LASKUSÄÄNTÖJÄ

yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskulle ja neliöjuurelle.

Potenssimerkintä:

$a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a, ...$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}, ...$

$a^0 = 1$ (sopimus)

Laskujärjestys:

1. sulkujen sisällä, sisimmäisistä alkaen
2. potenssiin korotus
3. kerto- ja jakolasku (vasemmalta oikealle)
4. yhteen- ja vähennyslasku (vasemmalta oikealle)

Esim.

$3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23$

$(3 + 4) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$

$(3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$

$3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$

$3/4 + 5 = \frac{3}{4} + 5 = 5\frac{3}{4}$

$3/(4 + 5) = \frac{3}{9}$

$3/4 \cdot 5 = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}$

$3/(4 \cdot 5) = \frac{3}{20}$

Esim: !!!!!!

Kaava $c = \dfrac{ab}{a+b}$ laskukoneelle:

$c = a * b/(a+b)$

HUOM: Yhteen-/vähennyslaskuissa ja kertolaskuissa laskujärjestyksellä ei ole väliä

Esim.

$5a + b + 3a = 5a + 3a + b = 8a + b$

$2u - v + 3u + 4v = 2u + 3u - v + 4v = 5u + 3v$

$2 \cdot x \cdot 3 \cdot y = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 6xy$

Sulkujen poisto:

Jos sulkujen edessä on $+$, niin sulut voidaan jättää pois

Jos sulkujen edessä on $-$, niin sulut voidaan jättää pois kunhan vaihdetaan kaikki sulkujen sisällä olevien yhteenlaskettavien etumerkit

Jos sisäkkäisiä sulkuja on useampi, ne poistetaan yhdet kerrallaan sisimmistä alkaen.

Esim.

$$\begin{aligned}
&2a + (3a - 4b) \\
= {} &2a + 3a - 4b \\
= {} &5a - 4b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&3u - 2v - (2u - v) \\
= {} &3u - 2v - 2u + v \\
= {} &1u - 1v = u - v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&3b - (2a - (a - 3b)) \\
= {} &3b - (2a - a + 3b) \\
= {} &3b - (a + 3b) \\
= {} &3b - a - 3b \\
= {} &-a
\end{aligned}$$

Sulkujen aukikertominen:

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$$

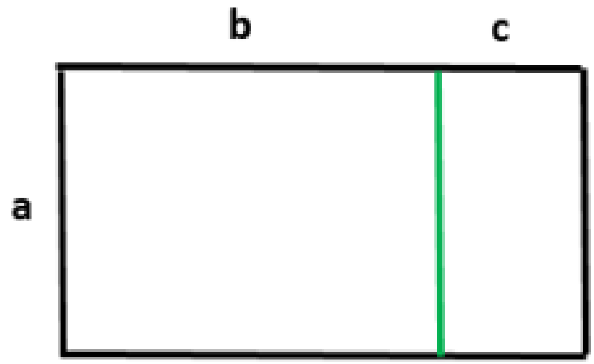
jne eli kerrotaan jokaisella vasemmanpuoleisella yhteenlaskettavalla jokainen oikeanpuoleinen yhteenlaskettava

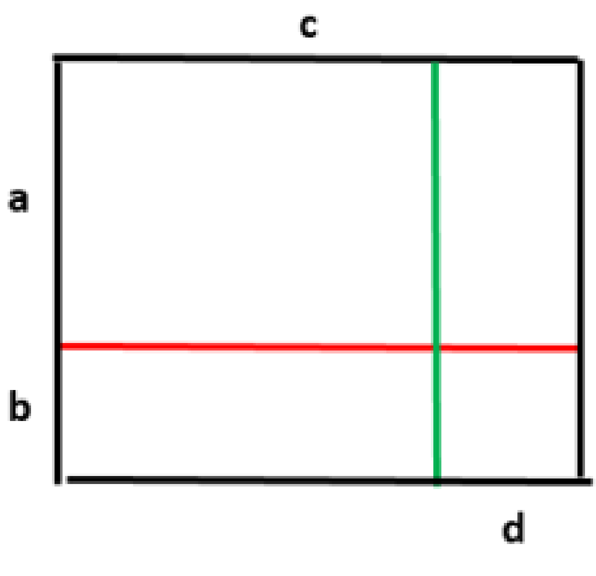
MERKIT:

plus $\times$ miinus $=$ miinus

miinus $\times$ miinus $=$ plus

HUOM: Kertomerkkiä $\cdot$ ei aina merkitä näkyviin


b
c
a


c
a
b
d

Esim.

$$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 9 = 27$$

$$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$$

$$3x(2x^2y - xy) = 3x \cdot 2x^2y - 3x \cdot xy$$

$$= 6x^3y - 3x^2y$$

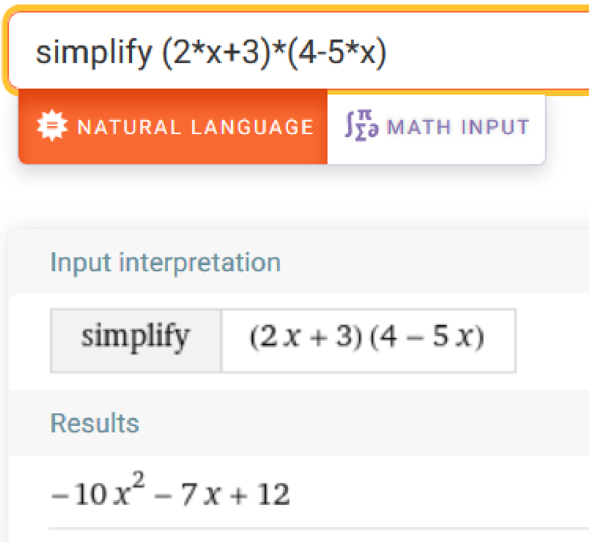
$$(2x + 3)(4 - 5x)$$

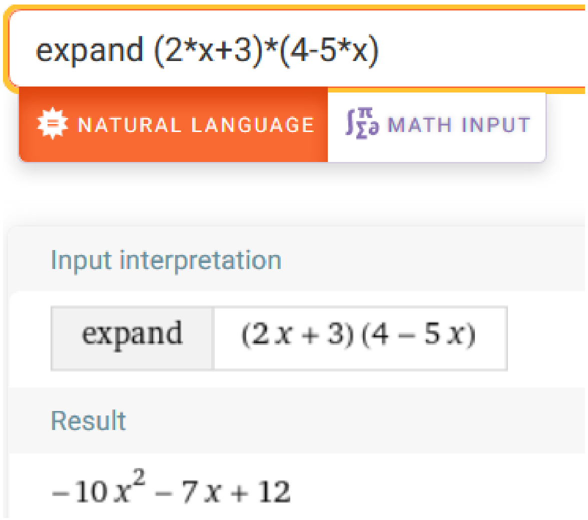
$$= 2x \cdot 4 - 2x \cdot 5x + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5x$$

$$= 8x - 10x^2 + 12 - 15x$$

$$= -10x^2 - 7x + 12$$

Wolfram alpha:





MATLAB (jossa Symbolic Math Toolbox):

```
syms x %luodaan kirjainmuuttuja x
simplify((2*x+3)*(4-5*x))

ans =
-(2*x + 3)*(5*x - 4)

expand((2*x+3)*(4-5*x))

ans =
- 10*x^2 - 7*x + 12
```

Yhteisen tekijän ottaminen eli tekijöihin jakaminen

(= sulkujen aukikertominen toisinpäin):

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

tai

$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$

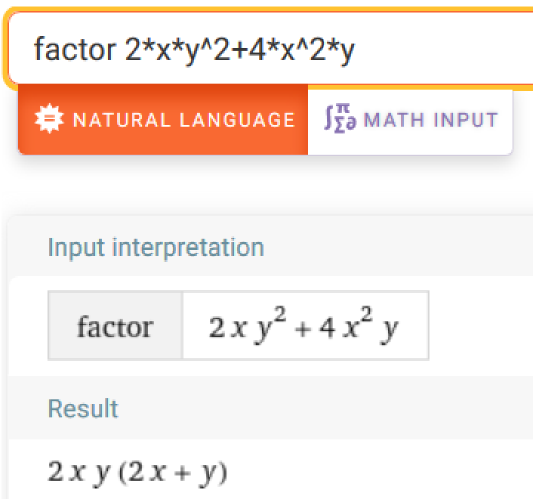
"b kpl a:ta + c kpl a:ta = $b + c$ kpl a:ta "

Esim:

$$2a + 3a = (2+3)a = 5a$$

$$R + sR = (1+s)R$$

$$2xy^2 + 4x^2y = 2xy \cdot y + 2xy \cdot 2x = 2xy(y+2x)$$




```
syms x y%luodaan kirjainmuuttujat x ja y
simplify(2*x*y^2+4*x^2*y)
factor(2*x*y^2+4*x^2*y)

ans =
2*x*y*(2*x + y)
ans =
[ 2, x, y, 2*x + y]
```

BINOMIKAAVAT !!!!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Syy: esimerkiksi

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= a^2 + \underbrace{ab + ba}_{=2ab} + b^2$$

HUOM: Erityisesti

$(a \pm b)^2$ **EI OLE** $a^2 \pm b^2$!!!!

Kertolaskulle näin on:

$(ab)^2 = abab = a^2b^2$

$$(3u + 4v)^2$$

$$= (3u)^2 + 2 \cdot 3u \cdot 4v + (4v)^2$$

$$= 9u^2 + 24uv + 16v^2$$

$$(5x - 2y)(5x + 2y)$$

$$= (5x)^2 - (2y)^2$$

$$= 25x^2 - 4y^2$$

$$4x^2 + 4x + 1$$

$$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2$$

$$= (2x + 1)^2$$

$$9a^4 - 4$$

$$= (3a^2)^2 - 2^2$$

$$= (3a^2 + 2)(3a^2 - 2)$$

Murtolausekkeet:

$$\frac{a}{b}$$

a on osoittaja (nominator)

b on nimittäjä (denominator)

Huom: Nollalla ei voi jakaa eli $b \neq 0$.

Supistaminen/laventaminen:

$$\frac{a \cdot \mathbf{C}}{b \cdot \mathbf{C}} = \frac{a}{b}$$

Ylä- ja alakerran yhteisen tekijän voi supistaa pois **(KERTOLASKUSTA !!!!)**

Ylä- ja alakerta voidaan **KERTOA** samalla luvulla

Esim: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$

HUOM: SUMMASTA EI VOI SUPISTAA

$\frac{a+\mathrm{C}}{b+\mathrm{C}}$ **ei ole** $\frac{a}{b}$

$\frac{a\cdot\mathrm{C}+x}{b\cdot\mathrm{C}+z}$ **ei ole** $\frac{a+x}{b+z}$

Esim:

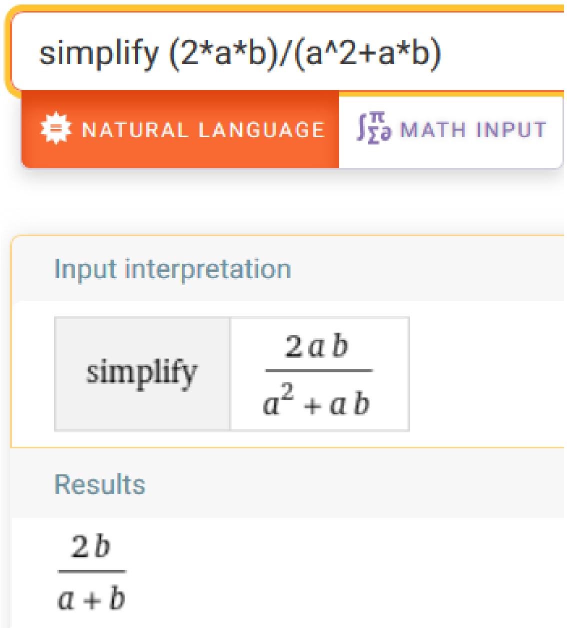
$$\frac{a^2b^3}{ab} = \frac{ab \cdot ab^2}{ab \cdot 1} = \frac{ab^2}{1} = ab^2$$

$$\frac{-a}{b-a} = \frac{-a}{-(a-b)} = \frac{-1 \cdot a}{-1 \cdot (a-b)} = \frac{a}{a-b}$$

$$\frac{2ab}{a^2+ab} = \frac{a \cdot 2b}{a \cdot (a+b)} = \frac{2b}{a+b}$$

$$\frac{2+x}{4-x^2} = \frac{(2+x) \cdot 1}{(2+x)(2-x)} = \frac{1}{2-x}$$

$\dfrac{2u+4v}{2u+v}$ ei supistu




```
syms a b
simplify((2*a*b)/(a^2+a*b))

ans =
(2*b)/(a + b)
```

LASKUTOIMITUKSET

Yhteen- ja vähennyslasku:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

eli lasketaan yläkerrat yhteen (tai vähennetään ne), **kun alakerrat yhtäsuuria**

Esim:

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{6}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6-2}{5} = \frac{4}{5}$$

Jos alakerrat eivät ole yhtäsuuria, niin lavennetaan ne ensin samoiksi:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{ad \pm bc}{cd}$$

Esim:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$$

HUOM: $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$ **EI OLE** $\frac{a + b}{c + d}$

Esim:

$$R - \frac{R^2}{R+H} = \frac{R(R+H)}{(R+H)} - \frac{R^2}{R+H}$$

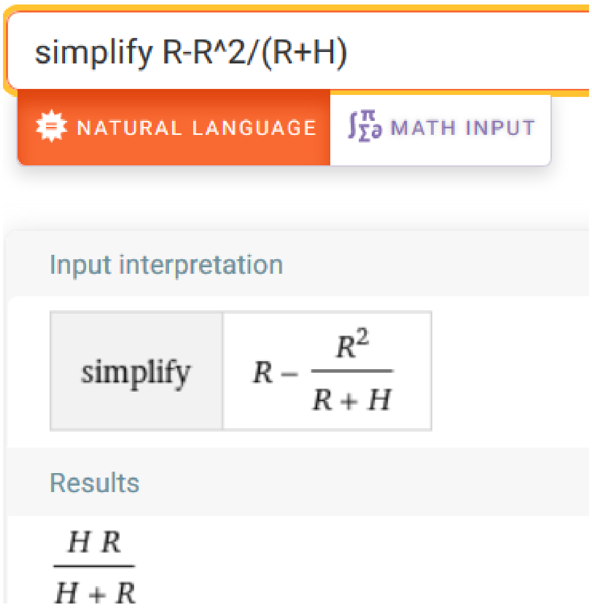
$$= \frac{(R^2+RH) - R^2}{R+H} = \frac{RH}{R+H}$$

Esim:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{a-1}{a} = \frac{a \cdot a}{a(a+1)} + \frac{(a-1)(a+1)}{a(a+1)}$$

$$= \frac{a^2 + (a-1)(a+1)}{a(a+1)} = \frac{a^2 + (a^2-1)}{a(a+1)}$$

$$= \frac{2a^2-1}{a(a+1)} = \frac{2a^2-1}{a^2+a}$$




```
syms R H
simplify(R-R^2/(R+H))

ans =
(H*R)/(H + R)
```

Kertolasku: Kerrotaan ylä- ja alakerrat erikseen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Jakolasku: Käännetään alakerta toisinpäin ja kerrotaan

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Esim:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}, \qquad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{6}$$

Esim:

$$a \cdot \frac{1+b}{a+b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1+b}{a+b} = \frac{a(1+b)}{1(a+b)} = \frac{a(1+b)}{a+b}$$

Esim:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$$

Esim:

$$\frac{a}{\left(\frac{1+a}{a+b}\right)} = \frac{\left(\frac{a}{1}\right)}{\left(\frac{1+a}{a+b}\right)} = \frac{a(a+b)}{1(1+a)} = \frac{a(a+b)}{1+a}$$

Esim:

$$\frac{\left(\dfrac{a}{1+a}\right)}{a+b} = \frac{\left(\dfrac{a}{1+a}\right)}{\left(\dfrac{a+b}{1}\right)} = \frac{a}{(1+a)(a+b)}$$

Esim:

$$\frac{1+\frac{s}{3}}{1+\dfrac{2s}{s+3}} = \frac{\left(\frac{3}{3}+\frac{s}{3}\right)}{\left(\dfrac{s+3}{s+3}+\dfrac{2s}{s+3}\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{3+s}{3}\right)}{\left(\dfrac{3s+3}{s+3}\right)} = \frac{(3+s)(s+3)}{3(3s+3)} = \frac{(s+3)^2}{9(s+1)}$$

simplify (1+s/3)/(1+2*s/(s+3))

Results

$$\frac{(s+3)^2}{9\,(s+1)}$$

$$\frac{s^2+6\,s+9}{9\,s+9}$$

```
syms s
simplify((1+s/3)/(1+2*s/(s+3)))

ans =

(s + 3)^2/(9*(s + 1))
```

Esim: ajetaan täältä tuonne (matka L) nopeudella v_1 ja tullaan takaisin nopeudella v_2. Ajoaika edestakaisella matkalla on tällöin

$$\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2}$$

eli edestakaisen matkan keskinopeus on

$$\frac{2L}{\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2}} = \frac{2L}{L\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

$v_1 = 80$ ja $v_2 = 60$, keskinopeus $= 68.6$

$v_1 = 80$ ja $v_2 = 80$, keskinopeus $= 80$

$v_1 = 80$ ja $v_2 = 100$, keskinopeus $= 88.9$

```
simplify 2*L/(L/v1+L/v2)
```

```
clear
syms L v1 v2
simplify(2*L/(L/v1+L/v2))
```

Jos $v_1 \neq v_2$, niin keskinopeus on pienempi kuin nopeuksien keskiarvo:

$$\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} - \frac{v_1+v_2}{2}$$

$$= \frac{4v_1v_2 - (v_1+v_2)^2}{2(v_1+v_2)}$$

$$= \frac{4v_1v_2 - (v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2)}{2(v_1+v_2)}$$

$$= \frac{-v_1^2 + 2v_1v_2 - v_2^2}{2(v_1+v_2)}$$

$$= \frac{-(v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2)}{2(v_1+v_2)}$$

$$= -\frac{(v_1-v_2)^2}{2(v_1+v_2)} < 0$$

simplify 2*v1*v2/(v1+v2)-(v1+v2)/2

```
clear
syms v1 v2
simplify(2*v1*v2/(v1+v2)-(v1+v2)/2)
```

Luvun $a \geq 0$ **neliöjuuri** (square root) $\sqrt{a}$ on luku, joka toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

$$(\sqrt{a}\,)^2 = a \quad \text{ja} \quad \sqrt{a} \geq 0$$

Yhtälöllä $x^2 = a$ on kaksi ratkaisua, $x = \pm\sqrt{a}$.

Esim. $\sqrt{9} = 3$ ja $x^2 = 9 \leftrightarrow x = \pm 3$

Huom. $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \quad , & \text{jos } x \geq 0 \\ -x \quad , & \text{jos } x < 0 \end{cases}$

$= x$:n itseisarvo (absolute value).

Esim. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Huom: Negatiivisillä luvuilla $a < 0$ ei ole neliöjuurta (ilman ns. kompleksilukuja), koska kaikille luvuille x pätee $x^2 \geq 0$ eli esimerkiksi yhtälöllä $x^2 = -4$ ei ole ratkaisua.

Kuutiojuuri: $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

n:s juuri: $(\sqrt[n]{a})^n = a$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$

(ja $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} \geq 0$, kun $n = 2, 4, 6, \ldots$)

Potenssimerkintä: $\sqrt{a} = a^{1/2}$, $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$, jne

```
a=5
sqrt(a) %neliöjuuri
a^(1/3) %kuutiojuuri
```

```
ans =
   2.236067977499790
ans =
   1.709975946676697
```

Laskusäännöt: kun a ja b ovat ≥ 0, niin

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{ja} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Syy:

$$(\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$$

Huom: $\sqrt{a \pm b}$ **EI OLE** $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, koska

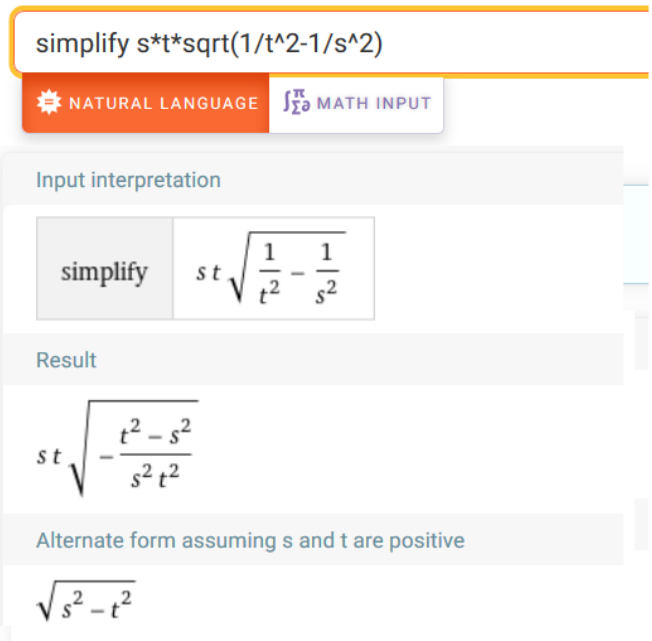
$$\begin{aligned}(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 \quad &= (\sqrt{a})^2 \pm 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \\ &= a \pm 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &\neq a \pm b\end{aligned}$$

Esim:

$$\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}R^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}R=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$st\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{s^2}}=\sqrt{(st)^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{s^2}\right)}$$

$$=\sqrt{s^2t^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{s^2}\right)}=\sqrt{s^2-t^2}$$




```
syms s t positive
simplify(s*t*sqrt(1/t^2-1/s^2))

ans =
(s^2 - t^2)^(1/2)
```

YHTÄLÖT

$$2x + 5 = 4(x - 5)$$

$$\frac{2R}{3R+1} = 1 + 2R$$

$$\frac{E}{e} = \frac{R+r}{r}, \quad r = ?$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}, \quad p_0 = ?$$

Tavoite: Ratkaista yhtälö eli etsiä ne tuntemattoman arvot, joilla yhtälö toteutuu
(eli vasen puoli = oikea puoli)

Menetelmä: Muokataan yhtälöä niin, että se saadaan "perusmuotoon", jolloin ratkaisu on "ilmeinen" . Sallittuja muokkaustemppuja ovat (ainakin)

1. Lisätään sama luku yhtälön molemmille puolille (eli siirretään yhteenlaskettavia termejä yhtäsuuruusmerkin puolelta toiselle vaihtaen niiden etumerkit)

2. Kerrotaan (tai jaetaan) molemmat puolet samalla luvulla ($\neq 0$)

3. Korotetaan molemmat puolet samaan potenssiin

Ensimmäisen asteen yhtälö:

Perusmuoto

$$ax = b, \quad a \neq 0$$

jonka ratkaisu on (jaetaan a:lla)

$$x = \frac{b}{a}$$

Esim:

$$\begin{aligned} 2x+5 &= 4(x-5) \\ 2x+5 &= 4x-20 \\ 2x-4x &= -20-5 \\ -2x &= -25 \\ x &= \frac{-25}{-2} = 12.5 \end{aligned}$$

"Tarkastus":

$2x+5 = 2\cdot 12.5 + 5 = 30$
$4(x-5) = 4\cdot(12.5-5) = 30$

eli ratkaisu OK !

Esim:

$$
\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x+4} &= 3 \quad \Big| \cdot x+4 \\
2x-1 &= 3(x+4) \\
2x-1 &= 3x+12 \\
2x-3x &= 12+1 \\
-1x &= 13 \\
x &= -13
\end{aligned}
$$

solve (2*x-1)/(x+4)=3,x

Input interpretation

solve	$\frac{2x-1}{x+4}=3$	for	x

Result

$x = -13$

```
clear
syms x
solve((2*x-1)/(x+4)==3,x)
```

```
ans =

-13
```

Esim: Ratkaise r yhtälöstä

$$
\begin{aligned}
\frac{E}{e} &= \frac{R+r}{r} \qquad \Big| \cdot er \\
Er &= e(R+r) \\
Er &= eR + er \\
Er - er &= eR \\
(E-e)r &= eR \\
r &= \frac{eR}{E-e}
\end{aligned}
$$

solve f/e=(R+r)/r,r

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Input interpretation

solve	$\frac{f}{e} = \frac{R+r}{r}$	for	r

Results

$r \neq 0$ and $R = 0$ and $f = e$

$r = -\frac{e\,R}{e-f}$ and $f \neq e$ and $R \neq 0$

```
syms E e R r
solve(E/e==(R+r)/r,r)
Warning: The solutions are valid unde
R ~= 0 & e ~= 0.
 To include parameters and condition:
 the 'ReturnConditions' option.
> In solve>warnIfParams (line 508)
  In solve (line 357)
ans =
(R*e)/(E - e)
```

Esim: Ratkaise t_1 yhtälöstä

$$v = a_1 t_1 + a_2(t_2 - t_1)$$

$$v = a_1 t_1 + a_2 t_2 - a_2 t_1$$

$$a_2 t_1 - a_1 t_1 = a_2 t_2 - v$$

$$(a_2 - a_1) t_1 = a_2 t_2 - v$$

$$t_1 = \frac{a_2 t_2 - v}{a_2 - a_1} = \frac{v - a_2 t_2}{a_1 - a_2}$$

solve(v=a1*t1+a2*(t2-t1),t1)

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Input interpretation

solve	$v = a1\,t1 + a2\,(t2 - t1)$	for	t1

Result

$$t1 = \frac{v - a2\,t2}{a1 - a2} \text{ and } a1 \neq a2$$

```
syms v a1 a2 t1 t2
solve(v==a1*t1+a2*(t2-t1),t1)


ans =

(v - a2*t2)/(a1 - a2)
```

Esim:

Oikein toimivassa kellossa janoiksi ajatellut osoittimet ovat päällekkäin kello 0.00.00. Ilmoita sekunnin tarkkuudella, milloin osoittimet ovat tämän jälkeen kolmannen kerran päällekkäin.

Tuntiviisari liikkuu vauhdilla 1/12 kierrosta/tunti ja minuuttiviisari vauhdilla 1 kierros/tunti, ja ne ovat puolenyön jälkeen kolmannen kerran päällekkäin silloin kun min-viisari on kulkenut tasan 3 kierrosta enemmän kuin tuntiviisari, eli kuluneelle ajalle t (tuntia) saadaan ehto

$$1 \cdot t = \frac{1}{12} \cdot t + 3 \quad \rightarrow \quad t = \frac{36}{11}$$

eli kello on silloin 3.16.22

$$\frac{36}{11} = 3 + \frac{3}{11}, \quad \frac{3}{11} * 60 = 16 + \frac{4}{11}, \quad \frac{4}{11} * 60 = 21.8$$

Esim:

Koneella A tehtävä vie 80 tuntia, kun yhdessä koneen B kanssa riittää 48 tuntia. Kuinka kauan kone B yksin tarvitsee aikaa tehtävän suorittamiseen? Esitä perusteltu arvio tuloksesta.

Koneen A vauhti on 1/80 työstä/tunti ja jos B:ltä kuluu yksin x tuntia, niin sen vauhti on $1/x$ työstä/tunti, ja saadaan ehto

$$\frac{1}{80}+\frac{1}{x}=\frac{1}{48} \quad \rightarrow \quad x=120$$

$$\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}=\frac{1}{t_{AB}} \rightarrow t_B=\frac{1}{\frac{1}{t_{AB}}-\frac{1}{t_A}}=\frac{t_A t_{AB}}{t_A-t_{AB}}$$

solve 1/t1+1/t2=1/t12,t2

```
clear
syms tA tB tAB
solve(1/tA+1/tB==1/tAB,tB)
```

Esim:

Käytettävissä on 6,00 kg 4,5 % suolaliuosta, joka halutaan muuttaa 11,0 prosenttiseksi.
a) Jos väkevyyttä lisätään haihduttamalla liuoksesta vettä, kuinka paljon haluttua liuosta saadaan.
b) Jos väkevyys muutetaan lisäämällä alkuperäiseen liuokseen puhdasta suolaa, kuinka paljon sitä on lisättävä.

Suolaa on aluksi $0.045 \cdot 6 = 0.27$ (kg), joten saadaan ehdot

$$a) \quad \frac{0.27}{x} = 0.11 \to x = 2.45$$

$$b) \quad \frac{0.27 + y}{6 + y} = 0.11 \to y = 0.44$$

$$a) \quad \frac{p_1 \cdot M}{x} = p_2 \rightarrow x = \frac{p_1}{p_2} \cdot M$$

$$b) \quad \frac{p_1 \cdot M + y}{M + y} = p_2 \rightarrow y = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_2} \cdot M$$

solve p1*M/x=p2,x

$$x = \frac{M\,\mathrm{p1}}{\mathrm{p2}}$$

solve (p1*M+y)/(M+y)=p2,y

$$y = \frac{M\,(\mathrm{p1} - \mathrm{p2})}{\mathrm{p2} - 1}$$

```
clear
syms p1 p2 M x y
solve(p1*M/x==p2,x)
solve((p1*M+y)/(M+y)==p2,y)
```

```
ans =

(M*p1)/p2
```

```
ans =

(M*p1 - M*p2)/(p2 - 1)
```

Esim:

Etanolin ja veden seoksen tiheys on 0,875 kg/dm^3. Kuinka paljon alkoholia on 1,00 kg:ssa tätä seosta? Oletetaan, että sekoitettaessa ei tapahdu tilavuuden muutoksia.

Etanolin tiheys on 0.79 kg/dm^3 ja veden 1.00 kg/dm^3. Jos 1 kg:ssa seosta on etanolia x kg, niin saadaan ehto

$$\frac{x}{0.79} + \frac{1-x}{1.00} = \frac{1}{0.875} \to x = 0.54$$

$$\frac{x}{\rho_1} + \frac{1-x}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_{12}} \rightarrow x = \frac{\rho_1 \cdot (\rho_2 - \rho_{12})}{\rho_{12} \cdot (\rho_2 - \rho_1)}$$

```
solve x/r1+(1-x)/r2=1/r12,x
```

$$x = \frac{\mathrm{r1}\,(\mathrm{r12} - \mathrm{r2})}{\mathrm{r12}\,(\mathrm{r1} - \mathrm{r2})}$$

```
clear
syms r1 r2 r12 x
solve(x/r1+(1-x)/r2==1/r12,x)
ans =

-(r1*r2 - r1*r12)/(r1*r12 - r2*r12)
```

Toisen asteen yhtälö:

Perusmuoto

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Ratkaisukaava

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kolme tapausta riippuen neliöjuuren sisuksen $b^2 - 4ac$ arvosta:

1. Jos $b^2 - 4ac > 0$, niin 2 ratkaisua (yksi $+$, toinen $-$ merkillä)

2. Jos $b^2 - 4ac = 0$, niin 1 ratkaisu $x = -\dfrac{b}{2a}$

3. Jos $b^2 - 4ac < 0$, niin ei ratkaisua (tässä vaiheessa)

Syy: Täydennetään neliöksi (binomikaavalla)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x\right) = -c$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x\right) = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} \quad \left| \begin{array}{l} a>0 \to \sqrt{4a^2}=2a \\ a<0 \to \sqrt{4a^2}=-2a \end{array} \right.$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esim:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(a = 3, b = 2, c = -1)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = -1$$

solve 3*x^2+2*x-1=0

Results

$x = -1$

$x = \frac{1}{3}$

```
syms x
solve(3*x^2+2*x-1==0,x)

ans =

  -1
 1/3
```

Esim:

$$\frac{R}{3R+1} = 1 + 2R$$

$$R = (1+2R)(3R+1)$$

$$R = 3R + 1 + 6R^2 + 2R$$

$$6R^2 + 4R + 1 = 0$$

$$R = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{12}$$

Ei ratkaisua !

solve R/(3*R+1)=1+2*R,R

Results

$$R = -\frac{1}{6}\, i\left(\sqrt{2} + -2\, i\right)$$

$$R = \frac{1}{6}\, i\left(\sqrt{2} + 2\, i\right)$$

```
syms R
solve(R/(3*R+1)==1+2*R,R)

 ans =

  - (2^(1/2)*1i)/6 - 1/3
    (2^(1/2)*1i)/6 - 1/3
```

Esim:

$$(R+r)^2 = 2(R-r)^2, \qquad r = ?$$

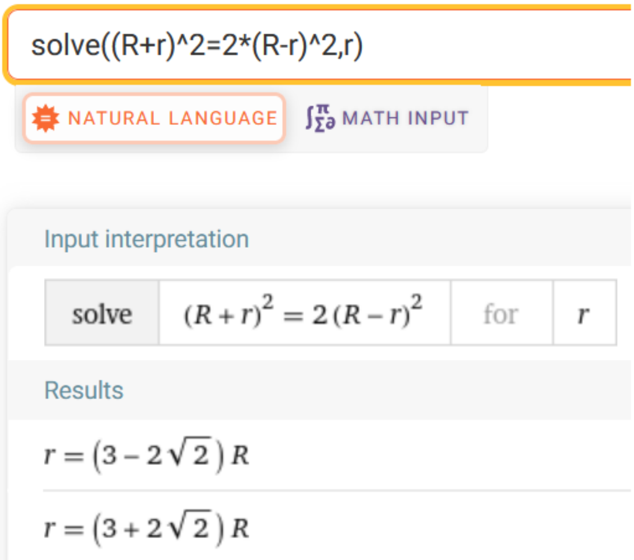
$$R^2 + 2Rr + r^2 = 2R^2 - 4Rr + 2r^2$$

$$-r^2 + 6Rr - R^2 = 0$$

$$r = \frac{-6R \pm \sqrt{(6R)^2 - 4R^2}}{-2}$$

$$r = \frac{-6R \pm \sqrt{32R^2}}{-2} = \frac{-6R \pm 2\sqrt{8}R}{-2}$$

$$r = (3 \pm \sqrt{8})R$$




```
syms R r
solve((R+r)^2==2*(R-r)^2,r)

ans =

 3*R - 2*2^(1/2)*R
 3*R + 2*2^(1/2)*R
```

Esim:

$$h + vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0, \qquad t = ?$$

$$-gt^2 + 2vt + 2h = 0$$

$$t = \frac{-2v \pm \sqrt{(2v)^2 - 4(-g)2h}}{2(-g)}$$

$$t = \frac{-2v \pm \sqrt{4v^2 + 8gh}}{-2g}$$

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 2gh}}{g}$$

solve(h+v*t-1/2*g*t^2=0,t)

Input interpretation

solve	$h + v\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 = 0$	for	t

Results

$t = \frac{v - \sqrt{2\,g\,h + v^2}}{g}$ and $g \neq 0$

$t = \frac{\sqrt{2\,g\,h + v^2} + v}{g}$ and $g \neq 0$

$t = -\frac{h}{v}$ and $g = 0$ and $v \neq 0$

```
syms h v t g
solve(h+v*t-1/2*g*t^2==0,t)

ans =

 (v - (v^2 + 2*g*h)^(1/2))/g
 (v + (v^2 + 2*g*h)^(1/2))/g
```

Esim. Kelataan d:n paksuista "paperia" rullalle (säde r). Montako kierrosta tarvitaan, jotta kelautuneen paperin pituus olisi s ?

Ensimmäisellä kierroksella rullan säde on r, toisella $r + d$, kolmannella $r + 2d$ jne, eli jos rulla pyörii n kierrosta, niin kelautuneen paperin pituus

$$
\begin{aligned}
s = \; & 2\pi r + 2\pi(r + d) + 2\pi(r + 2d) + \ldots \\
& + 2\pi(r + (n-1)d) \\
= \; & n \cdot 2\pi r + 2\pi \underbrace{(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))}_{=n(n-1)/2} d \\
= \; & n \cdot 2\pi r + 2\pi \cdot n(n-1)/2 \cdot d \\
= \; & \pi d n^2 + \pi(2r - d)n
\end{aligned}
$$

$$s = \pi d n^2 + \pi(2r - d)n$$

$$\pi d n^2 + \pi(2r - d)n - s = 0$$

$$n = \frac{-\pi(2r - d) + \sqrt{\pi^2(2r - d)^2 + 4\pi d s}}{2\pi d}$$

solve s=p*d*n^2+p*(2*r-d)*n,n

$$n = -\frac{\sqrt{p\,(d^2\,p - 4\,d\,p\,r + 4\,d\,s + 4\,p\,r^2)} - d\,p + 2\,p\,r}{2\,d\,p}$$

$$n = \frac{\sqrt{p\,(d^2\,p - 4\,d\,p\,r + 4\,d\,s + 4\,p\,r^2)} + d\,p - 2\,p\,r}{2\,d\,p}$$

```
clear
syms p d r s n
solve(s==p*d*n^2+p*(2*r-d)*n,n)

ans =

  (d*p - 2*p*r + (p*(p*d^2 - 4*p*d*r + 4*s*d + 4*p*r^2))^(1/2))/(2*d*p)
 -(2*p*r - d*p + (p*(p*d^2 - 4*p*d*r + 4*s*d + 4*p*r^2))^(1/2))/(2*d*p)
```

Huom: $1 + 2 + \ldots + n - 1 = n(n-1)/2$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & A & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) \\
+ & A & = & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2A & = & n & + & n & + & \ldots & + & n & + & n \\
 & 2A & = & (n-1)n & & & & & & & & \\
 & A & = & (n-1)n/2 & & & & & & & &
\end{array}$$

Esim:

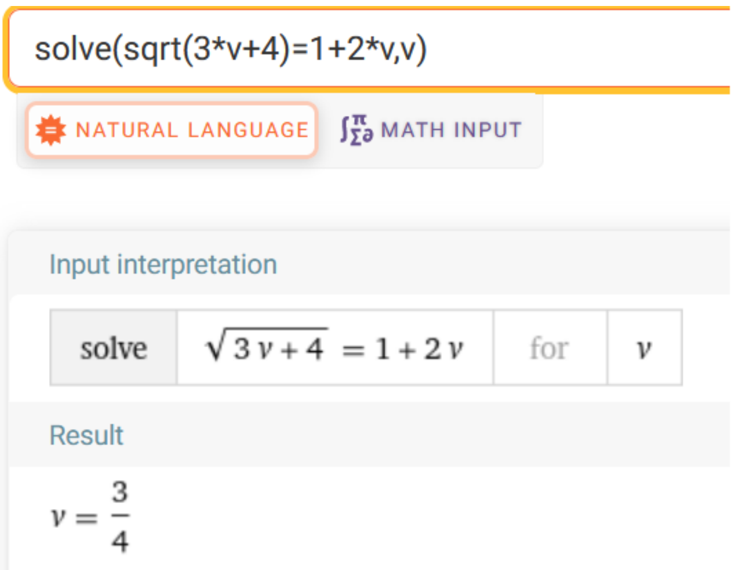
$$\sqrt{3v+4} = 1 + 2v$$

$$3v + 4 = (1+2v)^2$$

$$4v^2 + v - 3 = 0$$

$$v = -1 \text{ tai } v = 3/4$$

Huom: $v = -1$ ei kelpaa, koska $\sqrt{3v+4} = 1$ ja $1 + 2v = -1$.




```
syms v
solve(sqrt(3*v+4)==1+2*v,v)

ans =

3/4
```

Esim:

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{r}}, \qquad p_0 = ?$$

$$v^2 = \frac{2(p - p_0)}{r}$$

$$v^2 r = 2p - 2p_0$$

$$p_0 = \frac{2p - v^2 r}{2} = p - \frac{v^2 r}{2}$$

```
solve(v=sqrt(2*(p-p0)/r),p0)
```

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT

Input interpretation

solve	$v = \sqrt{2 \times \frac{p - p0}{r}}$	for	p0

Result

$$p0 = \frac{1}{2}\left(2\,p - r\,v^2\right)$$

```
syms p p0 r
solve(v==sqrt(2*(p-p0)/r),p0)

ans =

p - (r*v^2)/2
```

Esim: lineaarinen yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + 5y &= 1 \\ x + 3y &= 2 \end{cases}$$

Tapa1: ratkaistaan esimerkiksi x toisesta yhtälöstä:

$$x + 4y = 2 \rightarrow x = 2 - 3y$$

ja sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön:

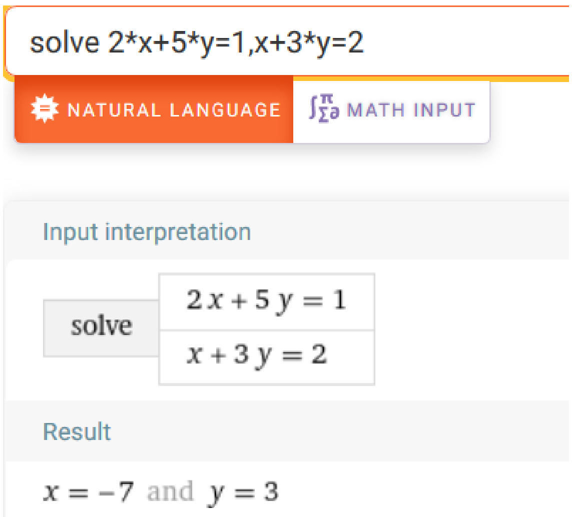
$$2(2-3y)+5y = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 2-3y = -7$$

Tapa2: kerrotaan toinen yhtälö -2:lla ja lasketaan yhtälöt yhteen

$$\begin{cases} 2x + 5y &= 1 \\ -2x - 6y &= -4 \end{cases} \rightarrow -y = -3 \rightarrow y = 3$$

kerrotaan ensimmäinen yhtälö 3:lla ja toinen -5:lla ja lasketaan yhtälöt yhteen

$$\begin{cases} 6x + 15y &= 3 \\ -5x - 15y &= -10 \end{cases} \rightarrow x = -7$$




```
syms x y
solve(2*x+5*y==1,x+3*y==2,x,y)
x=ans.x
y=ans.y

x =
-7
y =
3
```

Esim: lineaarisen yhtälöparin ratkaisukaava

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

kerrotaan ensimmäinen $-c$:llä ja toinen a:lla:

$$\begin{cases} -cax - cby &= -ce \\ acx + ady &= af \end{cases}$$

ja lasketaan yhteen:

$$-cby + ady = -ce + af$$

$$\to (ad - cb)y = af - ce$$

$$\to y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

kerrotaan ensimmäinen d:llä ja toinen $-b$:llä:

$$\begin{cases} dax + dby & = de \\ -bcx - bdy & = -bf \end{cases}$$

ja lasketaan yhteen:

$$dax - bcx = de - bf$$

$$\to (ad - bc)x = de - bf$$

$$\to x = \frac{de - bf}{ad - bc}$$

Huom: jos $ad - bc = 0$, niin yhtälöparilla on 0 tai äärettömän monta ratkaisua

Esim:

Kuinka paljon kutakin oheisessa taulukossa eriteltyä metalliseosta on otettava, jotta yhteensulattamalla saataisiin 2 kg seosta, joka sisältää 40 % Cu, 27,25 % Zn ja 32,75 % Ni?

	Cu	Zn	Ni
I seos	20 %	50 %	30 %
II seos	70 %	10 %	20 %
III seos	20 %	20 %	60 %

massat: I: x, II: y, III: $2 - x - y$ kg

$$\begin{cases} 0.20 \cdot x + 0.70 \cdot y + 0.20 \cdot (2 - x - y) = 0.40 \cdot 2 \quad (Cu) \\ 0.50 \cdot x + 0.10 \cdot y + 0.20 \cdot (2 - x - y) = 0.2725 \cdot 2 \quad (Zn) \end{cases}$$

$$\rightarrow x = 0.75,\ y = 0.80,\ 2 - x - y = 0.45$$

```
solve 0.20*x+0.70*y+0.20*(2-x-y)=0.40*2,0.50*x+0.1*y+0.20*(2-x-y)=0.2725*2,x,y
```

```
clear
syms x y
yht1=0.20*x+0.70*y+0.20*(2-x-y)==0.40*2;
yht2=0.50*x+0.10*y+0.20*(2-x-y)==0.2725*2;
solve(yht1,yht2,x,y)
x=ans.x
y=ans.y
```

$$\begin{cases} P_{1C}\cdot x + P_{2C}\cdot y + P_{3C}\cdot (M-x-y) = P_C\cdot M & (Cu) \\ P_{1Z}\cdot x + P_{2Z}\cdot y + P_{3Z}\cdot (M-x-y) = P_Z\cdot M & (Zn) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{P_{2C}P_{3Z} - P_{3C}P_{2z} + P_{2Z}P_C - P_{3Z}P_C - P_{2C}P_Z + P_{3C}P_Z}{P_{1C}P_{2Z} - P_{2C}P_{1Z} - P_{1C}P_{3Z} + P_{3C}P_{1Z} + P_{2C}P_{3Z} - P_{3C}P_{2Z}}\cdot M \\ y = \dfrac{-P_{1C}P_{3Z} + P_{3C}P_{1z} - P_{1Z}P_C + P_{3Z}P_C + P_{1C}P_Z - P_{3C}P_Z}{P_{1C}P_{2Z} - P_{2C}P_{1Z} - P_{1C}P_{3Z} + P_{3C}P_{1Z} + P_{2C}P_{3Z} - P_{3C}P_{2Z}}\cdot M \end{cases}$$

solve p11*x+p21*y+p31*(M-x-y)=p1*M,p12*x+p22*y+p32*(M-x-y)=p2*M,x,y

$$x = \frac{M\,(\mathrm{p1}\,(\mathrm{p32}-\mathrm{p22}) + \mathrm{p2}\,(\mathrm{p21}-\mathrm{p31}) - \mathrm{p21}\,\mathrm{p32} + \mathrm{p22}\,\mathrm{p31})}{\mathrm{p11}\,(\mathrm{p32}-\mathrm{p22}) + \mathrm{p12}\,(\mathrm{p21}-\mathrm{p31}) - \mathrm{p21}\,\mathrm{p32} + \mathrm{p22}\,\mathrm{p31}}$$

$$y = \frac{M\,(\mathrm{p1}\,(\mathrm{p32}-\mathrm{p12}) + \mathrm{p11}\,(\mathrm{p2}-\mathrm{p32}) + \mathrm{p31}\,(\mathrm{p12}-\mathrm{p2}))}{\mathrm{p11}\,(\mathrm{p22}-\mathrm{p32}) + \mathrm{p12}\,(\mathrm{p31}-\mathrm{p21}) + \mathrm{p21}\,\mathrm{p32} - \mathrm{p22}\,\mathrm{p31}}$$

```
syms PC PZ P1C P1Z P2C P2Z P3C P3Z M x y
solve(P1C*x+P2C*y+P3C*(M-x-y)==PC*M,P1Z*x+P2Z*y+P3Z*(M-x-y)==PZ*M,x,y)
x=ans.x
y=ans.y
```

```
x =

(M*P2C*P3Z - M*P3C*P2Z + M*P2Z*PC - M*P3Z*PC - M*P2C*PZ + M*P3C*PZ)/(P1C*P2Z - P2C*P1Z - P1C*P3Z + P3C*P1Z + P2C*P3Z - P3C*P2Z)


y =

-(M*P1C*P3Z - M*P3C*P1Z + M*P1Z*PC - M*P3Z*PC - M*P1C*PZ + M*P3C*PZ)/(P1C*P2Z - P2C*P1Z - P1C*P3Z + P3C*P1Z + P2C*P3Z - P3C*P2Z)
```

Esim:

Veden ja glyserolin seokseen, jonka tiheys on 1,11 g/cm^3, lisätään etanolia, kunnes seosta on 200 cm^3, jolloin sen massa on 201 g. Kuinka paljon vettä, glyserolia ja etanolia on lopullisessa seoksessa?

tiheys: vesi 1.00, glyseroli 1.26, etanoli 0.79

tilavuus: vesi x, glyseroli y, etanoli $200 - x - y$

$$\begin{cases} 1.00 \cdot x + 1.26 \cdot y = 1.11 \cdot (x + y) \\ 1.00 \cdot x + 1.26 \cdot y + 0.79 \cdot (200 - x - y) = 201 \end{cases}$$

$\rightarrow x = 77.52$, $y = 56.85$, $200 - x - y = 65.63$

```
solve 1.00*x+1.26*y=1.11*(x+y),1.00*x+1.26*y+0.79*(200-x-y)=201
```

```
clear
syms x y
yht1=1.00*x+1.26*y==1.11*(x+y)
yht2=1.00*x+1.26*y+0.79*(200-x-y)==201
solve(yht1,yht2,x,y)
x=ans.x
y=ans.y
x=double(x)
y=double(y)
```

$$\begin{cases} \rho_v \cdot x + \rho_g \cdot y = \rho_{vg} \cdot (x+y) \\ \rho_v \cdot x + \rho_g \cdot y + \rho_e \cdot (V - x - y) = M \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-(\rho_g - \rho_{vg})(M - V\rho_e)}{\rho_e\rho_g - \rho_e\rho_v - \rho_g\rho_{vg} + \rho_v\rho_{vg}} \\ y = \dfrac{(\rho_v - \rho_{vg})(M - V\rho_e)}{\rho_e\rho_g - \rho_e\rho_v - \rho_g\rho_{vg} + \rho_v\rho_{vg}} \end{cases}$$

solve r1*x+r2*y=r12*(x+y),r1*x+r2*y+r3*(V-x-y)=M,x,y

$$x = \frac{(\mathrm{r12} - \mathrm{r2})\,(M - \mathrm{r3}\,V)}{(\mathrm{r1} - \mathrm{r2})\,(\mathrm{r12} - \mathrm{r3})},$$
$$y = \frac{(\mathrm{r1} - \mathrm{r12})\,(M - \mathrm{r3}\,V)}{(\mathrm{r1} - \mathrm{r2})\,(\mathrm{r12} - \mathrm{r3})}$$

```
clear
syms rv rg rvg re V M x y
solve(rv*x+rg*y==rvg*(x+y),rv*x+rg*y+re*(V-x-y)==M,x,y)
x=ans.x
y=ans.y
```

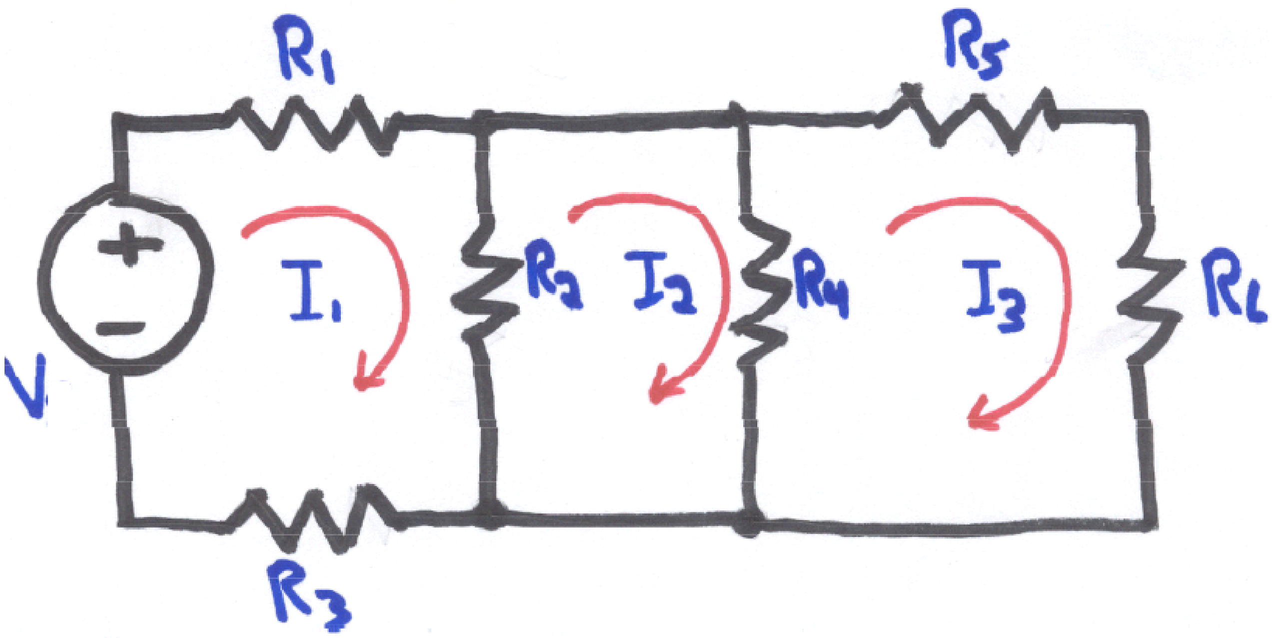
```
x =

-((rg - rvg)*(M - V*re))/(re*rg - re*rv - rg*rvg + rv*rvg)


y =

((rv - rvg)*(M - V*re))/(re*rg - re*rv - rg*rvg + rv*rvg)
```

Esim: virtapiiri



Lineaarinen yhtälöryhmä virroille I_1, I_2, I_3

$$\begin{cases} V - R_1 I_1 - R_2(I_1 - I_2) - R_3 I_1 &= 0 \\ -R_4(I_2 - I_3) - R_2(I_2 - I_1) &= 0 \\ -R_5 I_3 - R_6 I_3 - R_4(I_3 - I_2) &= 0 \end{cases}$$

solve 7-1*x1-2*(x1-x2)-3*x1=0,-4*(x2-x3)-2*(x2-x1)=0,-5*x3-6*x3-4*(x3-x2)=0,x1,x2,x3

x1 ≈ 1.3490 and x2 = 0.546875 and x3 ≈ 0.14583

```
clear
R1=1
R2=2
R3=3
R4=4
R5=5
R6=6
V=7

syms I1 I2 I3
yht1=V-R1*I1-R2*(I1-I2)-R3*I1==0
yht2=-R4*(I2-I3)-R2*(I2-I1)==0
yht3=-R5*I3-R6*I3-R4*(I3-I2)==0
solve(yht1,yht2,yht3,I1,I2,I3)
I1=ans.I1
I2=ans.I2
I3=ans.I3
%% desimaaliluvuiksi
double(I1)
double(I2)
double(I3)
```

```
ans =

      1.349


ans =

     0.54688


ans =

     0.14583
```

```
syms I1 I2 I3 R1 R2 R3 R4 R5 R6 V
yht1=V-R1*I1-R2*(I1-I2)-R3*I1==0
yht2=-R4*(I2-I3)-R2*(I2-I1)==0
yht3=-R5*I3-R6*I3-R4*(I3-I2)==0
solve(yht1,yht2,yht3,I1,I2,I3)
I1=ans.I1
I2=ans.I2
I3=ans.I3
```

```
I1=(V*(R2*R4 + R2*R5 + R2*R6 + R4*R5 + R4*R6))/(R1*R2*R4 + R1*R2*R5 + R1*R2*R6 + R2*R3*R4 + R1*R4*R5 + R2*R3*R5 + R1*R4*R6 + R2*R3*R6 + R2*R4*R5 + R2*R4*R6 + R3*R4*R5 + R3*R4*R6)
I2=(R2*V*(R4 + R5 + R6))/(R1*R2*R4 + R1*R2*R5 + R1*R2*R6 + R2*R3*R4 + R1*R4*R5 + R2*R3*R5 + R1*R4*R6 + R2*R3*R6 + R2*R4*R5 + R2*R4*R6 + R3*R4*R5 + R3*R4*R6)
I3=(R2*R4*V)/(R1*R2*R4 + R1*R2*R5 + R1*R2*R6 + R2*R3*R4 + R1*R4*R5 + R2*R3*R5 + R1*R4*R6 + R2*R3*R6 + R2*R4*R5 + R2*R4*R6 + R3*R4*R5 + R3*R4*R6)
```