M1 MAPI3 - Simulations stochastiques 2025-2026
Jianyu Ma *jianyu.ma@math.univ-toulouse.fr*
Bastien Mallein *bastien.mallein@math.univ-toulouse.fr*
Pierre Petit *pierre.petit@math.univ-toulouse.fr*

TD 4 - Processus de Markov à temps continu

TP- Les exercices notés TP sont purement optionnels, et ne seront pas traités en classe.
Exercice 1. [Compétition entre deux réactions chimiques.] Une molécule instable A réagit spontanément selon l'un de deux mécanismes distincts

$$R_1 : A \longrightarrow B \text{ et } R_2 : A \longrightarrow C.$$

Chaque mécanisme agit indépendamment de l'autre, et on modélise le temps avant l'arrivée de la réaction R_i par une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ_i.

1. On note T_i le temps avant l'occurrence de la réaction R_i, calculer la loi de $T = \min(T_1, T_2)$.
2. On remarque qu'au bout du temps $s = 15$min, une solution initialement pure de molécule A ne contient plus que la moitié des molécules initialement présentes. On en déduit $\mathbb{P}(T > s) = \frac{1}{2}$. En déduire la valeur de $\lambda_1 + \lambda_2$.
3. Après avoir laissé le temps à toutes les molécules de se désintégrer, on remarque que la proportion de molécule B est estimée à 35%.
   (a) Quelle est la probabilité que la réaction R_1 ait lieu avant la réaction R_2 ?
   (b) En déduire une estimation de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.
4. Conclure à une estimation de λ_1 et λ_2.

Solution de l'exercice 1.

1. On a $\mathbb{P}(\min(T_1, T_2) > x) = \mathbb{P}(T_1 > x)\mathbb{P}(T_2 > x) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$.
2. On a $\frac{1}{2} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}$, donc $(\lambda_1 + \lambda_2)s = \log 2$, donc $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\log 2}{15} \approx 0.02\text{min}^{-1}$.
3. (a) On a $\mathbb{P}(T_1 < T_2) = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \left(\int_s^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}s = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.
   (b) On a donc $0.35 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = 1 - \frac{1}{1+\lambda_1/\lambda_2}$, soit $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{0.65} - 1 \approx 0.54$.
4. On en déduit $\lambda_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \approx 0.35 \times 0.02 \approx 0.007\text{min}^{-1}$.

Exercice 2. [Exemple de processus de Markov à temps continu.] On considère le processus de Markov défini sur $E = \{1, 2, 3\}$ de la façon suivante : pour chaque paire $i, j \in E$, lorsque le processus est dans l'état i, il saute vers l'état j au taux $q_{i,j}$. On pose $q_{i,i} = -\sum_{j\neq i} q_{i,j}$, et note $Q = (q_{i,j})$ la matrice de taux (i.e, le générateur) de X, donné par

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $i \in E$, on note S_i le temps de sortie de i par X, défini par $S_i = \inf\{t > 0 : X_t \neq i\}$ sous $\mathbb{P}_i$. Quelle est la loi de S_1, de S_2, de S_3 ?

2. On fixe $X_0 = 1$, et on défini par récurrence $T_0 = 0$ et

$$T_{i+1} = \inf\{t > T_i : X_t \neq X_{T_i}\}.$$

On note $Y_n = X_{T_n}$ pour tout $n \geq 0$.
   (a) Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov dont on précisera la loi.
   (b) Déterminer la mesure invariante de (Y_n) qu'on notera π.
3. On note ρ le vecteur ligne satisfaisant $\rho Q = 0$ avec $\sum \rho_i = 1$, qui est la mesure invariante de X. Calculer ρ.
4. Comparer ρ et $(\mathbb{E}(S_1)\pi_1, \mathbb{E}(S_2)\pi_2, \mathbb{E}(S_3)\pi_3)$. Donner une justification (on pourra comparer les théorèmes ergodiques en temps discret et en temps continu).

Solution de l'exercice 2.
1. On a $S_1 \sim \mathcal{E}(2)$, $S_2 \sim \mathcal{E}(3)$ et $S_3 = \mathcal{E}(5)$.
2. (a) Par lemme des réveils, on observe que (Y_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) La mesure invariante vérifie $\pi = \pi P$ est le vecteur propre à gauche de P de valeur propre 1 (notons que le vecteur propre à droite est $(1, 1, 1)$ ce qui est un cas général : la matrice est stochastique). En résolvant le système d'équations, on a

$$\pi(0) = \frac{22}{69}, \quad \pi(1) = \frac{27}{69} = \frac{9}{23}, \quad \pi(2) = \frac{20}{69}.$$

3. On a $\rho(0) = \frac{11}{24}$, $\rho(1) = \frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ et $\rho(2) = \frac{1}{6} = \frac{4}{24}$.
4. On a $\pi \cdot \mathbb{E}(S) = (\frac{11}{69}, \frac{9}{69}, \frac{4}{69})$, donc ρ et $\pi \cdot \mathbb{E}(S)$ sont proportionnels.
5. D'après les théorèmes ergodiques, on a presque sûrement

$$\pi(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_i = k\}} \quad \text{ et } \quad \rho(k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = k\}} \mathrm{d}s.$$

Or on peut réécrire $\rho(k) = \sum_{i=1}^{N_t} \mathbb{1}_{\{Y_i = k\}} (T_{i+1} - T_i) \approx N_t \pi(k) \mathbb{E}(S_k)$, où N_t est le nombre de sauts du processus de Markov avant le temps t. De plus, le théorème ergodique permet d'obtenir $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = c$ p.s., la constante de proportionnalité entre $\pi(k)\mathbb{E}(S_k)$ et $\rho(k)$ (qui ne dépend pas de k).

Exercice 3. [Coalescent de Kingman.] Le coalescent de Kingman est un processus markovien à temps continu qui la forme d'un arbre généalogique. Pour n individus initiaux, on remonte les lignées ancestrales de cette individu, et à tout instant deux lignées quelconques coalesent à taux c pour n'en former qu'une seule.
1. On note T_{n-1} le temps de première coalescence, montrer que $T_{n-1} \sim \mathcal{E}(c\binom{n}{2})$.
2. On note T_k le premier temps où le nombre de lignées vaut k, en déduire que $T_k - T_{k+1} \sim \mathcal{E}(c\binom{k+1}{2})$.

3. On note $(E_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. Montrer que

$$T_k \overset{(d)}{=} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{E_k}{c\binom{j}{2}}.$$

4. En particulier, on pose $T_{\text{MRCA}} = T_1$ l'âge du dernier ancêtre commun des n lignées initiales. Montrer que

$$\mathbb{E}(T_{\text{MRCA}}) = \frac{2}{c}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

5. (**TP-**) Rédigez un programme permettant de simuler ce processus
   (a) Tracer le graphe du nombre de lignées au cours du temps dans l'arbre généalogique d'une famille de $n = 10000$ individus. Qu'observez-vous ?
   (b) Estimez numériquement la valeur de $\mathbb{E}(T_{\text{MRCA}})$. Retrouvez-vous la valeur théorique ?
   (c) Tracer la distribution empirique de la variable aléatoire T_{MRCA} pour différentes valeurs de n. Qu'observe-t-on ?

Solution de l'exercice 3.

1. C'est le lemme des réveils, T_n est défini comme le minium de $\binom{n}{2}$ variables exponentielles indépendantes.
2. On observe que $T_k - T_{k+1}$ est le temps nécessaire pour passer de $k+1$ à k lignées. Or, on sait que le premier temps de coalescence de $k+1$ lignées suit une loi exponentielle de paramètre $c\binom{k+1}{2}$.
3. Conséquence immédiate de $T_k = \sum_{i=k}^{n-1} T_i - T_{i+1} + T_n$, avec $T_n = 0$ par définition.
4. On a

$$\mathbb{E}(T_{\text{MRCA}}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2}{cj(j+1)} = \frac{2}{c}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = \frac{2}{c}(1 - 1/n).$$

Exercice 4. [File d'attente M/M/1 et ses propriétés stationnaires] On considère une file d'attente M/M/1, défini de la façon suivante :

— les clients arrivent à taux exponentiel de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire que le temps entre 2 arrivées de clients suit une loi exponentielle de paramètre λ

— le temps de service d'un client est une variable exponentielle de paramètre $\mu > 0$,

— un seul serveur, fonctionnant selon la règle **FIFO** (first-in, first-out),

— la capacité de la file est illimitée.

On note $(F_t)_{t\geq 0}$ le nombre de clients présents dans le système (en attente + en service) à l'instant t.

1. On modélise la file d'attente comme une chaîne de Markov.
   (a) Montrer que $(F_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov à temps continu à espace d'état $\mathbb{N}$.
   (b) Donner le générateur infinitésimal $Q = (q_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$.
   (c) Écrire l'équation de Kolmogorov satisfaite par pour $p_{i,j}(t) = \mathbb{P}(N_t = j \mid N_0 = i)$.
2. Montrer que la mesure $\pi(k) = (\frac{\lambda}{\mu})^k$ est une mesure invariante de ce processus.

3. Sous quelles conditions sur λ et μ (F_t) admet-elle une mesure de probabilité invariante ?
4. Donner la probabilité, sous la loi stationnaire, d'avoir exactement n clients dans le système. En déduire la valeur du nombre moyen de clients.
5. On se propose d'estimer le temps passé par un client dans le système sous la loi invariante.
   (a) On suppose que $F_0 = k$, et on note T le temps d'arrivée du prochain client. Déterminer la loi de F_T.
   (b) En déduire le temps d'atteinte moyen du client nouvellement arrivé.
   (c) Conclure que sous la mesure invariante, le temps d'attente moyen τ d'un client vérifie $\mathbb{E}(\tau)\lambda = \mathbb{E}(N)$. Il s'agit de la loi de Little : le nombre moyen de personnes dans le système est égal à leur taux d'arrivée multiplié par leur temps moyen passé dans le service.
6. (**TP-**) On suppose maintenant que la file d'attente dispose d'une capacité maximale de K clients, et refuse les nouveaux clients lorsque $F_t = K$.
   (a) Proposer un algorithme pour simuler ce processus de Markov.
   (b) Déterminer la distribution stationnaire $\pi^{(K)}$ (on pourra prendre $K = 10$ et tester différentes valeurs de λ et de μ).
   (c) Estimer la probabilité qu'un client soit refusé à l'arrivée.

Exercice 5. **TP-** Le Monopoly est un jeu de société extrêmement classique, dont on pourra trouver les règles du jeu à cette adresse : instructions.hasbro.com/fr-fr/instruction/monopoly-game. On se propose d'étudier l'évolution d'une pièce sur un plateau de Monopoly, qui est un exemple classique de chaîne de Markov.

1. Rédiger une fonction permettant de renvoyer les cases parcourues par un joueur lors d'un tour. On négligera tous les déplacements dûs aux cartes, et on se contentera des règles suivantes : le joueur avance d'un nombre de cases donné par le résultat de deux dés, s'il obtient un double, il relance les deux dés et avance à nouveau, s'il obtient un deuxième double, il réavance une 3e fois, s'il obtient trois doubles il est envoyé en prison (case 10). Si à n'importe quel moment le joueur arrive sur la case "aller en prison (case 30), il est envoyé en prison et son tour s'arrête. Si le joueur est en prison (mais pas en *simple visite*), il tire deux dés et se déplace s'il obtient un double, ou s'il a passé 3 tours en prison.
2. Déterminer la distribution stationnaire du joueur, donnant la loi de la case de début du tour d'un joueur au bout d'un temps long. Quels sont les 5 cases de départ les plus fréquentes ?
3. Déterminer le nombre moyen de visite par tour de chaque case. Que vaut le nombre moyen de cases visitées par tour ? Quelles sont les 5 cases les plus visitées ?
4. Déterminer le gain moyen associé à chaque propriété en fonction du nombre de maisons sur cette propriété. Quel est l'investissement le plus rentable au Monopoly (rapport gain moyen par tour / coût initial d'investissement) ?
5. Ajoutez une 2e case "aller en prison" à l'endroit de votre choix. Comment cela modifie-t-il la distribution des sites visités ?