الفصل الثالث : مدخل الى نظرية الاحتمالات

I. التحليل التوفيقي

II. المصطلحات الإحتمالية

1. التجربة العشوائية - Expérience Aléatoire

هي التجربة التي تكون جميع نتائجها الممكنة معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج أولا.

مثال: رمي زهرة نرد $(1،2،3،4،5،6)$ ، جنس المولود (B,G)، رمي قطعة النقود (P,F) .

2. فضاء أو فراغ العينة (فضاءالأحداث الإبتدائية) - Espace probabilisable

هو المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. نرمز لها بالرمز Ω أو S . يسمى كل عنصر منها بالإمكانية(الحدث الإبتدائي) و نرمز لها بالرمز(ω).

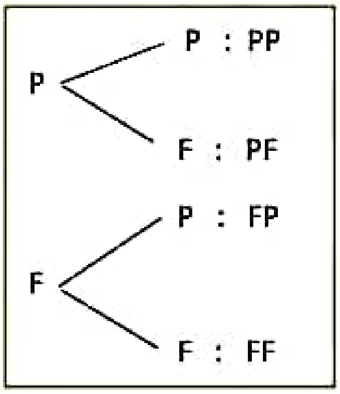
مثال: فضاء العينة لرمي قطعة نقد هو $\Omega=\{P,F\}$ حيث F تمثل ظهور الصورة و P تمثل ظهور الكتابة.

وفضاء العينة لرمي زهرة نرد هو$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

مثال1: أوجد فضاء العينة لرمي قطعة نقد مرتين.

الحل: هناك ثلاث طرق يمكن إستخدامها لإيجاد فضاء العينة:

1) **طريقة السلسلة (الشجرة) البيانية:** إذا رمزنا لظهور الوجه الذي به كتابة بالرمز P ولظهور الصورة بالرمز F فإن فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرتين يمكن تمثيله بالسلسة البيانية التالية :



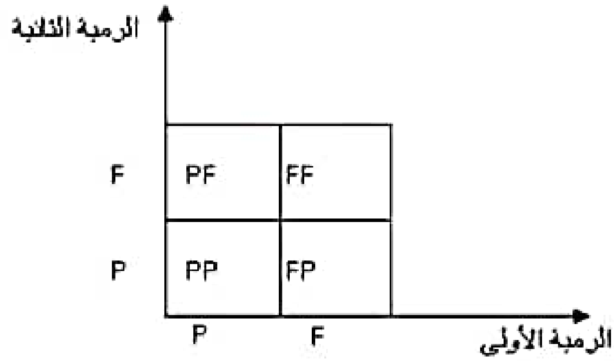
يظهر من الشكل السابق أن فضاء العينة لرمي قطعة نقد مرتين هو $\Omega=\{PP,PF,FP,FF\}$

وعدد عناصر فضاء العينة هو $card(\Omega)=2^2=4$.

2) **طريقة الجداء الديكارتي :** $\Omega=\{P,F\}^2=\{P,F\}\times\{P,F\}$

فيكون فضاء العينة (نتيجة الضرب) هو $\Omega=\{PP,PF,FP,FF\}$

3) **طريقة الشبكة التربيعية (أو الجدول):**



3. **الحادثة (أو الحدث) *Evénement*:**

الحادثة هو مجموعة جزئية من فضاء العينة (الفئة الشاملة)، نرمز لها عادة ب: A , B, C.

مثال: الحادثة $A = \{P\}$ حادثة للتجربة رمي قطعة نقدية.

وتنقسم الحوادث إلى:

a. **الحوادث البسيطة والحوادث المركبة:**

الحوادث البسيطة هي الحوادث التي تتكون من عناصر بسيطة و الحوادث المركبة هي الحوادث التي تتكون من عناصر مركبة.

مثال: عند رمي قطعة نقد وكان الحدث A يمثل ظهور الصورة فإن $A = \{F\}$. نقول أن A هو مجموعة جزئية تحتوي على عنصر واحد بسيط من فضاء العينة $\Omega = \{P, F\}$.

عند رمي زهرة نرد وكان الحدث B يمثل ظهور رقم زوجي فإن : $B = \{2,4,6\}$. نقول أن B هو مجموعة جزئية تحتوي على ثلاث عناصر بسيطة من فضاء العينة $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

الحدثين A و B حدثين بسيطين لأن العناصر الموجودة في كل منهما تعتبر عناصر بسيطة.

عند رمي قطعتي نقد في نفس الوقت فإن فضاء العينة يكون $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. نلاحظ أن كل عنصر من فضاء العينة (Ω) هو عنصر مركب يحتوي على نتيجتين نتيجة على القطعة الأولى، وأخرى على القطعة الثانية، فمثلا الحادثة $C = \{FP\}$ تتكون من عنصر مركب واحد هو (F, P) والذي يشير إلى ظهور صورة على القطعة الأولى وكتابة على القطعة الثانية.

<u>مثال2:</u> في مصنع لإنتاج الطماطم المصبرة، تم فحص ثلاث علب لتحديد مدى صلاحيتها.

1) حدد فراغ العينة.
2) أوجد الأحداث التالية:

- جميع العلب صالحة.
- علبة واحدة على الأكثر فاسدة.
- جميع العلب فاسدة.

<u>الحل:</u>

1) فراغ العينة (جميع النتائج الممكنة) هو :

$$\Omega = \{C, D\}^3 = \{CCC, CCD, CDC, CDD, DCC, DCD, DDC, DDD\}$$

حيث نشير C إلى أن العلبة صالحة و D إلى أن العلبة فاسدة.

عدد عناصر فضاء العينة $\text{card}(\Omega) = n(\Omega) = 2^3 = 8$

(2

a) نفترض أن الحدث A يشير إلى أن كل العلب صالحة وعليه فإن $A = \{CCC\}$

فالحدث A يتكون من عنصر مركب واحد: $\text{card}(A) = n(A) = 1$.

b) نفترض أن الحدث B يشير إلى وجود علبة واحدة على الأكثر فاسدة:

$$B = \{CCC, CDD, CDC, CCD\}$$

فالحدث B يتكون من أربع عناصر مركبة : $\text{card}(B) = n(B) = 4$.

c) نفترض أن الحدث F يشير إلى أن جميع الوحدات فاسدة.

$$F = \{DDD\}$$

فالحدث F يتكون من عنصر مركبة واحد: $\text{card}(F) = n(F) = 1$

b. الحادثة المستحيلة والحادثة الأكيدة:

الحادثة المستحيلة أو التي لا يمكن حدوثها هي الحادثة التي لاتحتوي على عناصر الفضاء العيني ويرمز لها بالرمز $\emptyset$.
أما الحادثة الأكيدة فهي الحادثة التي تحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني Ω .

مثال: عند رمي زهرة نرد الحصول على عدد يقل عن 7 هو الحادثة الأكيدة (Ω) و الحصول على الرقم 7 هي الحادثة المستحيلة.

c. الحوادث المستقلة والحوادث المتنافية:

- إذا كان لدينا حادثين A و B ، بحيث الحدث A لا يمنع ولا يؤثر على وقوع الحدث B ووقوع الحدث B لا يمنع ولا يؤثر على وقوع الحدث A فإننا نقول أن الحدثين A و B حدثين مستقلين.
- الحوادث المتنافية هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد و لا يوجد عناصر مشتركة بينها. إذا كان وقوع الحادث A يمنع وقوع الحادث B أو العكس، فإننا نقول أن الحادثين متنافين (غير متلائمين) ، فمثلا عند رمي قطعة نقد فإن ظهور الوجه الذي عليه صورة يمنع ظهور الوجه الذي عليه كتابة، وبالتالي فإن حدث ظهور الصورة وحدث ظهور كتابة يمثلان حدثين متنافيين (منفصلين) أي $A \cap B = \emptyset$.

d. الحوادث الشاملة:

تسمى الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ حوادث شاملة عند إجراء تجربة عشوائية ما، إذا كان لا بد من حدوث أحدهما عند إجراء هذه التجربة. مثال عند إلقاء زهرة النرد فإن الحوادث البسيطة $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$ تعتبر حوادث شاملة. عندما تكون الحوادث شاملة فإن:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

e. الحادث المكمل:

إذا كان الحدث A ينتمي إلى فضاء العينة (Ω) فإن الحدث المكمل له $\bar{A}$ يتكون من عناصر فضاء المعاينة (Ω) غير الموجودة في الحادث A ,حيث

$$\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases}$$

<u>مثال3:</u> عند رمي زهرة النرد وكان الحدث A يمثل ظهور رقم فردي $A = \{1,3,5\}$ فإن $\bar{A}$ (الحادث المكمل) يمثل ظهور رقم زوجي:$\bar{A} = \{2,4,6\}$

4. الحالات *Les cas*:

a. الحالات المواتية *Les cas favorables*:

هي النتائج أو الحالات التي تؤدي إلى تحقيق حادثة معينة، ففي حالة رمي قطعة نقد فإن ظهور الصورة يعتبر حالة مواتية إذا كان إهتمامنا هو ظهور الصورة، وفي حالة رمي زهرة نرد فإن ظهور الأوجه التي تحمل الأرقام 2 أو 4 أو 6 تعتبر حالات مواتية إذا كان إهتمامنا بحادثة ظهور رقم زوجي عند إلقاء زهرة النرد.

b. الحالات المتماثلة (متساوية الفرصة):

إذا قمنا بتجربة عشوائية وكانت جميع نتائج التجربة متساوية الفرصة في الظهور، وتكون المصادفة وحدها هي التي تحدد ذلك فإنه يقال لنتائج التجربة أنها متساوية الفرصة ومتماثلة.

<u>مثال 5:</u> عند رمي قطعة نقد فإن ظهور الصورة (F) مساوية لفرصة ظهور الكتابة (P)، هنا نقول أن ظهور الصورة والكتابة حالتين متماثلتين.

وعند رمي زهرة نرد متجانسة ومنتظمة، فإن ظهور أي وجه من الأوجه الستة تعتبر متماثلة، وكذلك فإن سحب كرة من صندوق به مجوعة من الكرات متساوية الحجم واللمس هي أيضا حالات متماثلة.

III. العمليات على الحوادث ـ جبر الحوادث:

بما أن فضاء العينة هو مجموعة والحوادث عبارة عن مجموعات جزئية منها فإن جميع العمليات الجبرية على المجموعات تنطبق على الحوادث .

1. **إتحاد حادثين :** يرمز له بالرمز $A \cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معا. وتقع الحادثة $A \cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل أي <u>إذا وقعت A أو إذا وقعت B أو إذا وقعتا معا</u>.
2. **تقاطع حادثتين:** يرمز له بالرمز AB أو $A \cap B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A و في B معا. وتقع الحادثة إذا وقعت الحادثتان A و B معا <u>في نفس الوقت</u>.
3. **متممة أو مكملة حادثة:** يرمز له بالرمز A^C أو $\bar{A}$ وهي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A .وتقع متممة الحادثة $\bar{A}$ <u>إذا لم تقع الحادثة A نفسها</u>.
4. **الفرق بين حادثتين:** يرمز له بالرمز $A - B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى الحادثة A ولا تنتمي إلى الحادثة B . وتقع الحادثة $A - B$ <u>إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B</u>.

<u>مثال 6:</u> *لتكن A ، B و C أحداث من الفضاء الإحتمالي Ω . أكتب الأحداث التالية:*

1) الحدث A الذي يتحقق ← $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

2) الحدثان A و B يتحققان وليس C ← $A \cap B \cap \bar{C}$

3) على الأقل أحد الأحداث الذي يتحقق ← $A \cup B \cup C$

4) لا حدث يتحقق ← $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

5) حدثان فقط يتحققان ← $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

6) الأحداث A ، B و C تتحقق في آن واحد ← $A \cap B \cap C$

IV. تعريف الإحتمال

التعريف الكلاسيكي (النظري) للإحتمال:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متماثلة (متساوية الفرصة) في الظهور، وكان فضاء المعاينة لها (Ω) يحتوي على عدد من العناصر $n(\Omega)$ وكان لدينا حادثة A تحتوي على $n(A)$ من العناصر المتماثلة، فإن الإحتمال الكلاسيكي للحادثة A ويرمز له بالرمز $\mathbb{P}(A)$ يحسب كالتالي:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

حيث $n(A)$ يمثل عدد الحالات المواتية ل A (عدد عناصر الحادثة) و $n(\Omega)$ يمثل عدد الحالات الممكنة (عدد عناصر فراغ العينة).

<u>مثال7:</u> إذا رمينا زهرة نرد عشوائيا، أحسب إحتمال ظهور رقم فردي وإحتمال ظهور رقم زوجي؟.

<u>الحل:</u> فراغ العينة: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، $n(\Omega) = 6$.

A "ظهور رقم فردي" و B " ظهور رقم زوجي" فإن:

$A = \{1,3,5\}, n(A) = 3$ و $B = \{2,4,6\}, n(B) = 3$

وبالتالي $\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

<u>مثال8:</u> إذا رمينا قطعة نقد مرتين، أوجد إحتمال الحصول على صورة مرتين؟.

<u>الحل:</u> فضاء العينة هو: $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}, n(\Omega) = 4$

الحادثة A تمثل ظهور الصورة مرتين وهي: $A = \{FF\}, n(A) = 1$

و منه فالإحتمال هو:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

V. خواص(أساسيات) الإحتمال:

تعتبر الخواص التالية بمثابة الأساس الذي تبنى عليه نظريات الاحتمال:

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ و $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) إذا كان الحادث A مجموعة جزئية من فضاء العينة (Ω) أي $A \subset \Omega$ فإن :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

- إحتمال الحادث المستحيل هو 0 وكمثال على ذلك إحتمال سحب كرة سوداء من صندوق جميع كراته بيضاء.
- إحتمال الحادث الأكيد يساوي الواحد ، كإحتمال سحب كرة بيضاء من صندوق جميع كراته البيضاء.

3) لأي حادثة A لدينا :

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

4) إذا كان A و B حادثان بحيث:

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

5) إذا كان A و B حادثان كيفيان (غير متنافان) فإن :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

مثال10: إذا كان عدد طلبة السنة الثالثة LMD علوم إقتصادية وعلوم التسيير 130 طالب منهم :50 طالب يدرسون مادة الرياضيات كمادة إختيارية و 60 طالب يدرسون مادة الإحصاء كمادة إختيارية أخرى.

- ما هو إحتمال أن نختار طالب يدرس الرياضيات أو الإحصاء.

الحل: إذا كانت A تمثل أن الطالب يدرس الرياضيات و B تمثل أن الطالب يدرس الإحصاء.

فإنه واضح أن الحادثتين متنافيين $A \cap B = \emptyset$ فإن:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{50}{130} = \frac{5}{13}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{60}{130} = \frac{6}{13}$$

إحتمال إختيار طالب يدرس الرياضيات أو الإحصاء هو الحادثة $A \cup B$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{5}{13} + \frac{6}{13} = \frac{11}{13}$$

6) إذا كانت A و B حادثان متنافان $(A \cap B = \emptyset)$ فإن :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

مثال11: في المثال السابق إذا كان هناك 30 طالب وطالبة يدرسون المادتين معا (الرياضيات والإحصاء)، في هذه الحالة فإن الحدثين A و B تصبح غير متنافية وبالتالي :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{30}{130} = \frac{3}{13}$$

فإن إحتمال إختيار طالب يدرس الرياضيات أو الإحصاء هو:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{5}{13} + \frac{6}{13} - \frac{3}{13} = \frac{8}{13}$$

7) إحتمال الحوادث المستقلة: (أي تلك الحوادث التي يؤثر وقوع أحدها على وقوع الأخر)

إذا كان الحدثين A و B حدثين مستقلين فإن:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

مثال 12: إذا كان لدينا صندوق به 8 كرات بيضاء و6 كرات سوداء وسحبنا عشوائيا كرة من هذا الصندوق وسجلنا لونها ثم سحبنا كرة أخرى وسجلنا لونها (أي السحب بدون إرجاع) فإن إحتمالات السحب لا تكون ثابتة في كل مرة، فعند سحب الكرة الأولى فإن إحتمال أن يكون لونها أبيض $\frac{8}{14}$، أما إحتمال أن يكون لون الكرة الثانية أبيض فهو $\frac{7}{13}$، وإحتمال أن يكون لونها أسود فهو $\frac{6}{13}$.

في مثل هذه الحالات التي لا نرجع فيها الكرات المسحوبة للصندوق، فإن نتائج السحب السابقة تؤثر على نتائج السحب اللاحقة، وعندها نقول أن الحوادث غير مستقلة.

V. الإحتمال الشرطي:

إذا كان A و B حادثان في فضاء العينة (Ω) ، وكان وقوع الحدث A يتوقف على وقوع الحدث B فإن إحتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B *(إحتمال حدوث الحادثة A علما بحدوث الحادثة B)* يسمى بالإحتمال الشرطي ويرمز له بالرمز $\mathbb{P}(A/B)$ أو $\mathbb{P}_B(A)$، ويقرأ إحتمال وقوع الحدثA بشرط وقوع الحدث B ، ويتم حساب $\mathbb{P}(A/B)$ وفقا للمعادلة :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}; \quad \mathbb{P}(B) > 0$$

وبالمثل

$$\mathbb{P}_A(B) = P\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}; \mathbb{P}(A) > 0$$

من المعادلتين السابقتين نستنتج:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A/B).\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A).\mathbb{P}(A)$$

مثال 13: لدينا كيس به 5 كرات بيضاء و3 كرات سوداء.

1) ما هو إحتمال سحب كرة بيضاء في المرة الأولى؟.
2) ما هو إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية بيضاء إذا لم نقم برد الكرة المسحوبة في المرة الأولى.
3) ما هو إحتمال سحب كرتين بيضاويتين في سحبتين متتاليين ؟.

الحل: نفترض أن الحدث B_1 يمثل سحب كرة بيضاء في المرة الأولى.

الحدث B_2 يمثل سحب كرة بيضاء في المرة الثانية.

1) ومنه فإن إحتمال سحب كرة بيضاء في المرة الأولى: $P(B_1) = \frac{5}{8}$
2) احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الثانية إذا لم نقم برد الكرة المسحوبة في المرة الأولى $P(B_2 / B_1) = \frac{4}{7}$:
3) وعليه فإن إحتمال سحب كرتين بيضاويتين في سحبتين متتاليين هو:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2/B_1).P(B_1) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{56}$$

VI. الإستقلال الخطي:

لتكنA و B حادثتان من فضاء عينة Ω ، يقال بأن الحادثتين مستقلتين إذا تحققت واحدة فقط من العلاقات التالية:

1. $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

نتيجة: العلاقات التالية متكافئة:

1. الحادثتين A وB مستقلتين.
2. الحادثتين A و$\bar{B}$ مستقلتين.

جامعة 20 أوت 1955 سكيكدة   السنة الجامعية : 2022/2021

السنة الأولى MI   مقياس : مدخل إلى الاحتمالات و الإحصاء الوصفي

الفصل الثالث : مدخل الى نظرية الاحتمالات

I. التحليل التوفيقي – Analyse Combinatoire

التحليل التوافقي أو التوفيقي (طرق العد) هو فرع من فروع الرياضيات الذي يدرس التقنيات التي تسمح بإجراء عد لحالات وقوع أو لا لحادثة. ويستخدم أساسا مفاهيم السحب الشامل (بدون إرجاع) والغير شامل (مع إرجاع) و كدى أهمية أو عدم أهمية ترتيب الحوادث. يشمل دراسة التراتيب، التباديل والتوافيق.

1. التبادیل و التراتيب – Les Permutations et les Arrangements

التباديل هي طرق ترتيب جميع أو بعض عناصر مجموعة ما. أي ترتيب مجموعة من الأشياء مع أو دون مراعاة التكرار (يسمح أو لا فيها بالتكرار). تكون عملية التبديل على أربع حالات:

a. التبديلة (بدون تكرار) - Permutation (sans répétition)

إذا كان لدينا n من الأشياء، تم إختيارها جميعا فإن عدد طرق ترتيبها يكتب كالتالي:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 2\times 1$$

<u>**مثال1:**</u> كم عدد الطرق الممكنة في ترتيب الحروف $\{V, U, E\}$؟.

← $n = 3$ هو عدد عناصر المجموعة (عدد الحروف). يتم ترتيب هذه الحروف ب $P_3 = 3! = 6$ طريقة.

b. الترتيبة (بدون تكرار) - Arrangement (sans répétition)

إذا كان لدينا n من الأشياء، أختير جزء منها (متمايزة -مختلفة) و ليكن r $(r \le n)$. فإن عدد طرق ترتيبها يكتب كالتالي:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\dots(n-r+1)$$

<u>**مثال2:**</u> كم كلمة ذات 5 حروف مختلفة يمكن صياغتها من الكلمة " MASCULIN " ، حتى لو لم يكن للكلمة معنى؟.

← $n = 8$ هو عدد حروف الكلمة و $r = 5$ عدد عناصر التشكيلة المرادة. يتم ترتيب هذه الحروف للحصول على $A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = 8\times 7\times 6\times 5\times 4 = 6720$ كلمة.

c. التبديلة (مع تكرار) - Permutation (avec répétition)

إذا كان لدينا n من الأشياء، بحيث أن n_1 تمثل النوع الأول، n_2 تمثل النوع الثاني،...، n_k تمثل النوع ذو المرتبةk. فإن عدد طرق ترتيبها هو:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

حيث: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

إذا كان التكرار غير موجود فإن: $n_i = 1$ و نرجع إلى حالة التبديلة بدون تكرار.

مثال 3: بكم طريقة ترتب حروف كلمة « STATISTICS »؟.

← $n = 10$ هو عدد حروف الكلمة و$n_1 = 3$ تكرار الحرف S ، $n_2 = 3$ تكرار الحرف T ، $n_3 = 2$ تكرار الحرف I ، $n_4 = 1$ تكرار الحرف A ، $n_5 = 1$ تكرار الحرف C. هنالك 50400 طريقة لترتيب الكلمة أي:

$$P_{10}(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = \frac{10!}{3!.3!.2!.1!.1!} = 50400.$$

d. القوائم: (الترتيبة مع تكرار)

القوائم هي طرق ترتيب r من الأشياء من بين n ، كل تشكيلة عدد وحداتها r مأخودة من مجموعة عدد عناصرها n، يسمح فيها بتكرار الوحدات. عدد طرق ترتيبها يكتب كالتالي:

$$a_n^r = n^r$$

- لا يشترط أن يكون عدد وحدات القائمة أقل من عدد عناصر المجموعة مادام التكرار مسموحا (أي ممكن $r \geq n$).

مثال4: ما هو عدد الأعداد المشكلة من ثلاثة أرقام من أرقام المجموعة: $\{2,5\}$.

← $n = 2$ هو عدد عناصر المجموعة (عدد الأرقام)، $r = 3$ عدد عناصر الأعداد المراد تشكيلها.أي يتم تشكيل $a_2^3 = 2^3 = 8$ أعداد.

مثال5: كم كلمة ذات 5 حروف يمكن صياغتها من الكلمة " $MASCULIN$ " ، حتى لو لم يكن للكلمة معنى؟.

← $n = 8$ هو عدد حروف الكلمة و $r = 5$ عدد عناصر التشكيلة المرادة. يتم ترتيب هذه الحروف للحصول على $a_8^5 = 8^5 = 32768$ كلمة.

2. التوافيق: Combinatoire

التوافيق هي الطرق التي نختار بها عددا معينا من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى الترتيب. بعبارة أخرى، هي عدد الطرق الممكنة التي يمكن بها إختيار r من الأشياء من بين n $(r \leq n)$، دون مراعاة التكرار(لا يسمح فيها بالتكرار)، و يرمز لها بالرمز C_n^r أو$\binom{r}{n}$، و تكتب بالعلاقة التالية:

$$C_n^r = \binom{r}{n} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

تسمى هذه الحالة ب "**التوفيقة دون تكرار**" **(Combinaison sans répétition)** ، لا يسمح فيها بالتكرار .

مثال6: نريد تكوين لجنة متكونة من 3 أفراد من بين مجموعة متكونة من 5 نساء و 4 رجال .

1) كم لجنة تنفيذية يمكن تشكيلها ؟.

2) كم لجنة تنفيذية يمكن تشكيلها علما :

$a)$ أن تحو ي هذه اللجنة رجلا بالضبط؟.

b) أن تحوي هذه اللجنة رجلا على الأقل ؟ .

c) أن تحوي هذه اللجنة رجلا على الأكثر ؟.

الحل:

1) عدد اللجان الممكن تشكيلها هو: $84 = \frac{9\times8\times7\times6!}{3!.6!} = \frac{9!}{3!.(9-3)!} = C_9^3$ لجنة.

2) هنالك:

a) عدد اللجان الممكن تشكيلهاهو: $40 = 4 \times 10 = \frac{4!}{1!.(4-1)!} \times \frac{5!}{2!.(5-2)!} = C_4^1 \times C_5^2$ لجنة.

b) عدد اللجان الممكن تشكيلهاهو: $74 = 40 + 30 + 4 = C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1 + C_4^3$ لجنة.

c) عدد اللجان الممكن تشكيلها هو: $50 = 40 + 10 = C_4^1 \times C_5^2 + C_5^3$ لجنة.

تمرين تطبيقي:

1) كم عدد مكون من خمس أرقام مختلفة يمكن تشكيله مأخودة من الأرقام التالية: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

هنالك $15120 = \frac{9!}{(9-5)!} = A_9^5$ عدد مختلف.

2) كم عدد مكون من خمس أرقام مختلفة يمكن تشكيله مأخودة من الأرقام التالية: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

هنالك $27216 = 9 \times 3024 = \frac{9!}{(9-1)!} \times \frac{9!}{(9-4)!} = A_9^1 \times A_9^4$ عدد مختلف.

3) ما هو عدد الأعداد المكونة من 5 أرقام؟.

هنالك $9^1 \times 10^4 = n_9^1 \times n_{10}^4$ عدد مختلف.