Ympyröiden lp

Ympyröiden leikkauspiste x, y:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r_1^2 \\ \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

poistetaan sulut:

$$\begin{cases} x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 = r_1^2 \quad (1) \\ \\ x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 = r_2^2 \quad (2) \end{cases}$$

Vähennetään (1) − (2):

$$2(x_2-x_1)x + (x_1^2 - x_2^2) + 2(y_2-y_1)y + (y_1^2 - y_2^2) = r_1^2 - r_2^2 \quad (3)$$

ratkaistaan y: jos $y_1 - y_2 \neq 0$, niin

$$y = \underbrace{\frac{-2(x_2-x_1)}{2(y_2-y_1)}}_{A} x + \underbrace{\frac{r_1^2 - r_2^2 - (x_1^2 - x_2^2) - (y_1^2 - y_2^2)}{2(y_2-y_1)}}_{B}$$

sijoitetaan (1):een

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + \underbrace{(Ax+B)^2}_{A^2x^2+2ABx+B^2} - 2y_1(Ax+B) + y_1^2 = r_1^2$$

$$\underbrace{(1+A^2)}_{a} x^2 + \underbrace{(-2x_1 + 2AB - 2y_1A)}_{b} x + \underbrace{(x_1^2 + B^2 - 2y_1B + y_1^2 - r_1^2)}_{c} = 0$$

eli

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jos $y_1 - y_2 = 0$, niin (3):sen nojalla

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)}{2(x_2 - x_1)}$$

sijoitetaan (1):een

$$y^2 - 2y_1 y + x^2 - 2x_1 x + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = 0$$

ja

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

missä

$$a = 1, \quad b = -2y_1 \quad ja \quad c = x^2 - 2x_1 x + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2$$