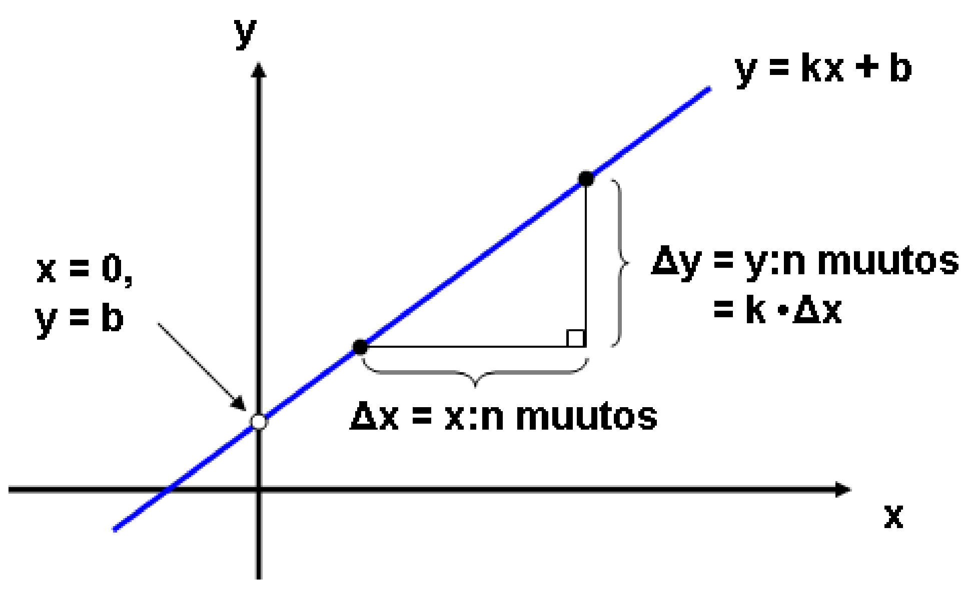
käyrä $\leftrightarrow$ yhtälö

Suora, paraabeli, ympyrä, ellipsi ja hyperbeli

Suora = ne tason pisteet $[x, y]$, joiden koordinaatit x ja y toteuttavat yhtälön $y = kx + b$

k > 0 , nouseva suora



Kulmakerroin (slope)

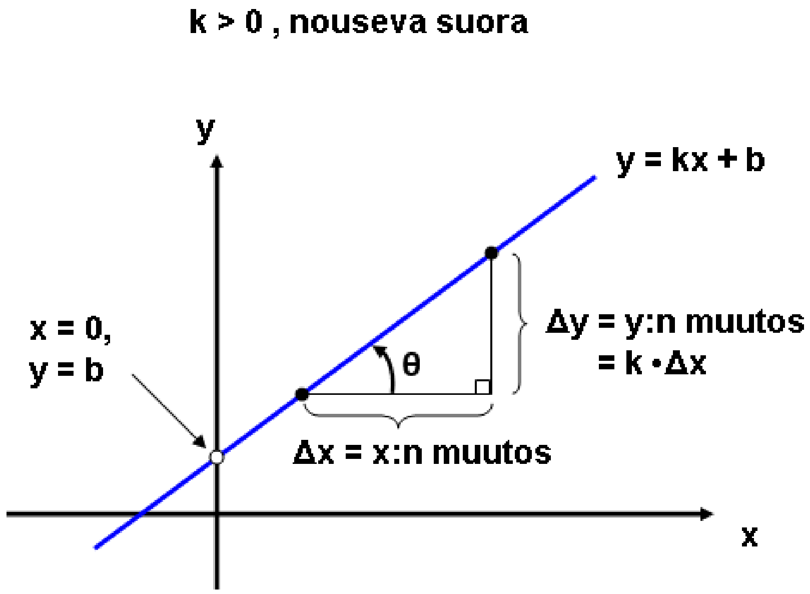
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

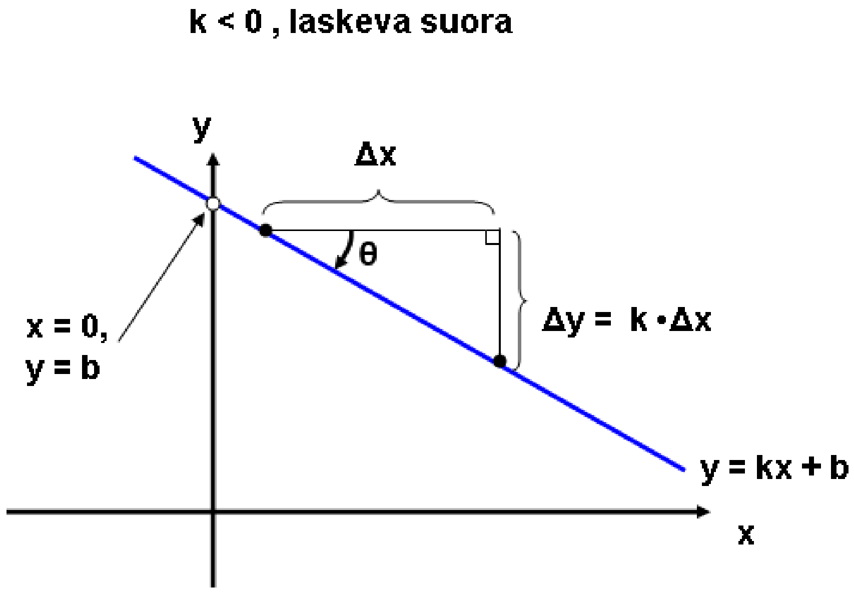
kertoo suoran jyrkkyyden

$k > 0 \leftrightarrow$ nouseva
$k < 0 \leftrightarrow$ laskeva

Vakiotermi (intercept) b kertoo millä korkeudella suora kulkee, esimerkiksi suoran ja y-akselin leikkauspiste on $x = 0$, $y = b$

Jos suoran suuntakulma on θ,
niin $k = \tan(\theta)$

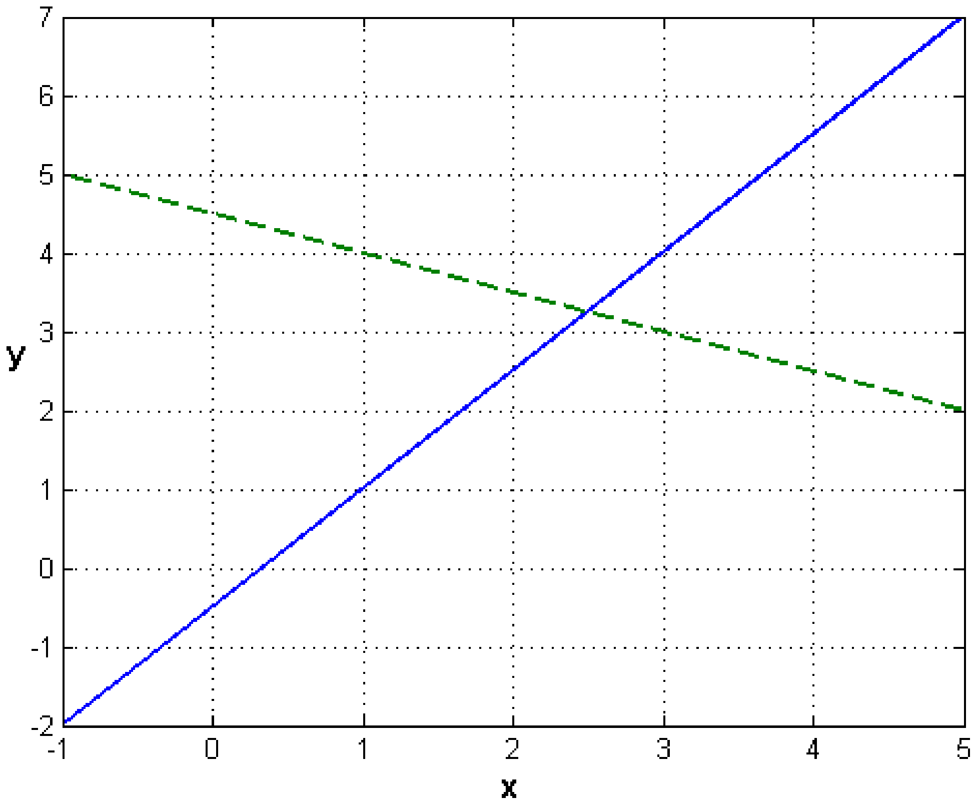




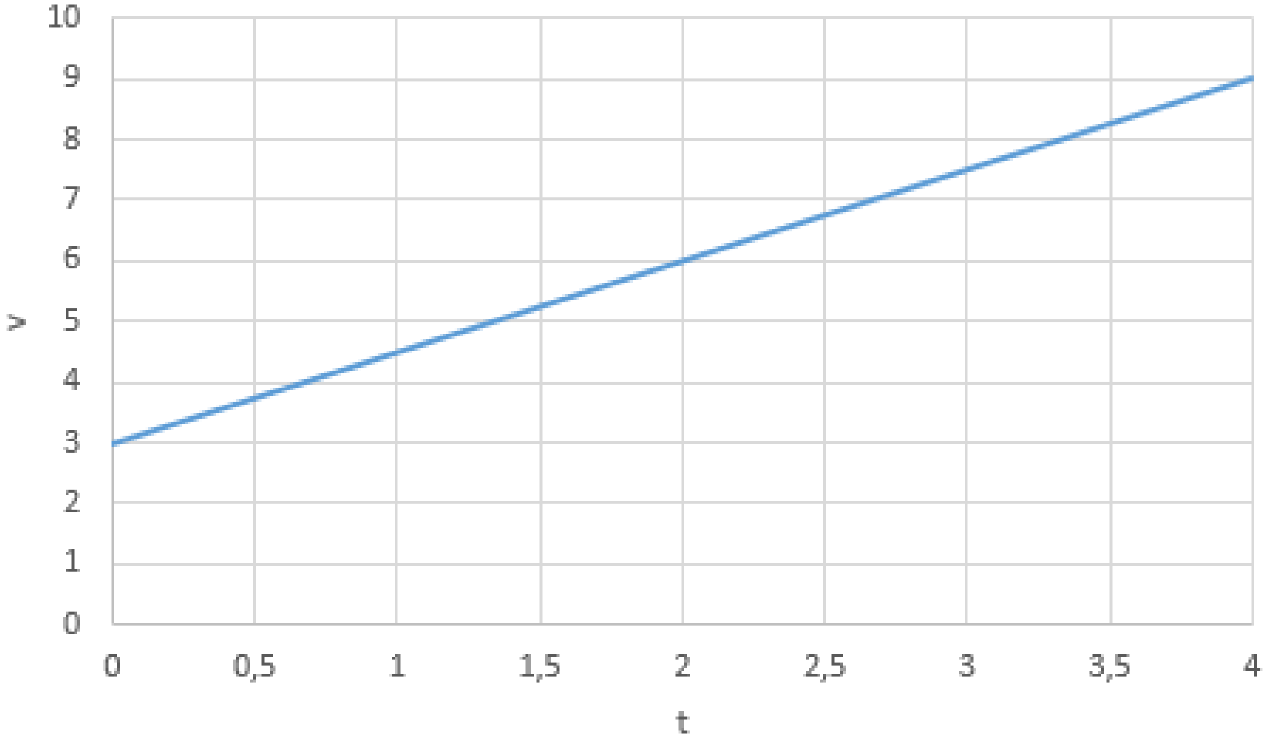
Esim:

sininen: $y = 1.5x - 0.5$

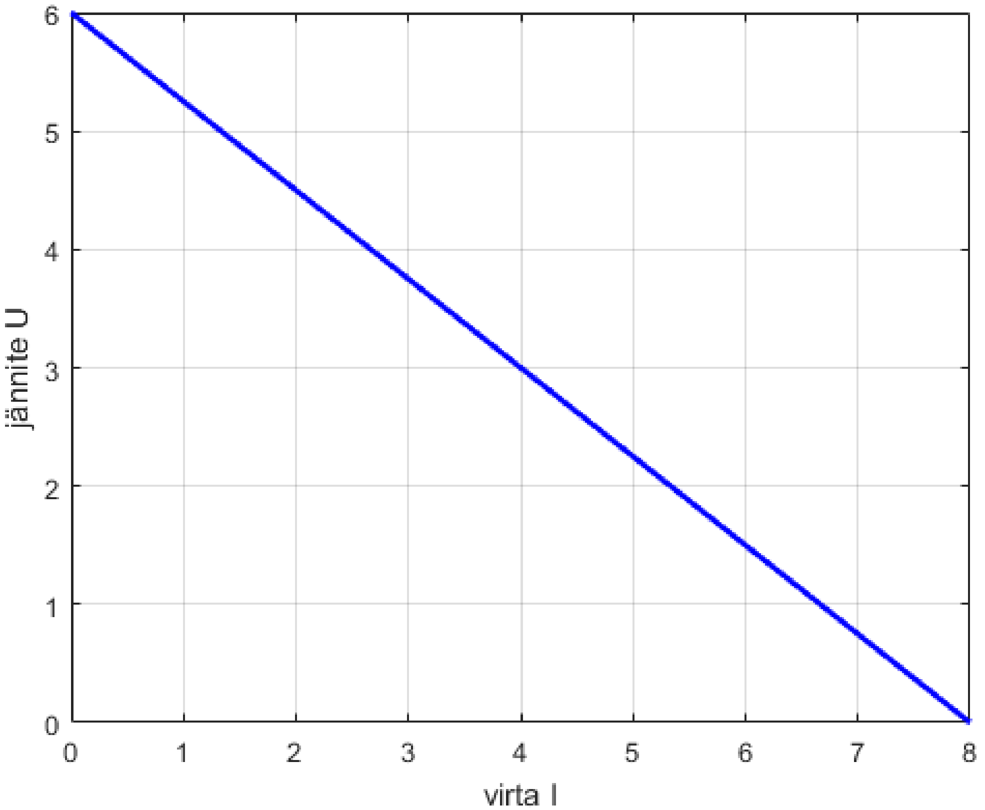
vihreä: $y = -0.5x + 4.5$



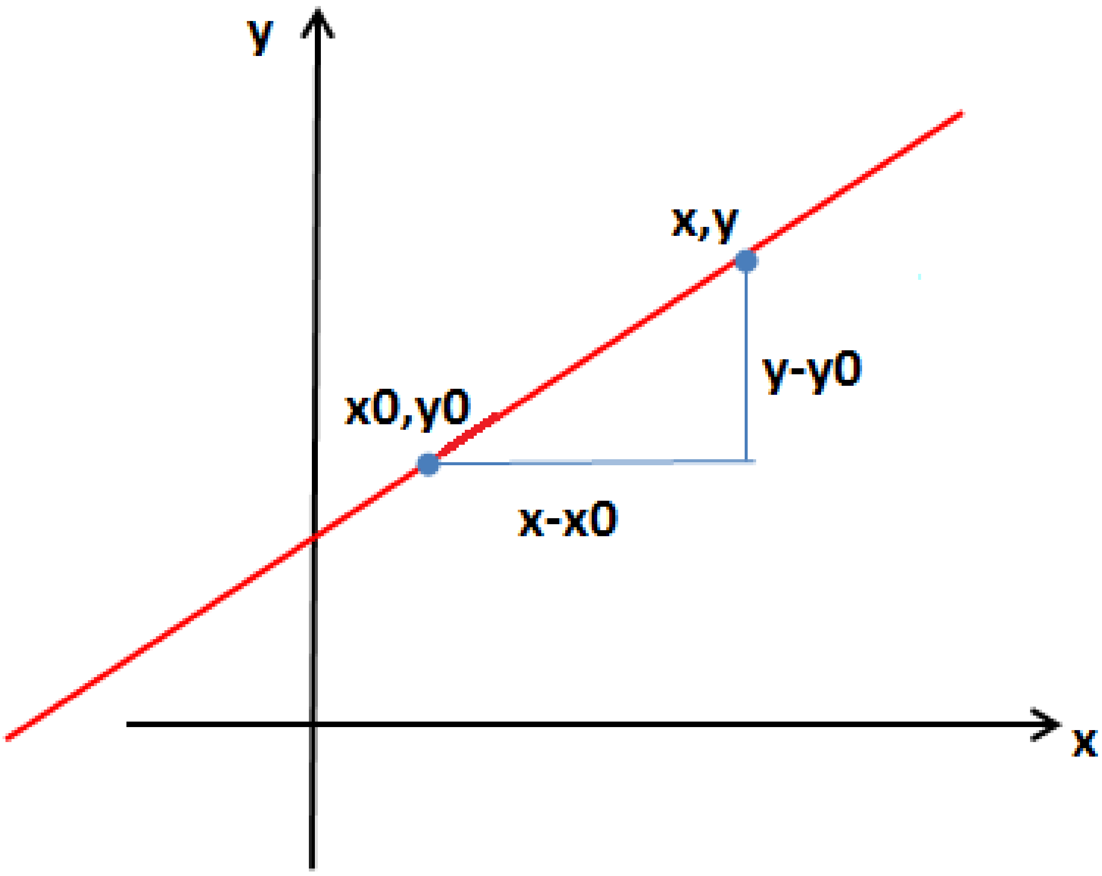
Esim. $v = v_0 + at = 3 + 1.5t$



Esim. $U = E - RI = 6 - 0.75I$



Esim: Pisteen x_0, y_0 kautta kulkeva suora, jonka kulmakerroin on k



Kulmakerroin

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

eli suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

$$y = kx \underbrace{-kx_0 + y_0}_{=b}$$

eli vakiotermi

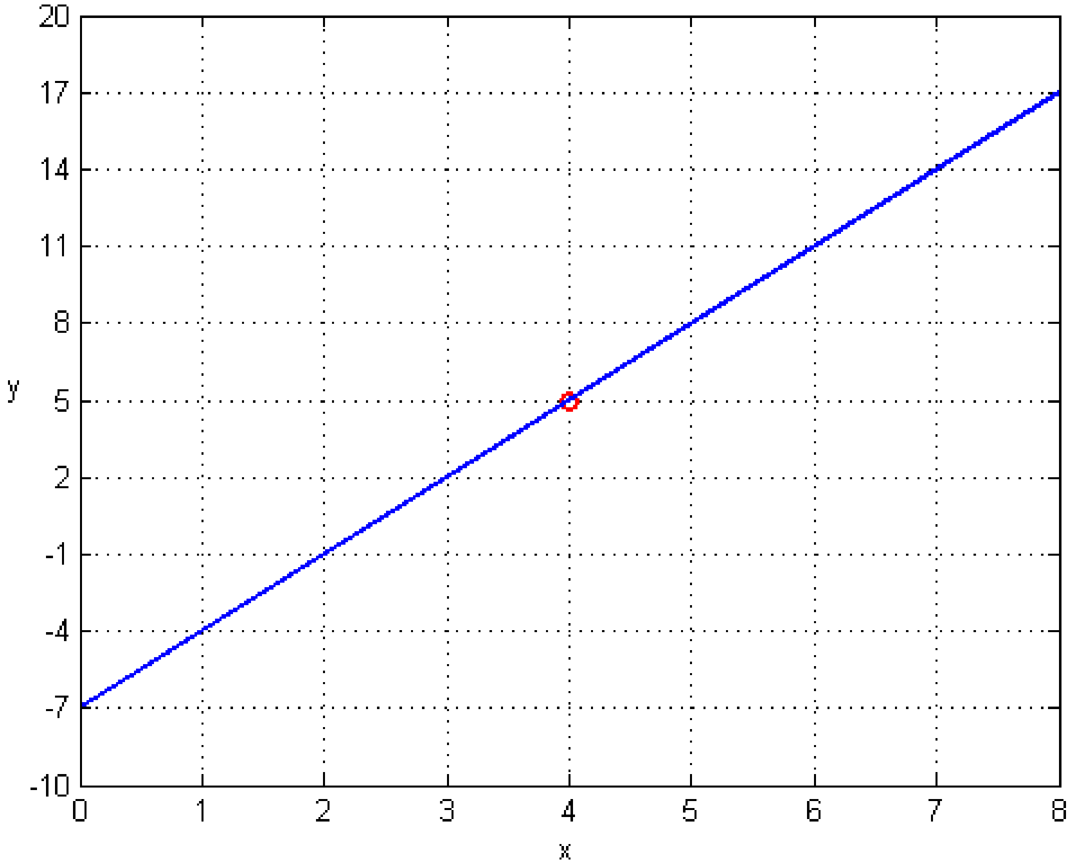
$$b = -kx_0 + y_0$$

Esim. pisteen [4,5] kautta kulkeva suora, jonka kulmakerroin on 3:

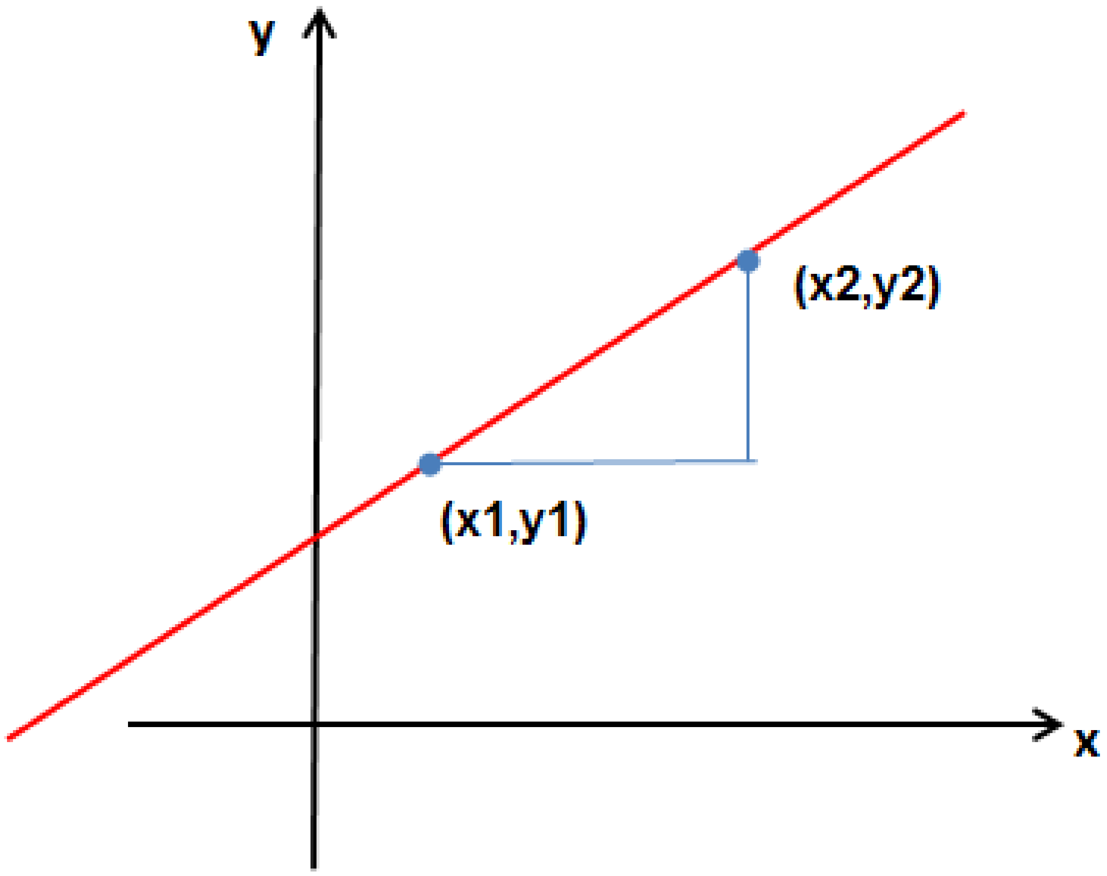
$$y - 5 = 3(x - 4)$$

eli

$$y = 3x - 7$$


20
17
14
11
8
5
2
-1
-4
-7
-10
y
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x

Esim: Pisteiden $[x_1, y_1]$ ja $[x_2, y_2]$ kautta kulkevan suoran yhtälö:



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ja suoran yhtälö on

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y = k(x - x_1) + y_1$$

$$y = kx \underbrace{- kx_1 + y_1}_{=b}$$

Esim. pisteiden [-2,3] ja [4,1] kautta kulkeva suora:

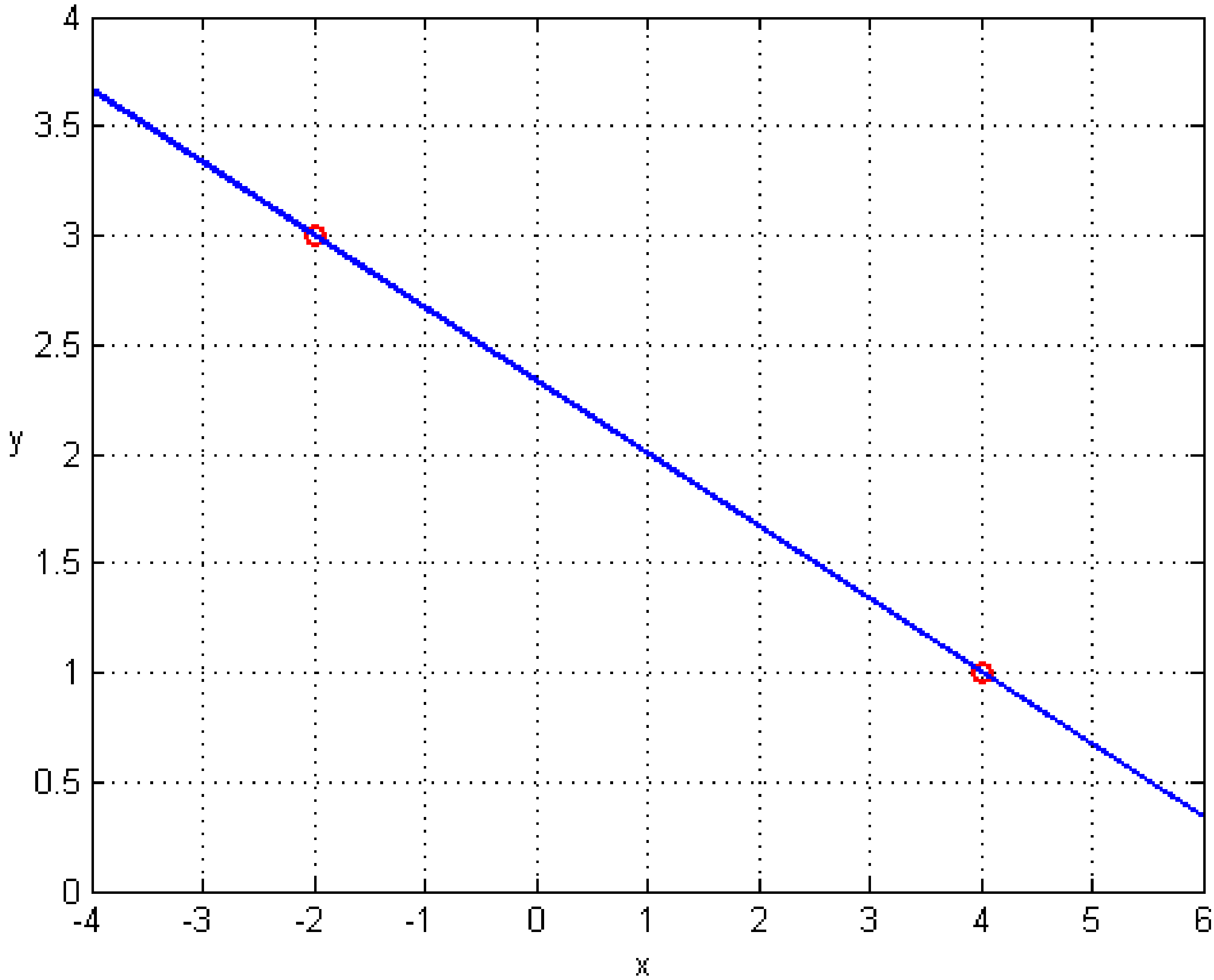
$$k = \frac{1-3}{4-(-2)} = -\frac{1}{3}$$

eli suoran yhtälö on

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - (-2))$$

eli

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$



4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
y
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x

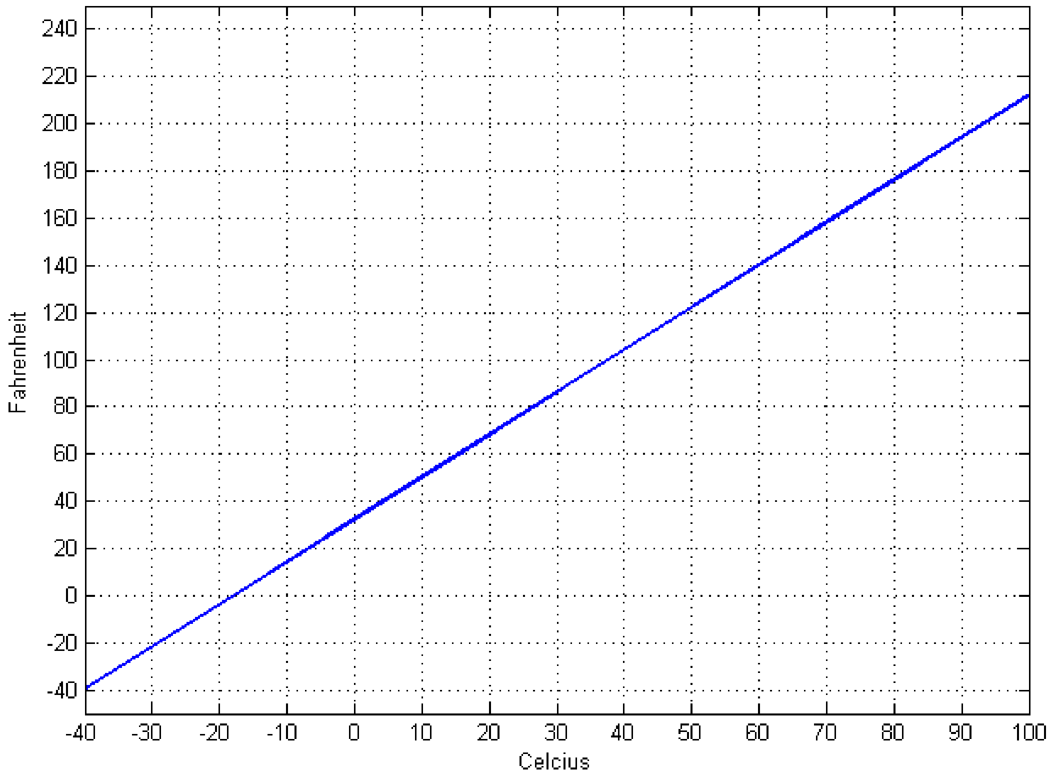
Esim. Pisteiden $[-40, -40]$ ja $[60, 140]$ kautta kulkeva suora $F = k\,C + b$

kulmakerroin $k = \dfrac{140 - (-40)}{60 - (-40)} = 1.8$

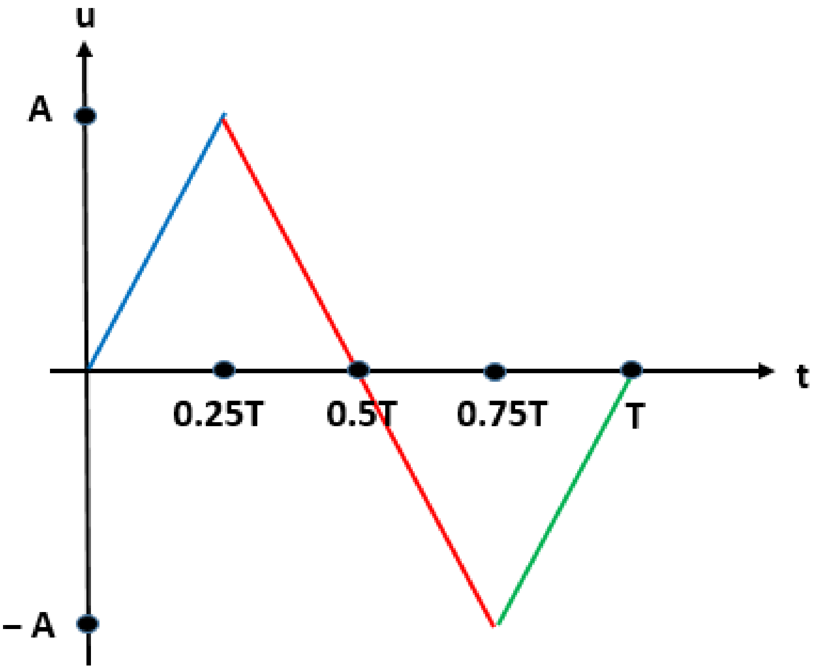
$F = 1.8 \cdot (C - (-40)) - 40$ tai

$F = 1.8 \cdot (C - 60) + 140$

eli $F = 1.8\,C + 32$



Esim: $u = kt + b$

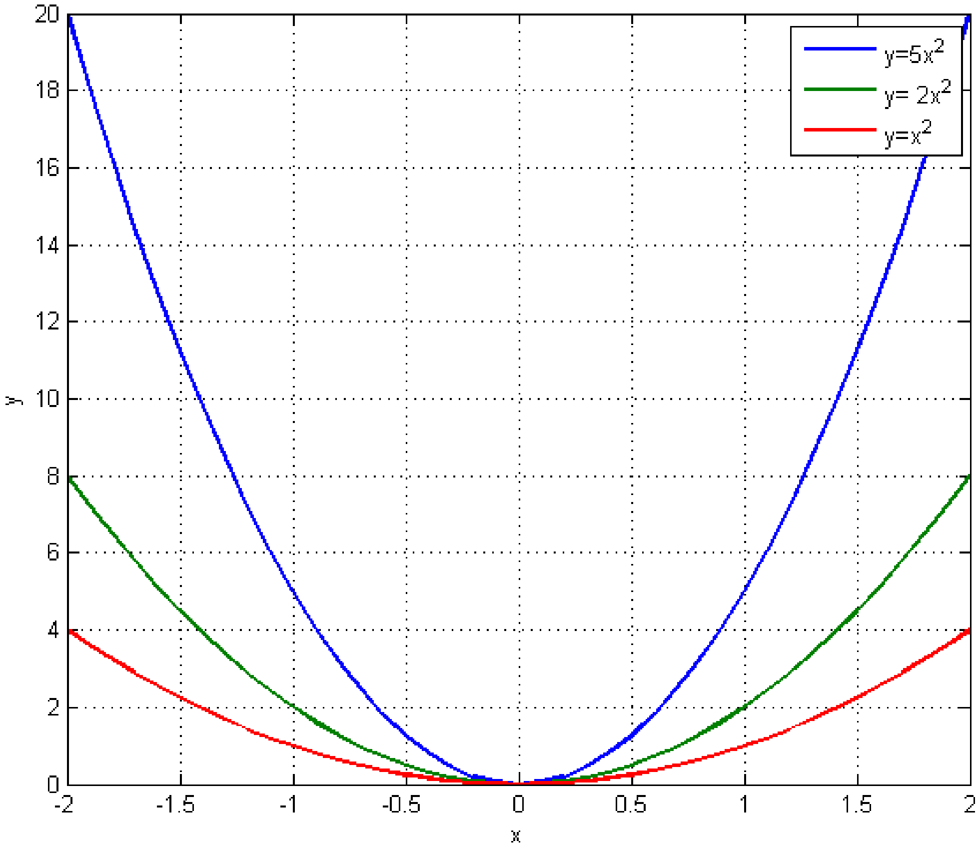


$$u = \frac{A}{0.25T} \cdot t = \frac{4A}{T} \cdot t \qquad \text{(sin)}$$

$$u = \frac{-2A}{0.5T} \cdot (t - 0.25T) + A = \frac{-4A}{T} \cdot t + 2A \quad \text{(pun)}$$

$$u = \frac{A}{0.25T} \cdot (t - 0.75T) - A = \frac{4A}{T} \cdot t - 4A \qquad \text{(vih)}$$

Paraabeli: $y = ax^2 + bx + c$



Kerroin a määrää paraabelin aukeamissuunnan ja muodon:

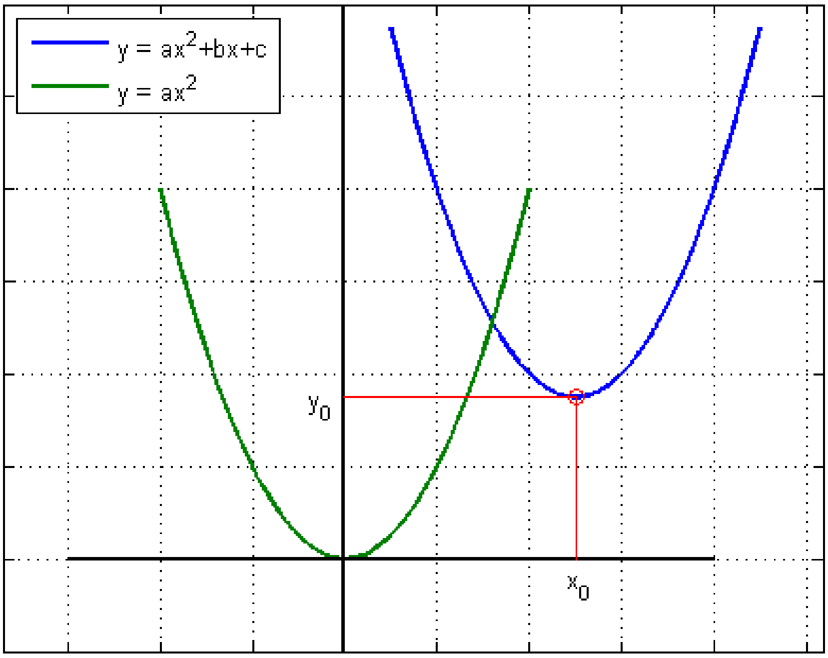
$a > 0 \rightarrow$ aukeaa ylöspäin ($\cup$)

$a < 0 \rightarrow$ aukeaa alaspäin ($\cap$).

mitä suurempi a ($+$ tai $-$ merkkinen) , sitä kapeampi paraabeli

Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ on samanmuotoinen kuin $y = ax^2$, mutta sen huippu on pisteessä

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$



Syy: täydennetään neliöksi binomikaavalla

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

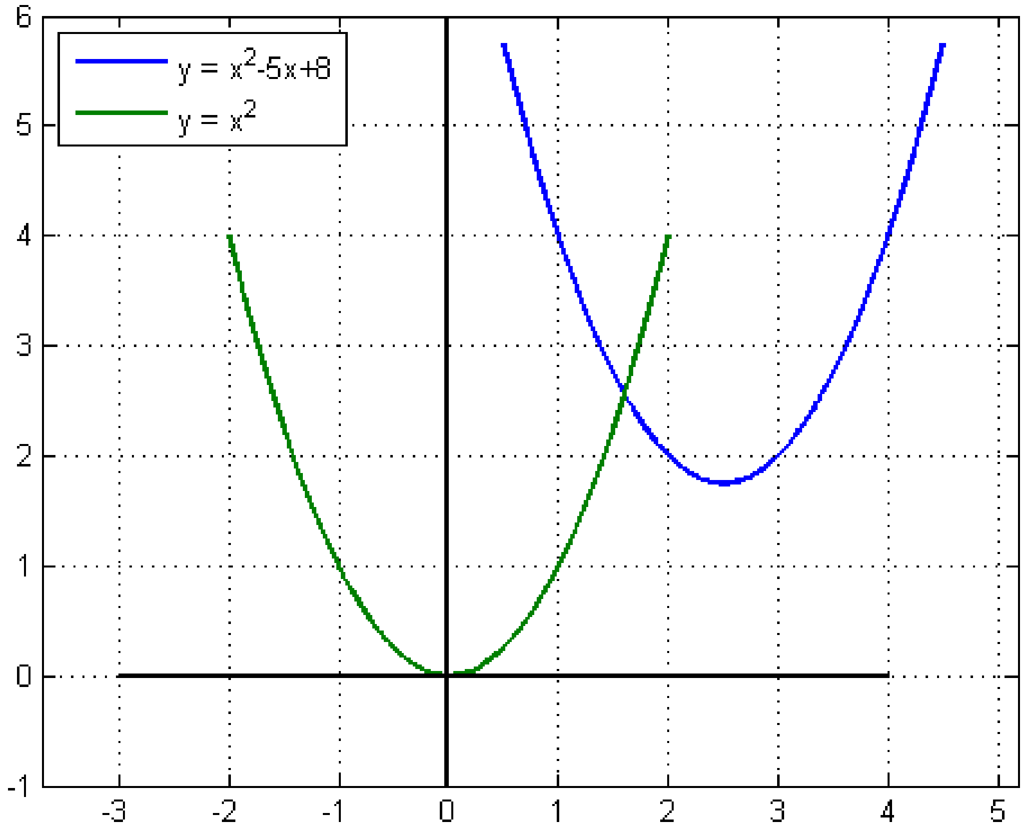
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a(x - x_0)^2 + y_0$$

vihr: $y = x^2$

sin: $y = x^2 - 5x + 8 = (x - 2.5)^2 + 1.75$

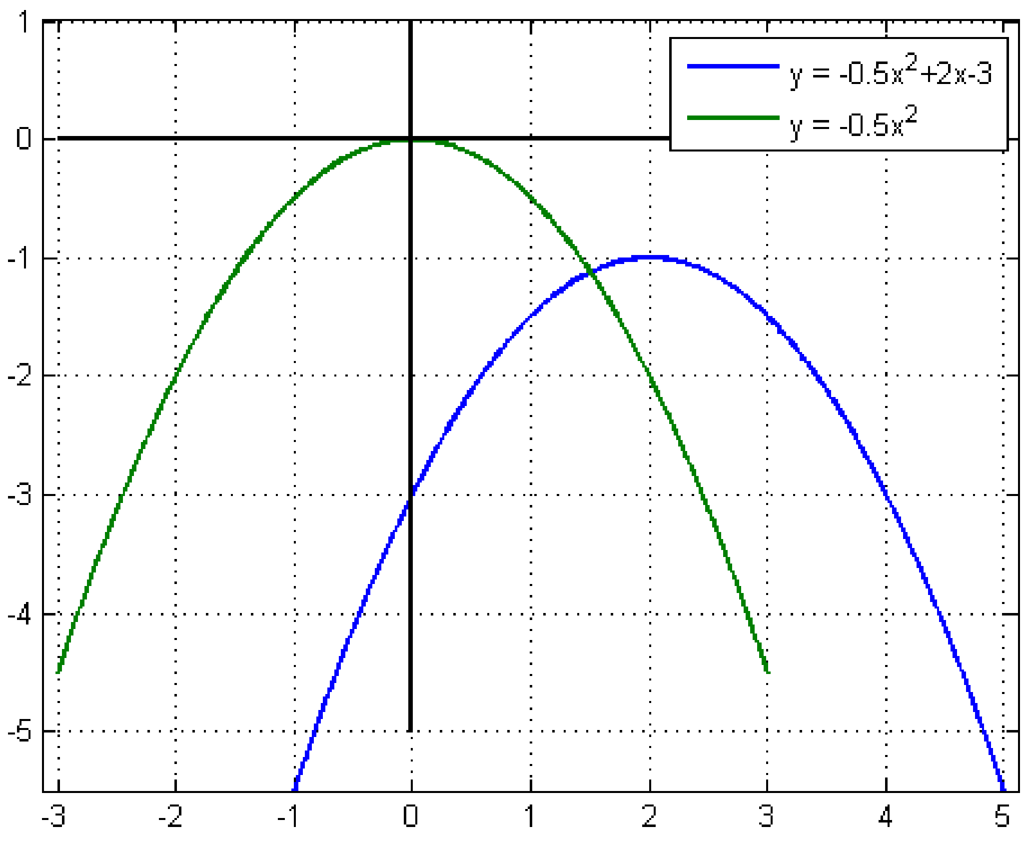
huippu: $x_0 = 2.5, y_0 = 1.75$



vihr: $y = -0.5x^2$

sin: $y = -0.5x^2 + 2x - 3 = -0.5(x-2)^2 - 1$

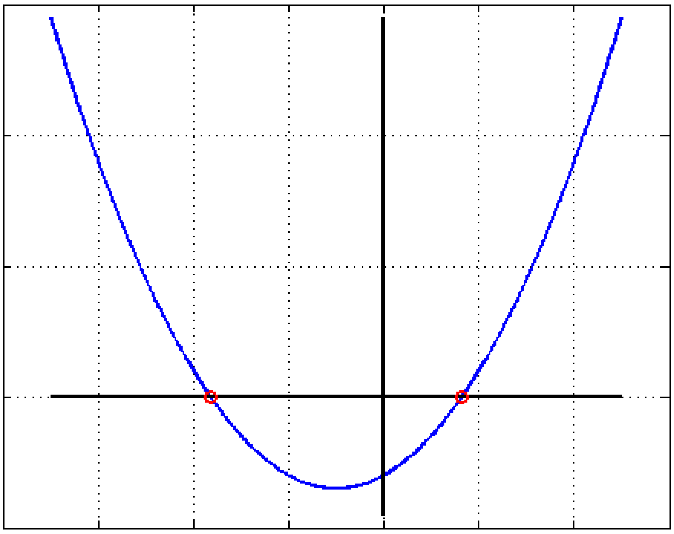
huippu: $x_0 = 2, y_0 = -1$



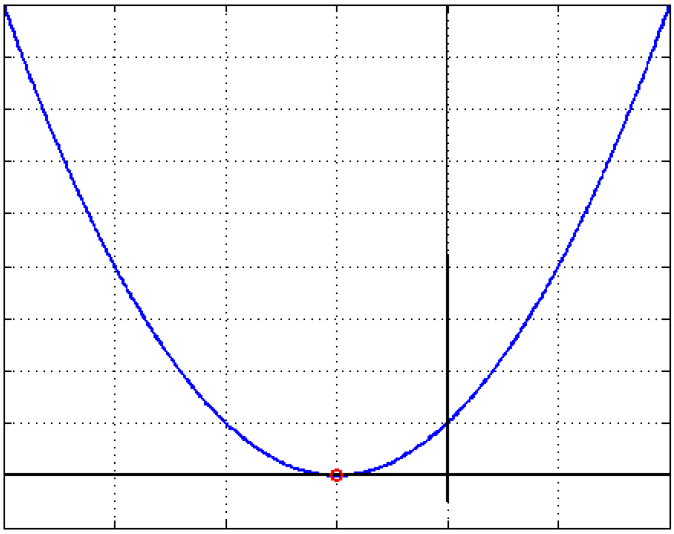
Esim: Toisen asteen yhtälö

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

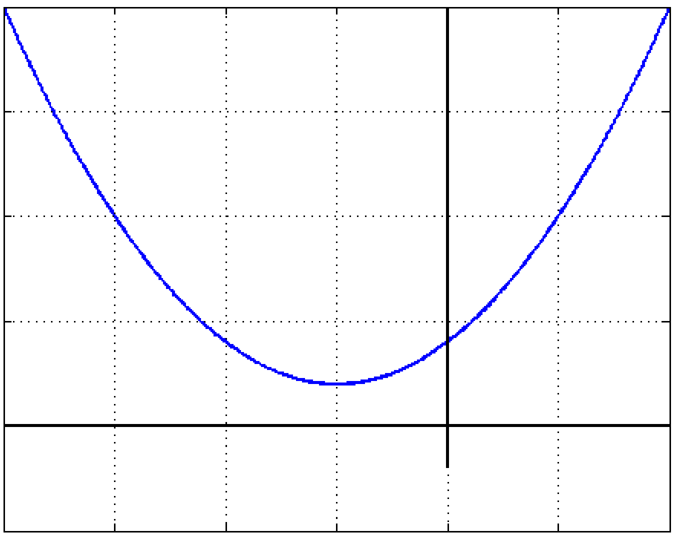
2 ratkaisua ($b^2 - 4ac > 0$):



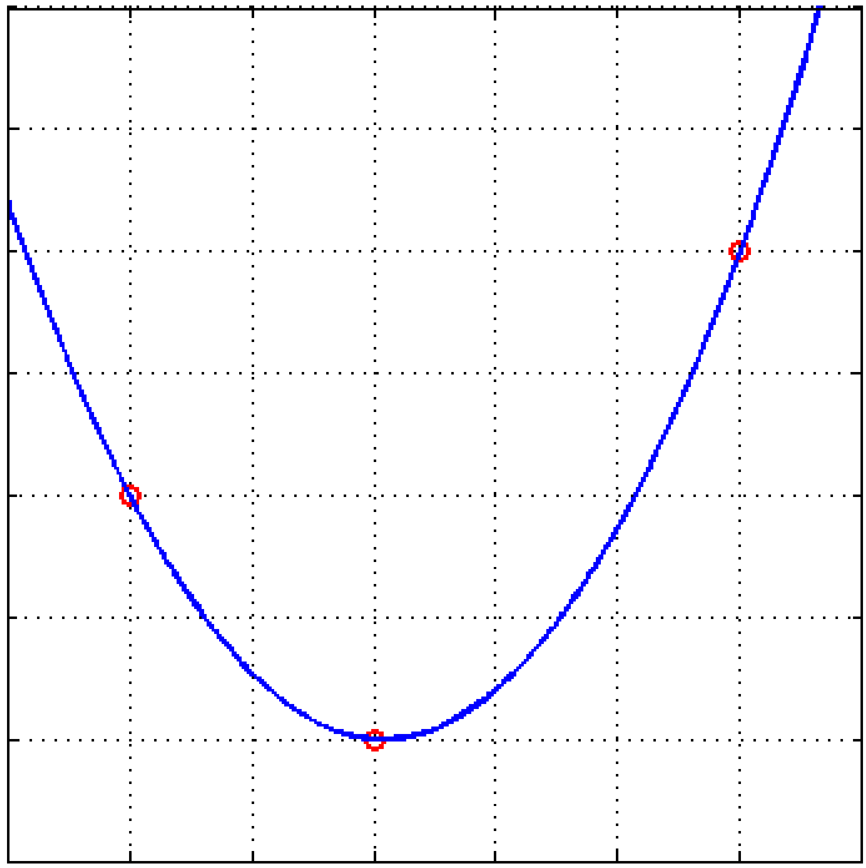
1 ratkaisu ($b^2 - 4ac = 0$):



0 ratkaisua ($b^2 - 4ac < 0$):



Esim. Kolmen pisteen $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ ja $[x_3, y_3]$ kautta kulkeva paraabeli $y = ax^2 + bx + c$



löydetään ratkaisemalla kertoimet a, b ja c yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c \\ y_2 = a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c \\ y_3 = a \cdot x_3^2 + b \cdot x_3 + c \end{cases}$$

Tapa 1: solve

```
solve(y1=a*x1^2+b*x1+c,y2=a*x2^2+b*x2+c,y3=a*x3^2+b*x3+c,a,b,c)
```

$$a = \frac{x1\,(y3 - y2) + x2\,(y1 - y3) + x3\,(y2 - y1)}{(x1 - x2)\,(x1 - x3)\,(x2 - x3)} \text{ and}$$

$$b = \frac{x1^2\,(y2 - y3) + x2^2\,(y3 - y1) + x3^2\,(y1 - y2)}{(x1 - x2)\,(x1 - x3)\,(x2 - x3)} \text{ and}$$

$$c = \frac{x2\left(x1^2\,y3 - x3^2\,y1\right) + x2^2\,(x3\,y1 - x1\,y3) + x1\,x3\,y2\,(x3 - x1)}{(x1 - x2)\,(x1 - x3)\,(x2 - x3)}$$

and $(x1 - x2)\,(x1 - x3)\,(x2 - x3) \neq 0$

Tapa 2: vähennetään yhtälöt 2 ja 3 yhtälöstä 1

$$\begin{cases} \overbrace{y_1 - y_2}^{E} = a\,\overbrace{(x_1^2 - x_2^2)}^{A} + b\,\overbrace{(x_1 - x_2)}^{B} \\ \underbrace{y_1 - y_3}_{F} = a\,\underbrace{(x_1^2 - x_3^2)}_{C} + b\,\underbrace{(x_1 - x_3)}_{D} \end{cases}$$

$$\rightarrow a = \frac{DE - BF}{AD - BC}, \qquad b = \frac{AF - CE}{AD - BC}$$

$$\rightarrow c = y_1 - a \cdot x_1^2 - b \cdot x_1$$

Esim: Paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ ja suoran $y = kx + p$ leikkauspisteet

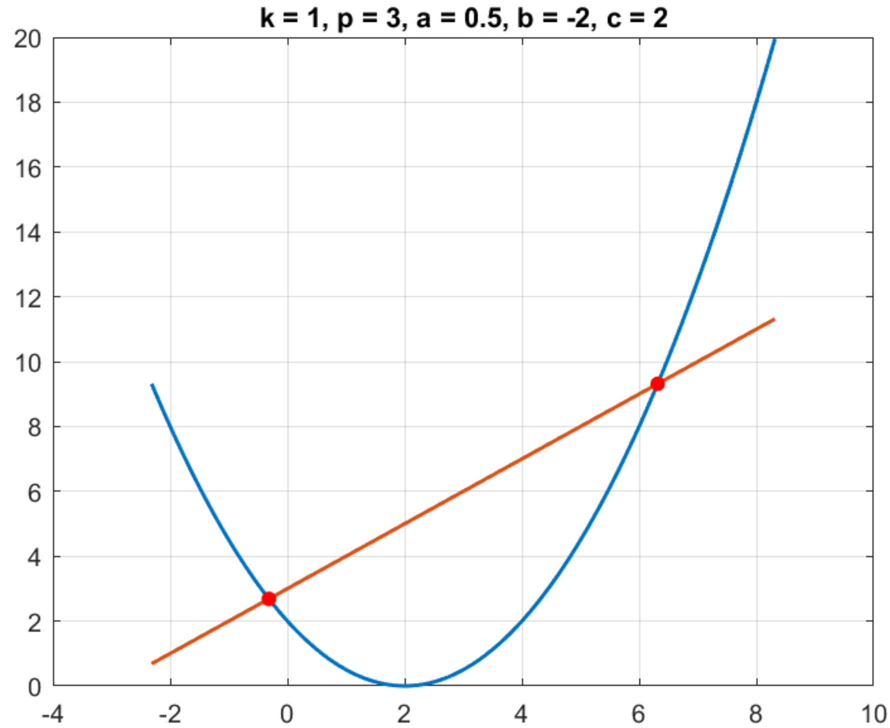
$$ax^2 + bx + c = kx + p$$

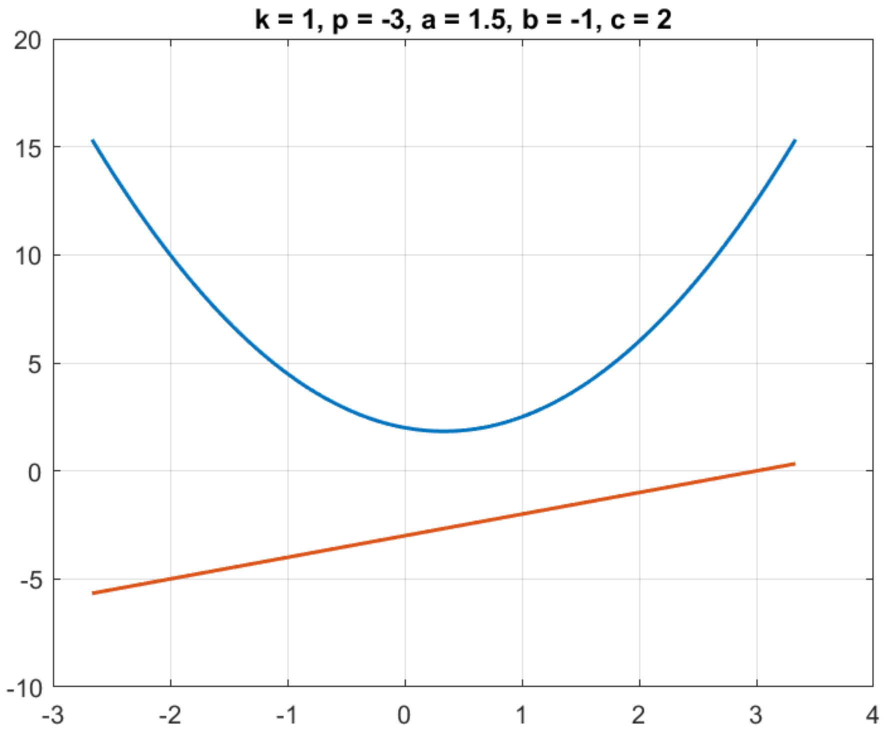
$$ax^2 + (b-k)x + c - p = 0$$

$$x = \frac{-(b-k) \pm \sqrt{(b-k)^2 - 4a(c-p)}}{2a}$$

Paraabeli ja suora leikkaavat, jos

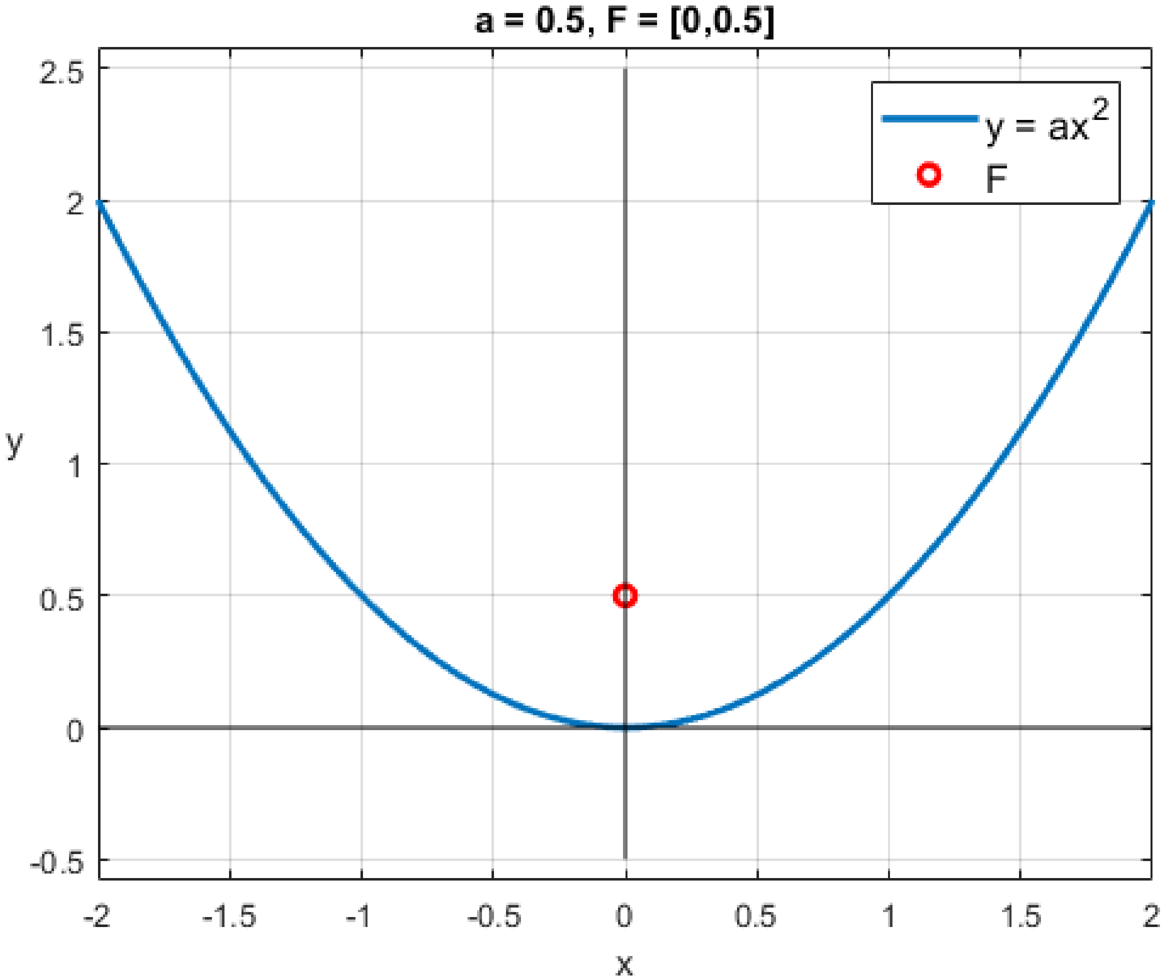
$$(b-k)^2 - 4a(c-p) \geq 0$$


k = 1, p = 3, a = 0.5, b = -2, c = 2
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-4
-2
0
2
4
6
8
10


k = 1, p = -3, a = 1.5, b = -1, c = 2
20
15
10
5
0
-5
-10
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

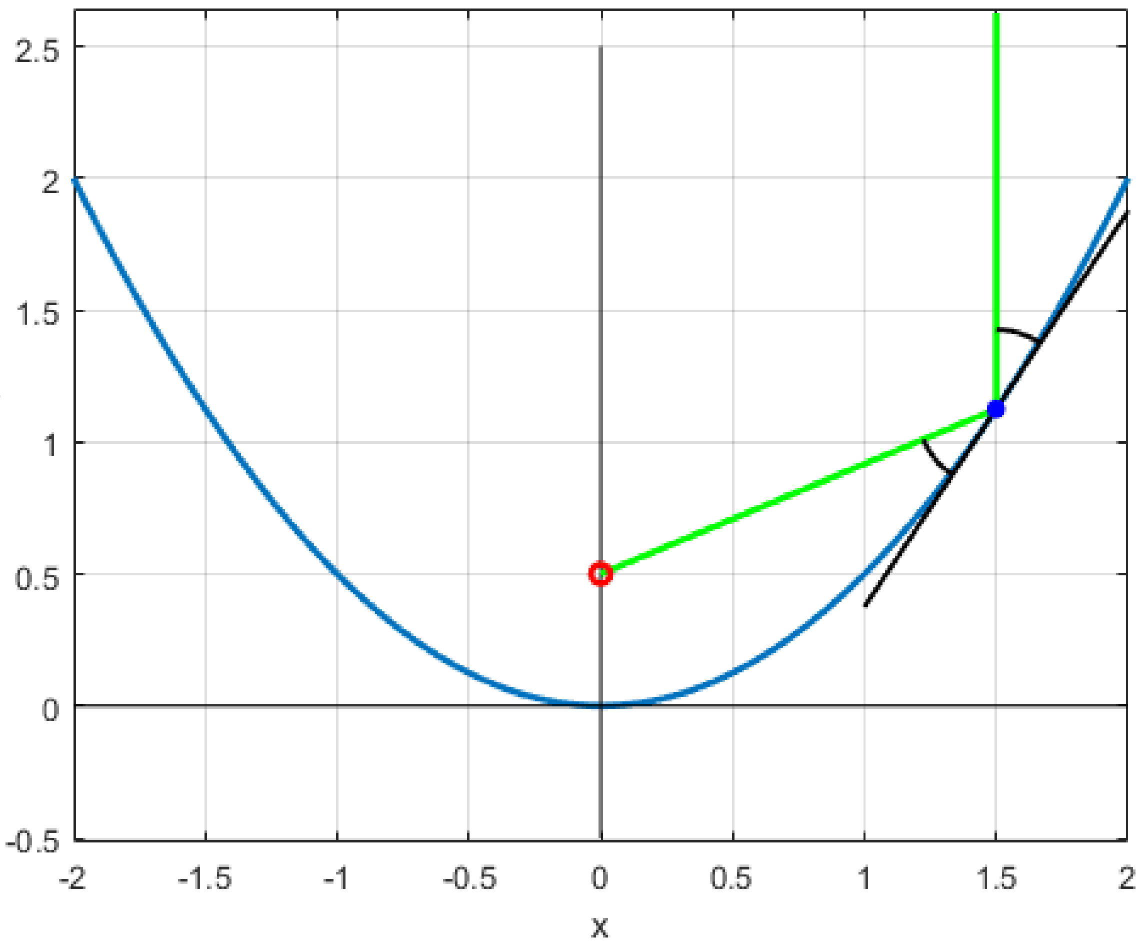
Paraabelin $y = ax^2$ polttopiste (focus)

$$F:\ Fx = 0,\ Fy = \frac{1}{4a}$$

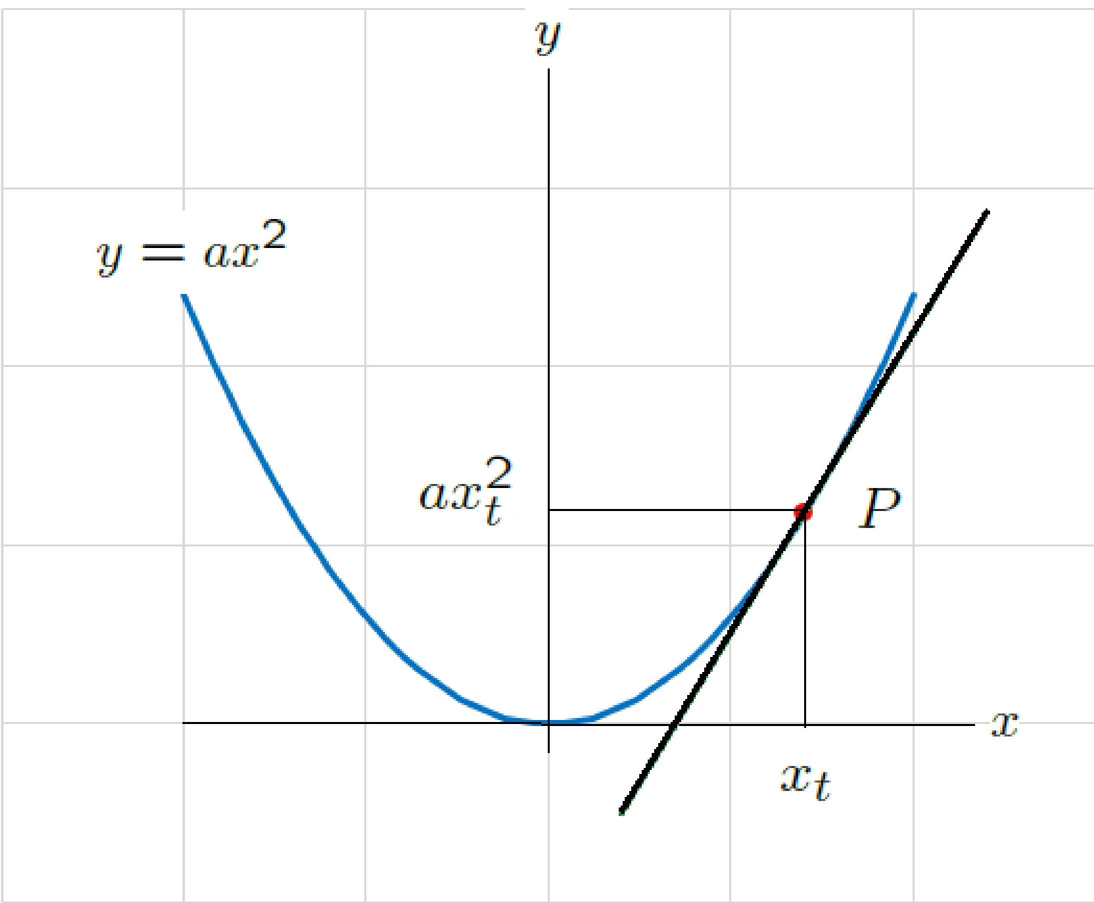


Paraabelin heijastusominaisuus (parabola reflection property):

pystysuuntaiset säteet heijastuvat polttopisteeseen / polttopisteestä lähtevät säteet heijastuvat pystysuuntaisiksi



Huom: Paraabelin $y = ax^2$ pisteen $P = [x_t, ax_t^2]$ kautta kulkevan tangentin (eli paraabelin suuntaisen suoran) kulmakerroin $k = 2ax_t$.



Syy: etsitään k niin, että P:n kautta kulkevalla suoralla $y = k(x - x_t) + ax_t^2$ ja paraabelilla $y = ax^2$ on vain yksi leikkauspiste:

$$k(x - x_t) + ax_t^2 = ax^2$$

$$ax^2 - kx + (kx_t - ax_t^2) = 0$$

Toisen asteen yhtälö: yksi ratkaisu, jos

$$(-k)^2 - 4a(kx_t - ax_t^2) = 0$$

$$k^2 - 4kax_t + 4a^2x_t^2 = 0$$

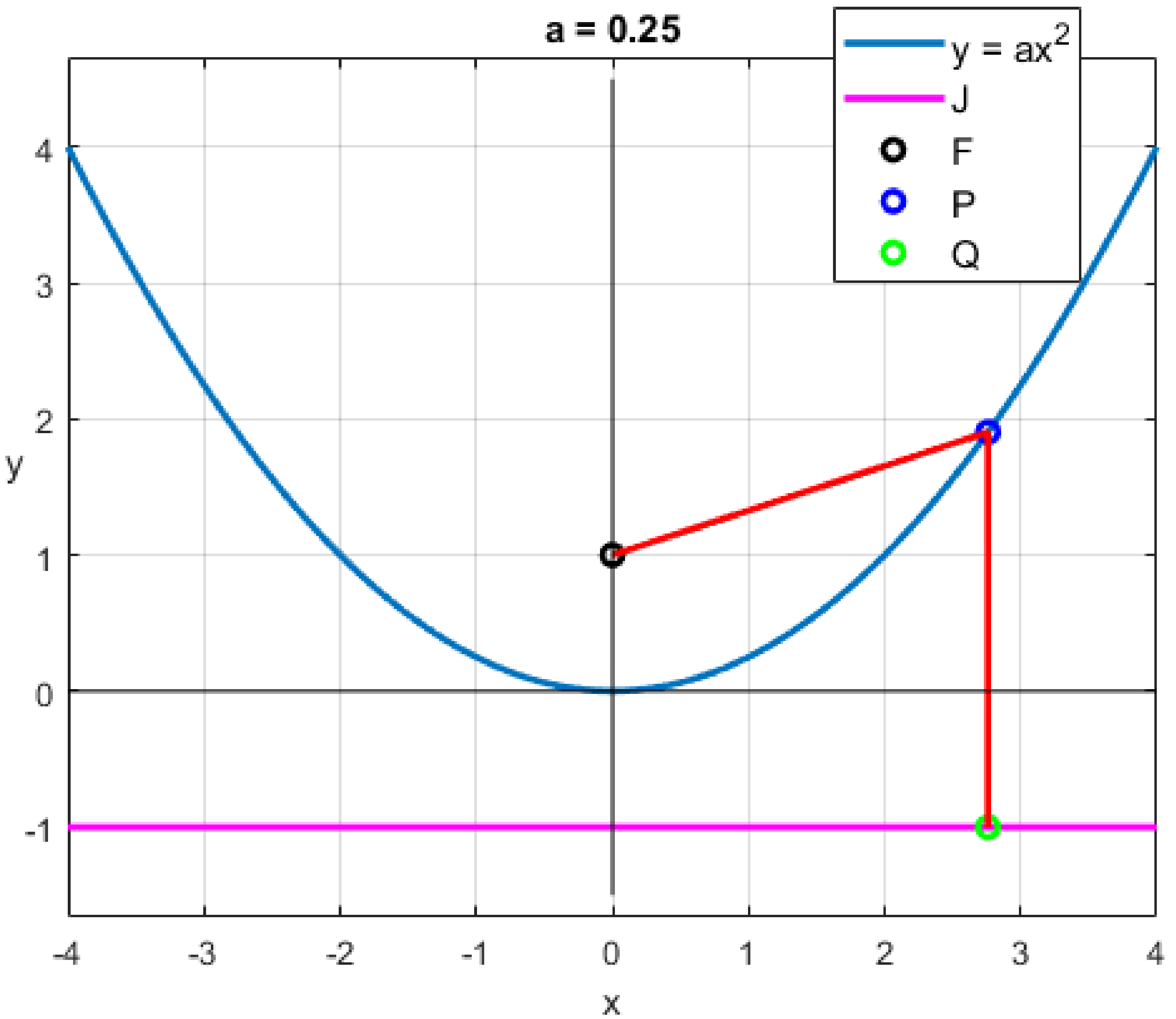
$$(k - 2ax_t)^2 = 0$$

$$k = 2ax_t$$

Huom: Geometrisesti paraabelilla $y = ax^2$ ovat ne pisteet jotka ovat yhtä kaukana polttopisteestä (focus) $F: x = 0, y = \dfrac{1}{4a}$

ja (johto)suorasta (directrix) $J: y = -\dfrac{1}{4a}$

eli allaolevassa kuvassa $PF = PQ$



Syy: $P = [x, y]$, $F = [0, \dfrac{1}{4a}]$, $Q = [x, -\dfrac{1}{4a}]$

$PF = \sqrt{x^2 + \left(y - \dfrac{1}{4a}\right)^2}$ ja $PQ = y + \frac{1}{4a}$

eli $PF = PQ$

$$\leftrightarrow \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = y + \frac{1}{4a}$$

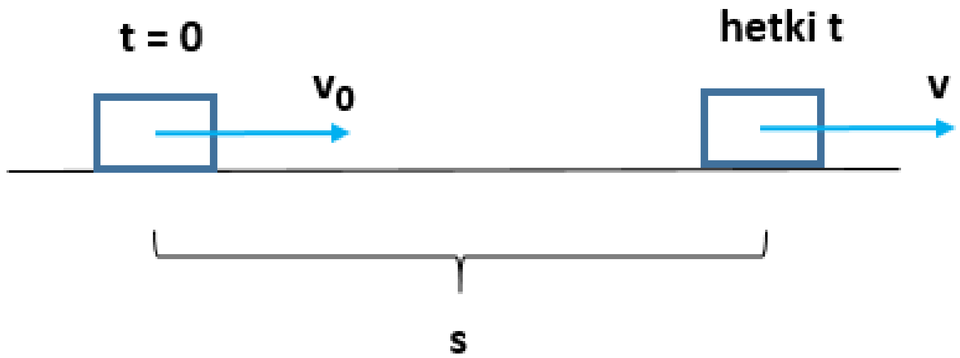
$$\leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2$$

$$\leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{2a}y + \left(\frac{1}{4a}\right)^2 = y^2 + \frac{1}{2a}y + \left(\frac{1}{4a}\right)^2$$

$$\leftrightarrow x^2 = \frac{1}{a}y$$

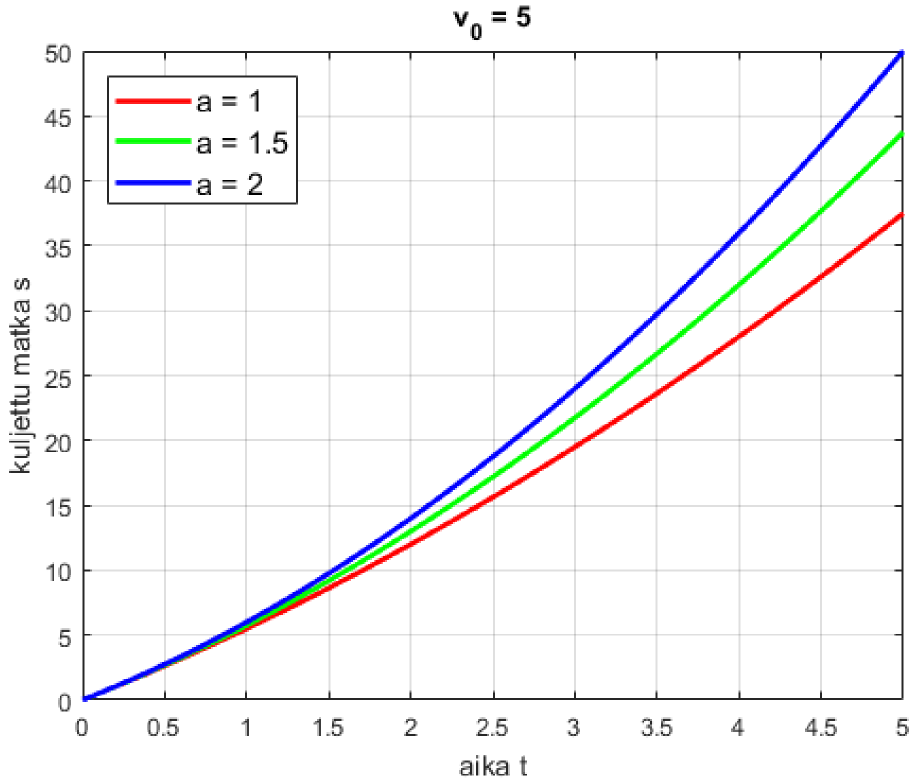
$$\leftrightarrow y = ax^2$$

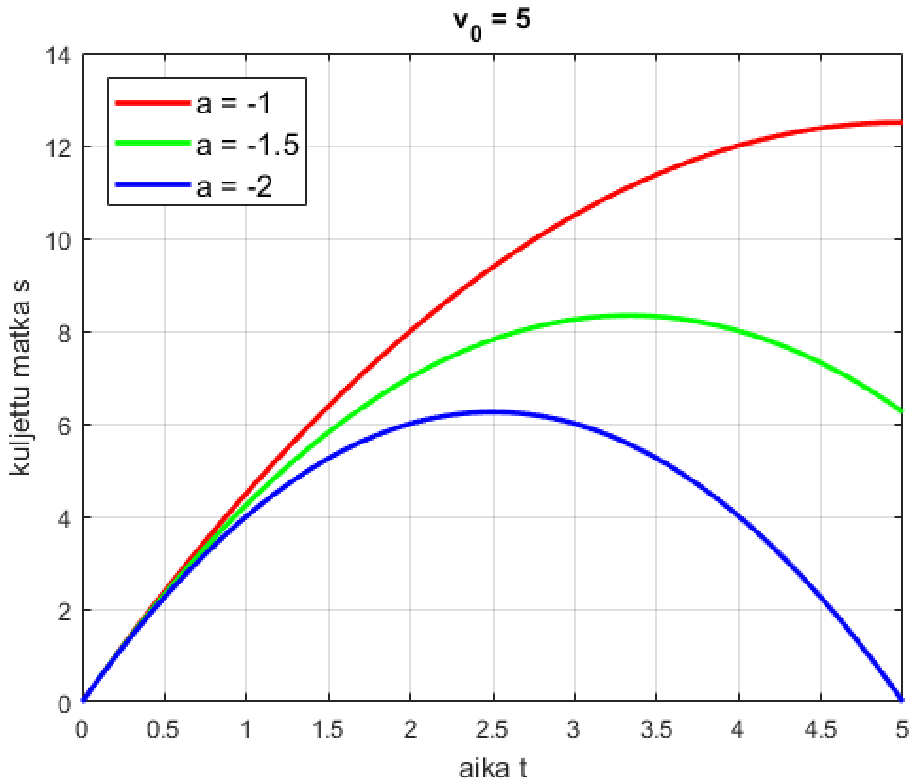
Esim: Tasaisesti kiihtyvä liike, kiihtyvyys a, alkunopeus v_0



Kuljettu matka ($=$ etäisyys lähtöpisteestä) hetkellä t

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$


$v_0 = 5$
a = 1
a = 1.5
a = 2
kuljettu matka s
aika t
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50


$v_0 = 5$
a = -1
a = -1.5
a = -2
kuljettu matka s
aika t
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
6
8
10
12
14

Esim. Kuljettava matka L, matka-aika T

$s = v_0 T + \frac{1}{2} a T^2 = L \leftrightarrow \frac{1}{2} a T^2 + v_0 T - L = 0$

$$\leftrightarrow T = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2aL}}{a}$$

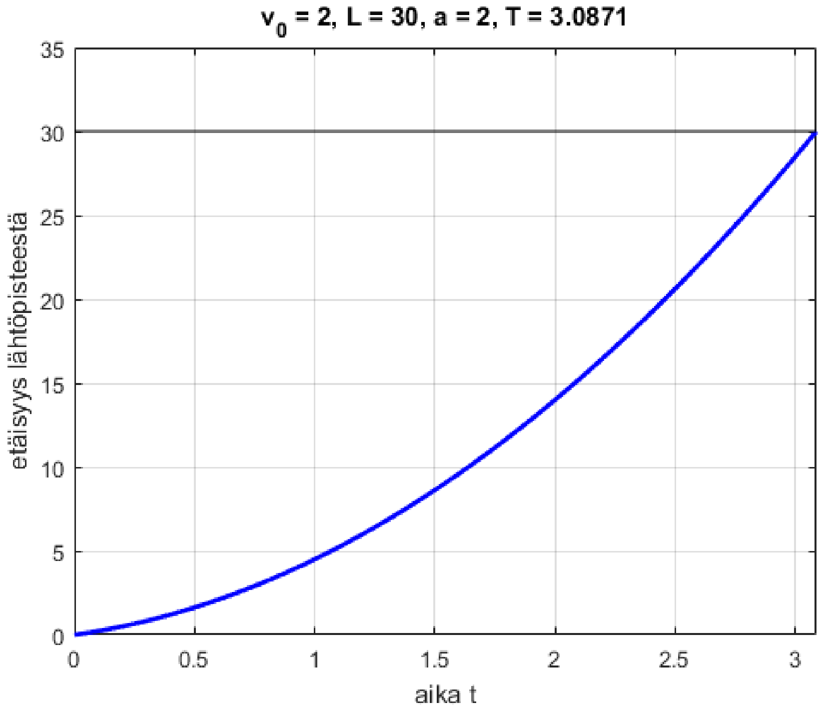
jos $a > 0$, niin $T = \dfrac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aL}}{a}$

jos $a < 0$, niin pitää olla $v_0^2 + 2aL \geq 0$ eli

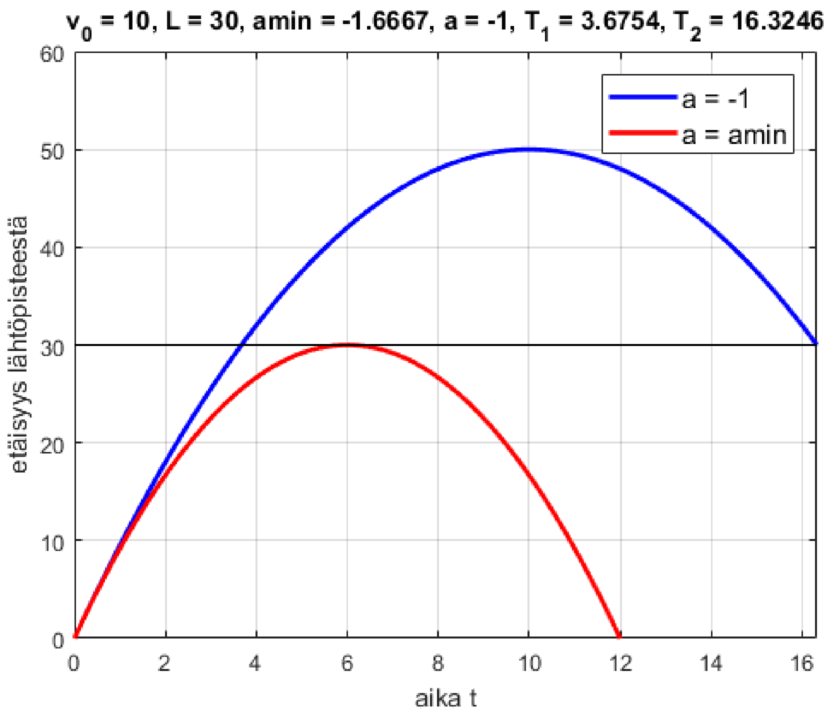
$a \geq -2L/v_0^2 = a\text{min}$

Tällöin on kaksi ratkaisua

$$T_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2aL}}{a}$$

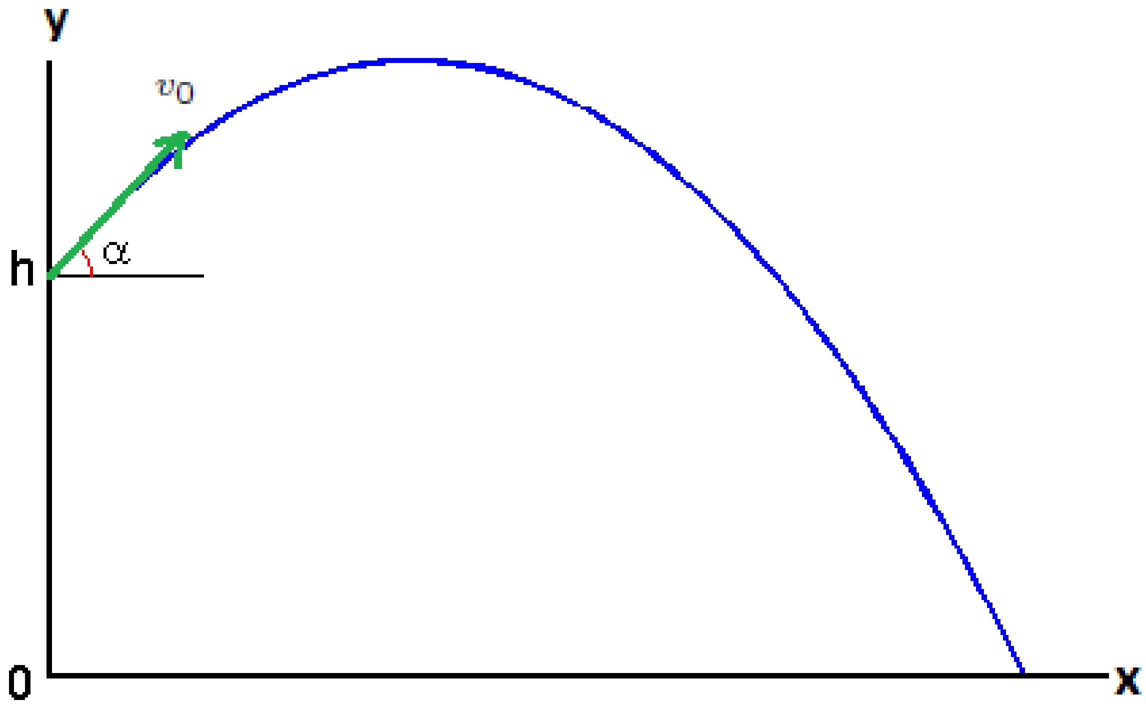


v0 = 2, L = 30, a = 2, T = 3.0871
etäisyys lähtöpisteestä
aika t



v0 = 10, L = 30, amin = -1.6667, a = -1, T1 = 3.6754, T2 = 16.3246
a = -1
a = amin
etäisyys lähtöpisteestä
aika t

Esim. Heittoliike, lähtökorkeus h, -nopeus v_0 ja -kulma α (eikä ilmanvastusta huomioida)



Lentorata on paraabeli

$$y = ax^2 + bx + c$$

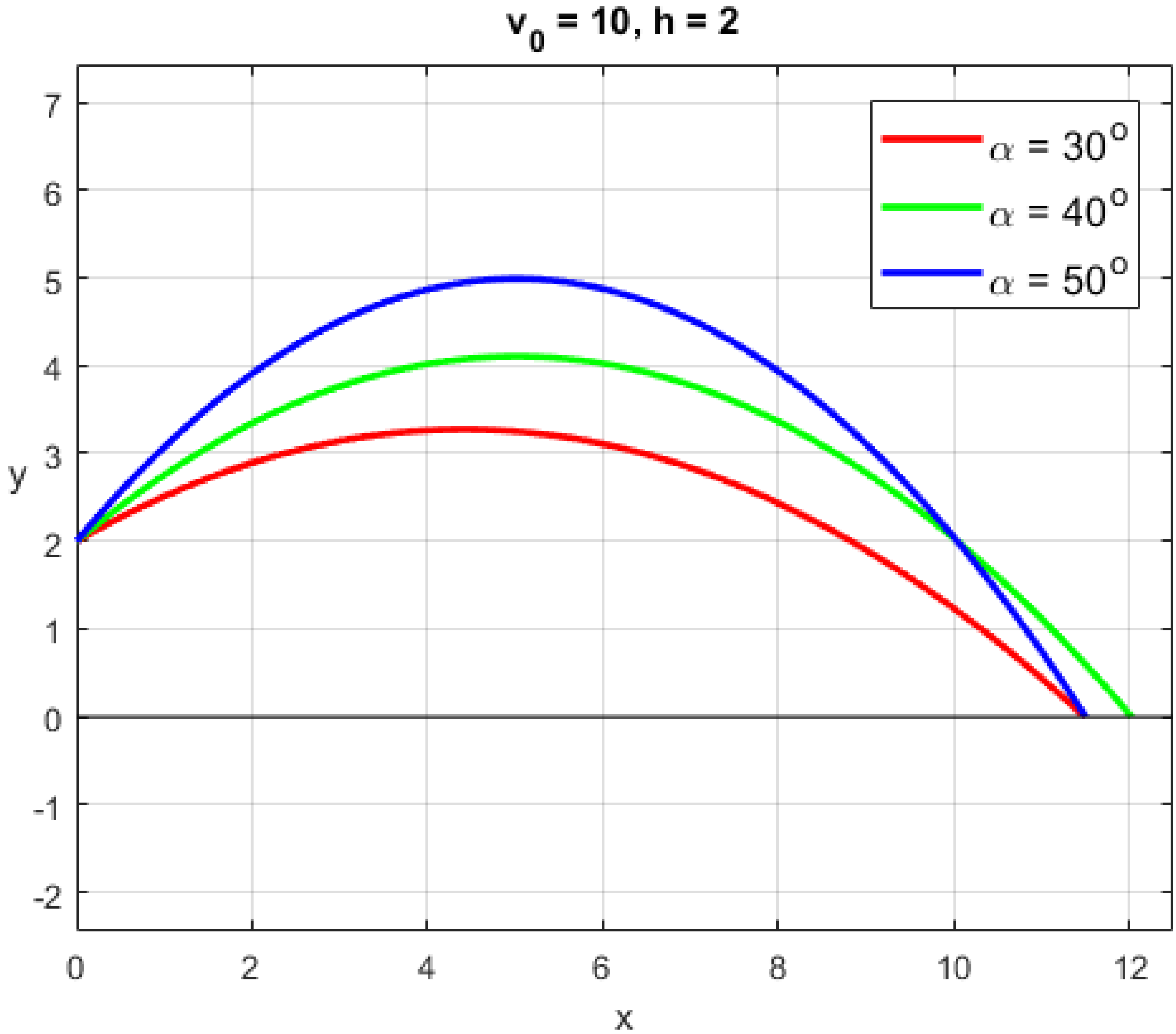
x on vaakasuora etäisyys lähtöpaikasta

y on korkeus maan pinnasta

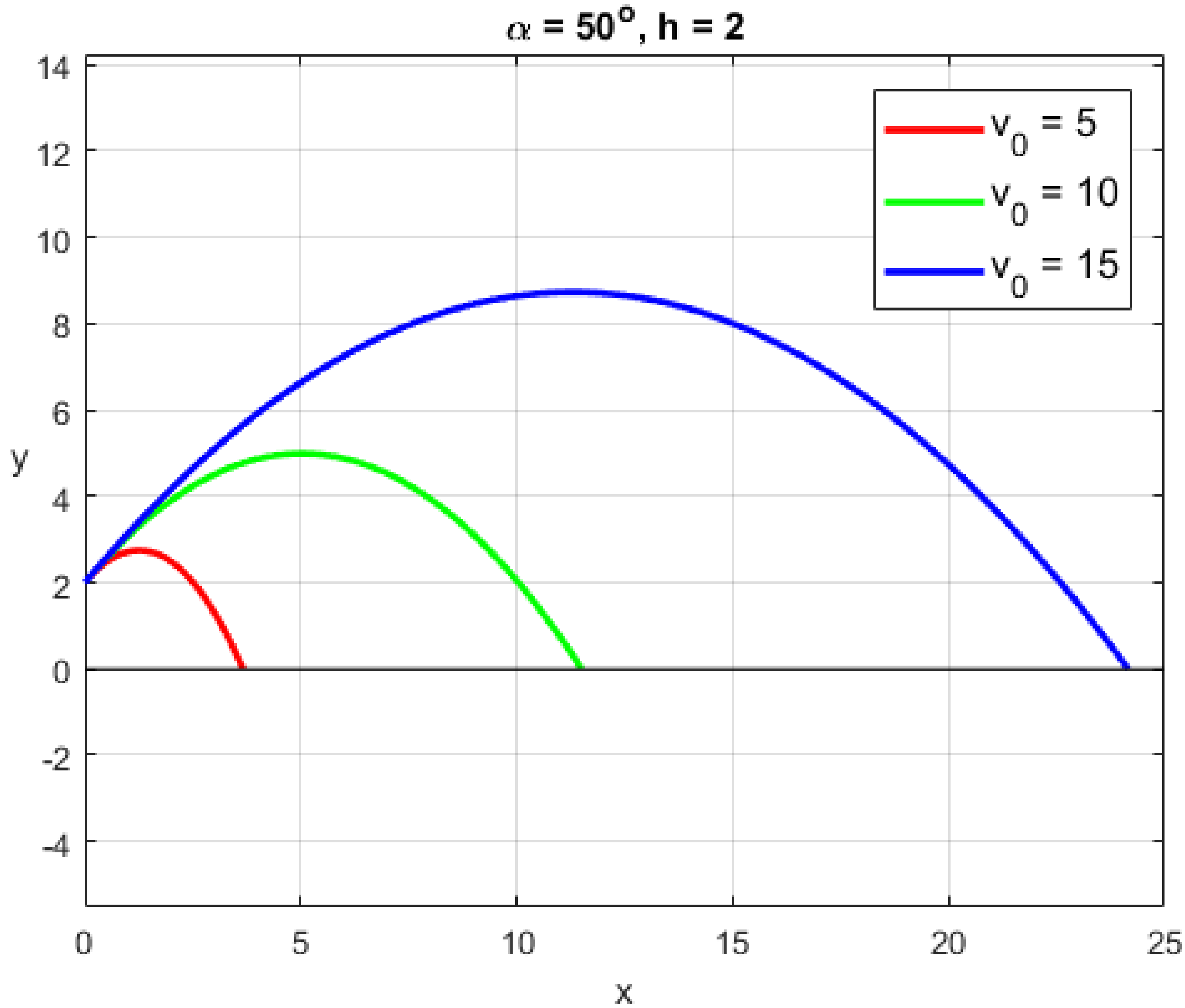
$$a = -\frac{g}{2(v_0 \cos(\alpha))^2}, \quad g = 9.81$$

$$b = \tan(\alpha)$$

$$c = h$$

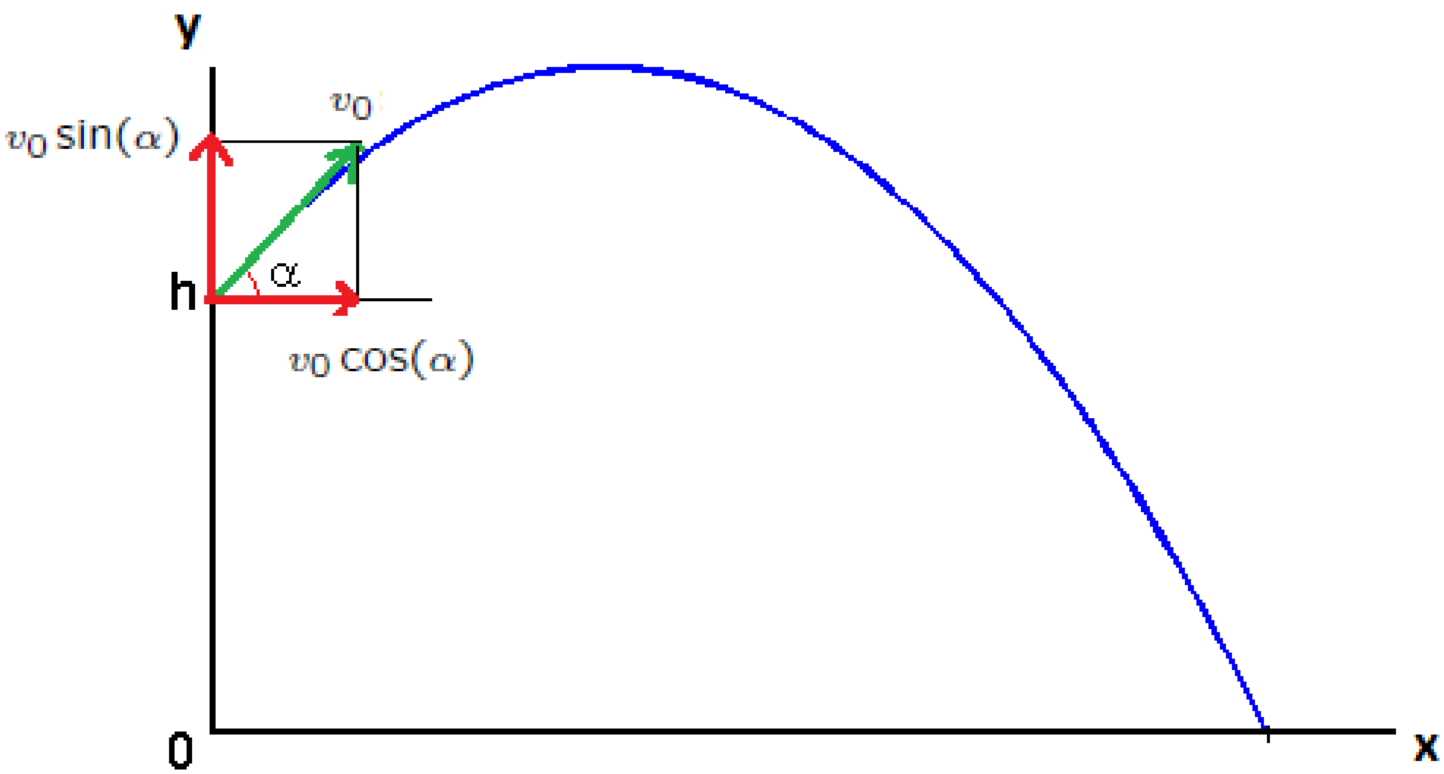


v_0 = 10, h = 2
α = 30°
α = 40°
α = 50°
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
y
0
2
4
6
8
10
12
x



α = 50°, h = 2
v_0 = 5
v_0 = 10
v_0 = 15
y
x
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
0
5
10
15
20
25

Syy: alkunopeus x-suuntaan on $v_0 \cos(\alpha)$ ja y-suuntaan $v_0 \sin(\alpha)$, kiihtyvyys x-suuntaan on 0 ja y-suuntaan $-g$.



Hetkellä t

$$x = v_0 \cos(\alpha)\, t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

$$y = h + v_0 \sin(\alpha)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

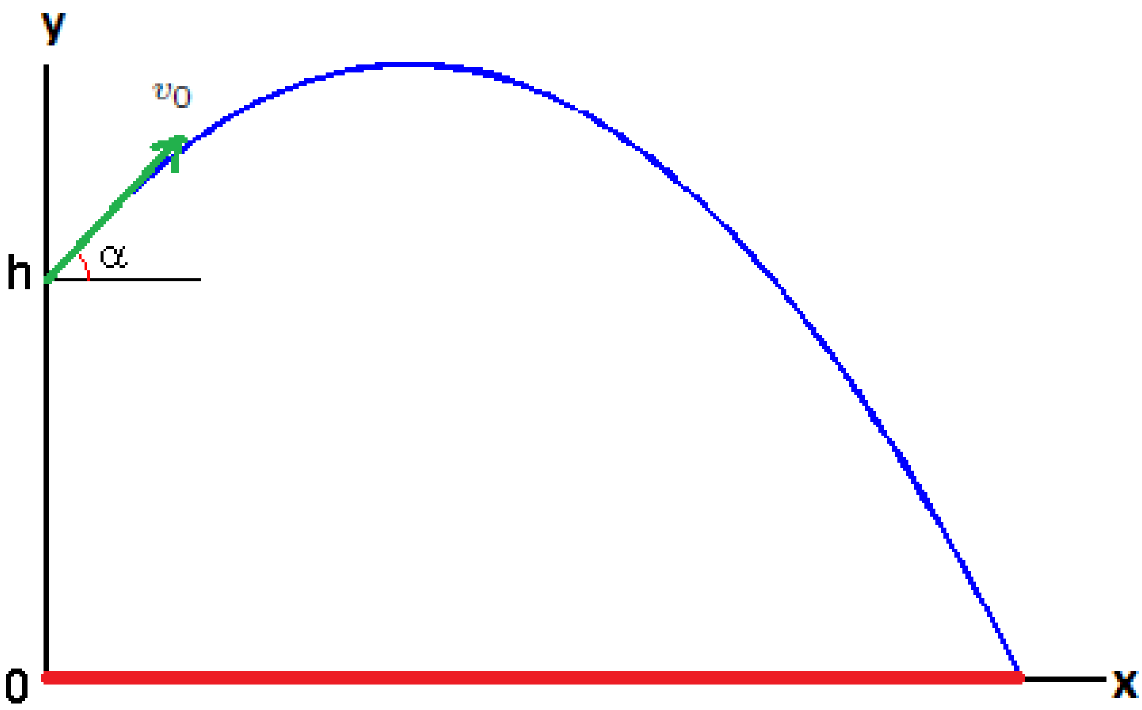
$$= h + v_0 \sin(\alpha)\, \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2$$

$$= h + \underbrace{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}_{\tan(\alpha)}\, x - \frac{g}{2(v_0 \cos(\alpha))^2}\, x^2$$

Vaakasuora lentomatka

$$y = ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\leftrightarrow x = \frac{v_0^2}{g}\cos(\alpha)\left(\sin(\alpha) + \sqrt{\sin(\alpha)^2 + \frac{2gh}{v_0^2}}\right)$$



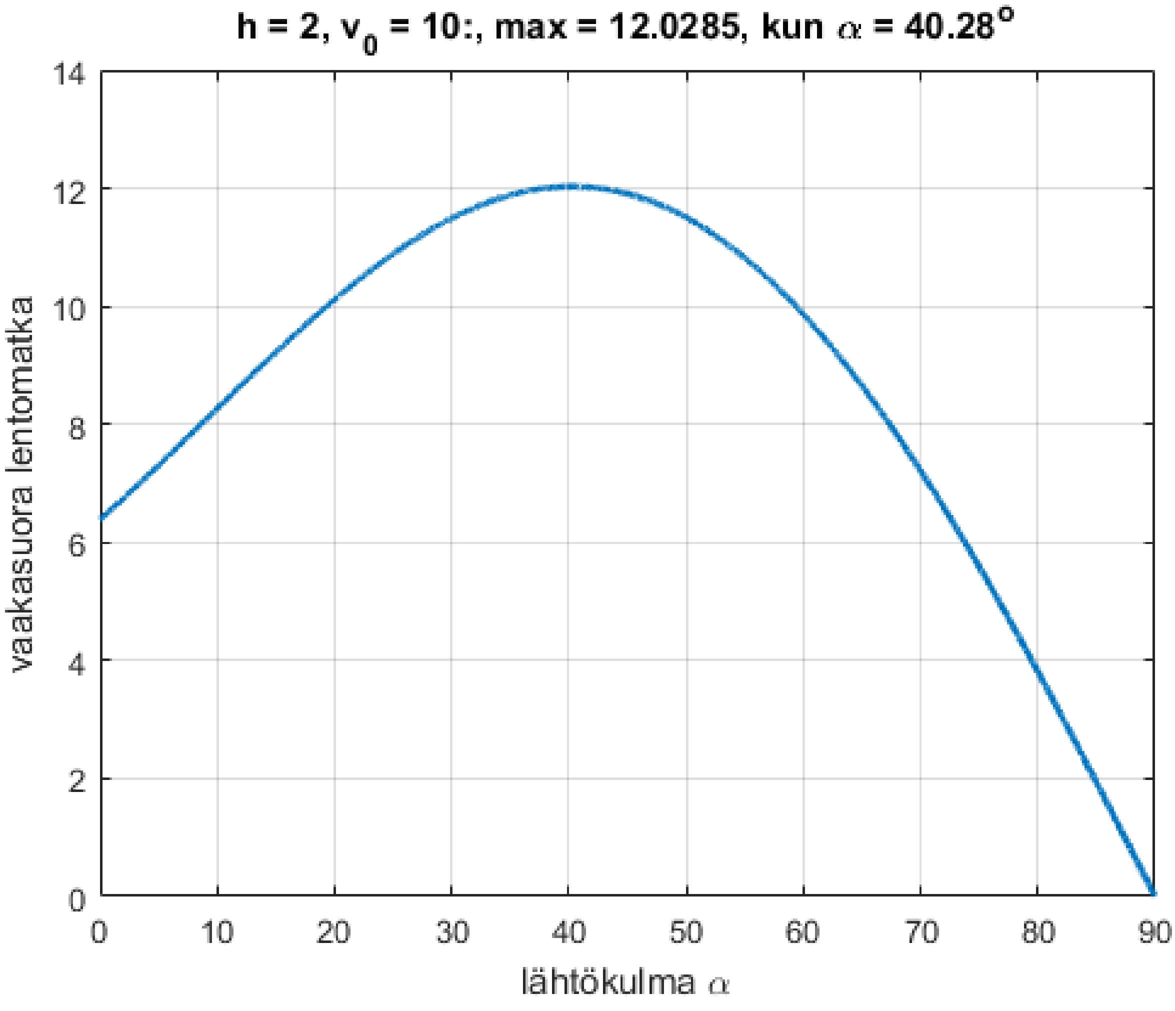
Suurimmillaan, kun lähtökulma

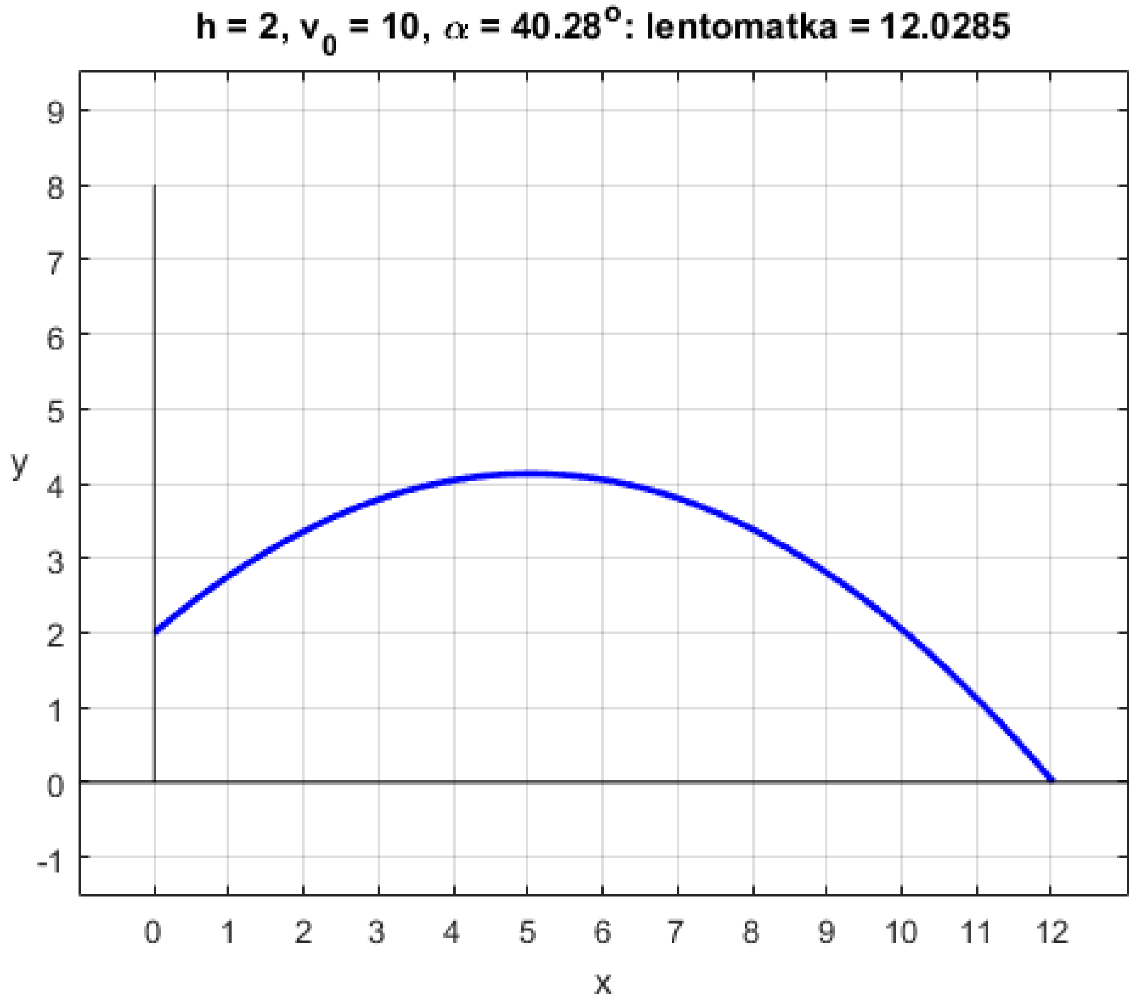
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right)$$

Suurin arvo on

$$\frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

(kts. heittoliike.pdf)

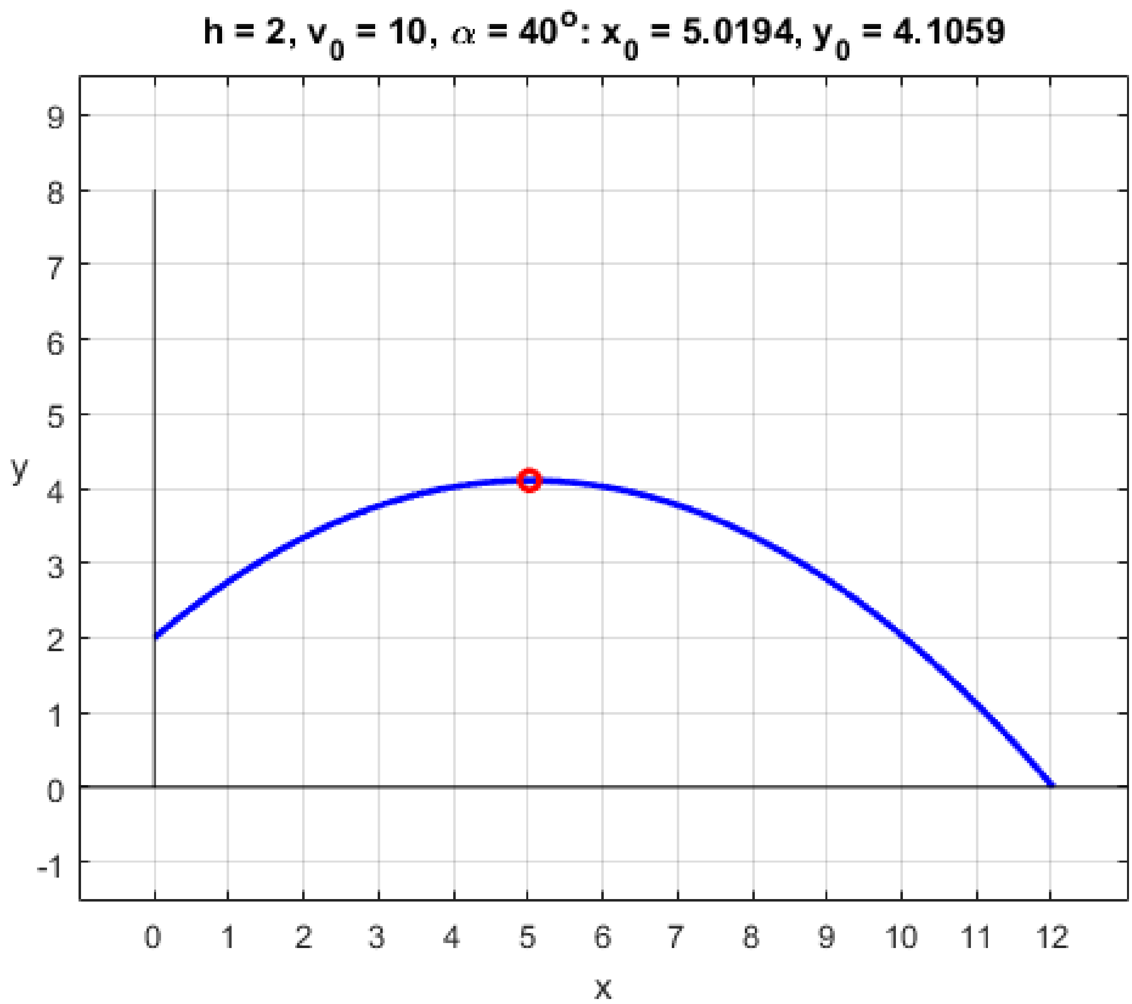

h = 2, v0 = 10:, max = 12.0285, kun α = 40.28°
vaakasuora lentomatka
lähtökulma α
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
2
4
6
8
10
12
14


h = 2, v0 = 10, α = 40.28°: lentomatka = 12.0285
y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
x

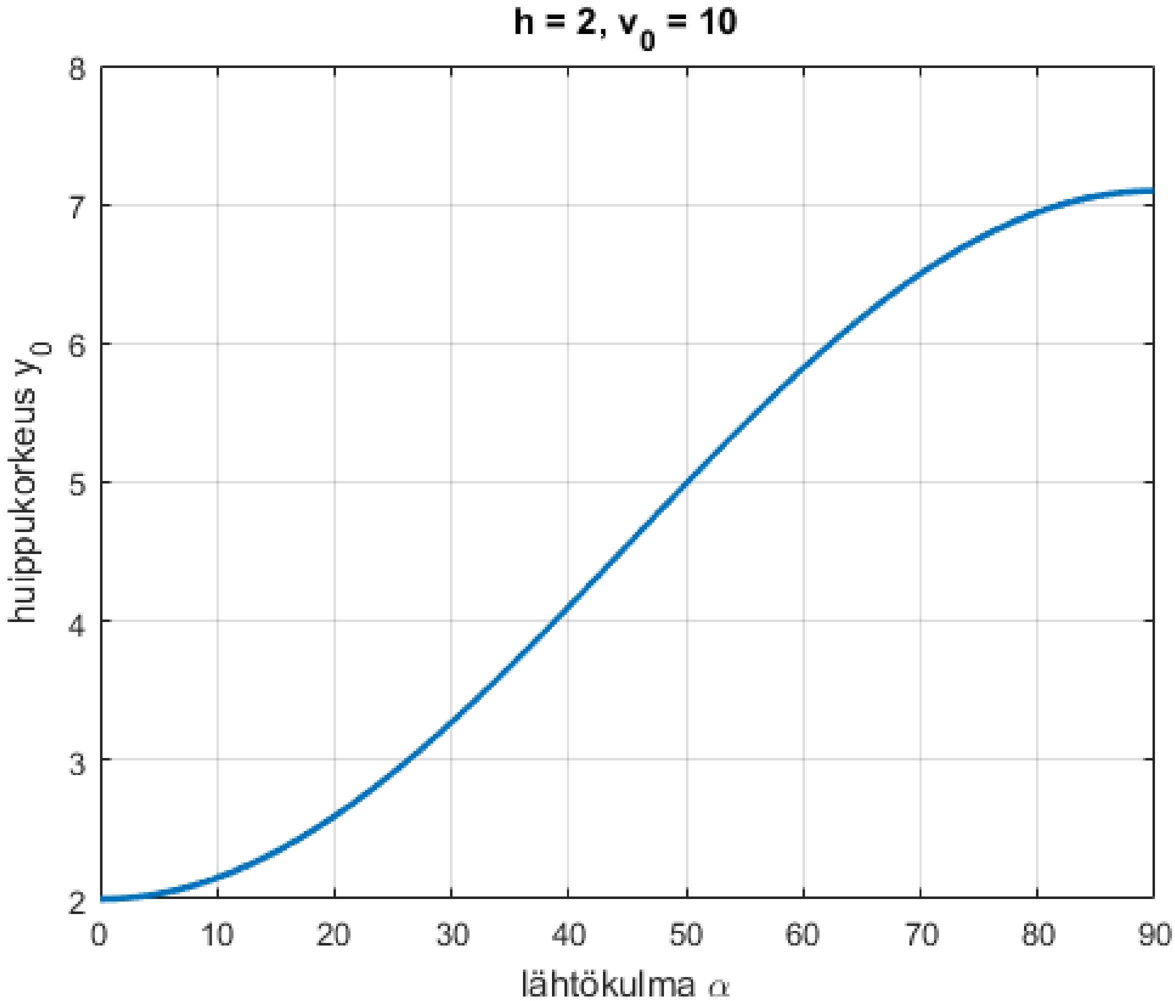
Lentoradan $y = ax^2 + bx + c$ huippu eli ylin piste (kts. heittoliike.pdf):

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{v_0^2}{2g}\sin(2\alpha)$$

$$y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{v_0^2}{2g}\sin(\alpha)^2 + h$$



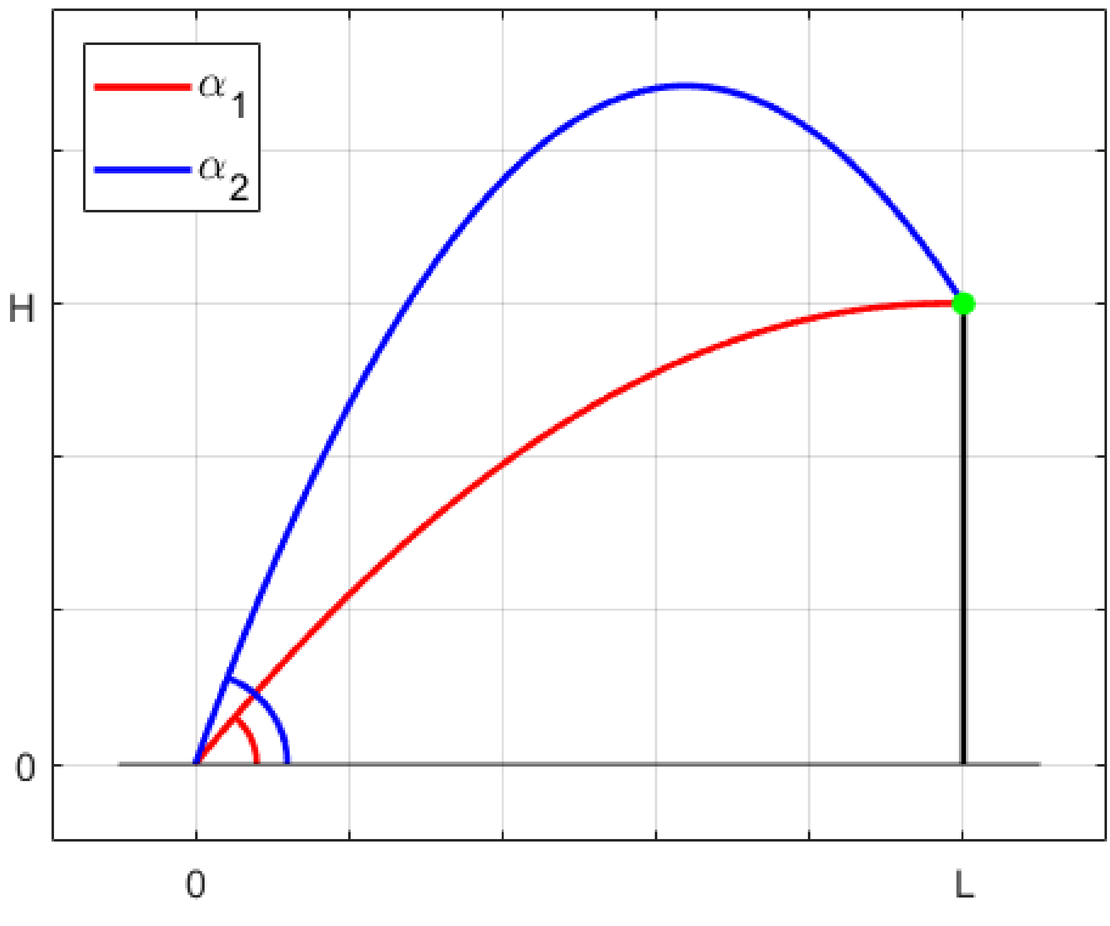
Huippukorkeuden y_0 kuvaaja, kun $\alpha = 0 \ldots 90^\circ$:



Suurimmillaan $y_0 = \dfrac{v_0^2}{2g} + h$, kun $\alpha = 90^\circ$ eli $\sin(\alpha) = 1$

Esim: Lähtönopeus v_0 ja -korkeus $h = 0$. Määrää lähtökulma α niin, että kappale osuu pisteessä $[L, H]$ olevaan maaliin, eli

$$H = aL^2 + bL$$



Lähtönopeuden v_0 pitää olla tarpeeksi suuri:

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}-H}} = \text{min } v_0$$

Tällöin saadaan kaksi lähtökulmaa:

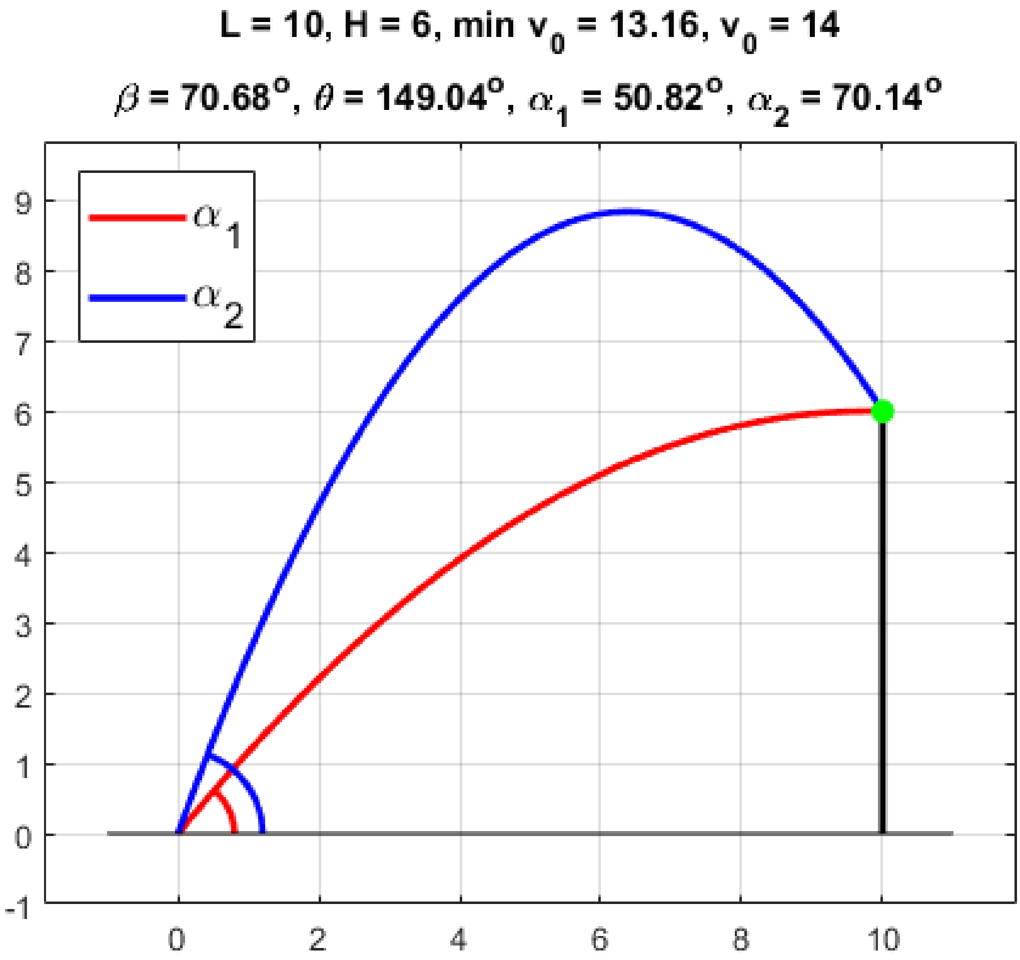
$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(180^\circ{+}\beta{-}\theta) \quad \text{ja} \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(360^\circ{-}\beta{-}\theta)$$

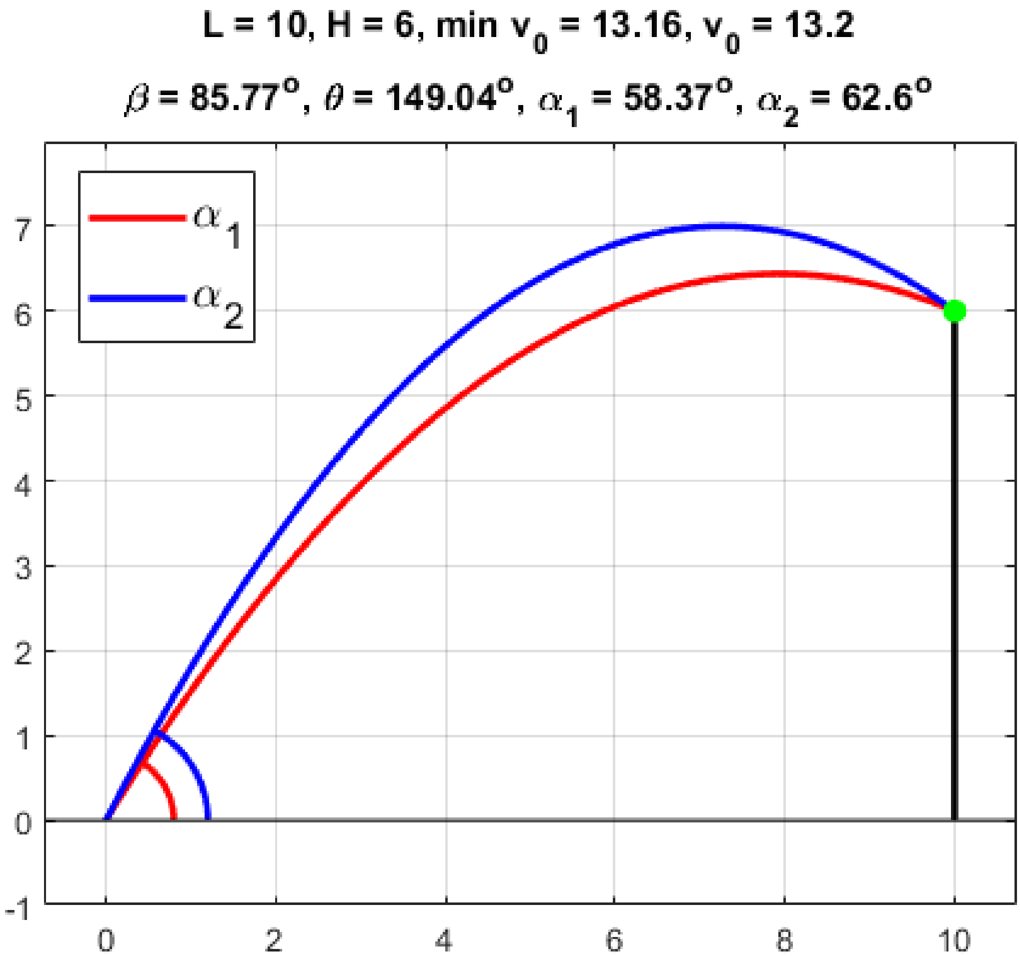
missä

$$\beta = \sin^{-1}(k/C), \quad k = \frac{gL^2}{v_0^2+H},\ C = \sqrt{L^2+H^2}$$

$$\theta = \text{atan2d}(H, -L)$$

(kts. heittoliike.pdf)

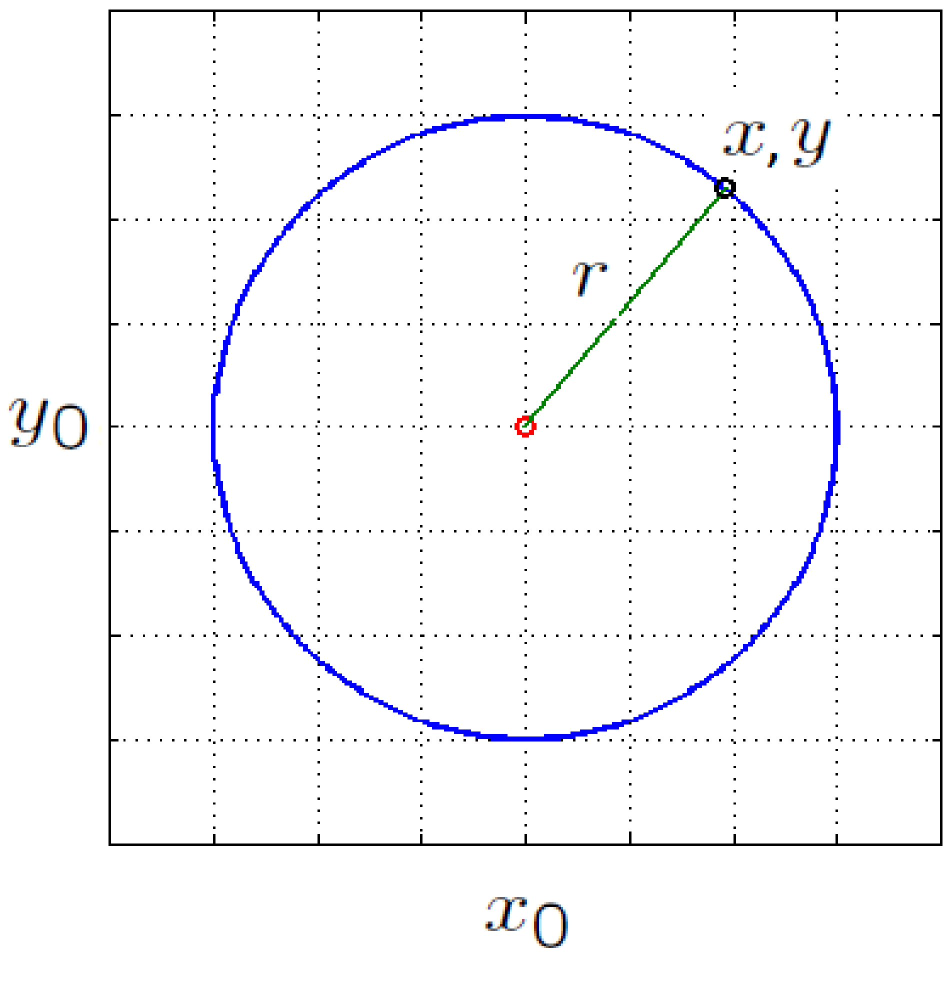

L = 10, H = 6, min v_0 = 13.16, v_0 = 14
β = 70.68°, θ = 149.04°, α_1 = 50.82°, α_2 = 70.14°
α_1
α_2
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
0
2
4
6
8
10



L = 10, H = 6, min v0 = 13.16, v0 = 13.2
β = 85.77°, θ = 149.04°, α1 = 58.37°, α2 = 62.6°
α1
α2
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
0
2
4
6
8
10

Ympyrä

Keskipiste $[x_0, y_0]$, säde r



Ympyrän pisteen $[x, y]$ etäisyys keskipisteestä $[x_0, y_0]$ on säde r eli koordinaatit x ja y toteuttavat ehdon (ympyrän yhtälö)

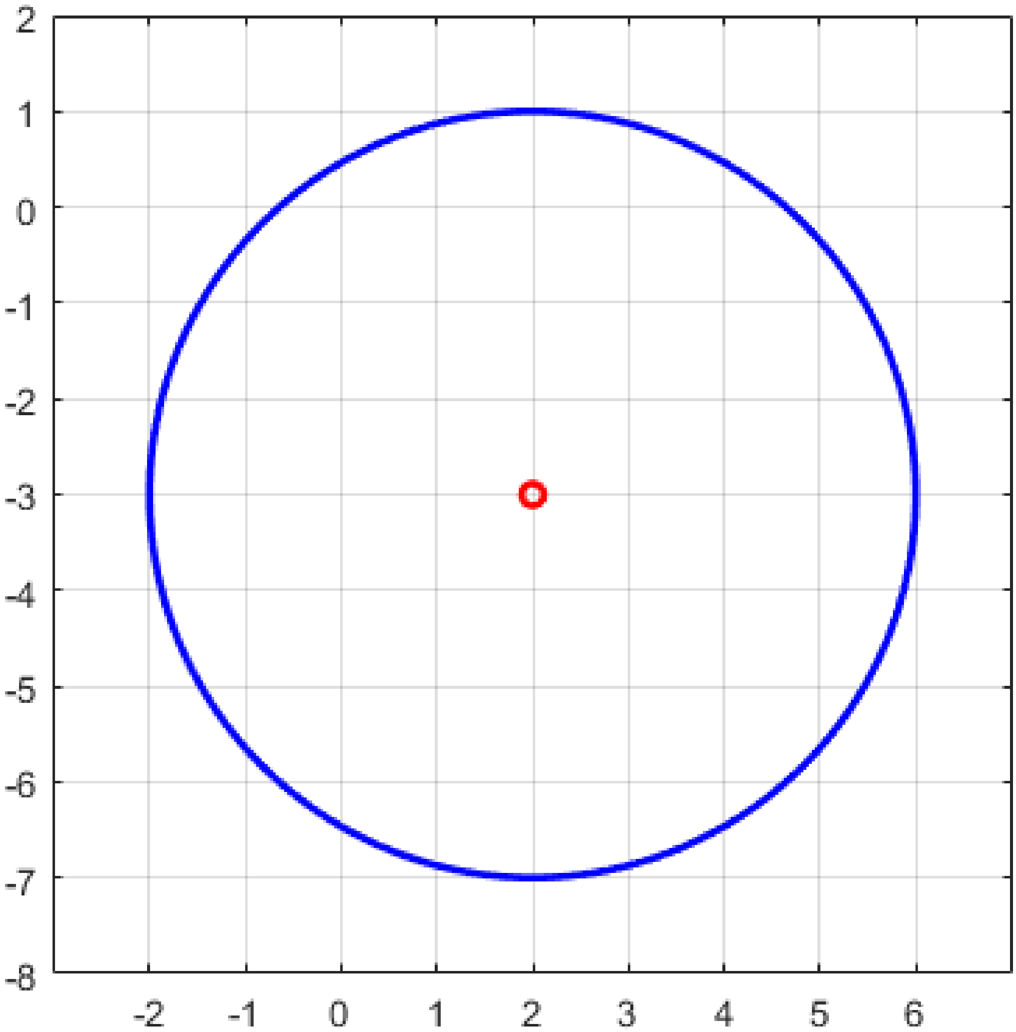
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

tai toiseen korotettuna

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

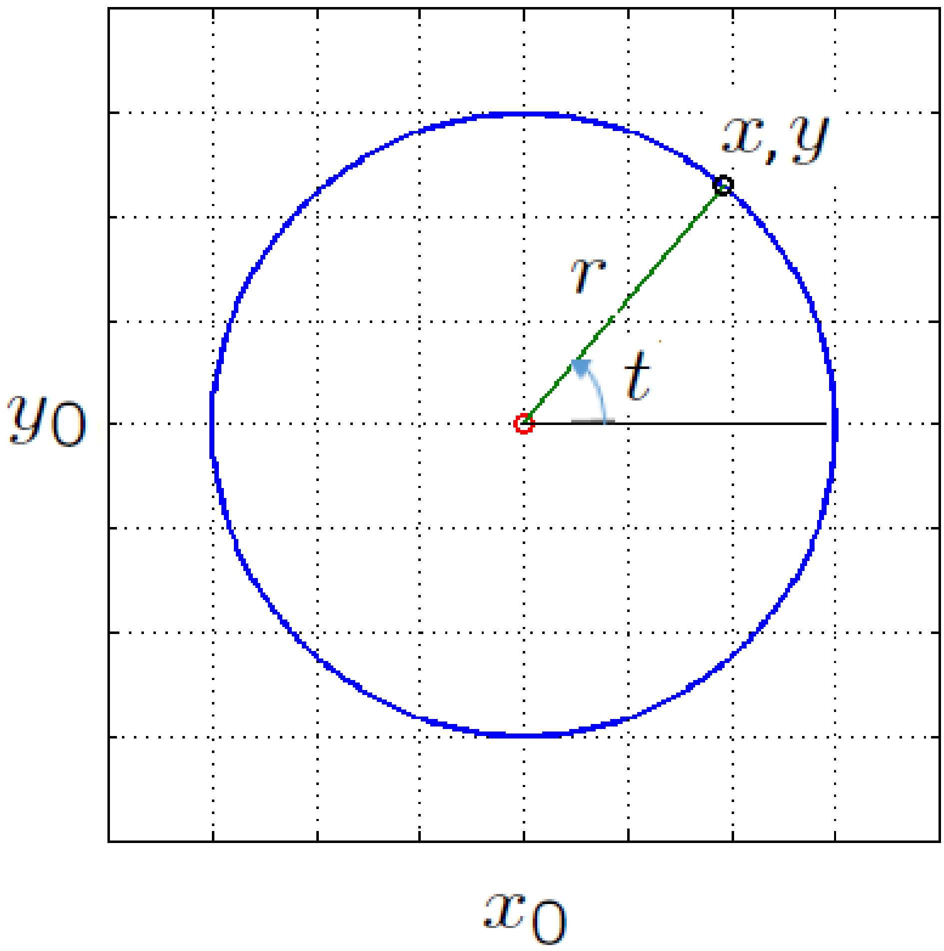
Esim: keskipiste $[2, -3]$, säde 4

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$

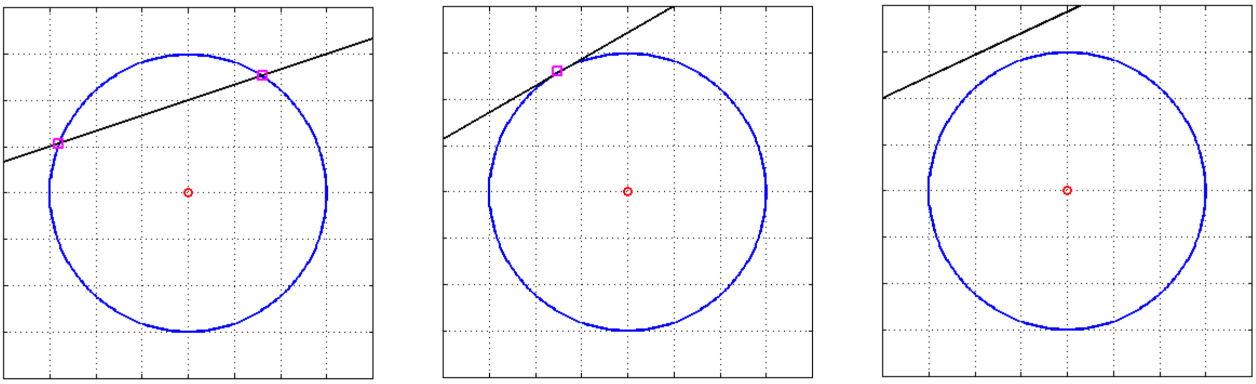


Parametrimuoto:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos(t) \\ \\ y = y_0 + r\sin(t) \end{cases}, \quad t = 0\ldots 360^\circ$$



Esim: Ympyrän ja suoran leikkauspisteet



$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \\ y=kx+b \end{cases}$$

Tapa 1: solve

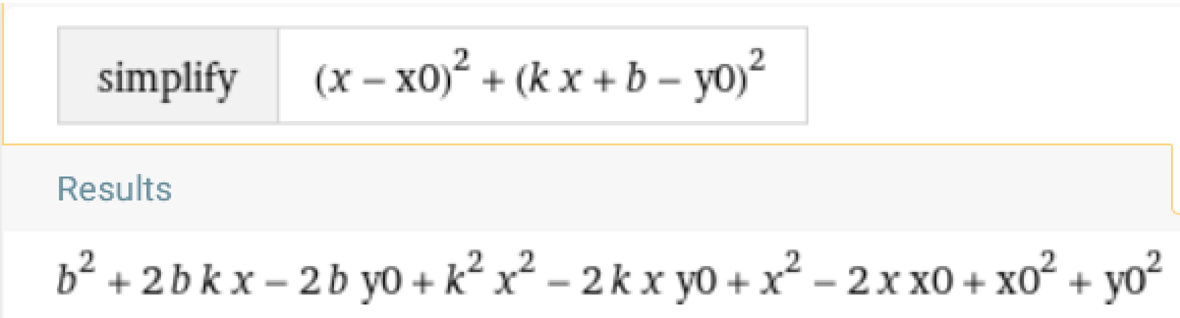
```
solve((x-x0)^2+(y-y0)^2=r^2,y=k*x+b,x,y)
```

$$x=\frac{-\sqrt{-b^2+b\,(2\,y0-2\,k\,x0)+\left(k^2+1\right)r^2-(y0-k\,x0)^2}-b\,k+k\,y0+x0}{k^2+1} \text{ and }$$
$$y=\frac{-k\sqrt{-b^2+b\,(2\,y0-2\,k\,x0)+\left(k^2+1\right)r^2-(y0-k\,x0)^2}+b+k^2\,y0+k\,x0}{k^2+1}$$
$$\text{and } k^2+1\neq 0$$

$$x=\frac{\sqrt{-b^2+b\,(2\,y0-2\,k\,x0)+\left(k^2+1\right)r^2-(y0-k\,x0)^2}-b\,k+k\,y0+x0}{k^2+1} \text{ and }$$
$$y=\frac{k\sqrt{-b^2+b\,(2\,y0-2\,k\,x0)+\left(k^2+1\right)r^2-(y0-k\,x0)^2}+b+k^2\,y0+k\,x0}{k^2+1}$$
$$\text{and } k^2+1\neq 0$$

Tapa 2: sijoitetaan $y = kx+b$ ympyrän yhtälöön:

$$(x - x_0)^2 + ((kx + b) - y_0)^2 = r^2$$



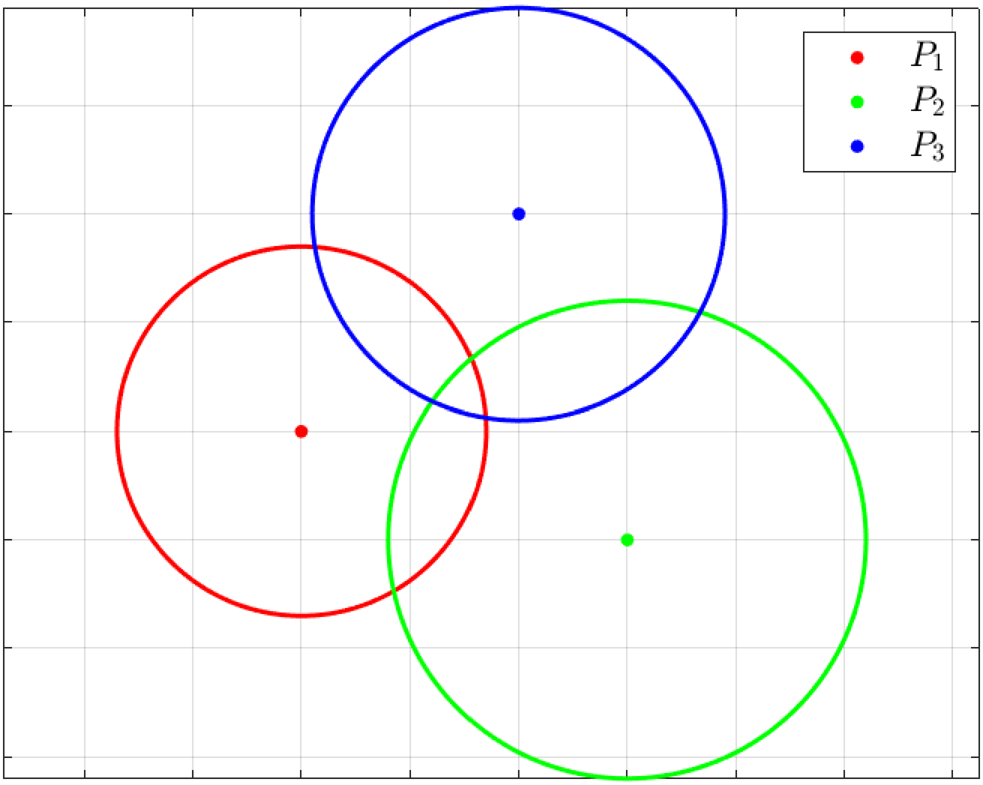
eli

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

missä

$$\begin{cases} A = k^2 + 1 \\ B = 2bk - 2ky_0 - 2x_0 \\ C = b^2 - 2by_0 + x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases}$$

Esim: Paikannus, mitatut etäisyydet pisteestä $P = [x, y]$ tukiasemiin $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$ ja $P_3 = [x_3, y_3]$ ovat r_1, r_2 ja r_3.



Koska mittaustulokset eivät ole tarkkoja, vastaavat kolme ympyrää eivät leikkaa eli yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 & (1) \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2 & (2) \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r_3^2 & (3) \end{cases}$$

ei ole ratkaisua.

Etsitään likiarvoratkaisu x, y vähentämällä vaikkapa kolmas yhtälö kahdesta ensimmäisestä

$$\begin{cases} x^2 - 2x_1 x + x_1^2 + y^2 - 2y_1 y + y_1^2 = r_1^2 & (1) \\ x^2 - 2x_2 x + x_2^2 + y^2 - 2y_2 y + y_2^2 = r_2^2 & (2) \\ x^2 - 2x_3 x + x_3^2 + y^2 - 2y_3 y + y_3^2 = r_3^2 & (3) \end{cases}$$

jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} ax + by = e & (s_{13}) = (1) - (3) \\ cx + dy = f & (s_{23}) = (2) - (3) \end{cases}$$

missä

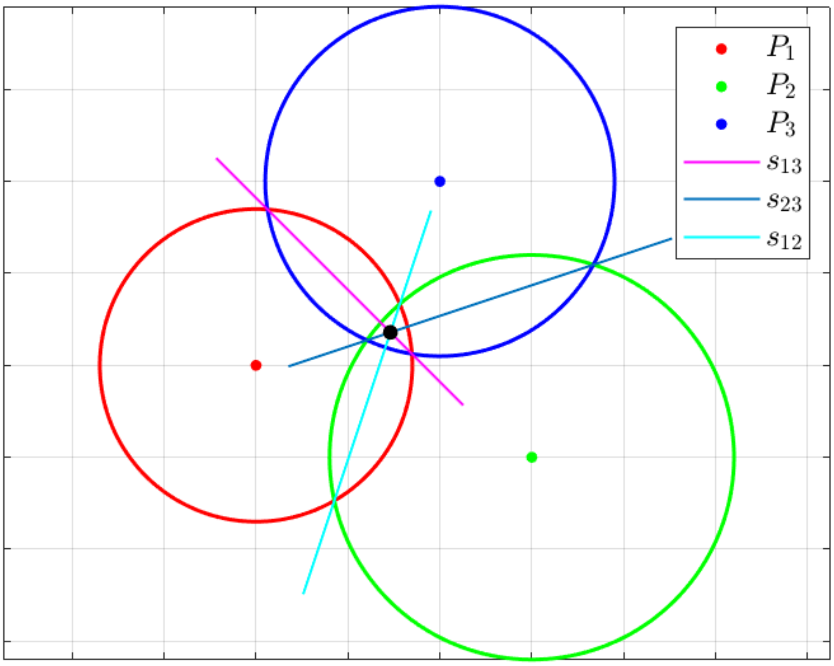
$$a = 2(x_3 - x_1),\ b = 2(y_3 - y_1)$$

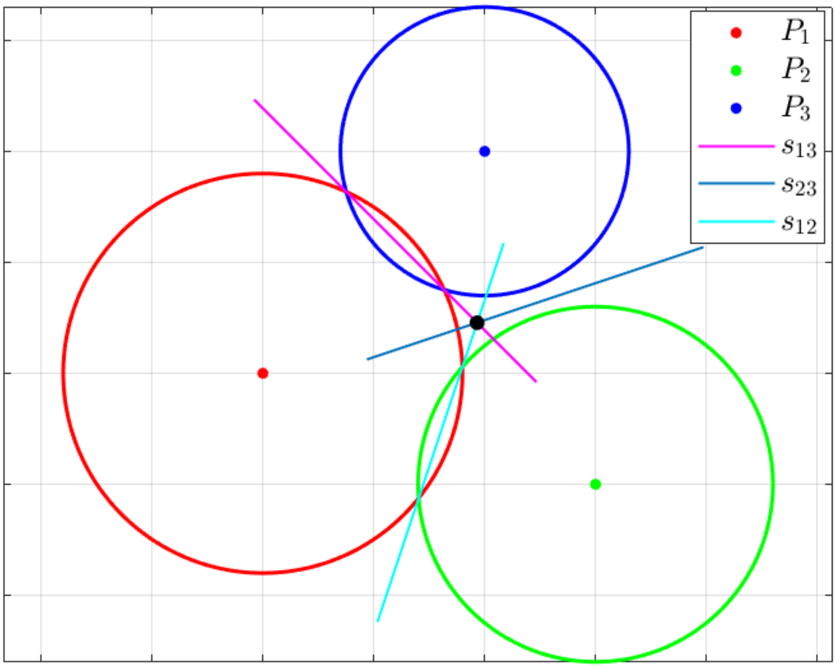
$$e = x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 + r_1^2 - r_3^2$$

$$c = 2(x_3 - x_2),\ d = 2(y_3 - y_2)$$

$$f = x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2 + r_2^2 - r_3^2$$

Ratkaisu: $\begin{cases} x = (de - bf)/(ad - bc) \\ y = (af - ce)/(ad - bc) \end{cases}$





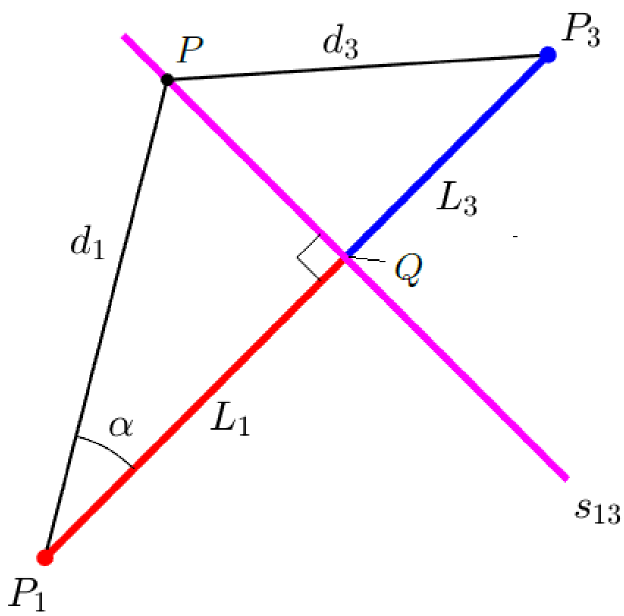
Huom: yhtälöparin ratkaisu $[x, y]$ on kolmen suoran leikkauspiste:

$$(1) : d_1^2 = r_1^2 \quad (2) : d_2^2 = r_2^2 \quad (3) : d_3^2 = r_3^2$$

$$\begin{cases} (s_{13}) = (1) - (3) : d_1^2 - d_3^2 = r_1^2 - r_3^2 \\ (s_{23}) = (2) - (3) : d_2^2 - d_3^2 = r_2^2 - r_3^2 \end{cases}$$

missä d_1, d_2, d_3 ovat pisteen $[x, y]$ etäisyydet tukiasemista P_1, P_2, P_3.

Esimerkiksi, suoran s_{13} pisteet toteuttavat ehdon $d_1^2 - d_3^2 = r_1^2 - r_3^2$



eli kuvan merkinnöin ($L = P_1P_3$, $L_3 = L - L_1$)

$$(PQ)^2 = d_1^2 - L_1^2 = d_3^2 - (L - L_1)^2$$

$$\rightarrow L_1 = \frac{L^2 + d_1^2 - d_3^2}{2L} = \frac{L^2 + r_1^2 - r_3^2}{2L}$$

Eli, s_{13} on kohtisuorassa P_1P_3:n kanssa ja sen etäisyys pisteistä P_1 ja P_3 on L_1 ja $L - L_1$. Jos ympyrät leikkaavat, niin suora kulkee leikkauspisteiden kautta (koska leikkauspiste toteuttaa ehdot $d_1 = r_1$ ja $d_2 = r_2$).

Suora s_{23} vastaavasti

Ratkaisu on myös suoralla $s_{12} = (1) - (2)$, eli se toteuttaa ehdon $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$:

$$d_1^2 - d_2^2 = (d_1^2 - d_3^2) - (d_2^2 - d_3^2)$$

$$= (r_1^2 - r_3^2) - (r_2^2 - r_3^2) = r_1^2 - r_2^2$$

Ellipsi

Yhtälö

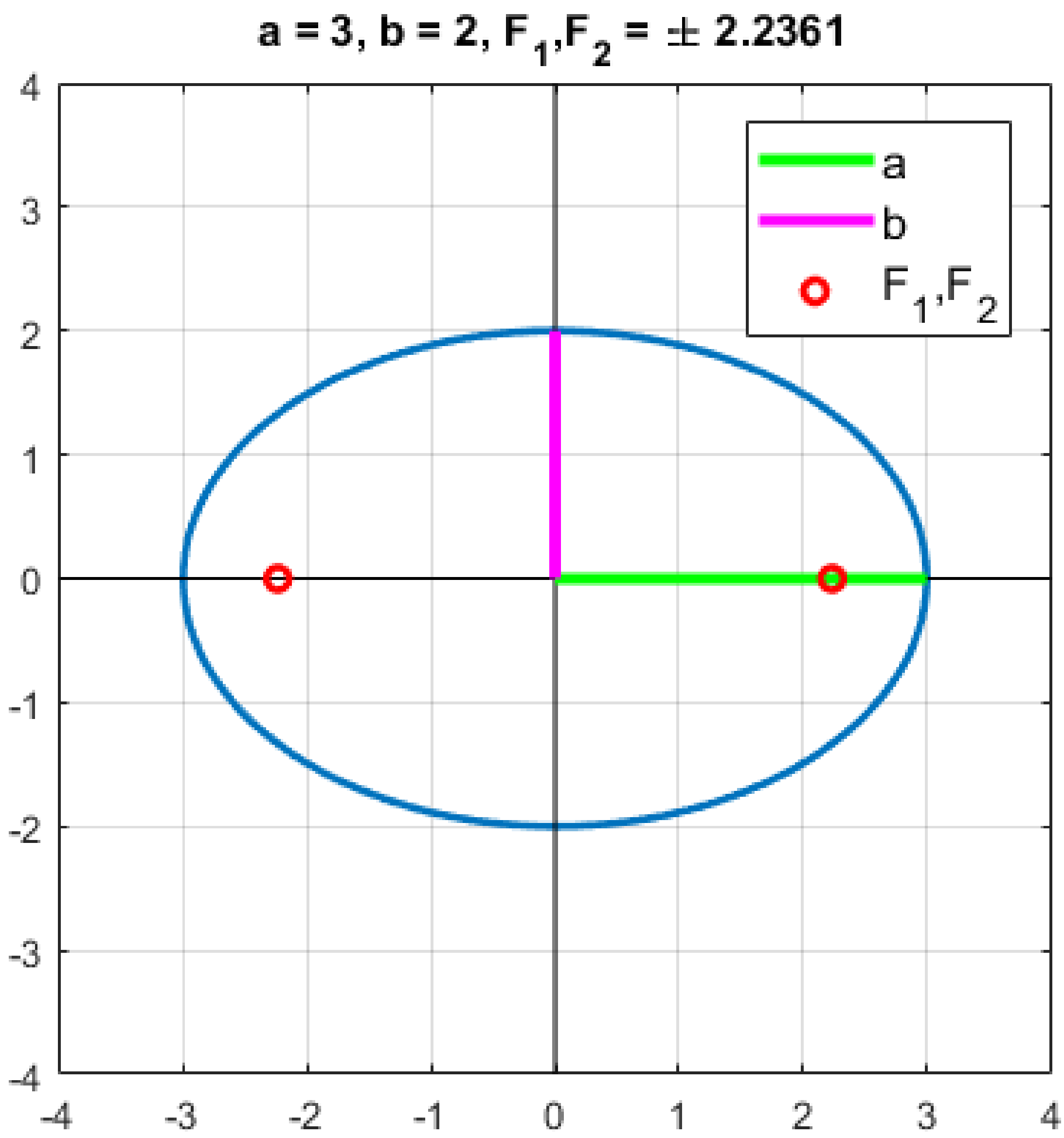
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

keskipiste $O = [0, 0]$

a ja b ovat puoliakseleiden pituudet

Polttopisteet F_1 ja F_2 (foci):

$x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, $y = 0 \quad (a > b)$



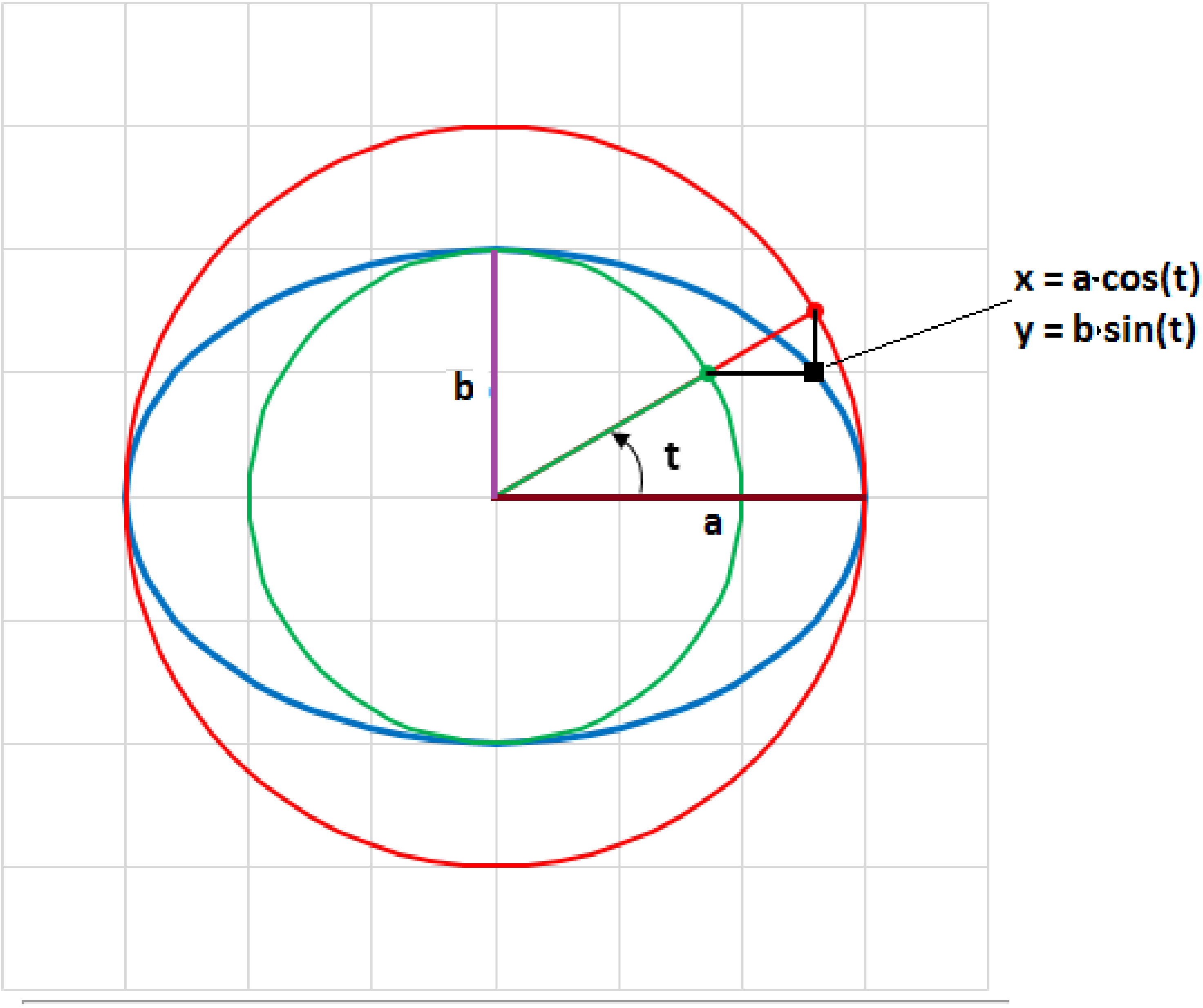
a = 3, b = 2, F1,F2 = ± 2.2361
a
b
F1,F2
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Parametrimuoto:

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ \\ y = b\sin(t) \end{cases}, \qquad t = 0\ldots 360^\circ$$

Huom:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$$



x = a·cos(t)
y = b·sin(t)
b
t
a

Jos ellipsin keskipiste on $[x_0, y_0]$ ja puoliakselit a ja b, niin ellipsin yhtälö on

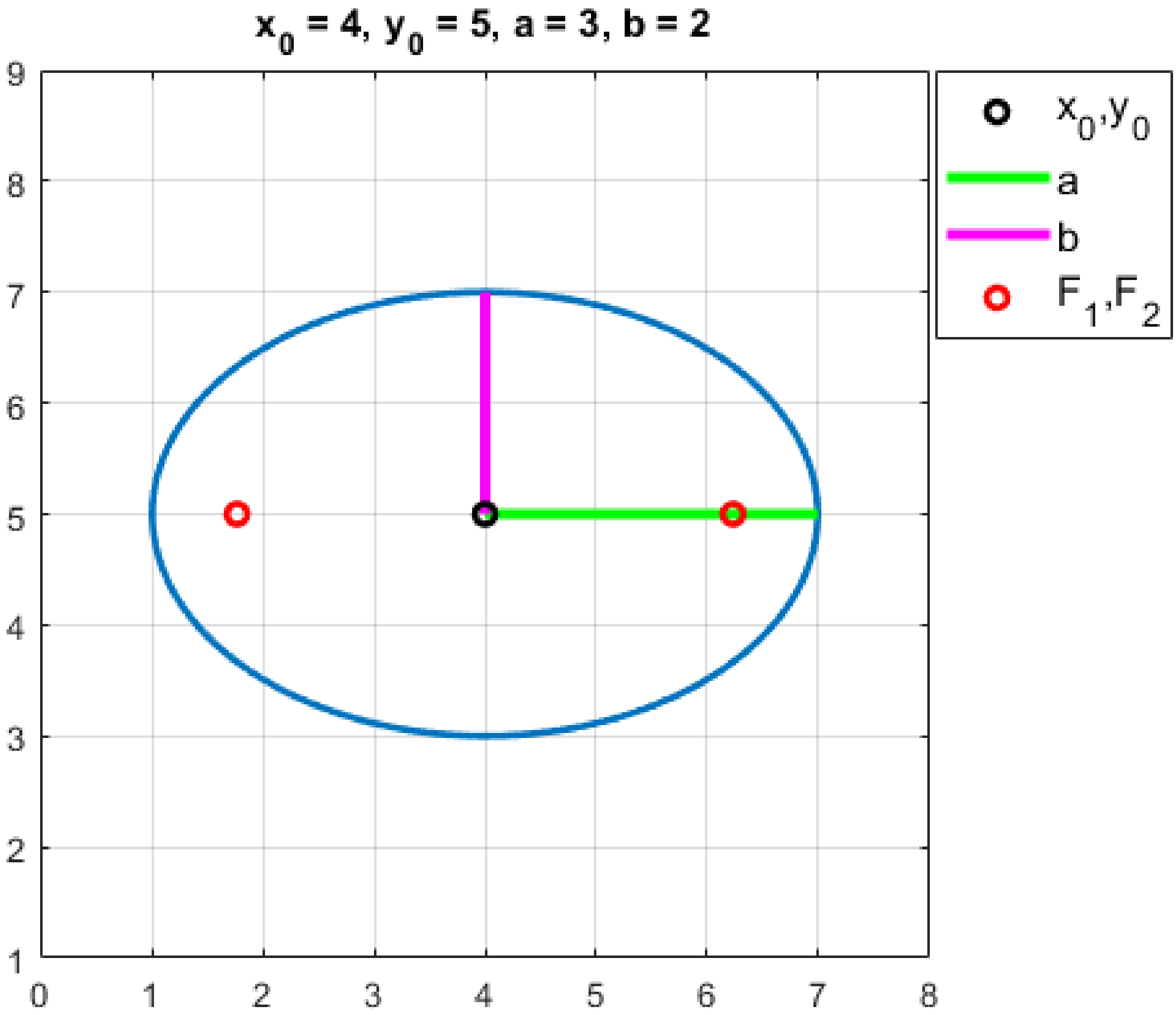
$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

polttopisteet F_1 ja F_2

$$x = x_0 \pm \sqrt{a^2 - b^2},\; y = y_0 \quad (a > b)$$

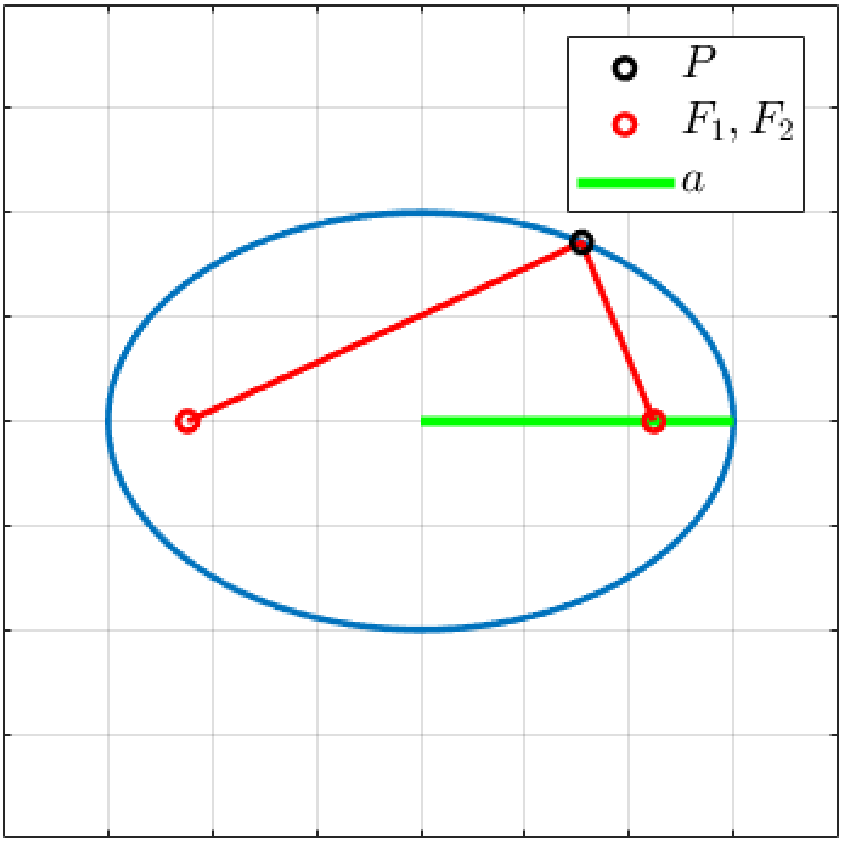
ja parametrimuoto

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos(t) \\ \\ y = y_0 + b\sin(t) \end{cases}, \quad t = 0 \ldots 360^\circ$$


x0 = 4, y0 = 5, a = 3, b = 2
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x0,y0
a
b
F1,F2

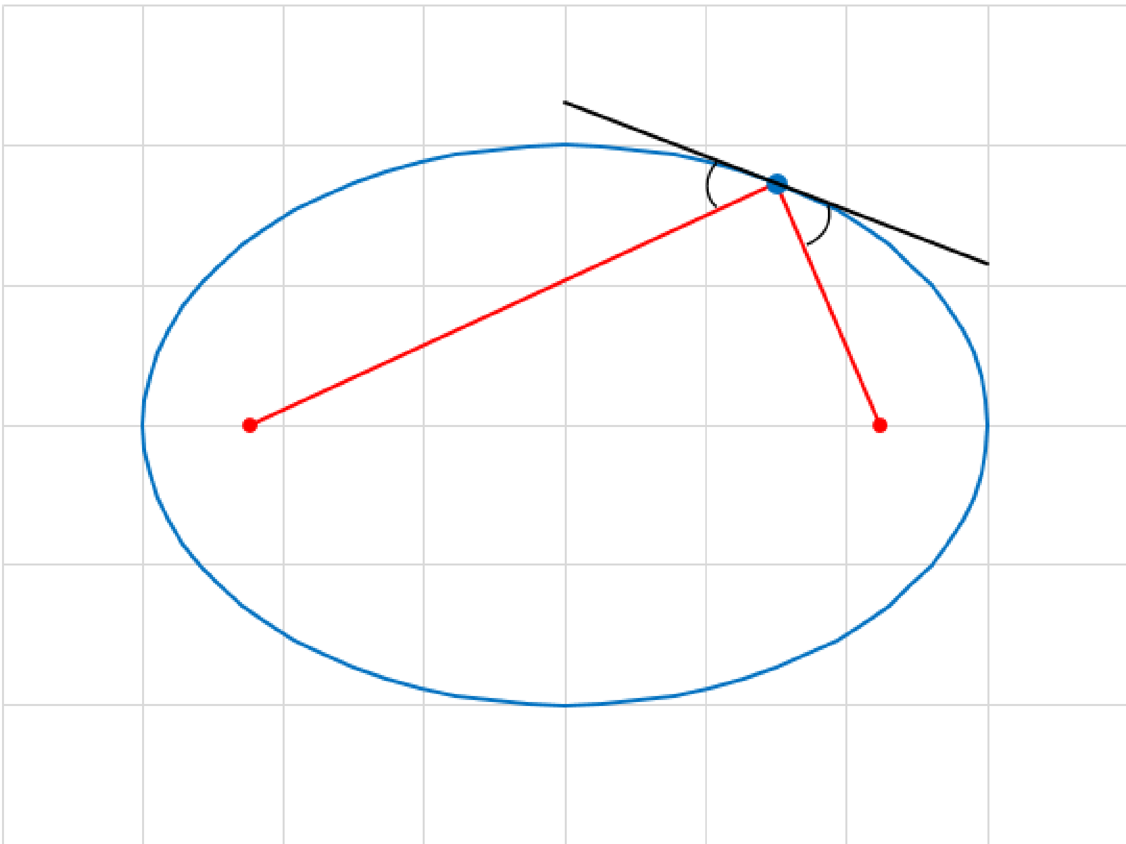
Geometrisesti ellipsillä ovat ne pisteet P, joiden etäisyyksien summa polttopisteistä F_1 ja F_2 on $2a$:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

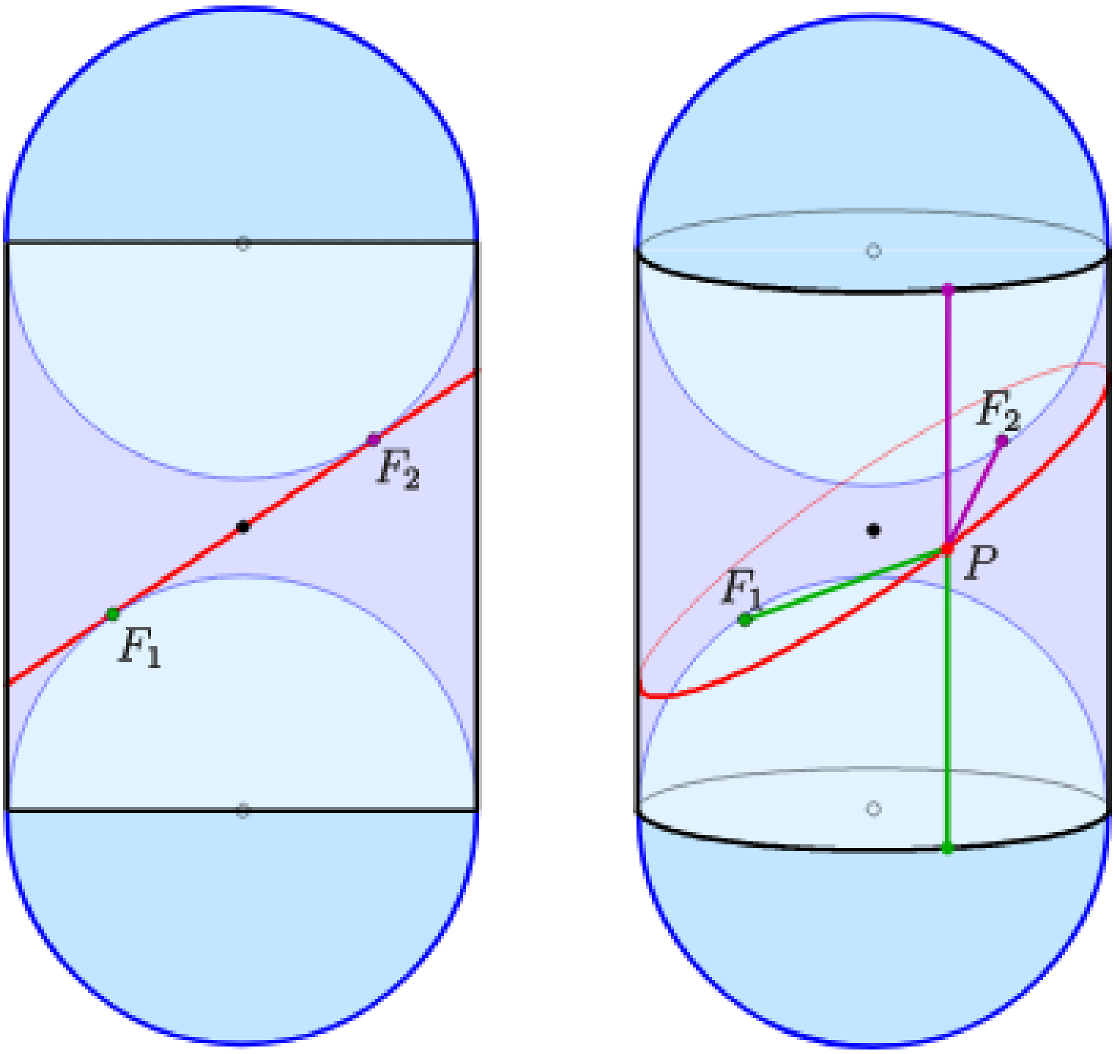


(kts. ellipsi_ja_hyperbeli.pdf)

Heijastusominaisuus: polttopisteestä lähtevä säde heijastuu toiseen polttopisteeseen.

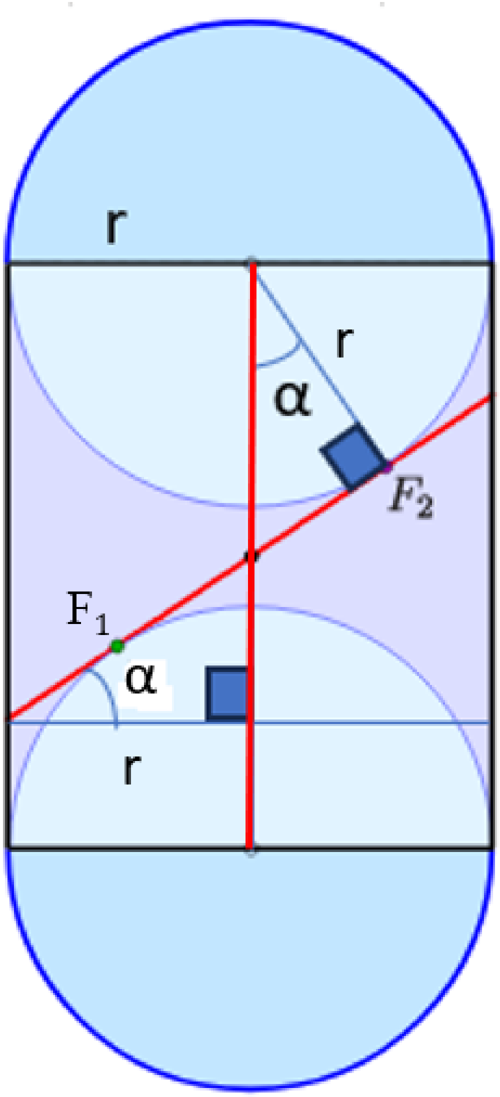


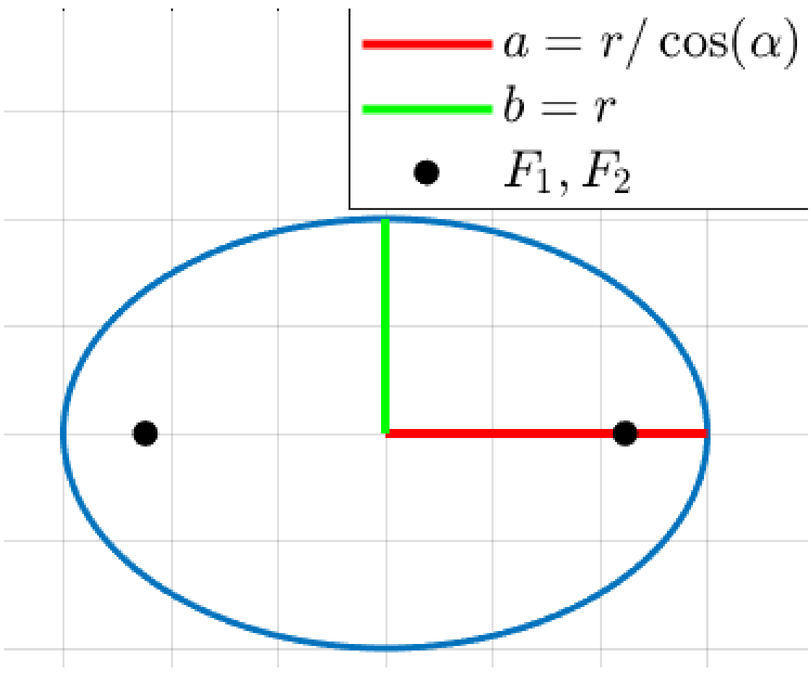
Huom: lieriön ja tason leikkauskäyrä on ellipsi (Dandelin spheres)



Violetit viivat yhtä pitkiä ja vihreät viivat ovat yhtä pitkiä (tangentteja pallolle P:stä) eli

$PF_1 + PF_2 =$ mustien ympyröiden välinen etäisyys $= 2r/\cos(\alpha) = 2a$





Hyperbeli

Yhtälö

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

keskipiste $O = [0, 0]$

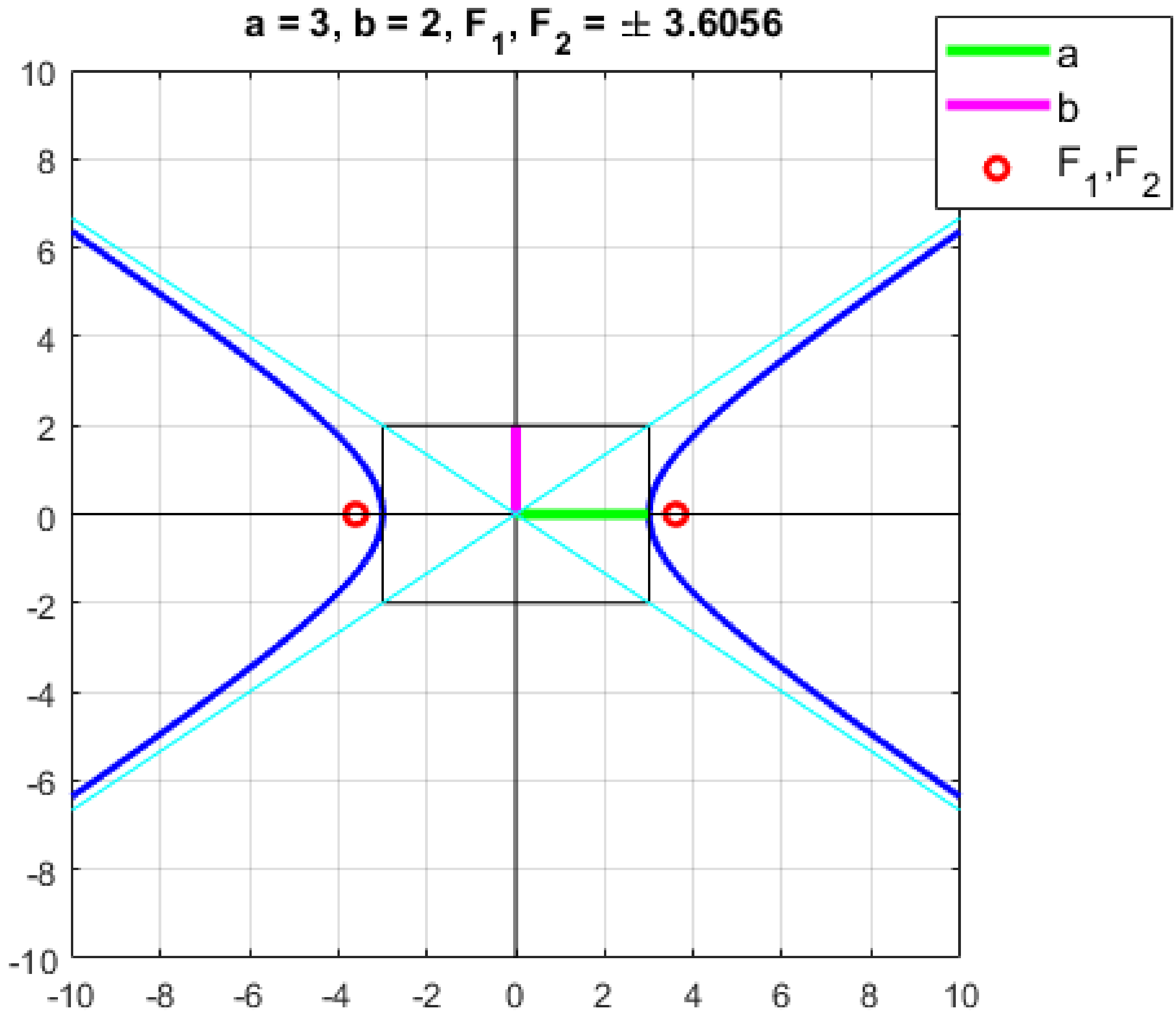
polttopisteet F_1 ja F_2:

$x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, $y = 0$

Asymptootit: suorat

$$y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$$

eli hyperbeli lähestyy näitä suoria vasemmalle ja oikealle liikuttaessa



a = 3, b = 2, F1, F2 = ± 3.6056
a
b
F1,F2
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

Parametrimuoto:

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh(t) \\ \\ y = b \sinh(t) \end{cases}$$

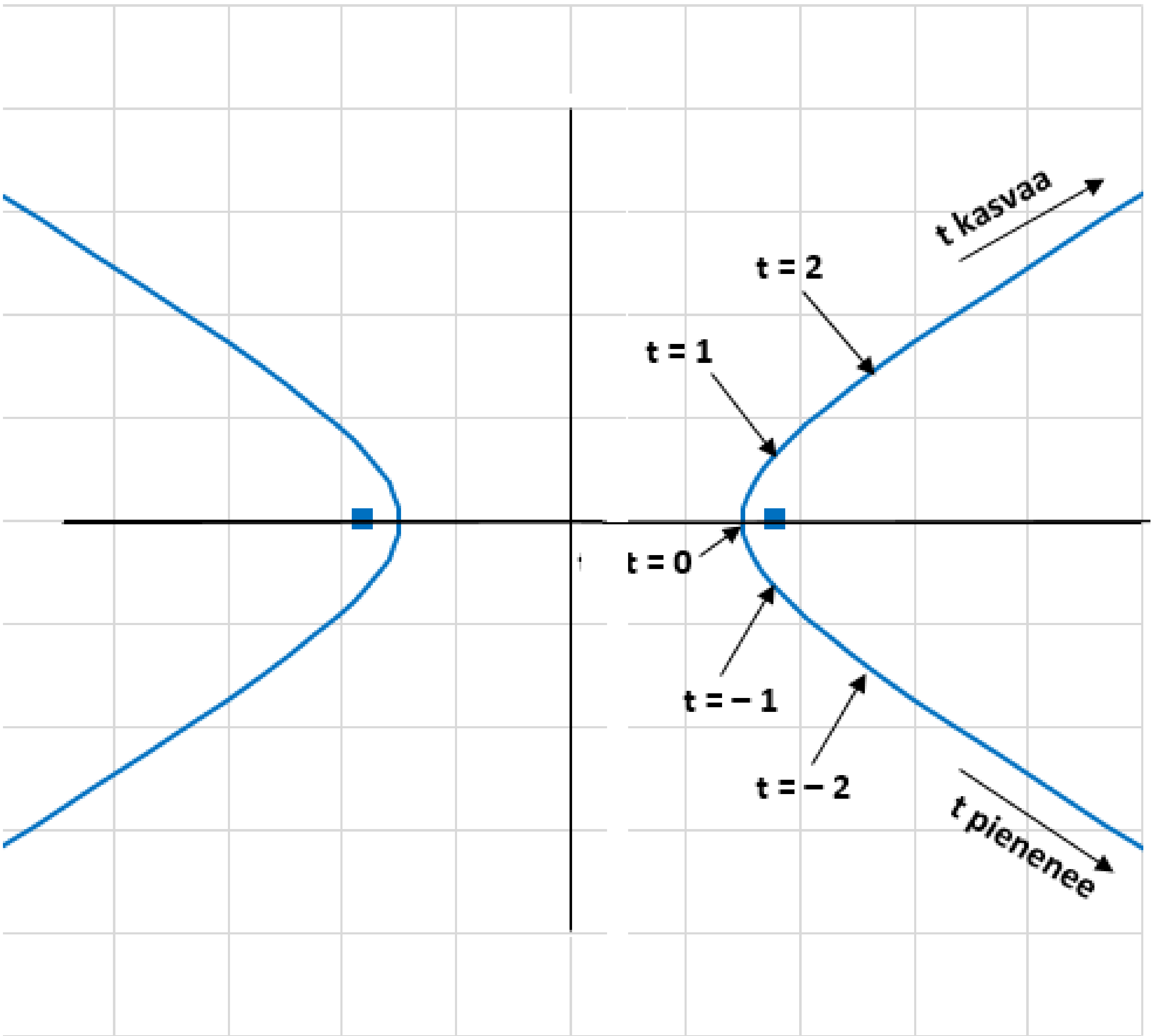
t mitä tahansa (se ei ole mikään kulma).

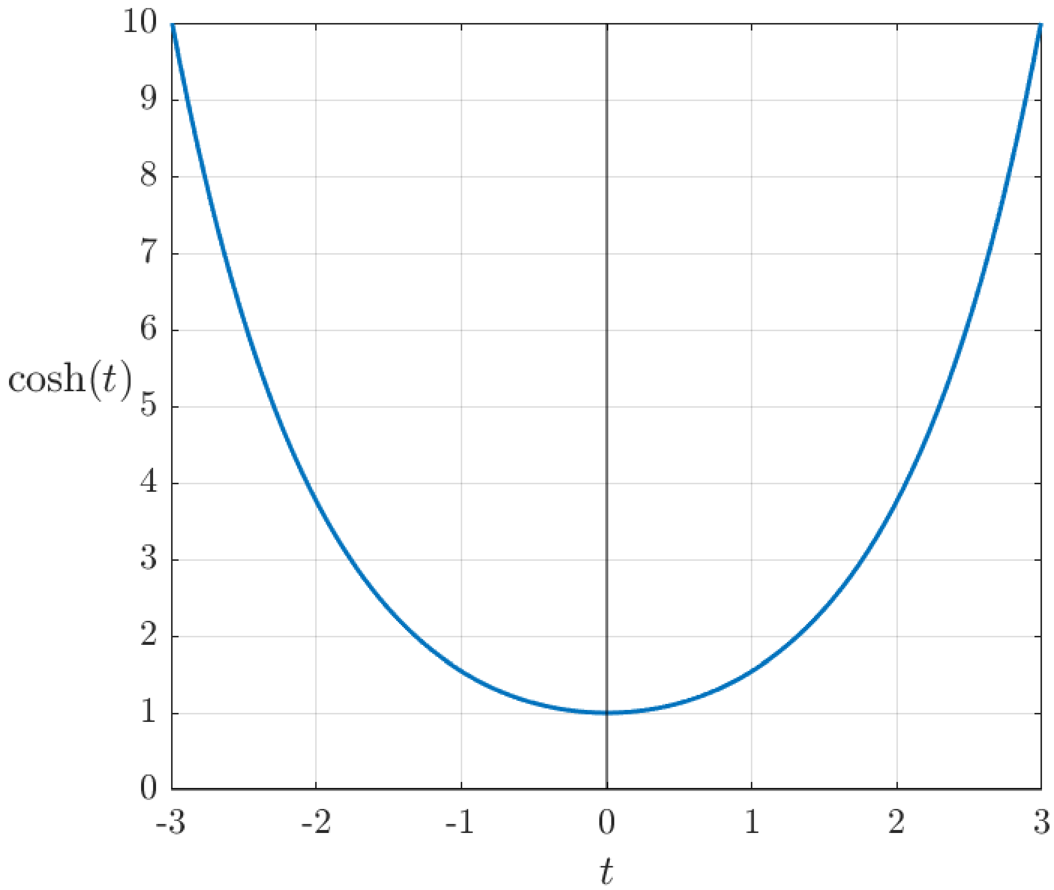
x:n plusmerkillä saadaan oikea haara, miinusmerkillä vasen

$\cosh(t)$ ja $\sinh(t)$ ovat ns. **hyperboliset** kosini ja sini.

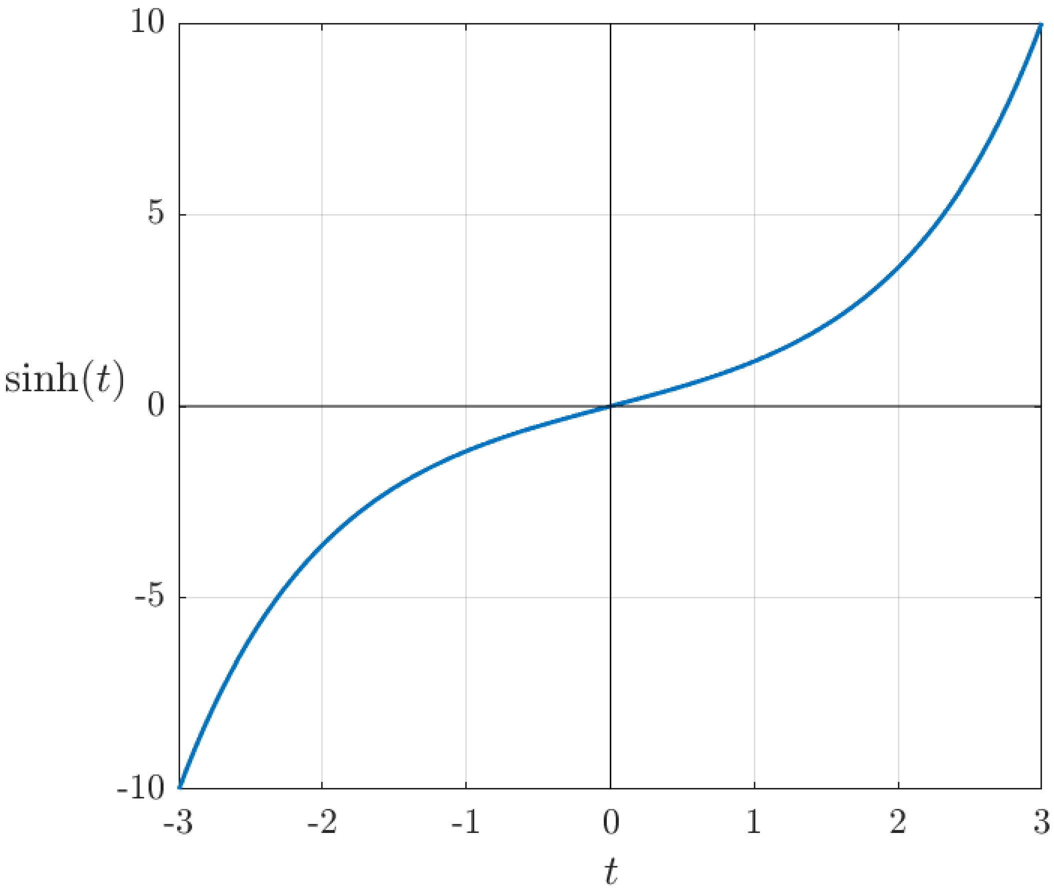
Huom:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = 1$$


t kasvaa
t = 2
t = 1
t = 0
t = − 1
t = − 2
t pienenee



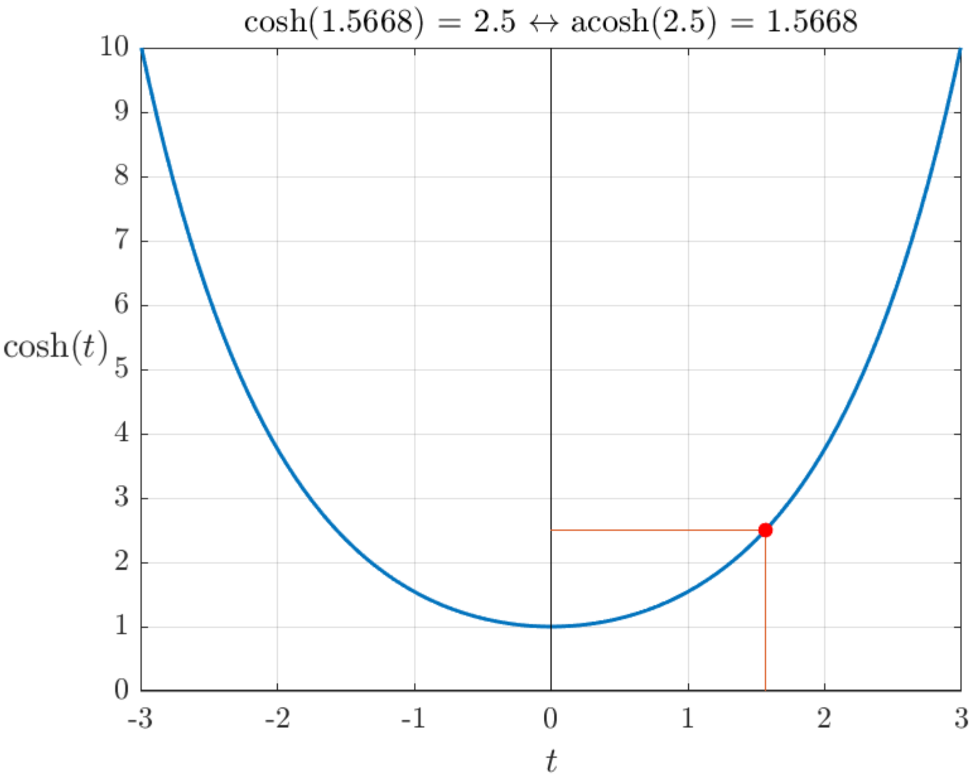
10
9
8
7
6
cosh(t)
5
4
3
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
t

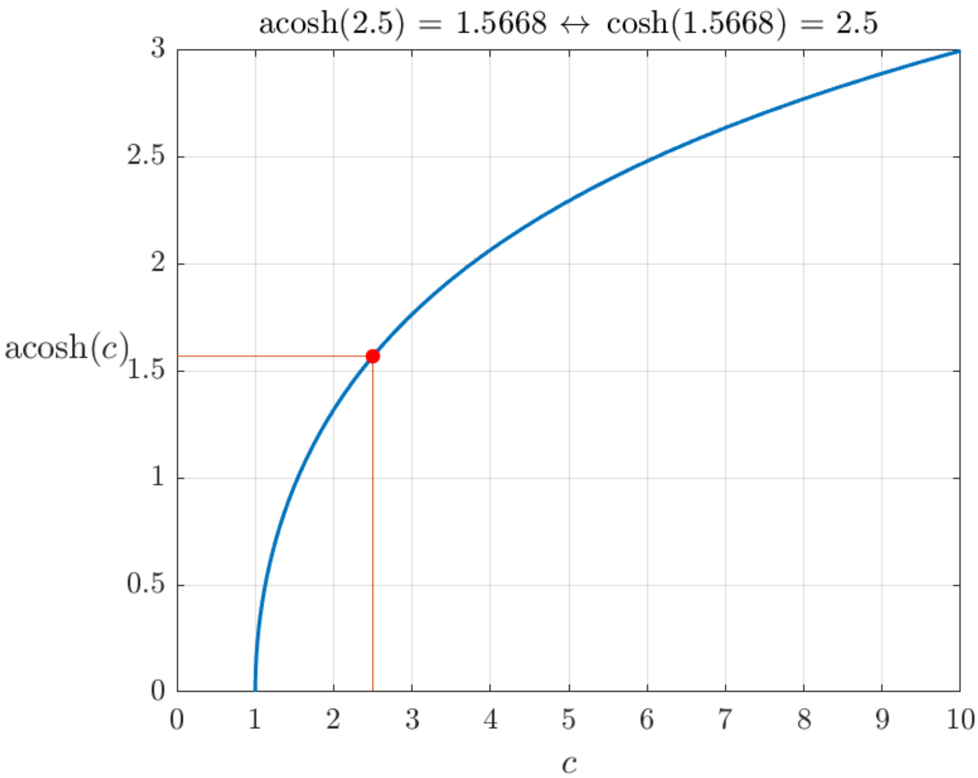


10
5
0
-5
-10
$\sinh(t)$
-3
-2
-1
0
1
2
3
t

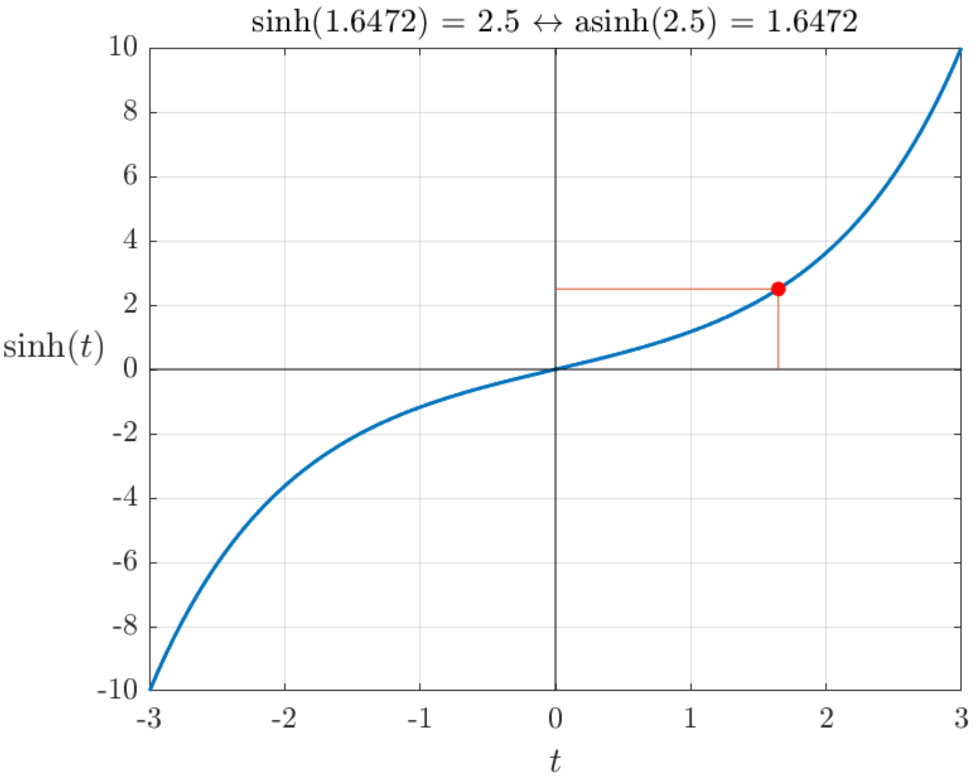
Käänteiset, ns. area-funktiot

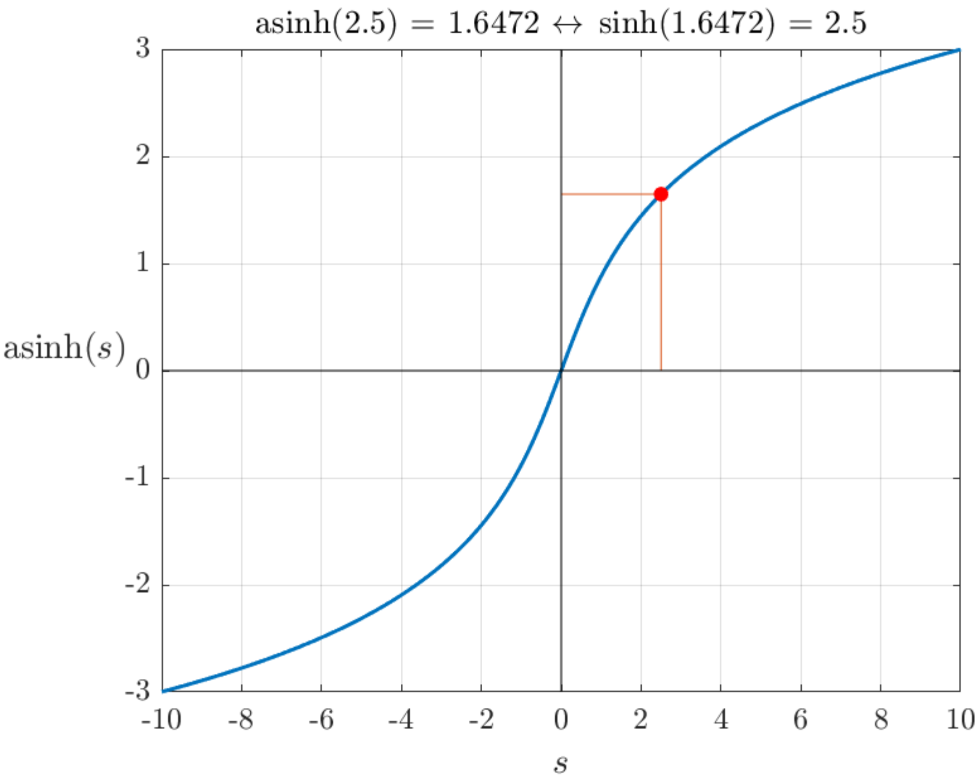
$\cosh(t) = c \leftrightarrow t = \text{acosh}(c) = \text{arcosh}(c)$





$$\sinh(t) = s \leftrightarrow = \text{asinh}(s) = \text{arsinh}(s)$$

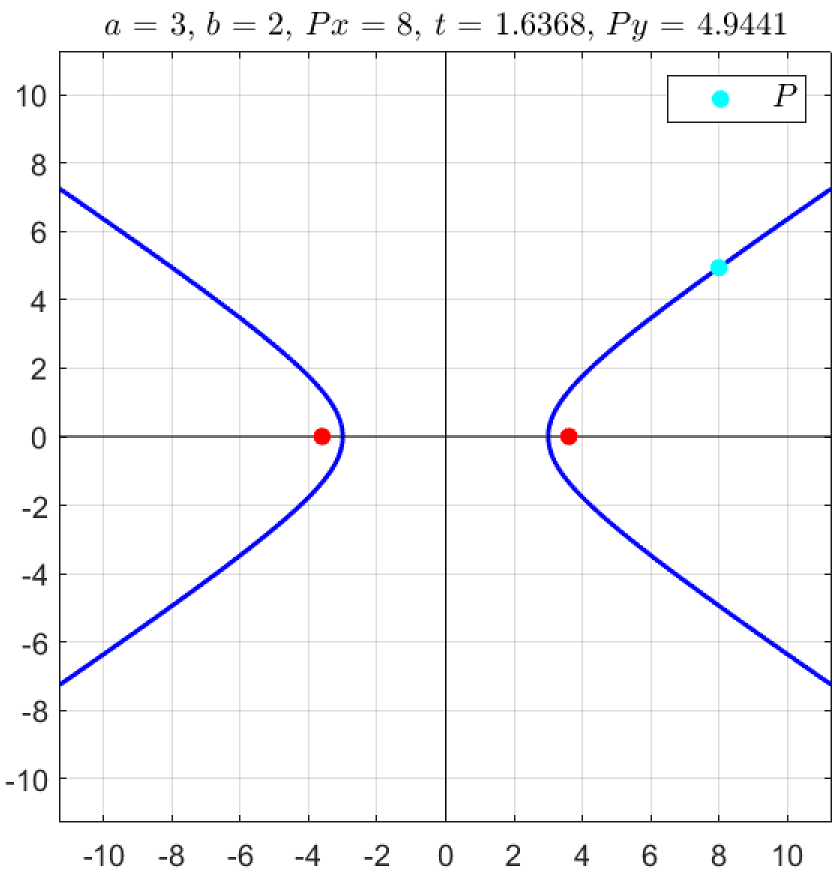




Hyperbelin pistettä $P = [Px, Py]$ vastaava parametrin t arvo:

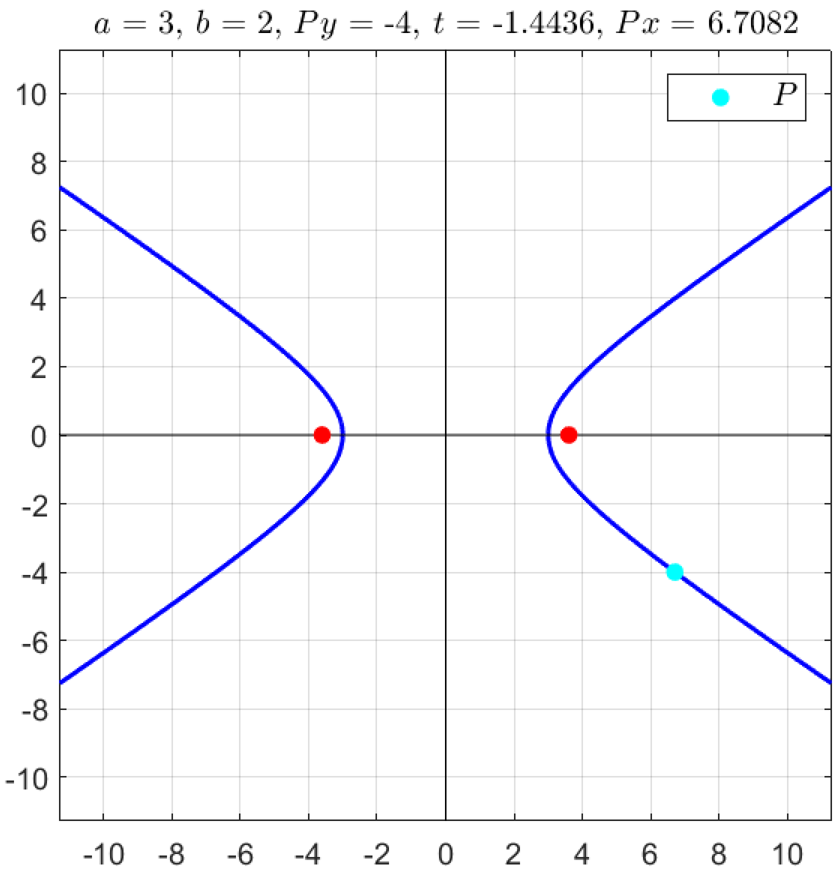
$Px = a \cdot \cosh(t) \rightarrow \cosh(t) = Px/a$

$\rightarrow t = \text{acosh}(Px/a)$



$$Py = b \cdot \sinh(t) \rightarrow \sinh(t) = Py/b$$

$$\rightarrow t = \operatorname{asinh}(Py/b)$$



Jos hyperbelin keskipiste on $[x_0, y_0]$ ja puoliakselit a ja b, niin sen yhtälö on

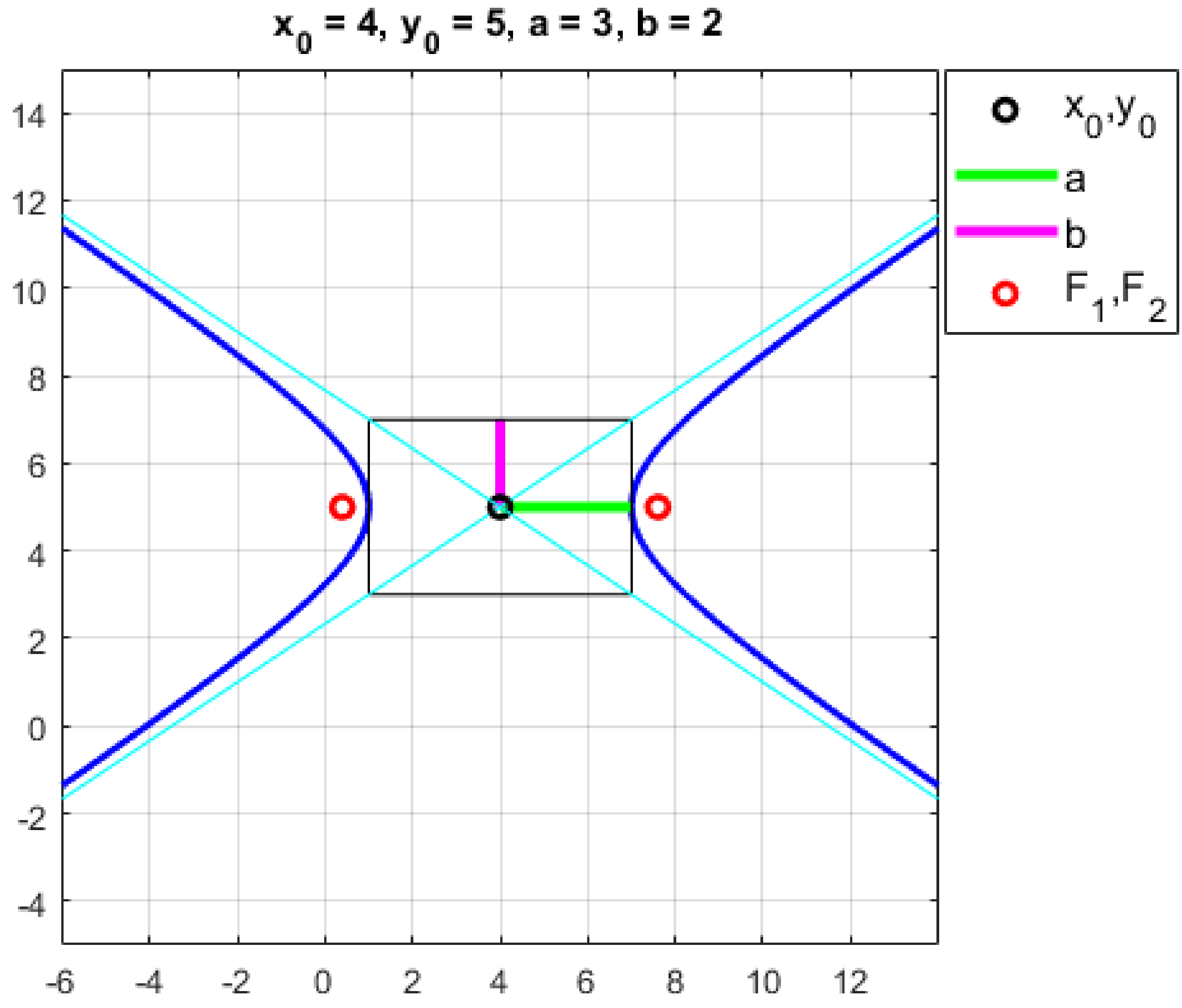
$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

polttopisteet F_1 ja F_2:

$$x = x_0 \pm \sqrt{a^2 + b^2},\ y = y_0$$

ja parametrimuoto

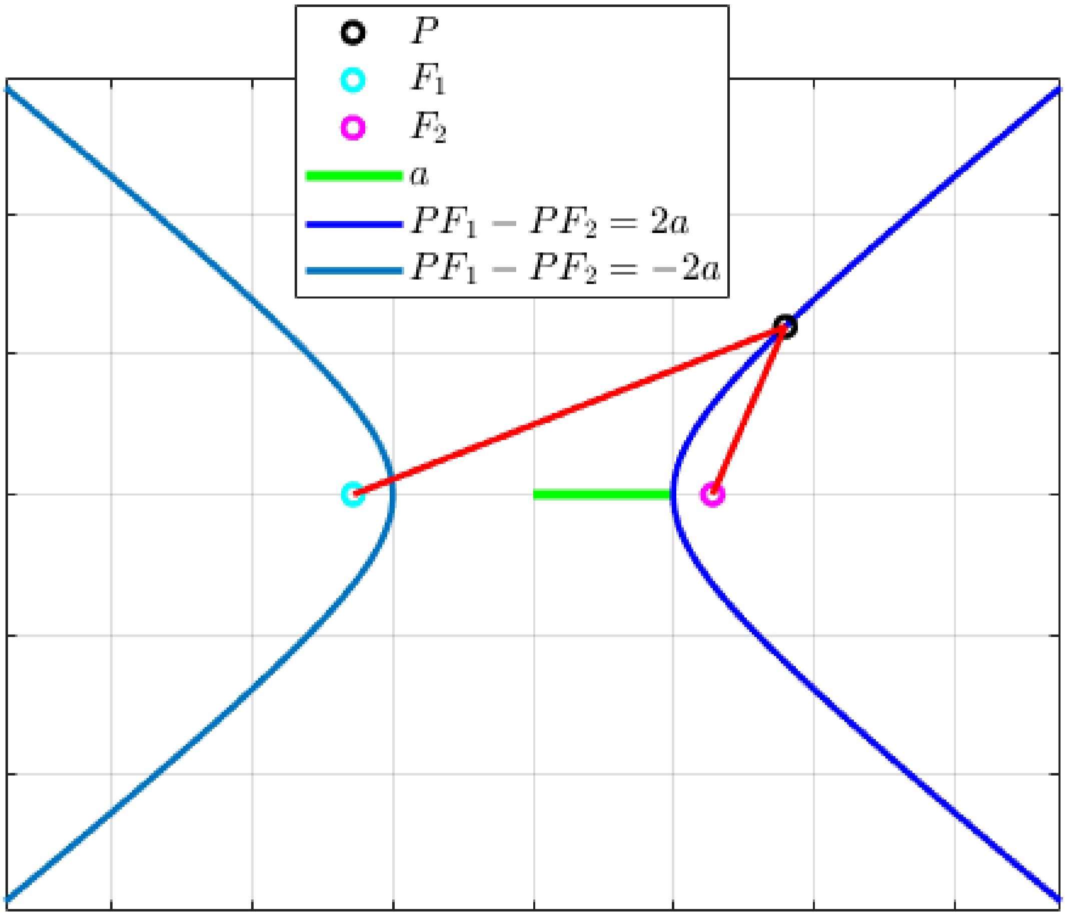
$$\begin{cases} x = x_0 \pm a \cosh(t) \\ y = y_0 + b \sinh(t) \end{cases}$$


x_0 = 4, y_0 = 5, a = 3, b = 2
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
x_0,y_0
a
b
F_1,F_2

Geometrisesti hyperbelillä ovat ne pisteet P, joiden etäisyyksien erotus polttopisteistä F_1 ja F_2 on $\pm 2a$

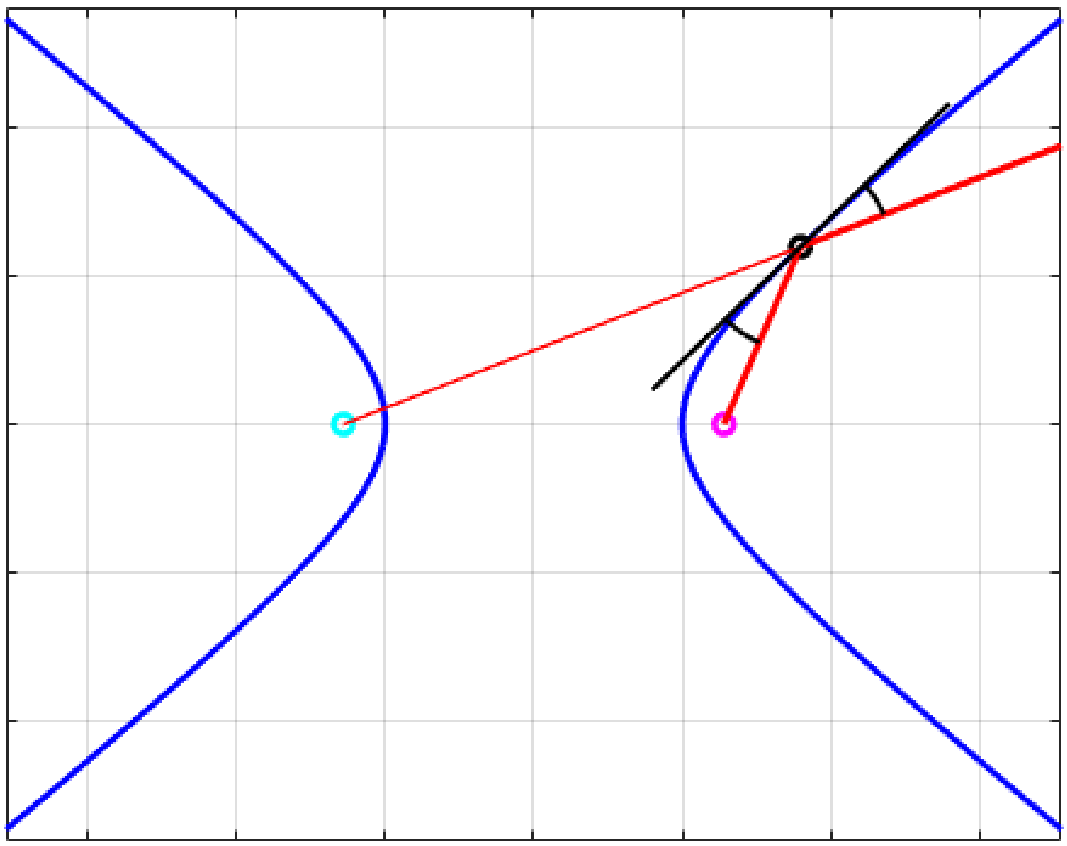
$$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

($+$ = oikea, $-$ = vasen haara)



(ellipsi_ja_hyperbeli.pdf)

Heijastusominaisuus: kohti toista polttopistettä menevä säde heijastuu toiseen polttopisteeseen.

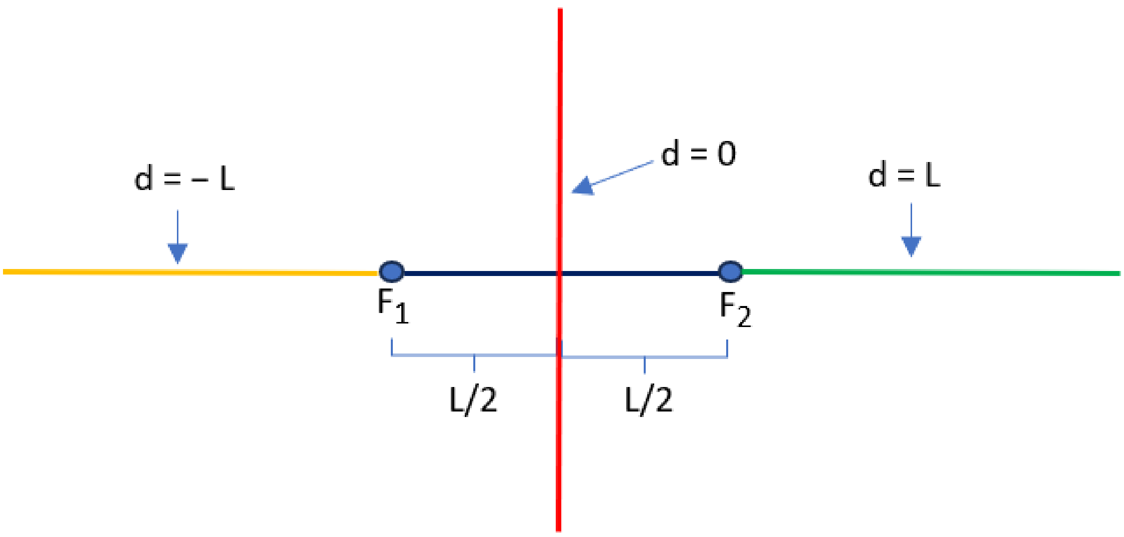


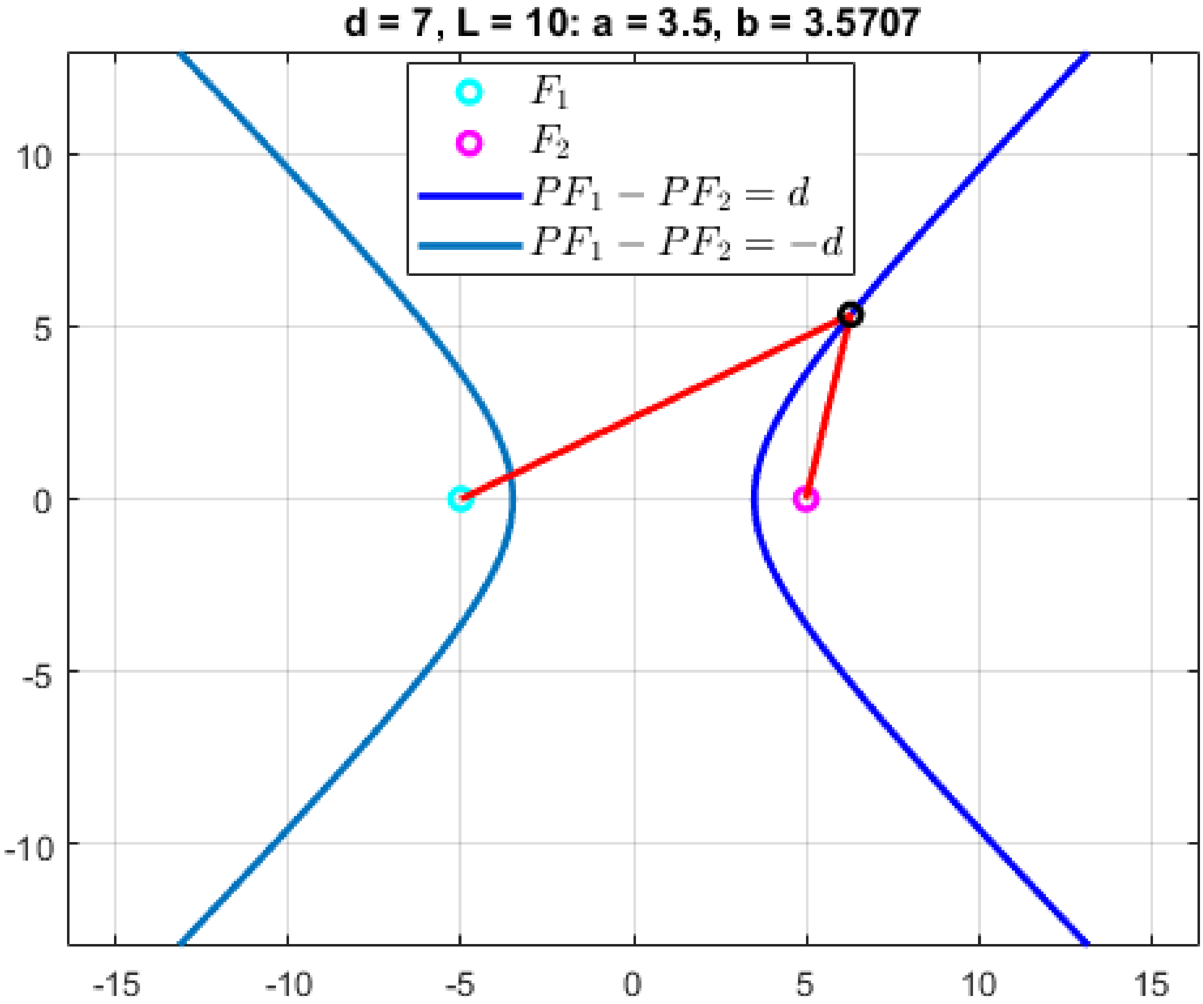
Esim: jos $F_1F_2 = L$ ja etäisyyksien erotus $PF_1 - PF_2 = d$, niin piste P on hyperbelillä, jonka polttopisteet ovat F_1 ja F_2 ja puoliakselit

$a = |d|/2$ ja $b = \sqrt{(L/2)^2 - a^2}$

syy: $|PF_1 - PF_2| = |d| = 2a$ ja polttopisteiden välinen etäisyys $L = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Huom: d on välillä $-L \ldots L$





d = 7, L = 10: a = 3.5, b = 3.5707
F_1
F_2
$PF_1 - PF_2 = d$
$PF_1 - PF_2 = -d$
10
5
0
-5
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15

Paikannus: tukiasemat

$F_1 = [0, 0], F_2 = [x_2, 0]$ ja $F_3 = [x_3, y_3]$

Jos pisteen $P = [x, y]$ ja tukiasemien välisten etäisyyksien erotukset ovat

$PF_1 - PF_2 = d_{12}$ ja $PF_1 - PF_3 = d_{13}$

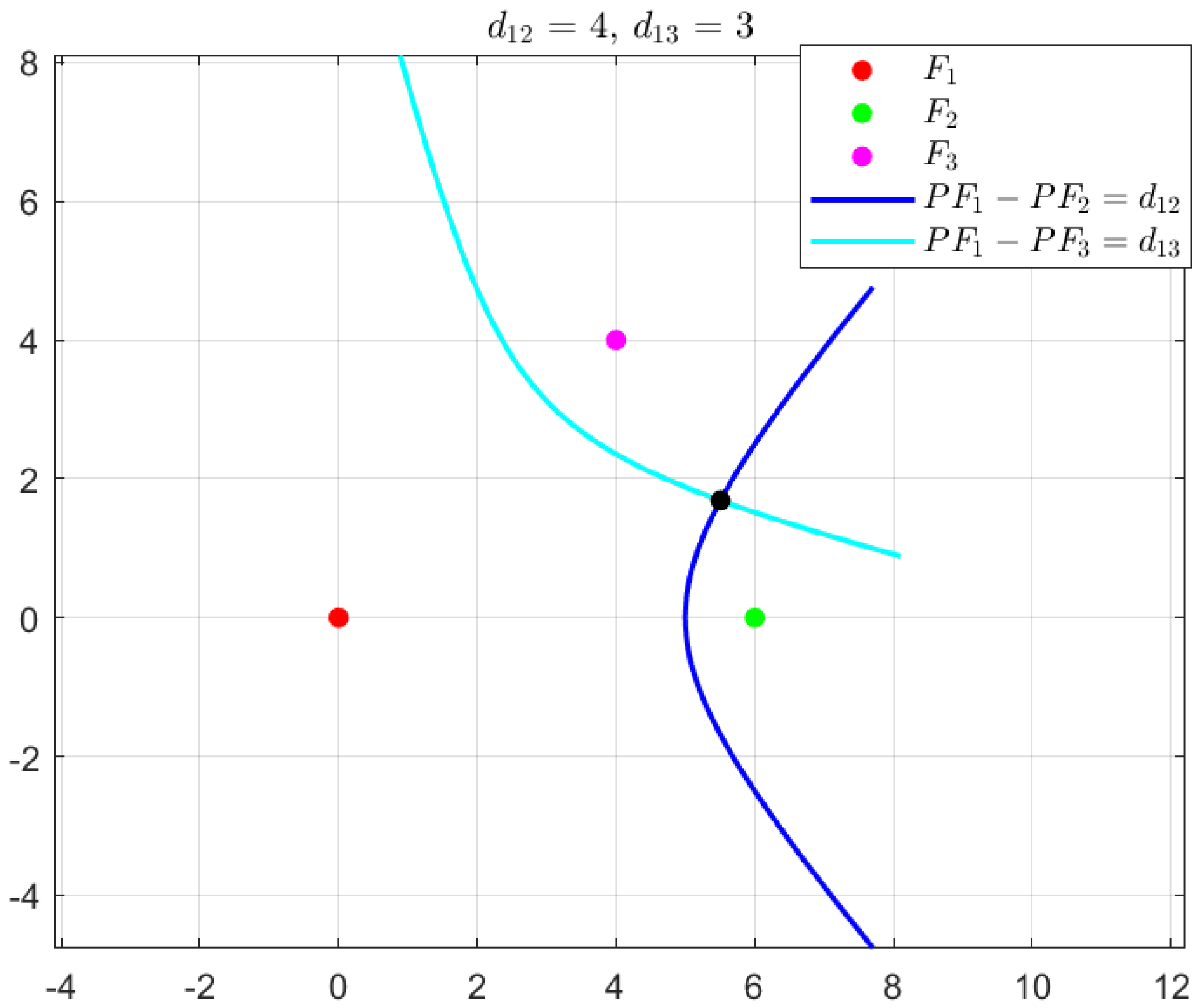
niin P on kahden hyperbelin leikkauspiste

(polttopisteet F_1, F_2 ja F_1, F_3)

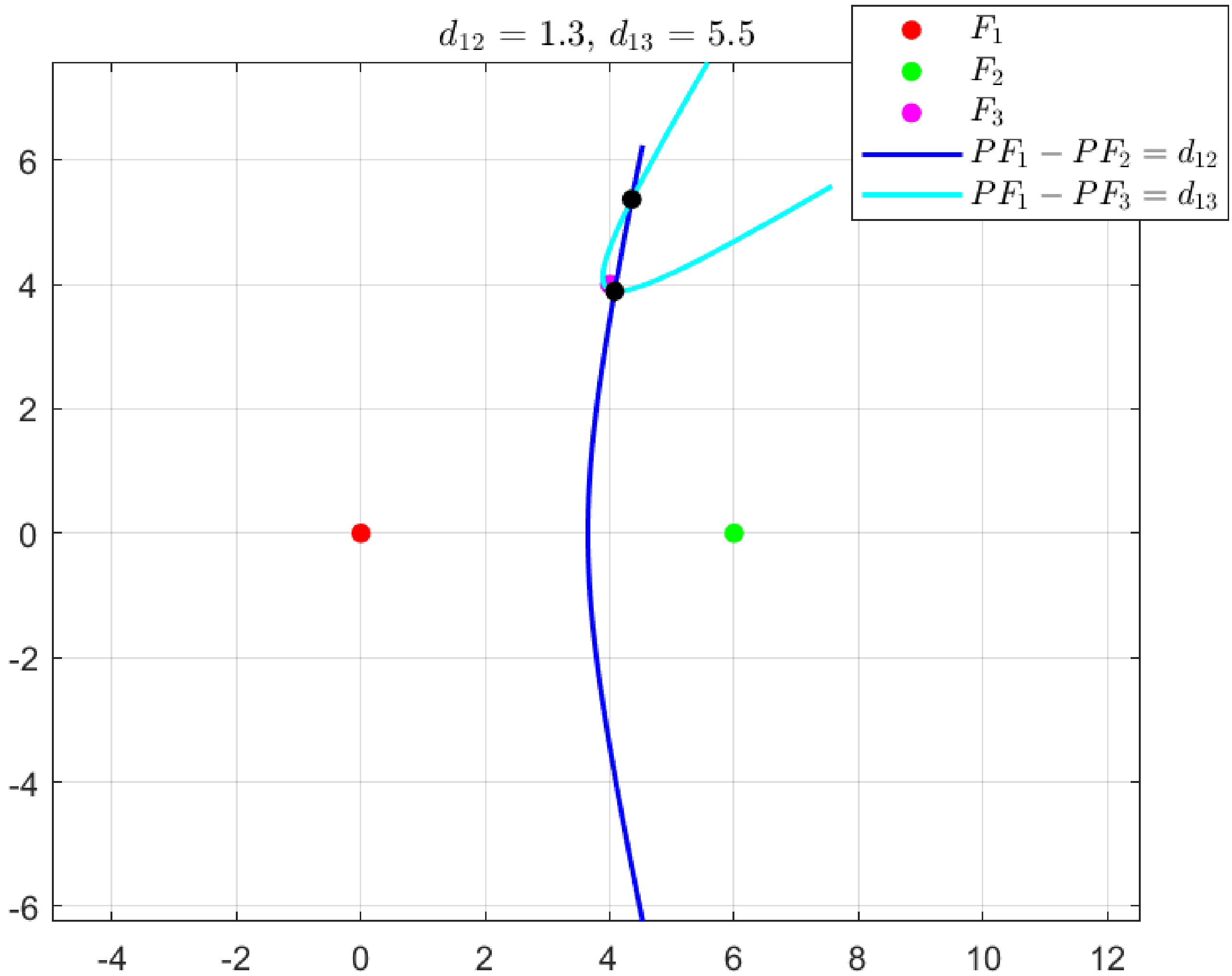
(kts. hyperbeli_paikannus.pdf)

Erotukset d_{12} ja d_{13} saadaan P:stä/tukiasemista lähetettyjen signaalien vastaanottoaikojen erotuksista tukiasemissa/P:ssä

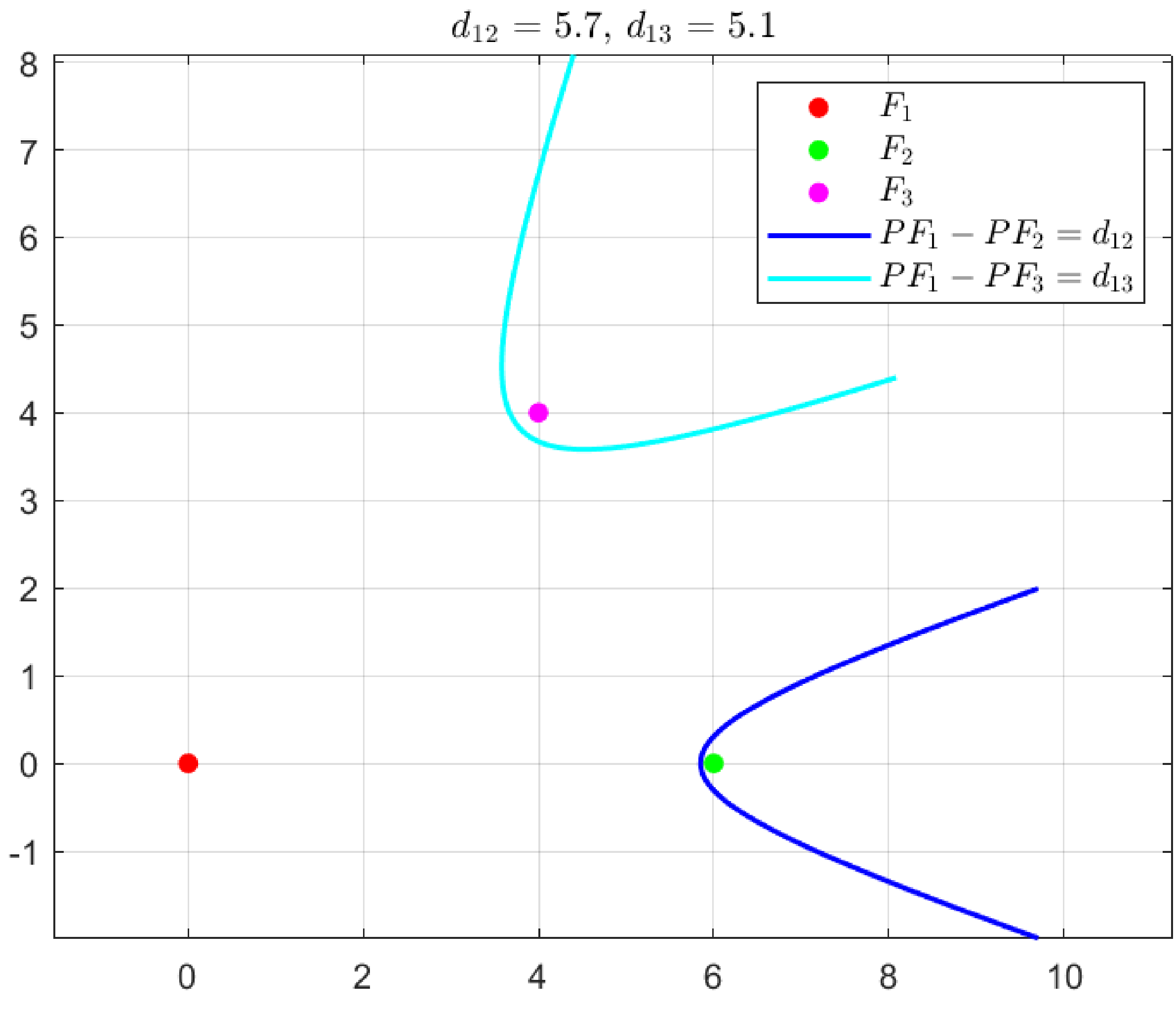
1 ratkaisu:


$d_{12} = 4,\ d_{13} = 3$
F_1
F_2
F_3
$PF_1 - PF_2 = d_{12}$
$PF_1 - PF_3 = d_{13}$
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12

2 ratkaisua:

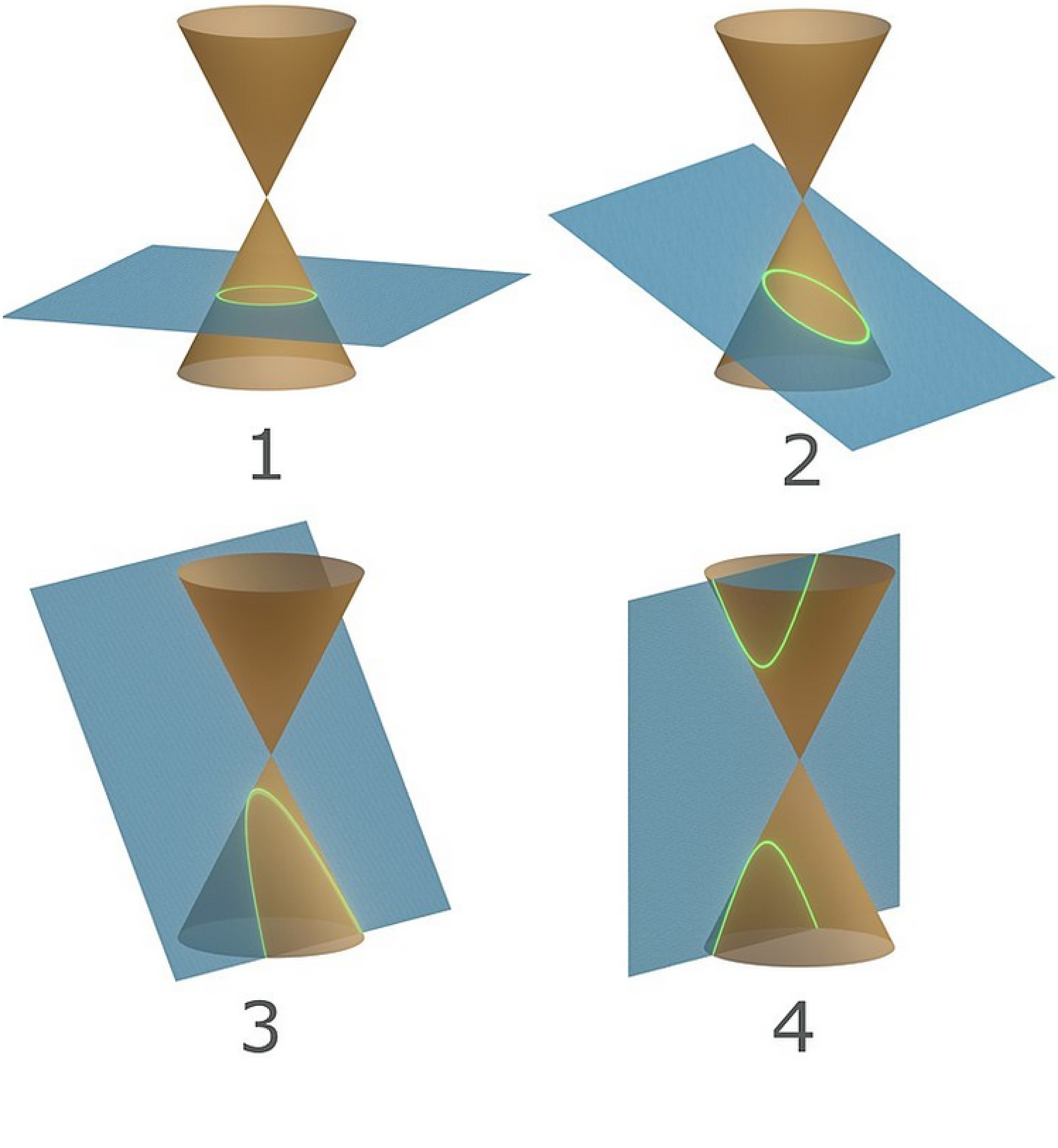


0 ratkaisua:



$d_{12} = 5.7,\ d_{13} = 5.1$
F_1
F_2
F_3
$PF_1 - PF_2 = d_{12}$
$PF_1 - PF_3 = d_{13}$
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
0
2
4
6
8
10

Huom: Paraabeli, ellipsi ja hyperbeli ovat kartioleikkauksia (conic section) eli ne syntyvät tason ja kartion leikkauksena



Dandelin spheres: