1. Lue kuva.png $m \times n$-matriisiksi M ja etsi siitä reunoja muodostamalla $(m-2)\times(n-2)$-matriisi K, joka sisältää M:n alkioiden ja niiden neljän naapurialkion keskiarvojen erotukset, eli

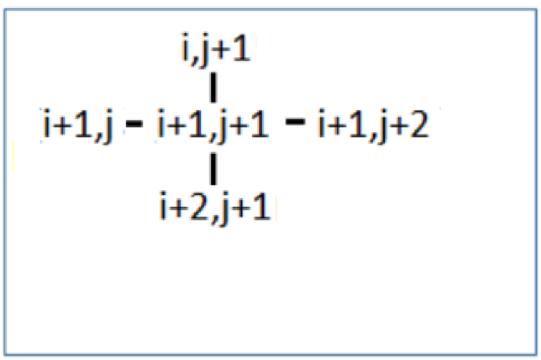
$$K(i,j) = M(i+1,j+1) - \frac{1}{4}\left(M(i+1,j) + M(i+1,j+2) + M(i,j+1) + M(i+2,j+1)\right)$$

eli

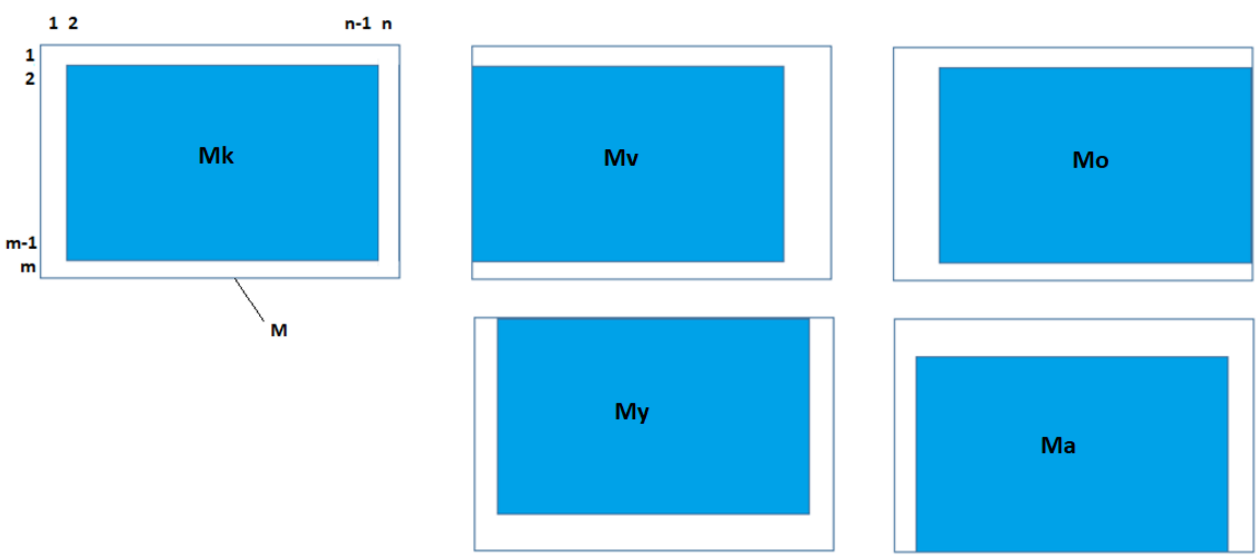
$$K(1,1) = M(2,2) - \frac{1}{4}\left(M(2,1) + M(2,3) + M(1,2) + M(3,2)\right)$$

$$K(1,2) = M(2,3) - \frac{1}{4}\left(M(2,2) + M(2,4) + M(1,3) + M(3,3)\right)$$

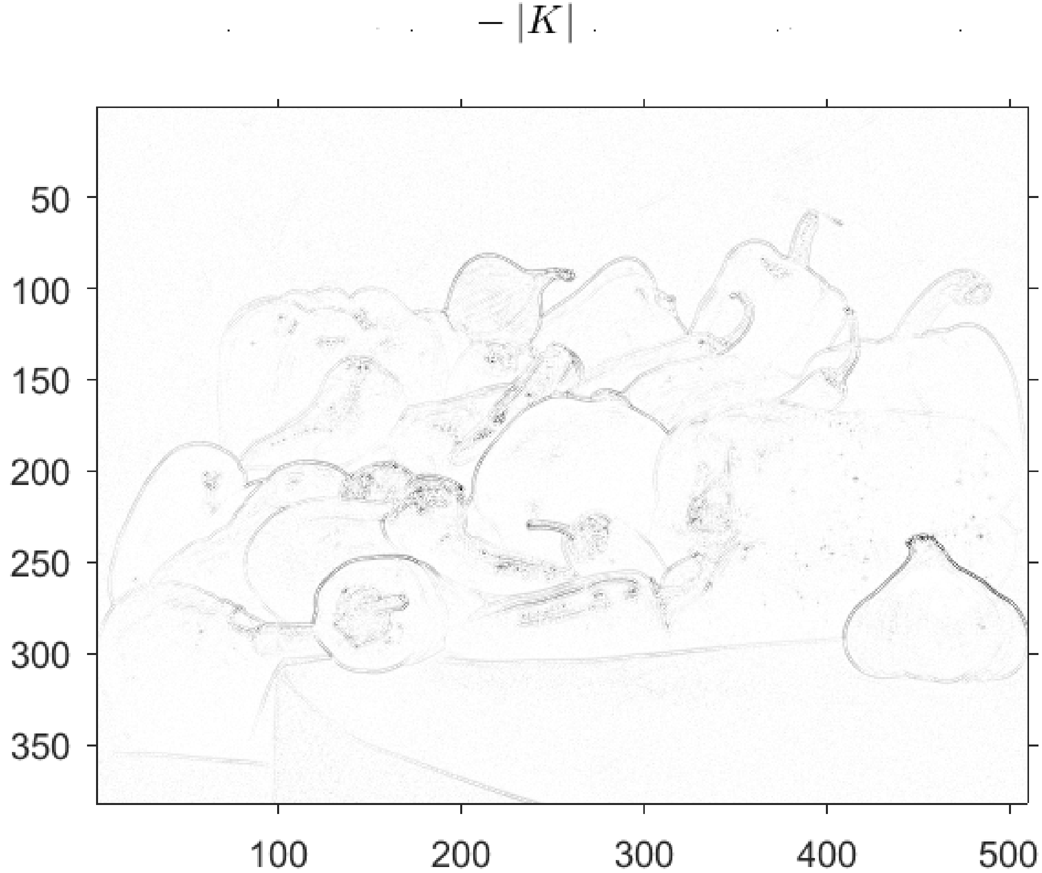
jne



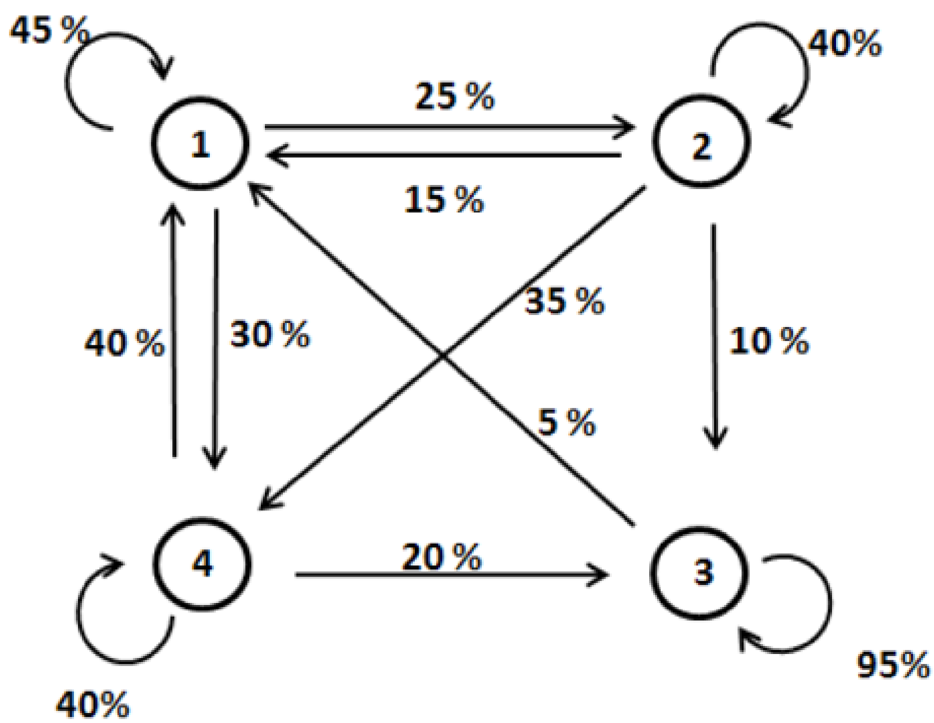
käyttämällä allaolevia $(m-2)\times(n-2)$-matriiseja Mk, Mv, Mo, My, Ma



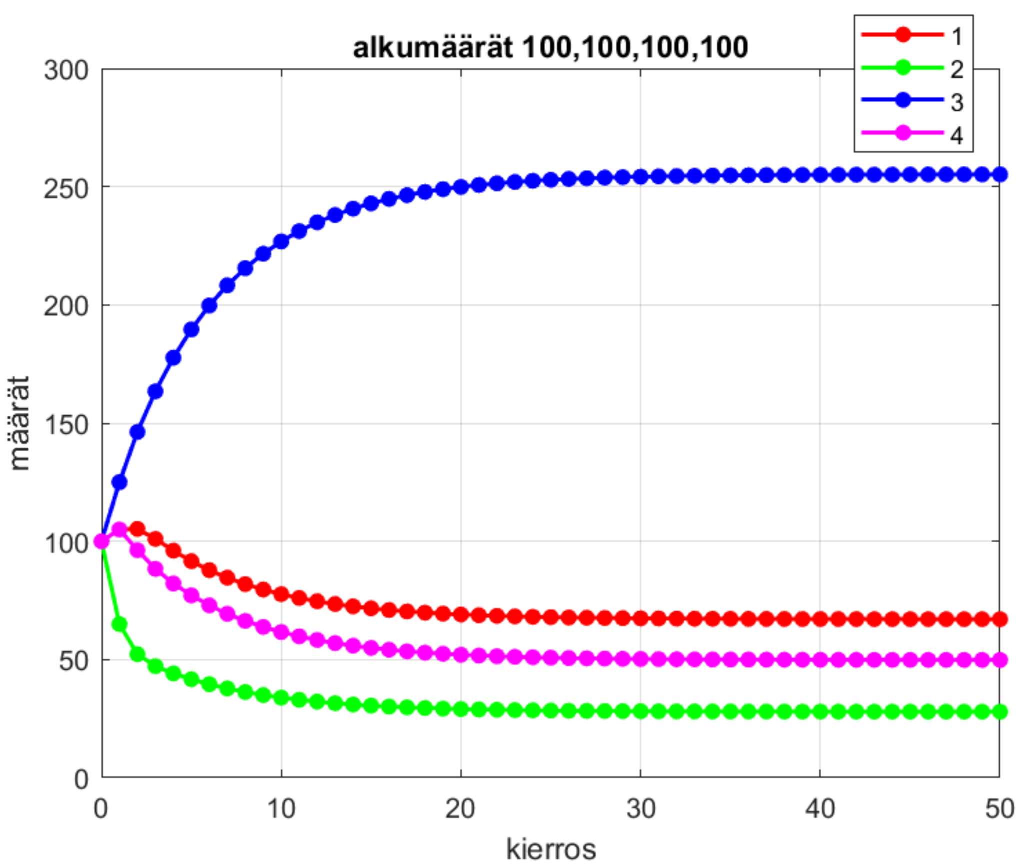
Piirrä kuva matriisista $-|K|$



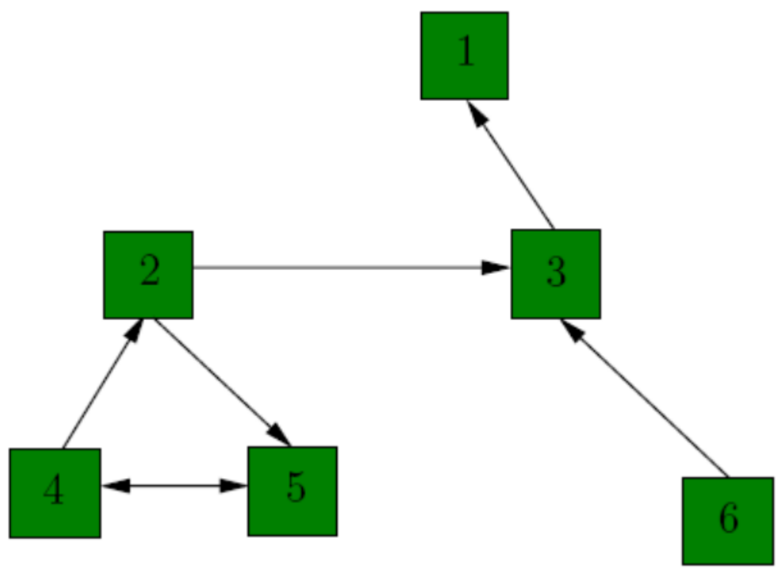
2. Tee laskelma, jolle annetaan allaolevan sekoituksen alkumäärät, ja joka laskee määrät vaikkapa 50 kierroksen ajalta



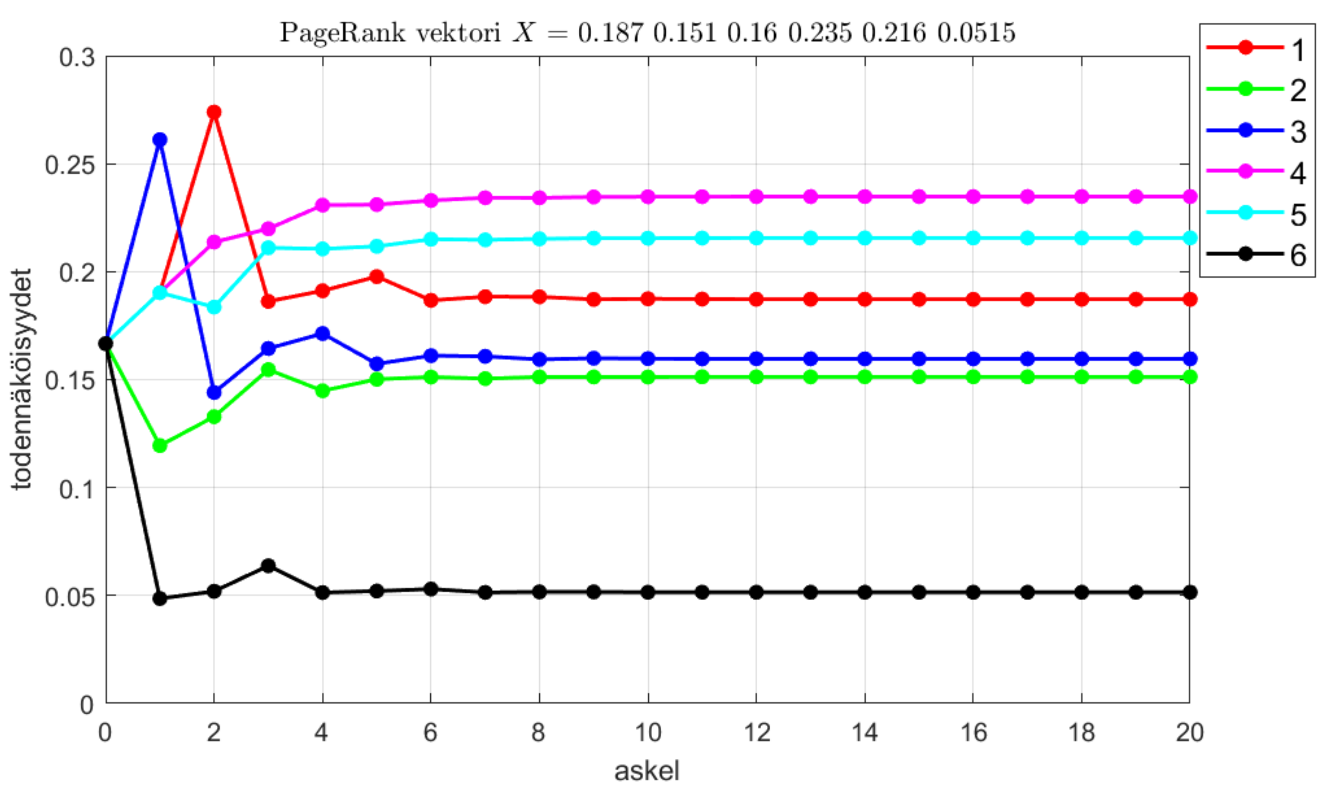
ja piirtää allaolevan näköisen kuvan



3. Muodosta allaolevan webin PageRank-matriisi P ($d = 0.85$) ja laske satunnaisen surffailijan todennäköisyydet olla sivuilla 1-6 vaikkapa 20 askeleen ajalta, kun aloitussivu valitaan umpimähkään eli alkutodennäköisyydet ovat 1/6, ja PageRank-vektori X niin, että $PX = X$



ja piirrä allaolevan näköinen kuva



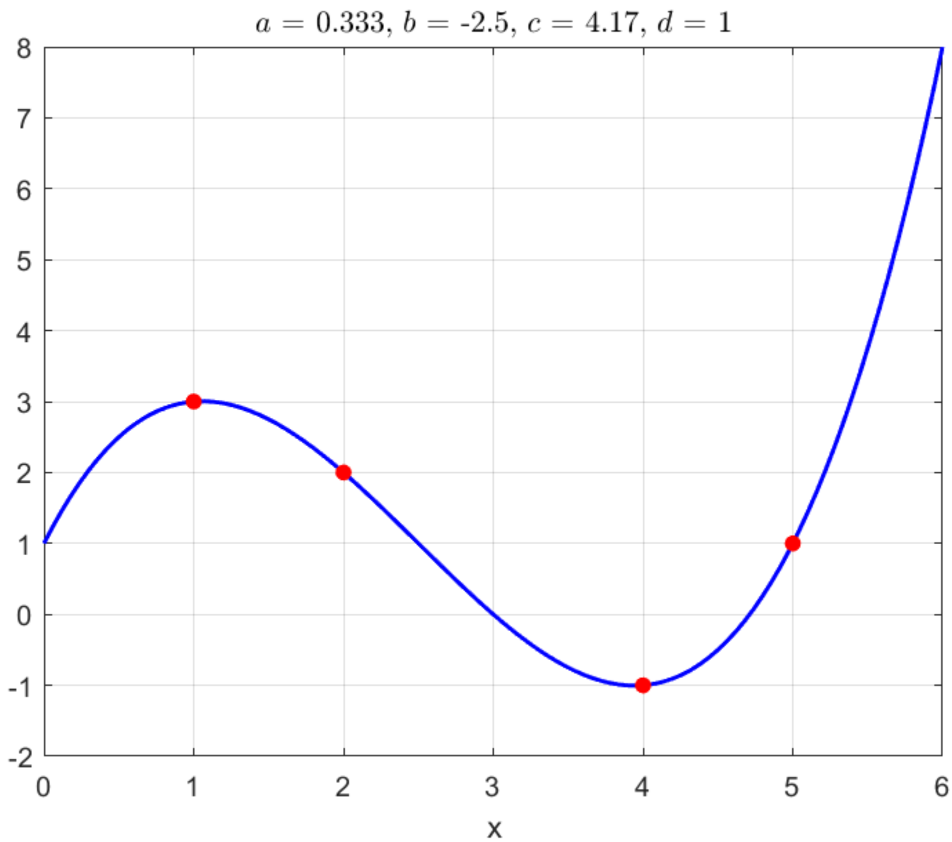
4. Tee laskelma, joka etsii annettujen pisteiden $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$ ja $[x_4, y_4]$ kautta kulkevan kolmannen asteen polynomin

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

kertoimet $a - d$ ratkaisemalla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = y_2 \\ ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d = y_3 \\ ax_4^3 + bx_4^2 + cx_4 + d = y_4 \end{cases}$$

ja piirtää allaolevan näköisen kuvan



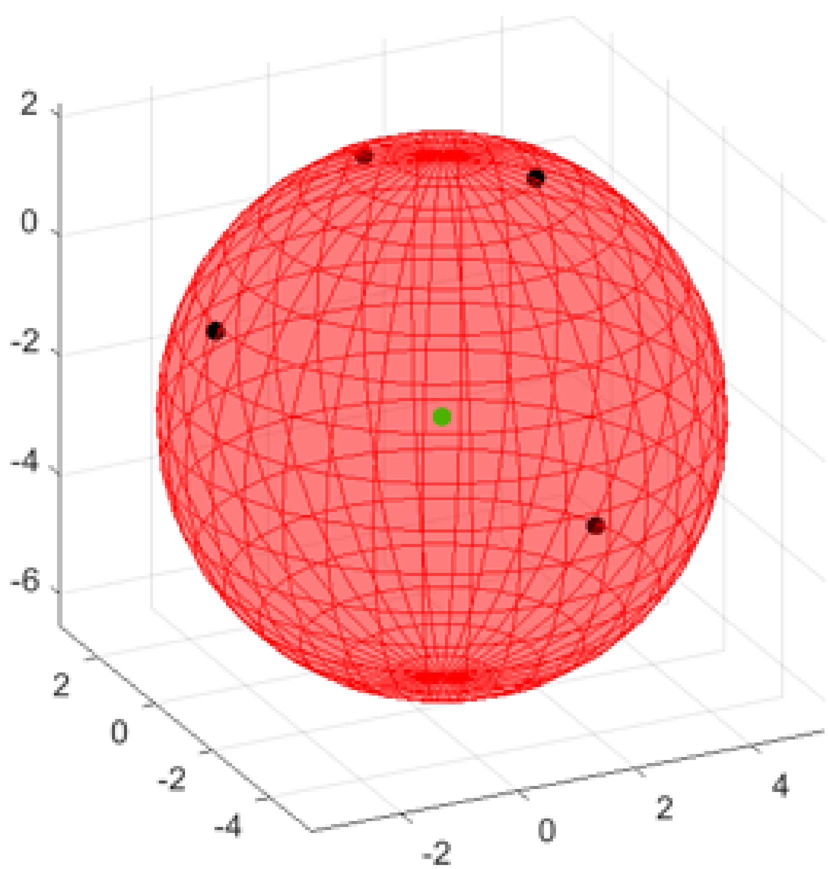
5. Tee laskelma, joka etsii annettujen pisteiden

$$P_1 = [x_1, y_1, z_1],\ P_2 = [x_2, y_2, z_2], P_3 = [x_3, y_3, z_3],\ P_4 = [x_4, y_4, z_4]$$

kautta kulkevan pallon keskipisteen $[x_0, y_0, z_0]$ ratkaisemalla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = r^2 \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 = r^2 \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2 = r^2 \\ (x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2 + (z_4 - z_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

ja piirtää allaolevan näköisen kuvan



ohje: vähennä neljäs yhtälö kolmesta ensimmäisestä $\rightarrow$ lineaarinen yhtälöryhmä keskipisteen koordinaateille

6. 3D-paikannus, 4 tukiasemaa, tapa 1

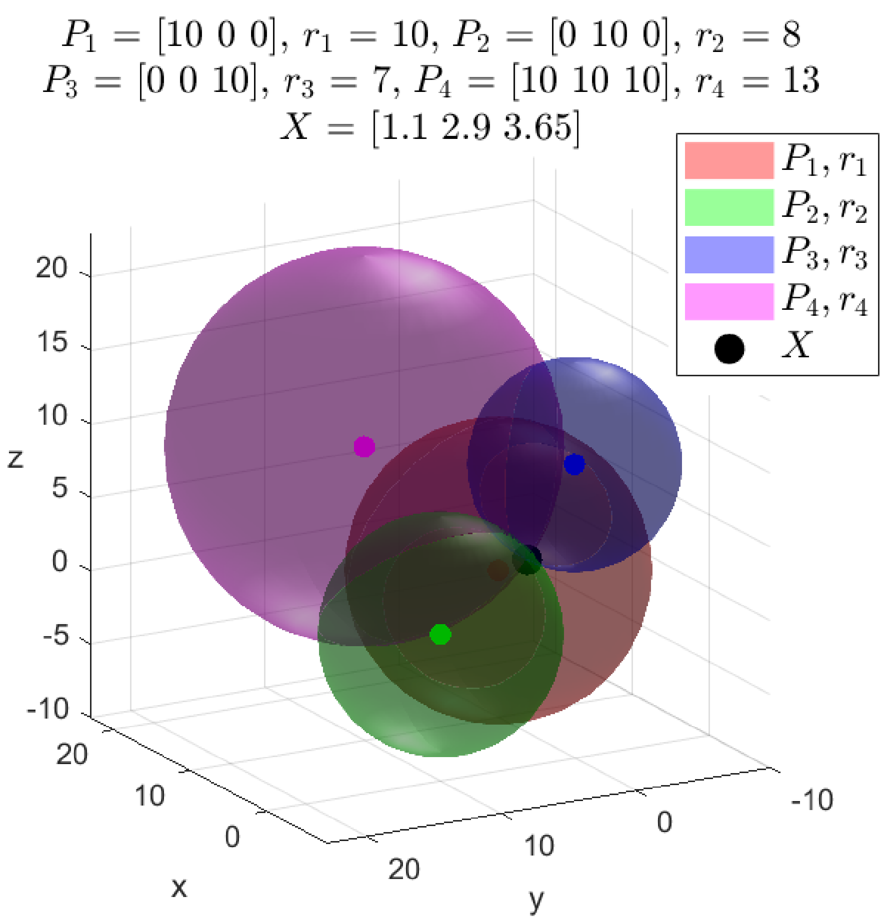
Tee laskelma, jolle annetaan 3D-tukiasemat

$P_1 = [x_1, y_1, z_1], P_2 = [x_2, y_2, z_2], P_3 = [x_3, y_3, z_3], P_4 = [x_4, y_4, z_4]$

ja mitatut etäisyydet r_1, r_2, r_3, r_4 pisteeseen $P = [x, y, z]$, ja joka etsii P:n koordinaateille likiarvot etsimällä yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_2^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_3^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = r_4^2 \end{cases}$$

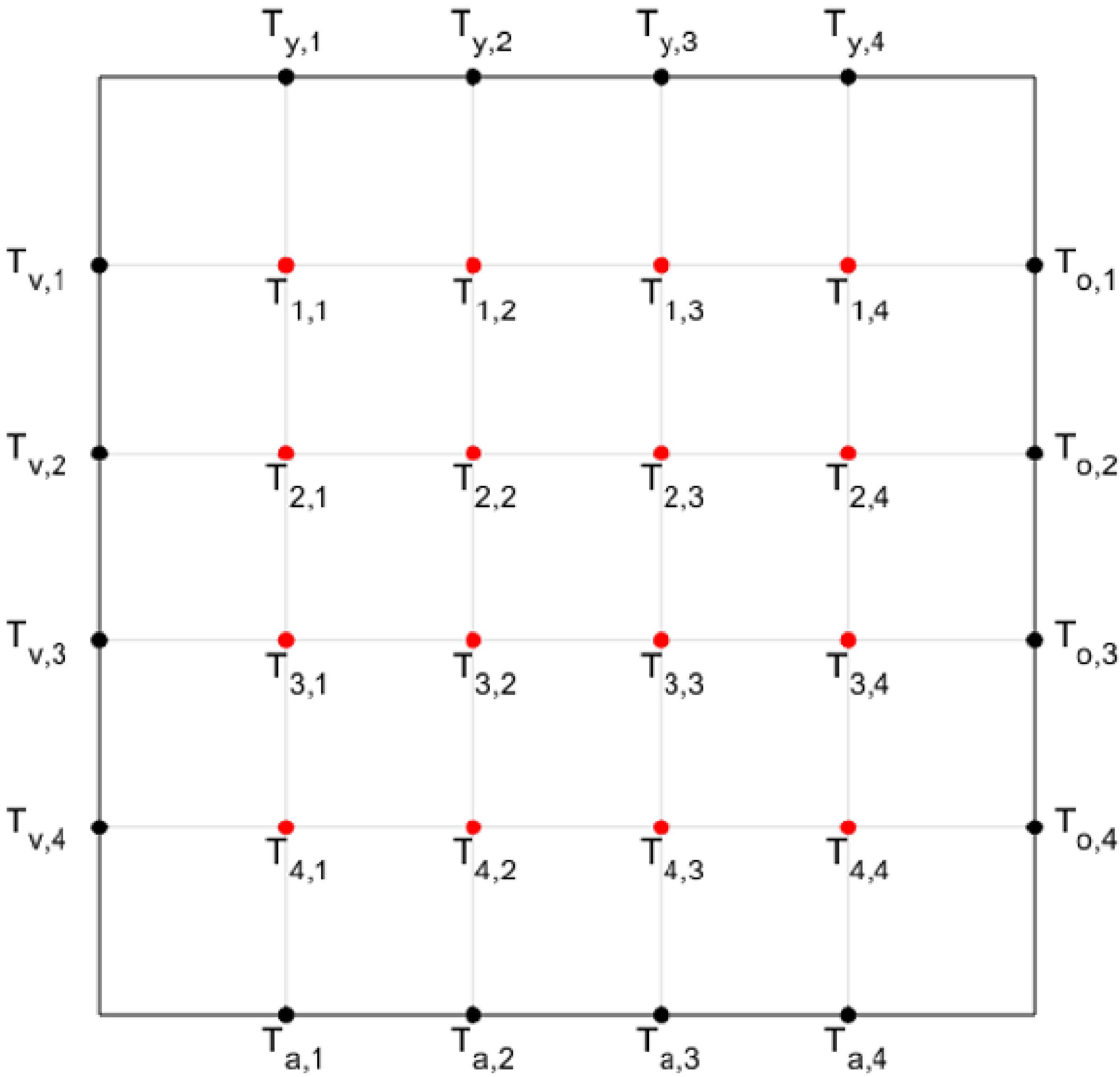
likiarvoratkaisun X vähentämällä neljäs yhtälö kolmesta ensimmäisestä ($\rightarrow$ lineaarinen yhtälöryhmä x:lle, y:lle ja z:lle), ja piirtää allaolevan näköisen kuvan



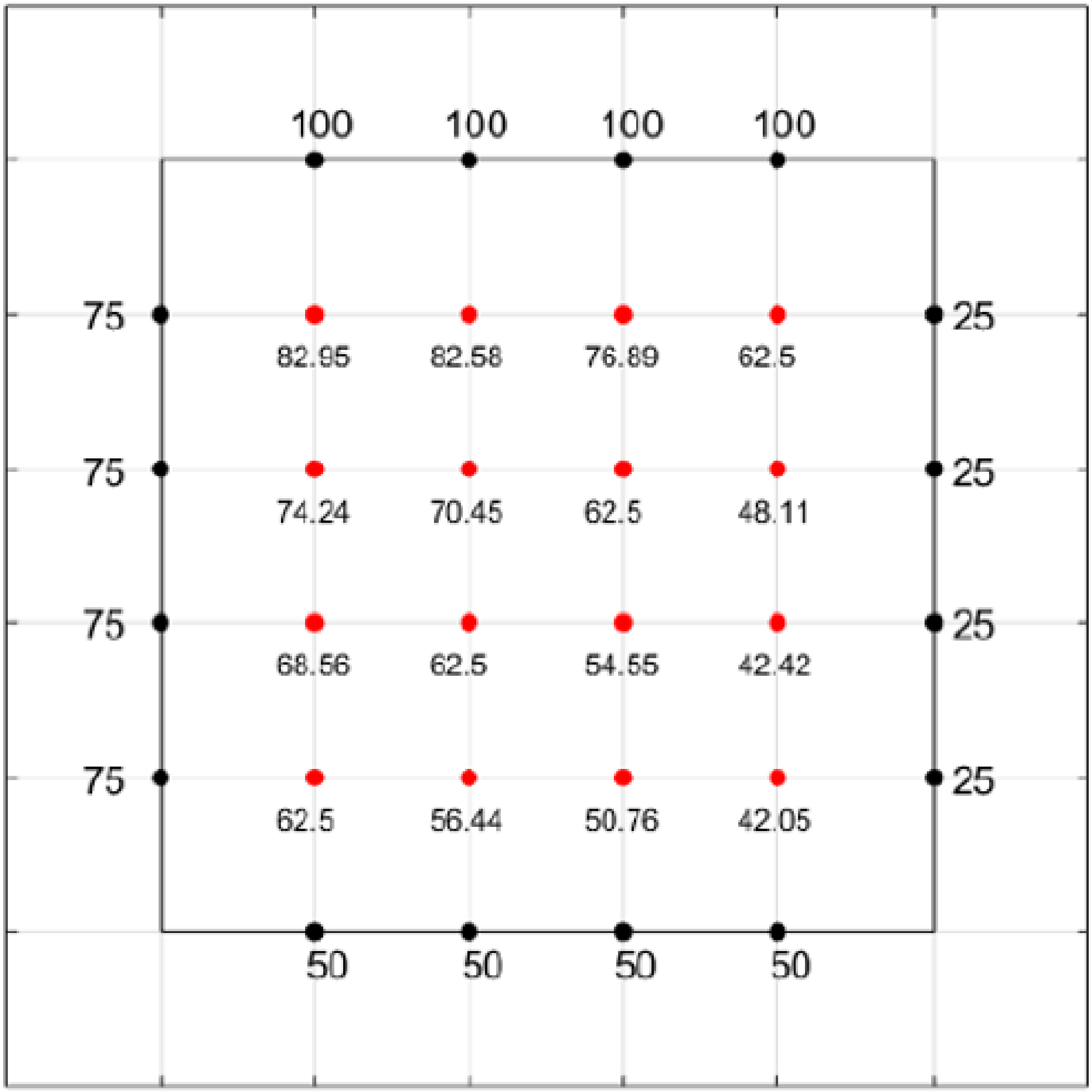
7. Tee laskelma, jolle annetaan levyn reunojen lämpötilat

$$Ty = [T_{y1}, T_{y2}, T_{y3}, T_{y4}],\ Tv = [T_{v1}, T_{v2}, T_{v3}, T_{v4}]$$
$$To = [T_{o1}, T_{o2}, T_{o3}, T_{o4}],\ Ta = [T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}, T_{a4}]$$

ja joka muodostaa keskiarvoperiaatteen perusteella lämpötiloille $T_{11} - T_{44}$ yhtälöryhmän, ratkaisee sen



ja piirtää allaolevan näköisen kuvan



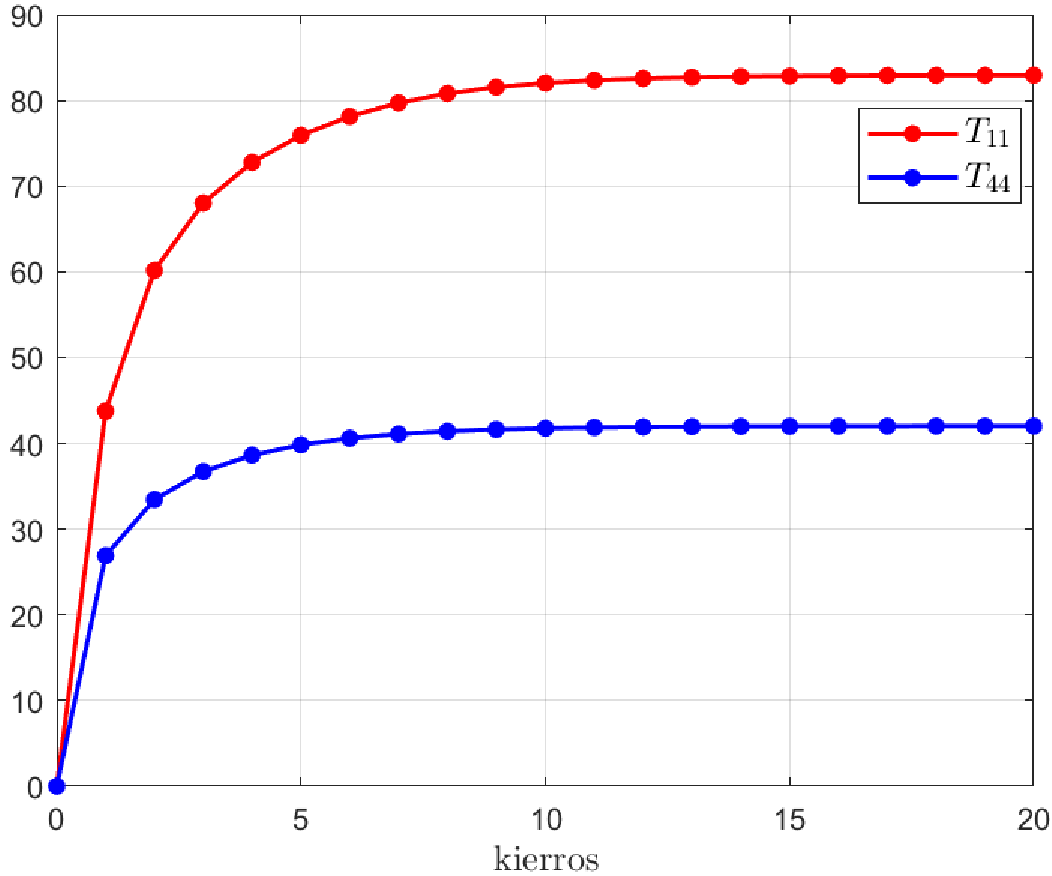
8. Tee laskelma, joka laskee harj7:n lämpötilat $T_{11} - T_{44}$ suoraan keskiarvoperiaatteen avulla seuraavasti:
Muodosta matriisi

$$T_{ka} = \left[\begin{array}{c|cccc|c} T_{v,y} & T_{y,1} & T_{y,2} & T_{y,3} & T_{y,4} & T_{o,y} \\ \hline T_{v,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{o,1} \\ T_{v,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{o,2} \\ T_{v,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{o,3} \\ T_{v,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{o,4} \\ \hline T_{v,a} & T_{a,1} & T_{a,2} & T_{a,3} & T_{a,4} & T_{o,a} \end{array}\right]$$

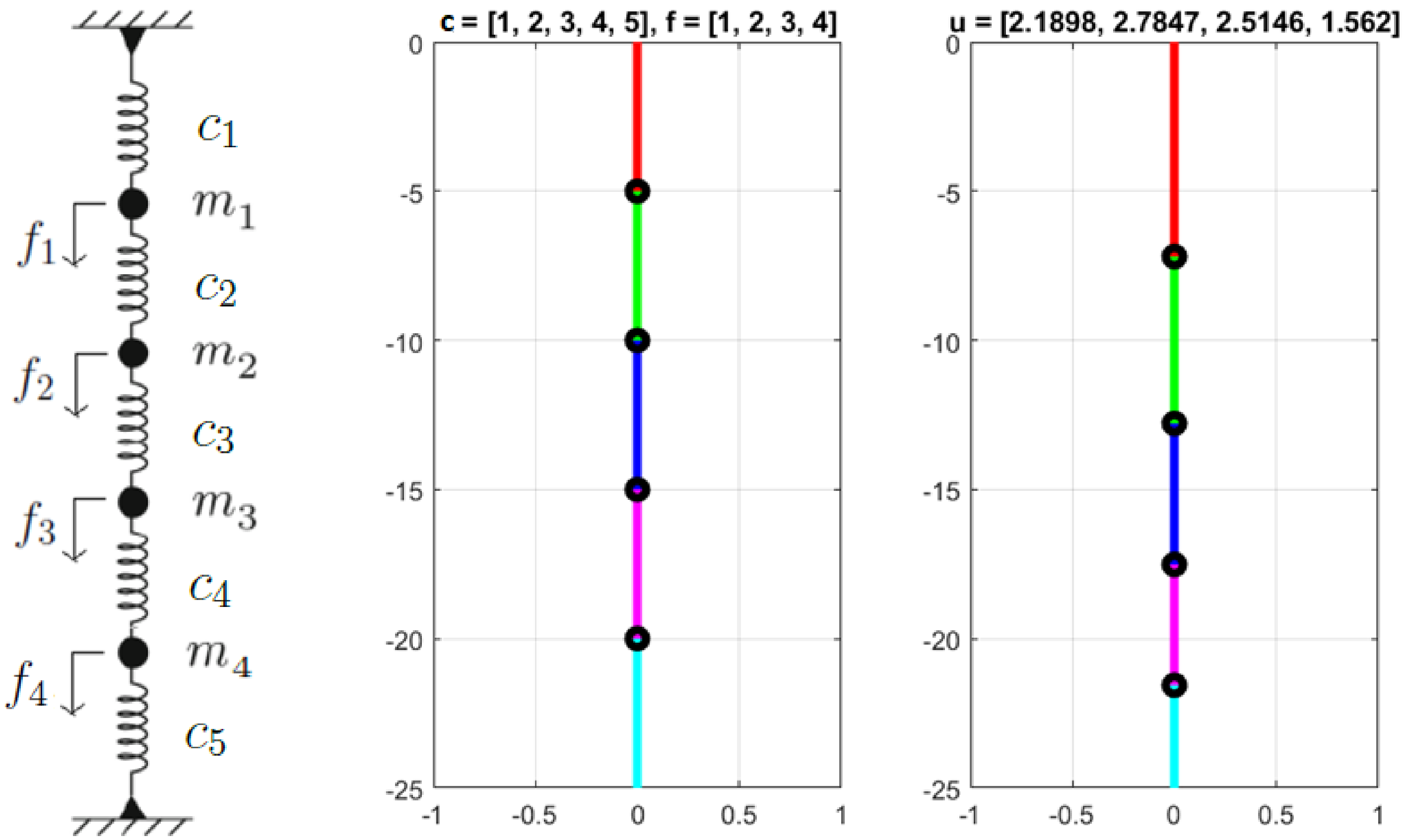
eli aluksi lämpötilat ovat $= 0$, nurkka-arvot voivat olla mitä tahansa.
Laske uudet arvot T_{11}:stä alkaen keskiarvoperiaatteella kahdella for-silmukalla:

for $r = 2:5$
for $s = 2:5$
$T_{ka}(r, s)$=neljän naapuriarvon keskiarvo
end
end

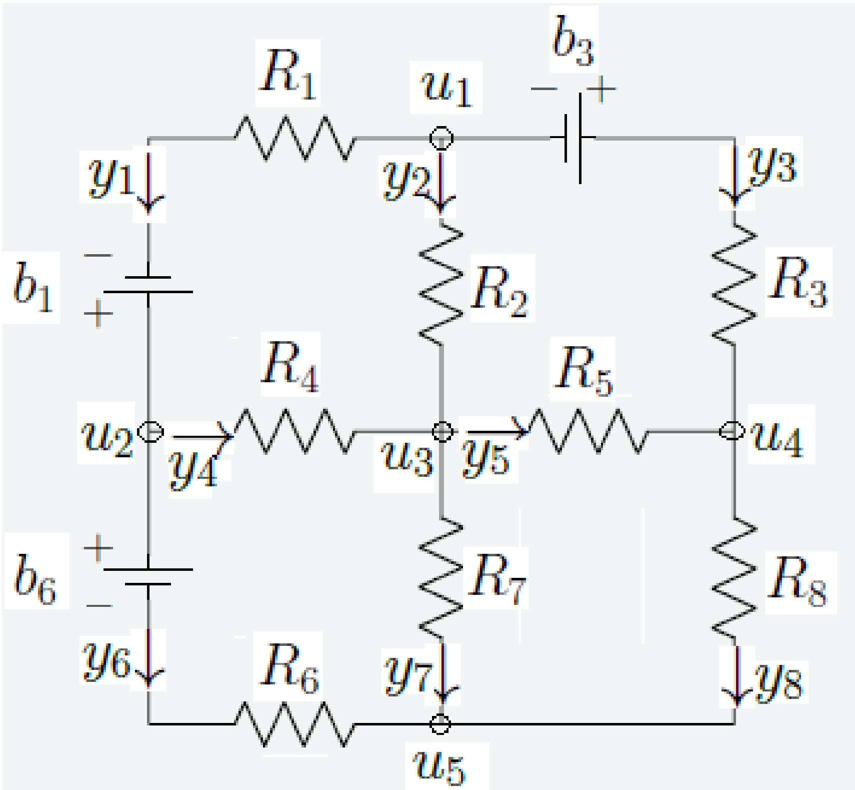
Kun tätä toistetaan tarpeeksi monta kierrosta, niin lämpötilojen arvot lähestyvät tarkkoja arvoja. Vakuuttaudu tästä keräämällä silmukassa vaikkapa lämpötilojen T_{11} ja T_{44} arvoja talteen ja piirrä allaolevan näköinen kuva

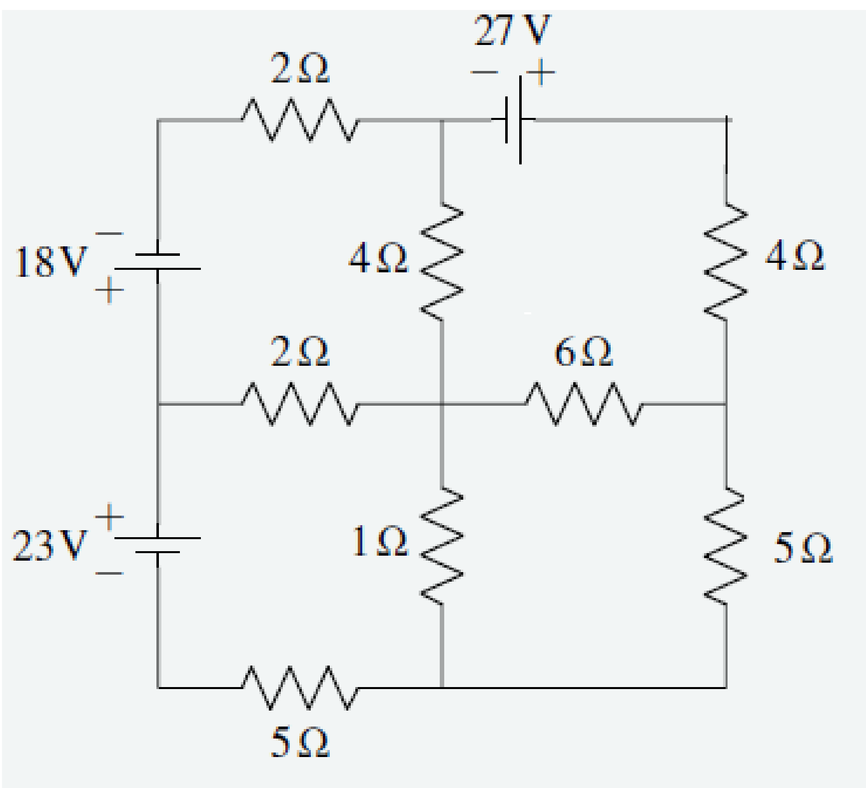


9. Tee laskelma, jolle annetaan jousivakiot $c_1 - c_5$ ja voimat $f_1 - f_4$, ja joka ratkaisee massojen $m_1 - m_4$ liikkeet $u_1 - u_4$ ja piirtää allaolevan näköisen kuvan



10. Tee laskelma, jolle annetaan allaolevan virtapiirin resistanssit $R_1 - R_8$ ja patterijännitteet b_1, b_3, b_6, ja joka ratkaisee piuhoissa $1 - 8$ kulkevat virrat $y_1 - y_8$






```
y =

    0.2500
   -2.7500
    2.5000
    3.2500
   -1.0000
   -3.0000
    1.5000
    1.5000
```

11. Heittoliike, lähtökorkeus h, -nopeus v_0 ja -kulma α. Lentorata on paraabeli $y = ax^2 + bx + h$, missä

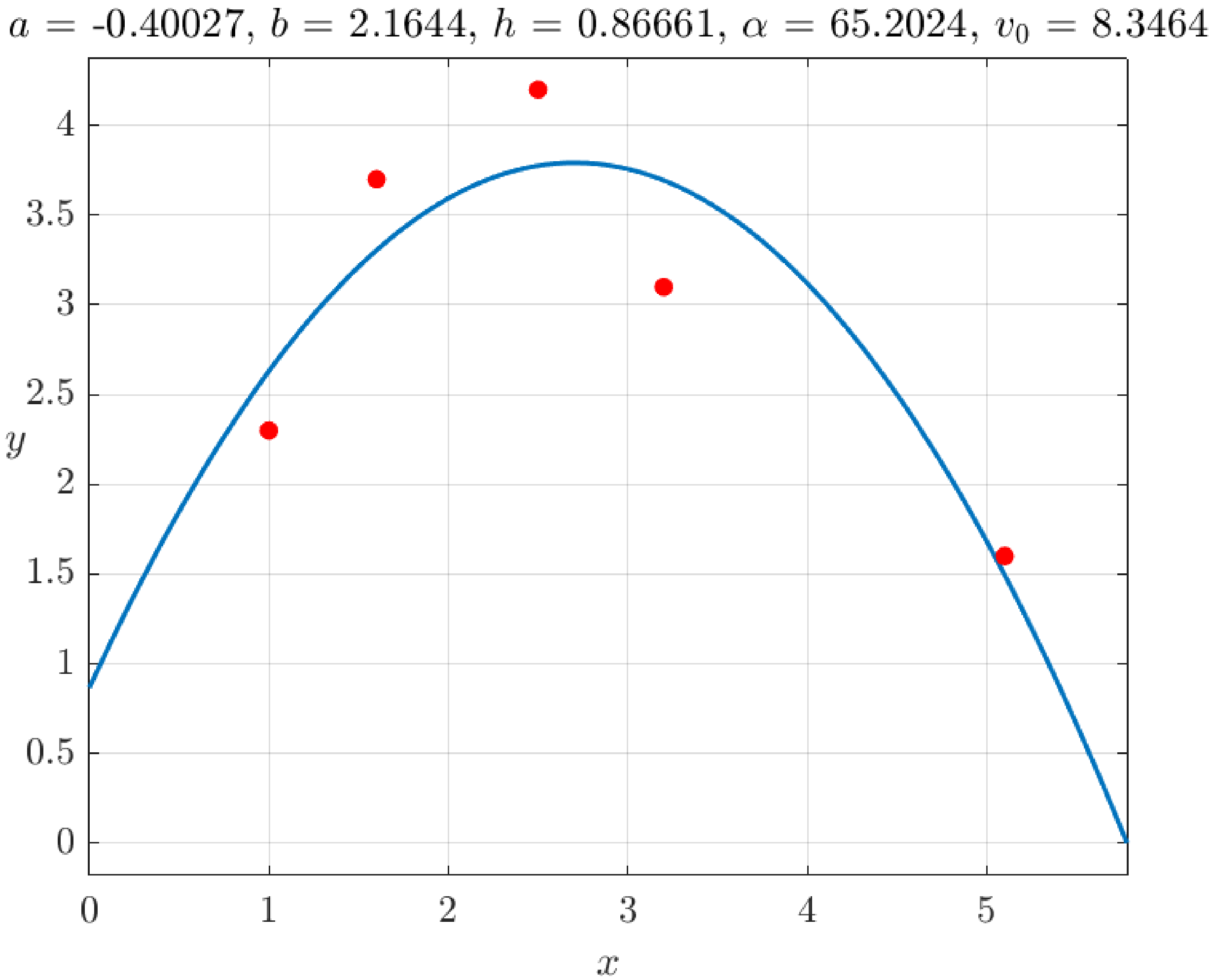
$$a = -\frac{g}{2(v_0 \cos(\alpha))^2}, \quad g = 9.81, \quad b = \tan(\alpha)$$

Etsi a, b ja h PNS-menetelmällä mittaustulosten

x	y
1.0	2.3
1.6	3.7
2.5	4.2
3.2	3.1
5.1	1.6

perusteella, laske niiden avulla α ja v_0

ja piirrä allaolevan näköinen kuva



12. 3D-paikannus, 4 tukiasemaa, tapa 2

Tee laskelma, jolle annetaan 3D-tukiasemat

$P_1 = [x_1, y_1, z_1], P_2 = [x_2, y_2, z_2], P_3 = [x_3, y_3, z_3], P_4 = [x_4, y_4, z_4]$

ja mitatut etäisyydet r_1, r_2, r_3, r_4 pisteeseen $P = [x, y, z]$, ja joka etsii P:n koordinaateille likiarvot seuraavasti:

Arvataan ensin P:n sijainniksi X_1 ja lasketaan sen etäisyydet

$R_1 = ||X_1P_1||,\ R_2 = ||X_1P_2||,\ R_3 = ||X_1P_3||,\ R_4 = ||X_1P_4||$

tukiasemiin

Muodostetaan yksikkövektorit

$$\mathbf{a}_1 = \frac{X_1P_1}{R_1},\ \mathbf{a}_2 = \frac{X_1P_2}{R_2},\ \mathbf{a}_3 = \frac{X_1P_3}{R_3},\ \mathbf{a}_4 = \frac{X_1P_4}{R_4}$$

joiden suunnat ovat X_1:stä tukiasemiin

Korjataan arvausta seuraavasti:

$$X_1 = [x_1, y_1, z_1] \rightarrow X_2 = [x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, z_1 + \Delta z]$$

missä korjaus

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

on yhtälöryhmän $A\Delta X = B$ PNS-ratkaisu, kun matriisin A riveinä ovat yksikkövektorit $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ ja B:ssä on laskettujen ja mitattujen etäisyyksien erotukset

Toistetaan: $X_2 \to X_3 \to X_4 \to \ldots$, kunnes arvio ei enää muutu eli korjausaskeleen pituus $\|\Delta X\| \approx 0$

```
P1 =  10      0      0      r1  =  10

P2 =   0     10      0     r2  =   8

P3 =   0      0     10      r3  =  7

P4 =  10     10     10     r4  =  13

X =   1.1370     2.9314     3.6852
```

Piirrä myös allaolevan näköinen kuva, jossa näkyvät pallot P_1, r_1, P_2, r_2, P_3, r_3 ja P_4, r_4, ja rata $X_1, X_2, X_3, \ldots$