas de temps, un arbre en feu propage le feu à ses voisins avec une certaine probabilité p. Après un pas, il devient brûlé et ne peut plus brûler de nouveau. La densité initiale d'arbres peut être ajustée, la distance à laquelle deux arbres sont considérés comme voisins également, et un vent peut être introduit, augmentant la probabilité de propagation dans une direction donnée.

Travail demandé.

1. Implémenter le modèle sur une grille de taille donnée.
2. Réaliser plusieurs expériences pour estimer la taille finale de l'incendie.
3. Étudier l'impact de la densité initiale d'arbres et de la probabilité p.
4. Visualiser la propagation pas à pas sur de petits exemples.
5. Identifier des conditions (paramètres) menant à une propagation globale ou limitée.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   — introduction et description du modèle,
   — explications méthodologiques,
   — présentation des résultats numériques,
   — illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   — discussion et conclusion.

Extensions possibles.

— Étudier l'effet d'un vent variable sur la propagation.

— Introduire des zones vides (roches, rivières) qui bloquent le feu.

— Étendre le modèle à une grille tridimensionnelle.

Chapitre 16

Formation de trafic routier et embouteillages

Objectif. Étudier un modèle simplifié de circulation routière et mettre en évidence l'apparition d'embouteillages et la relation entre densité et flux de véhicules.

Description du modèle. On considère une route discrétisée en cases (chaque case est vide ou occupée par une voiture). Chaque voiture a une vitesse maximale $v_{\max}$. À chaque pas de temps :

1. chaque voiture accélère si possible (jusqu'à $v_{\max}$ si elle dispose de $v_{\max}$ cases vide devant elle)
2. chaque voiture ralentit pour éviter une collision,
3. avec une probabilité p, une voiture ralentit d'une unité (ralentissement aléatoire),
4. toutes les voitures avancent simultanément d'un nombre de cases égale à leur vitesse.

Ce modèle, dit de Nagel–Schreckenberg, permet de reproduire l'apparition de bouchons spontanés.

Travail demandé.

1. Implémenter le modèle sur une route circulaire (ligne avec condition périodique au bord)
2. Mesurer le flux moyen de voitures en fonction de la densité.
3. Observer et visualiser l'apparition d'embouteillages lorsque la densité devient trop grande.
4. Étudier l'influence de $v_{\max}$ et p sur le trafic.
5. Comparer les résultats avec des intuitions de la circulation réelle.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   — introduction et description du modèle,
   — explications méthodologiques,
   — présentation des résultats numériques,
   — illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   — discussion et conclusion.

Extensions possibles.

— Ajouter un feu tricolore ou un stop et étudier leur impact.
— Étudier une route à deux voies avec possibilité de dépassement.
— Introduire des conducteurs hétérogènes (vitesses maximales différentes).
— Proposer une version en temps continu.

Chapitre 17

Dynamique de population proie-prédateur

Objectif. Explorer un modèle stochastique de type proies–prédateurs, afin de comparer la dynamique observée avec les cycles prédits par les équations de Lotka–Volterra.

Description du modèle. On considère une grille où chaque case peut être vide, contenir une proie ou contenir un prédateur. Les règles d'évolution sont :

- une proie se reproduit dans une case voisine vide avec une probabilité p,
- un prédateur se déplace dans une case voisine ; s'il y trouve une proie, il la mange et survit, sinon il meurt avec probabilité q,
- les prédateurs peuvent se reproduire avec probabilité r après avoir mangé.

Ce modèle permet d'observer des cycles de population, mais aussi des extinctions aléatoires.

Travail demandé.

1. Implémenter le modèle sur une grille de taille donnée.
2. Étudier la dynamique des populations (nombre de proies et de prédateurs au cours du temps).
3. Comparer avec les prédictions qualitatives des équations de Lotka–Volterra

$$\begin{cases} u' = au - buv & \text{dynamique des proies} \\ v' = cuv - dv & \text{dynamique des prédateurs.} \end{cases}$$

4. Réaliser des visualisations pour illustrer les interactions.
5. Identifier les paramètres menant à des cycles durables ou à une extinction rapide.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles.

- Introduire plusieurs espèces de proies ou de prédateurs.
- Étudier ce modèle sur d'autres graphes (graphe complet, graphe aléatoire), etc.
- Donner à chaque prédateur une durée de vie déterministe, qui est régénérée à chaque fois qu'il consomme une proie.

— Donner aux prédateurs un champ de vision permettant de consommer une proie à une certaine distance de leur position.
— Étudier l'effet de la taille de la grille sur la stabilité des populations.
— Considérer un environnement hétérogène (zones favorables/défavorables pour la reproduction).

Chapitre 18

Cascade d'avalanches dans un tas de sable

Objectif. Étudier par simulation le phénomène d'auto-organisation critique à travers le modèle de Bak–Tang–Wiesenfeld (BTW) de tas de sable. On implémetera le le modèle, afin de mesurer et analyser les propriétés statistiques des avalanches (taille, durée, étendue), et discuter de la présence de lois de puissance, des effets de jauge finie et des limites du modèle comme description d'un phénomène physique.

Description du modèle. Le modèle classique se définit sur une grille carrée $L \times L$. À chaque site i on associe une hauteur entière h_i (nombre de grains). Le processus évolue par ajouts et relaxations :

— **Ajout :** à chaque pas on place un grain sur un site choisi uniformément au hasard : $h_i \leftarrow h_i+1$.

— **Toppling (effondrement) :** si h_i dépasse un seuil critique h_c (généralement $h_c = 4$ pour la grille 2D), le site se stabilise en perdant 4 grains qui sont distribués un par voisin (ou perdus si le site est au bord selon conditions aux limites). Formellement :

$$h_i \leftarrow h_i - 4, \qquad h_j \leftarrow h_j + 1 \text{ pour } j \in \mathcal{N}(i).$$

— Les topplings peuvent déclencher d'autres topplings : l'ensemble d'événements déclenchés par un même ajout forme une *avalanche*.

Conditions possibles à considérer : bord absorbant (grains s'échappent au bord) ou périodique ; variantes de voisinage (4 voisins, 8 voisins). On s'intéressera aux quantités aléatoires associées à chaque avalanche : taille S (nombre total de topplings), durée T (nombre d'étapes de relaxation), étendue spatiale R (nombre de sites affectés), etc.

Travail demandé.

1. **Implémentation.** Écrire un simulateur efficace du modèle BTW en 2D. Gérer correctement la file de sites instables (par exemple avec une file FIFO) pour effectuer les relaxations. Rendre le code paramétrable : taille L, seuil h_c, conditions aux limites, nombre d'ajouts.
2. **Validation.** Vérifier que le simulateur atteint un régime stationnaire (par ex. en observant la moyenne des hauteurs) avant de collecter des statistiques d'avalanches.
3. **Mesures statistiques.** Pour un grand nombre d'avalanches en régime stationnaire, estimer empiriquement les distributions de S, T et R. Calculer estimateurs de loi de puissance (exposants), quantiles, et intervalles de confiance (bootstrap).
4. **Visualisation.** Produire figures claires : histogrammes en échelle log-log, plots de loi cumulative (CCDF) pour S, T, R ; cartes spatiales montrant avalanches individuelles typiques et moyennes ; évolution temporelle de la hauteur moyenne.
5. **Expériences numériques.** Étudier l'effet des paramètres et choix numériques :

- taille finie L (finite-size effects) : estimer la coupure de la loi de puissance et comment elle dépend de L,
- conditions aux limites (bord absorbant vs périodique),
- voisinage (4 vs 8 voisins) et seuil h_c,
- différentes règles d'ajout (uniforme vs localisé).

6. **Analyse critique.** Comparer vos exposants empiriques avec les valeurs attendues dans la littérature (s'il y a correspondance), discuter des incertitudes, des biais d'échantillonnage, des effets de burn-in et d'auto-corrélation, et de la portée physique du modèle (quels phénomènes réels il capture et quels aspects importantes il ignore).
7. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Chapitre 19

Modèle d'urnes sur $\mathbb{Z}$

Objectif. On considère une population invasive sur $\mathbb{Z}$ se déplaçant vers la droite. On cherchera à étudier, en fonction des paramètres de ce système la vitesse du processus, la forme du front et le résultat du passage de l'invasion.

Description du modèle. Pour chaque point de $k \in \mathbb{Z}$, on a une quantité $X_n(k)$ indiquant le nombre d'individus vivant en k à l'instant n. On suppose qu'on a à l'instant initial au moins un individu en 0, et aucun individu à droite de 0. À chaque étape n, on tire une variable aléatoire ξ_n, puis on ajoute un nouvel individu dans l'urne à droite du $\xi_n$ième individu le plus à droite dans la population. Par exemple, si $\xi_n = 1$, on ajoute un individu à droite de l'individu le plus à droite.

Travail demandé.

1. **Implémentation.** Écrire un algorithme permettant de simuler le modèle d'urnes sur $\mathbb{Z}$.
2. Simuler des trajectoires de ce processus pour différentes lois de probabilités.
3. Étudier la moyenne et la variance de la position du front en fonction de n et de la loi de reproduction. On pourra considérer les lois géométriques de paramètre p pour tout $p \in (0, 1)$ par exemple.
4. Étudier la forme du front, et la convergence vers une mesure invariante de la loi du nombre de boules dans la première urne.
5. Étudier la loi du nombre de particules loin du front, les corrélations entre $X_\infty(k)$ et $X_\infty(k+1)$.
6. **Rédaction d'un rapport.** Rédiger un document clair (6–10 pages) comprenant :
   - introduction et description du modèle,
   - explications méthodologiques,
   - présentation des résultats numériques,
   - illustrations pertinentes du modèle et des résultats
   - discussion et conclusion.

Extensions possibles.

- Comparer à une version en temps continu de ce modèle, où le $k$ième individu le plus à droite donne naissance à un enfant juste à droite de sa position à un taux λ_k.
- On pourra proposer une généralisation de ce modèle défini sur des graphes plus complexes (comme le graphe en échelle $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$, $\mathbb{Z}^2$, etc.)