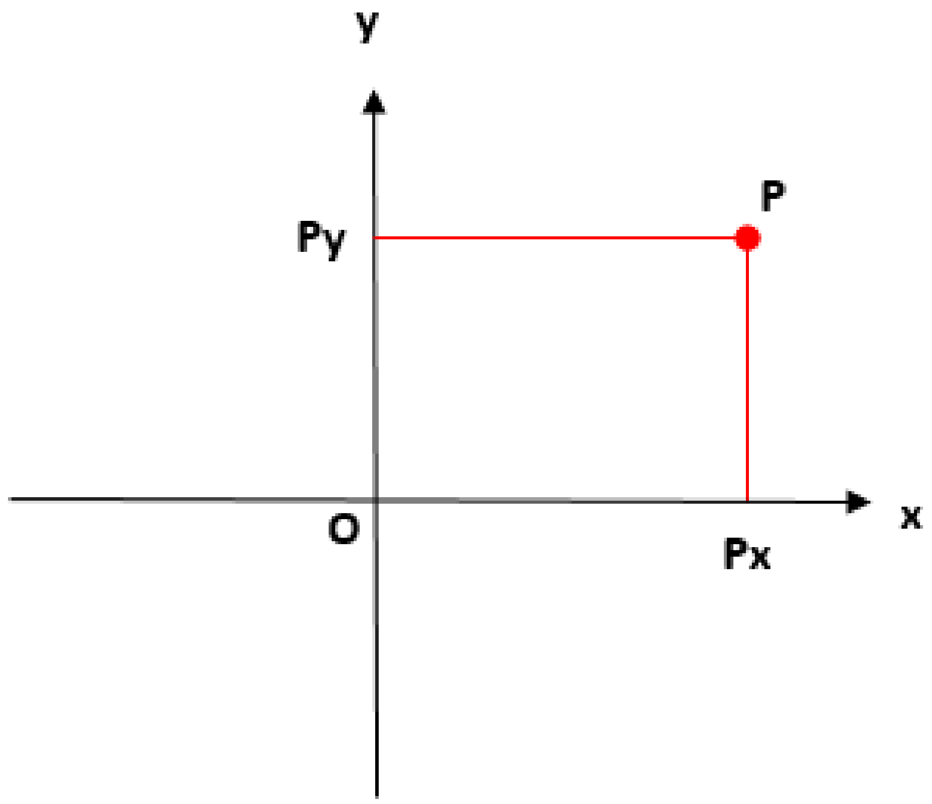
Suorakulmainen koordinaatisto

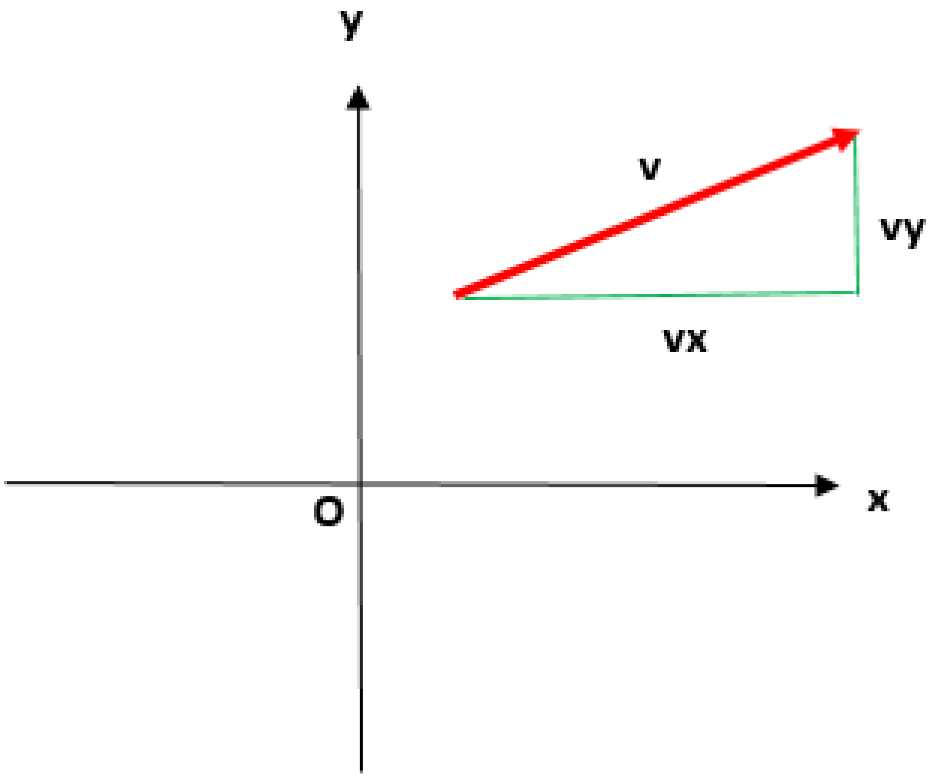


Piste $P = [Px, Py]$

koordinaatit Px ja Py.

Origo $O = [0, 0]$

Vektori $\mathrm{v} = [vx, vy]$



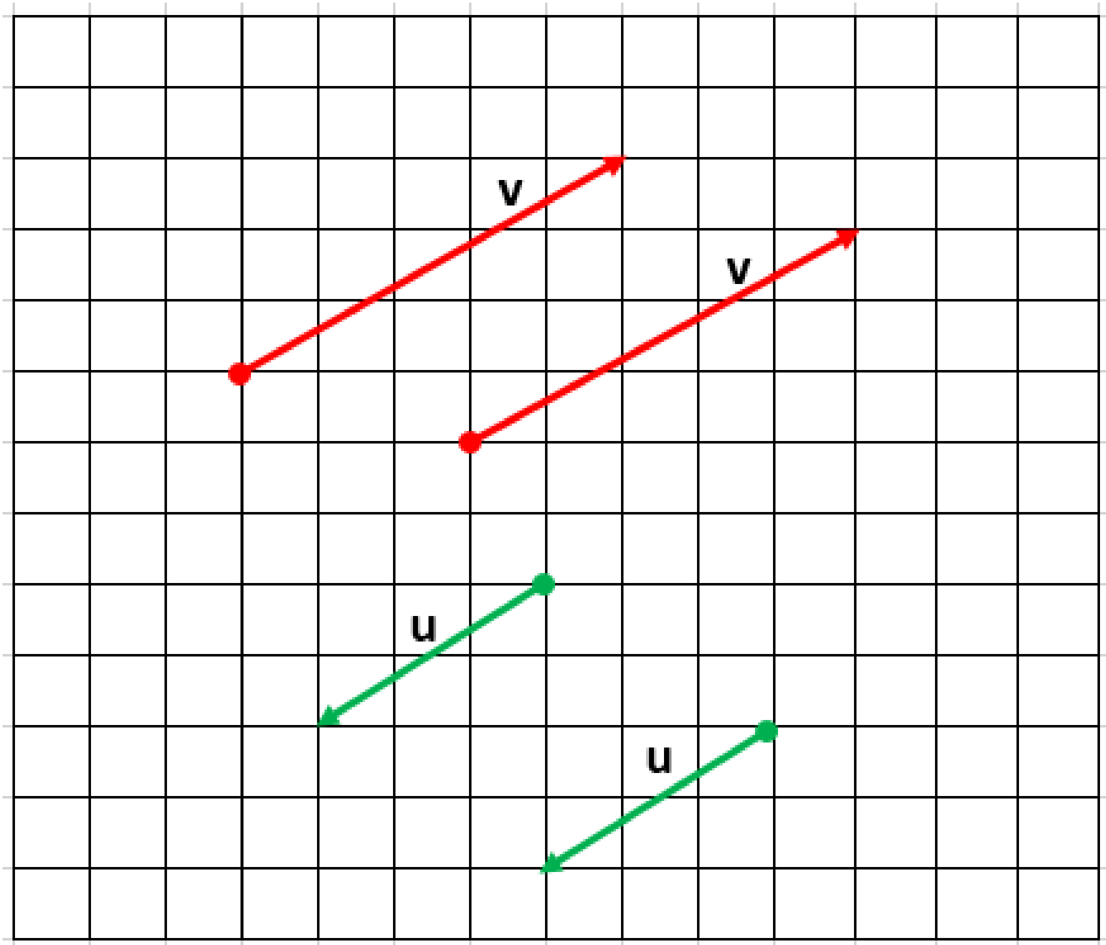
komponentit vx ja vy

geometrisesti nuoli alkupisteestä loppupisteeseen.

$\mathbf{v}$:n pituus $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(vx)^2 + (vy)^2}$

Octave/MATLAB: norm($\mathbf{v}$)

Esim:

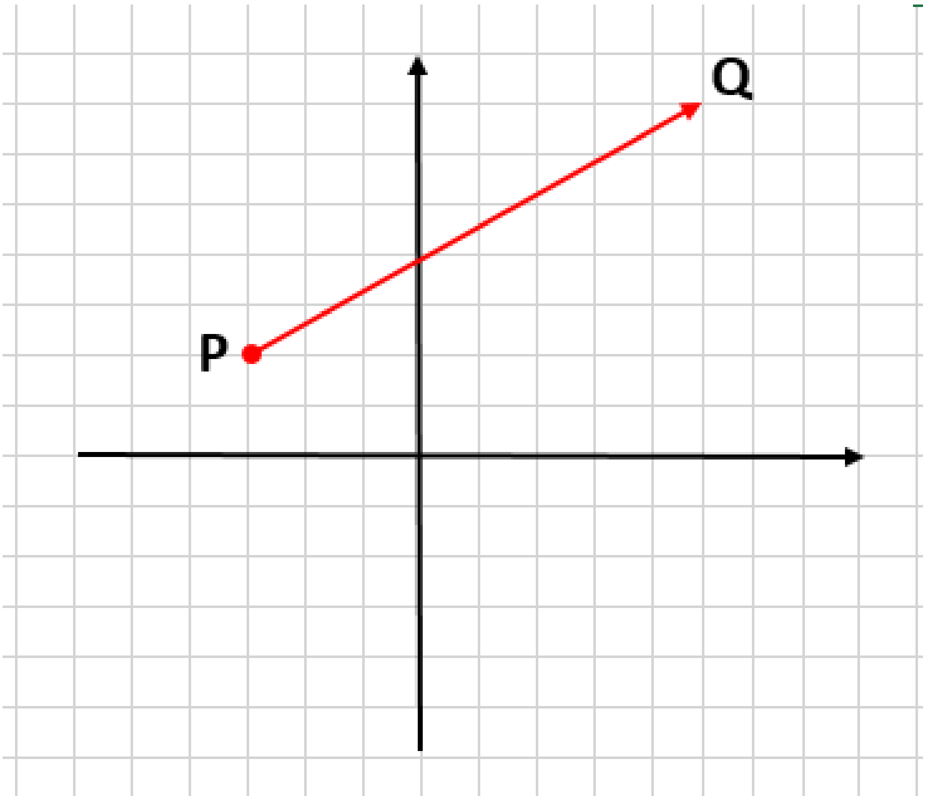


$$\mathbf{v} = [5, 3], \quad \mathbf{u} = [-3, -2]$$

ja

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{34}, \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{13}$$

Vektori $\mathbf{PQ}$ pisteestä $P = [Px, Py]$ pisteeseen $Q = [Qx, Qy]$



$$\mathbf{PQ} = Q - P = [Qx - Px, Qy - Py]$$

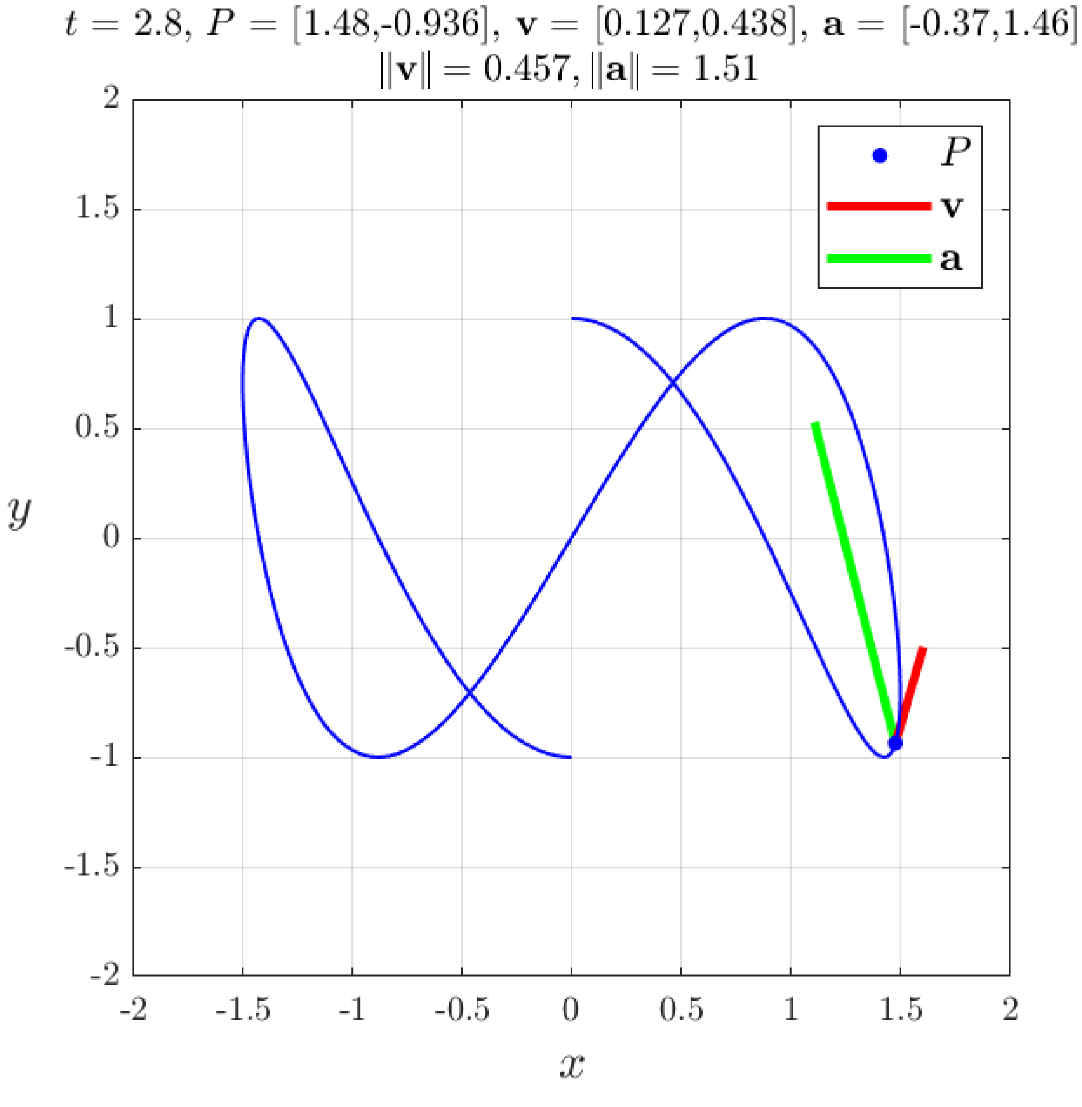
(loppu−alku)

$\mathbf{PQ}$:n pituus eli P:n ja Q:n välinen etäisyys

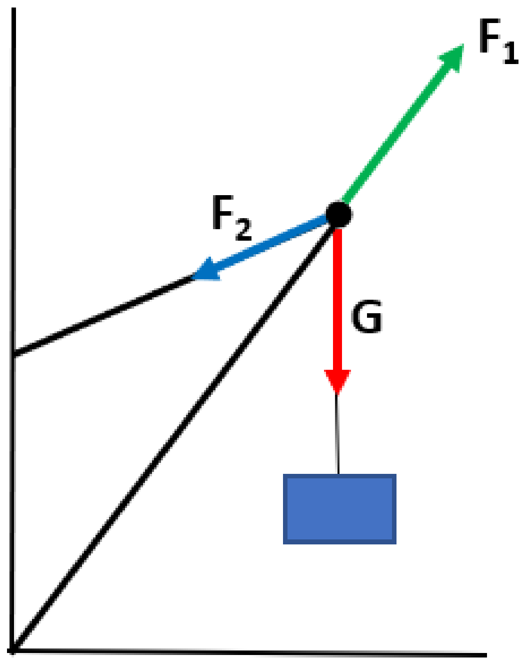
$$PQ = \|\mathbf{PQ}\| = \sqrt{(Qx - Px)^2 + (Qy - Py)^2}$$

Esim. jos $P = [-3, 2]$ ja $Q = [5, 7]$, niin $\mathbf{PQ} = [8, 5]$ ja $\|\mathbf{PQ}\| = \sqrt{91} \approx 9.4$

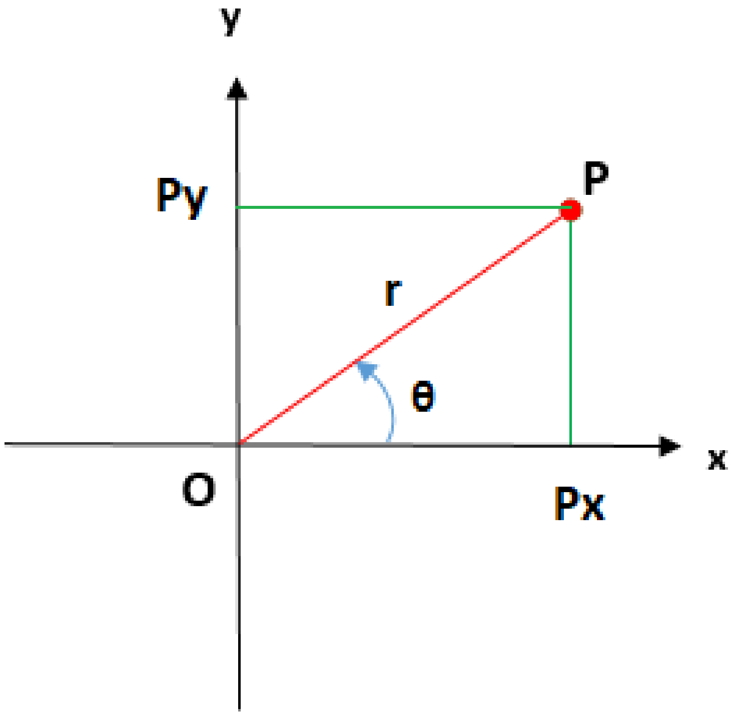
Esim: Nopeus $\mathbf{v}$, kiihtyvyys $\mathbf{a}$



Esim: Voimavektorit $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{G}$



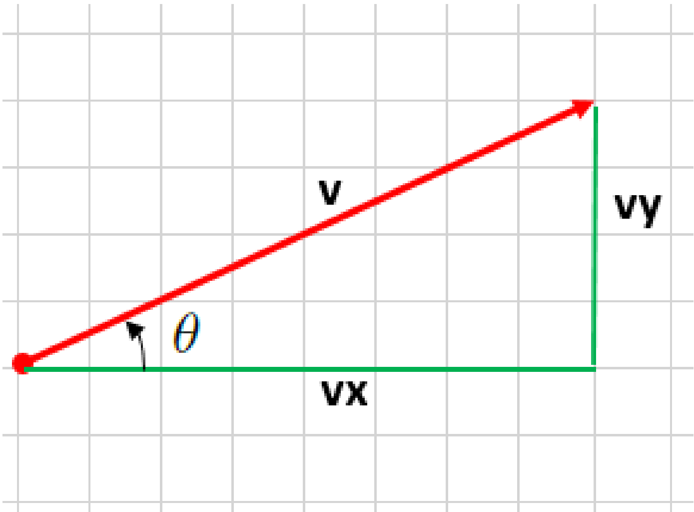
Napakoordinaatit:



$$r = \|\mathbf{OP}\| = \sqrt{(Px)^2 + (Py)^2}$$

$$\theta = \mathrm{atan2}(Py, Px) \qquad (\text{väliltä } -\pi \ldots \pi)$$

$$Px = r\cos(\theta),\ Py = r\sin(\theta)$$



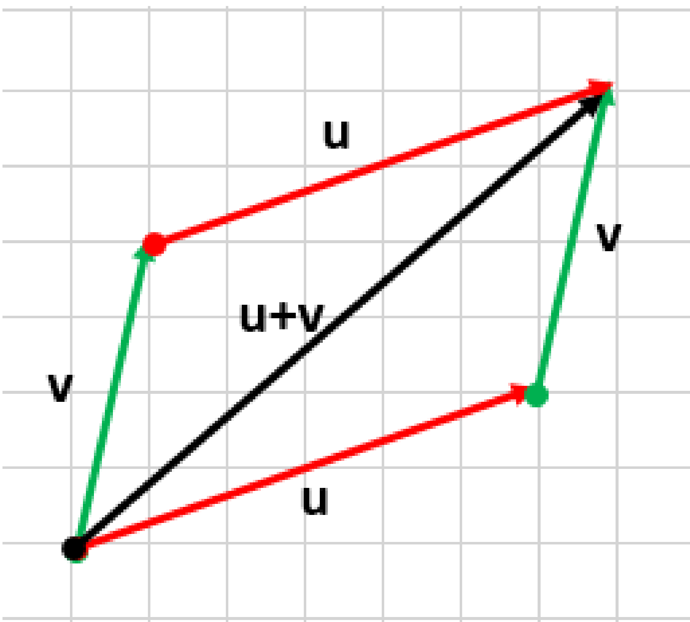
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(vx)^2 + (vy)^2}, \quad \theta = \mathsf{atan2}(vy, vx)$$

$$vx = \|\mathbf{v}\| \cos(\theta), \quad vy = \|\mathbf{v}\| \sin(\theta)$$

Laskutoimitukset

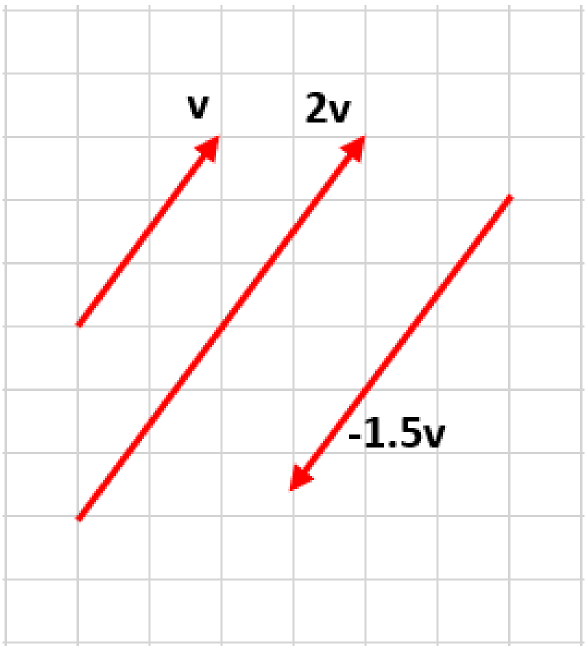
Yhteenlasku:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [ux + vx,\, uy + vy]$$



Luvulla kertominen:

$$t\mathbf{v} = t * \mathbf{v} = [t * vx,\, t * vy]$$



$t\mathbf{v}$ on $\mathbf{v}$:n kanssa

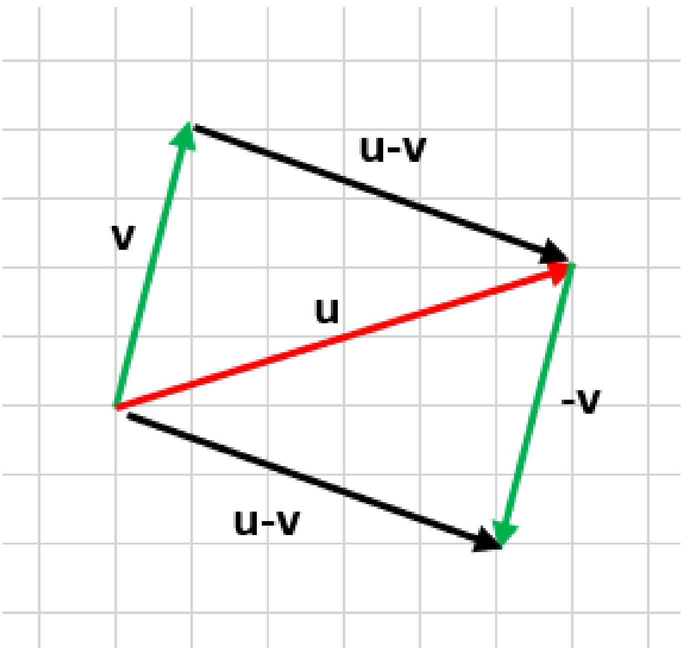
samansuuntainen, jos $t > 0$

vastakkaisuuntainen, jos $t < 0$

pituus $\|t\mathbf{v}\| = |t| * \|\mathbf{v}\|$

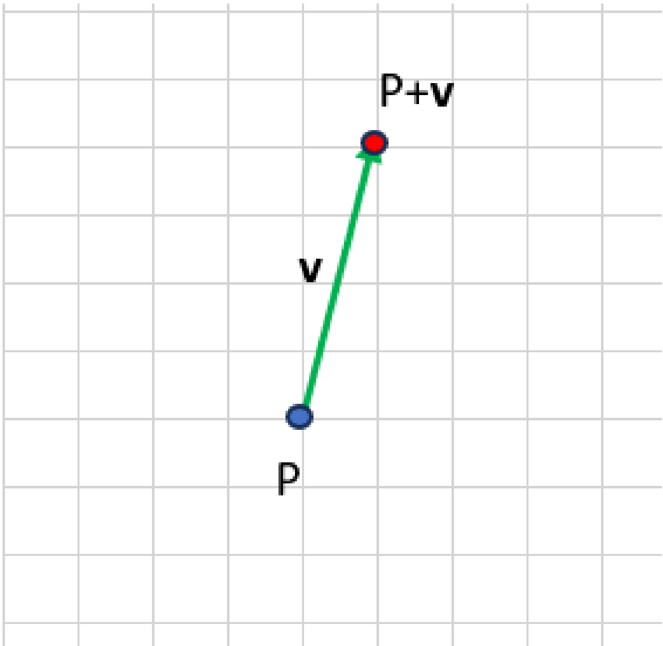
Huom: vähennyslasku

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = [ux - vx, uy - vy] = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$



Huom: piste + vektori = piste

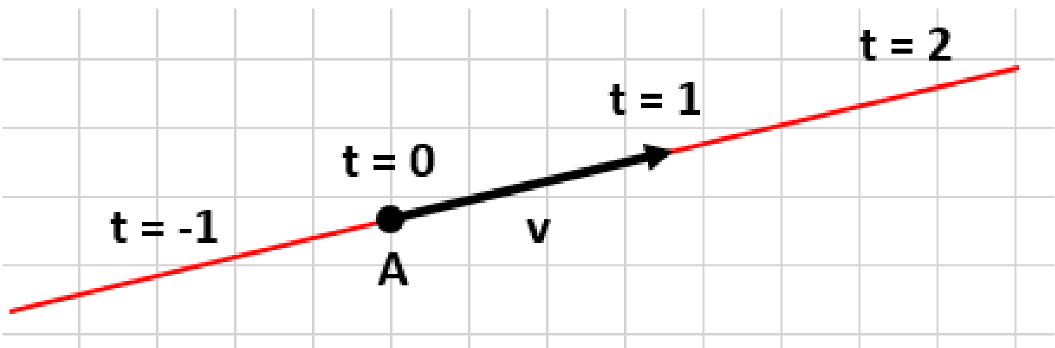
$$P + \mathbf{v} = [Px + vx, Py + vy]$$



Esim: Suoran parametrimuoto:

Pisteen $A = [Ax, Ay]$ kautta kulkevalla, vektorin $\mathbf{v} = [vx, vy]$ suuntaisella suoralla $A, \mathbf{v}$ ovat pisteet

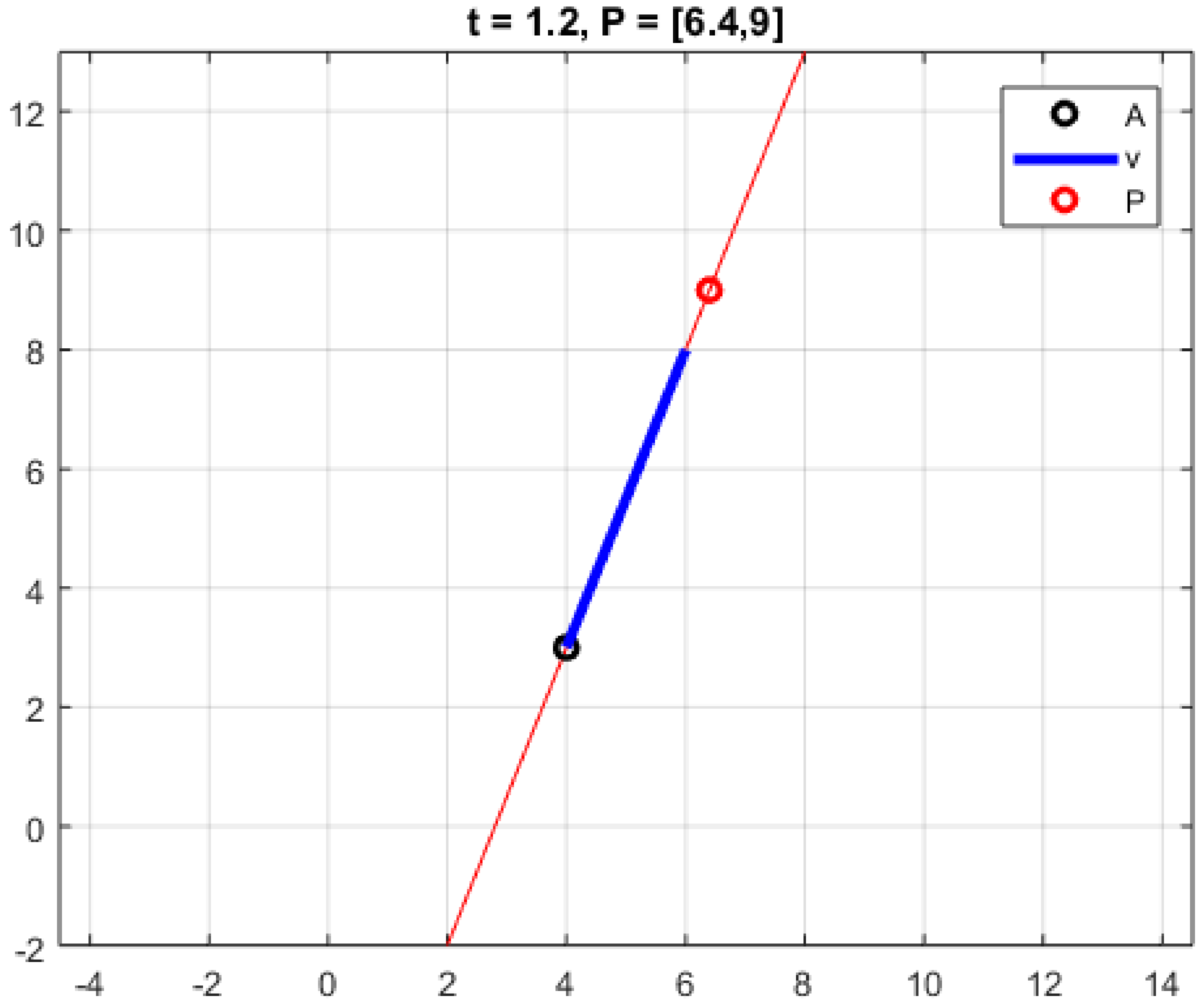
$$\begin{aligned} P &= A + t * \mathbf{v} \\ &= [Ax + t * vx, Ay + t * vy] \end{aligned}$$



Huom: Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora: $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$

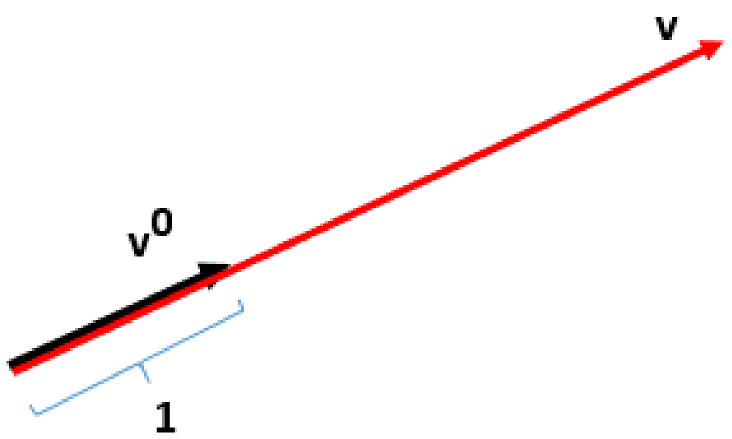
Esim: $A = [4, 3]$ ja $\mathbf{v} = [2, 5]$

$$
\begin{aligned}
P &= [4, 3] + t * [2, 5] \\
&= [4 + 2t, 3 + 5t]
\end{aligned}
$$



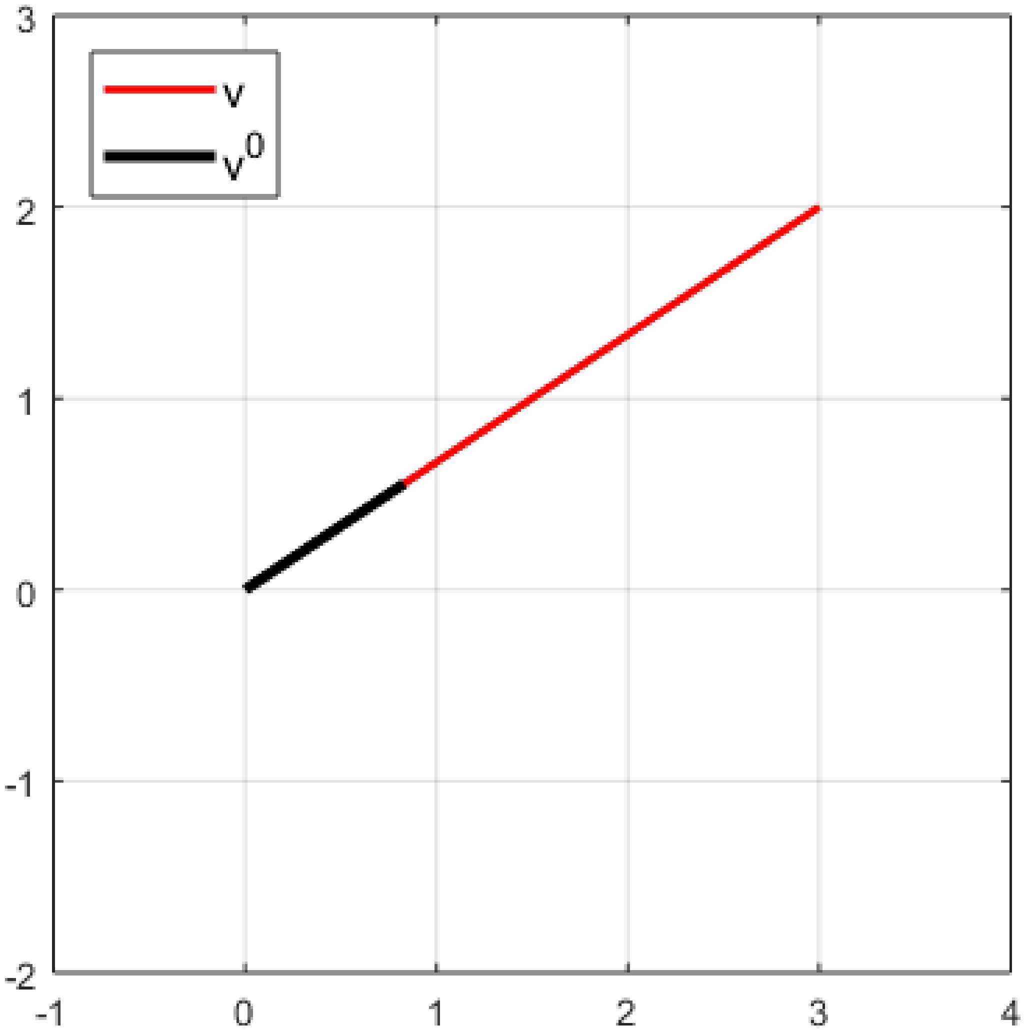
Vektorin $\mathbf{v} = [vx, vy]$ suuntainen **yksikkövektori** $\mathbf{v}^0$ on $\mathbf{v}$:n suuntainen ja ykkösen pituinen vektori eli $\mathbf{v}$ jaettuna pituudellaan,

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left[\frac{vx}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{vy}{\|\mathbf{v}\|}\right]$$



Esim. jos $\mathbf{v} = [3, 2]$, niin

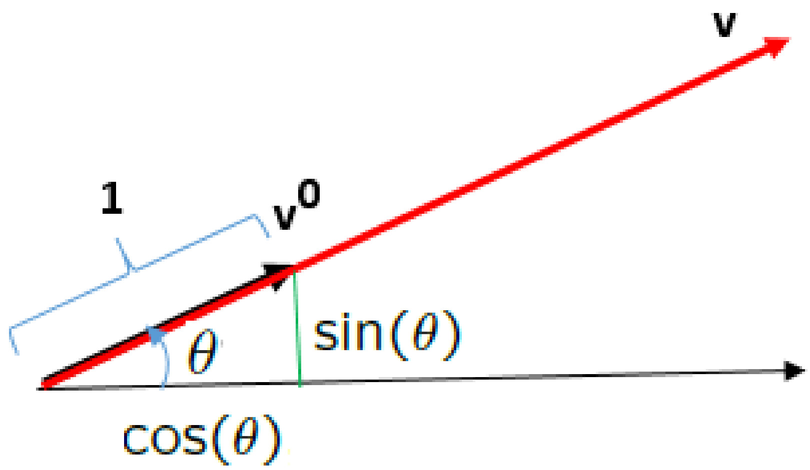
$$\mathbf{v}^0 = \left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right] \approx [0.83, 0.55]$$



Octave/MATLAB: $\mathbf{v0} = \mathbf{v}/\mathrm{norm}(\mathbf{v})$

Suuntakulman θ avulla:

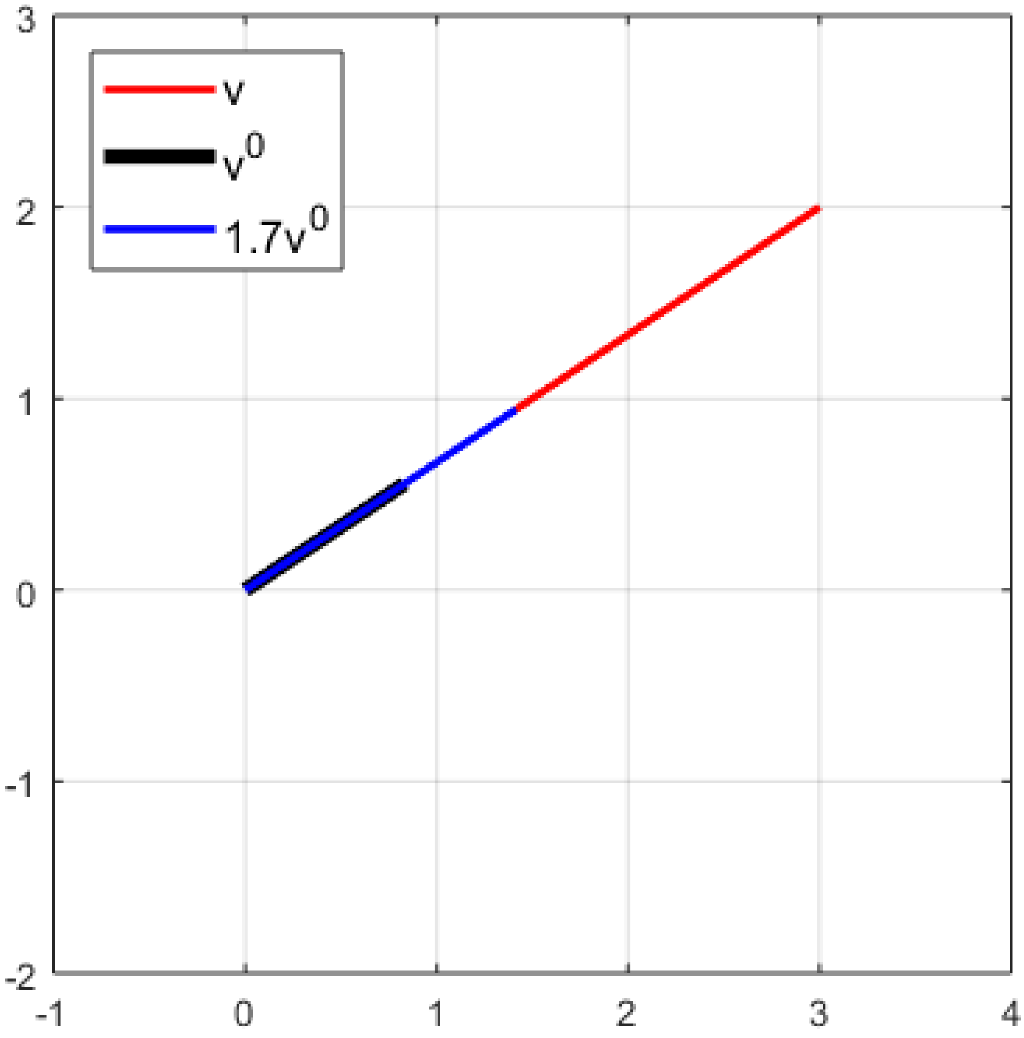
$\mathbf{v}^0 = [\cos(\theta), \sin(\theta)]$



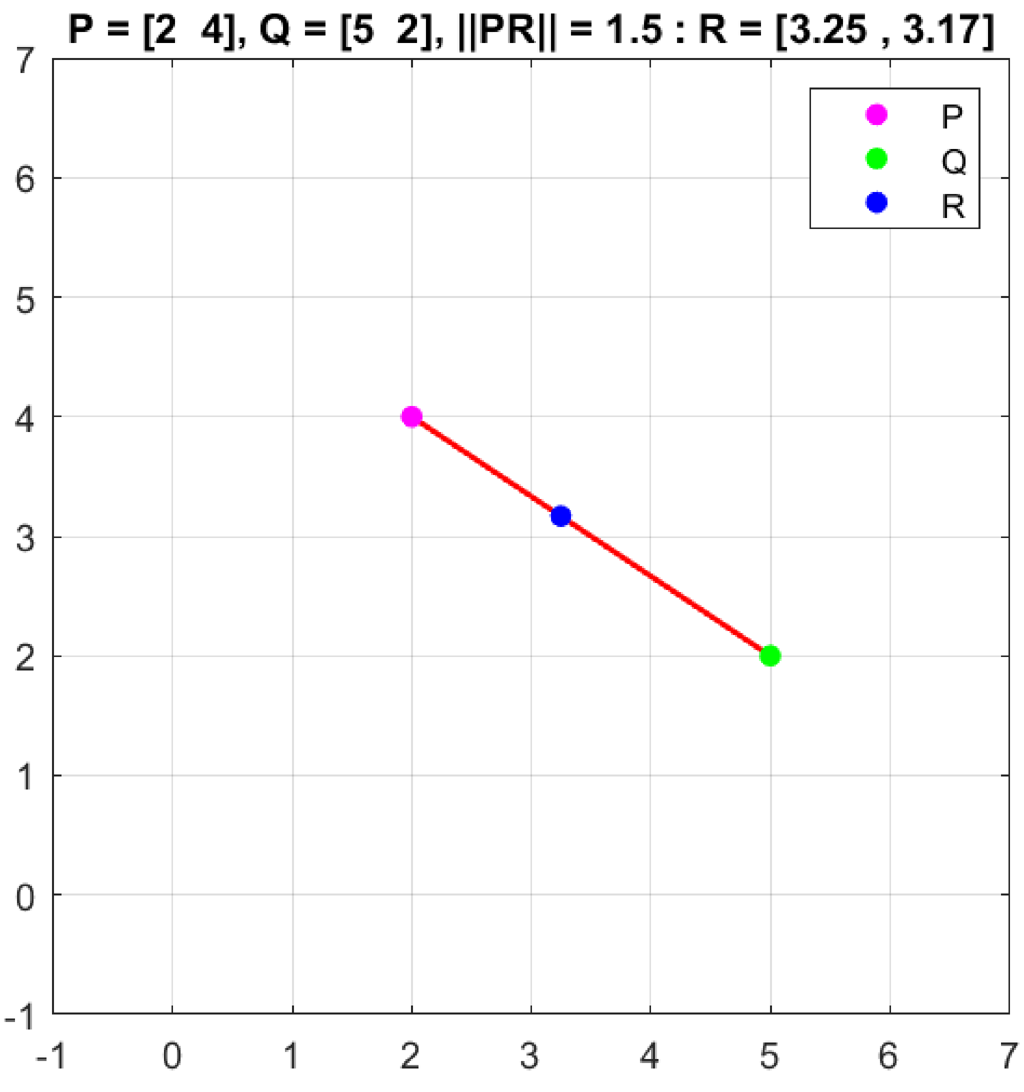
Yksikkövektorin avulla on helppo muodostaa annetun vektorin suuntainen ja halutun pituinen vektori: kerrotaan yksikkövektori halutulla pituudella

Esim. $\mathbf{v} = [3, 2]$:n suuntainen vektori, jonka pituus on 1.7

$$\begin{aligned} 1.7 * \mathbf{v}^0 &= 1.7 * \left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right] \\ &\approx [1.41, 0.94] \end{aligned}$$



Esim. Laske pisteen R koordinaatit, kun $\|\mathbf{PR}\| = 1.5$.



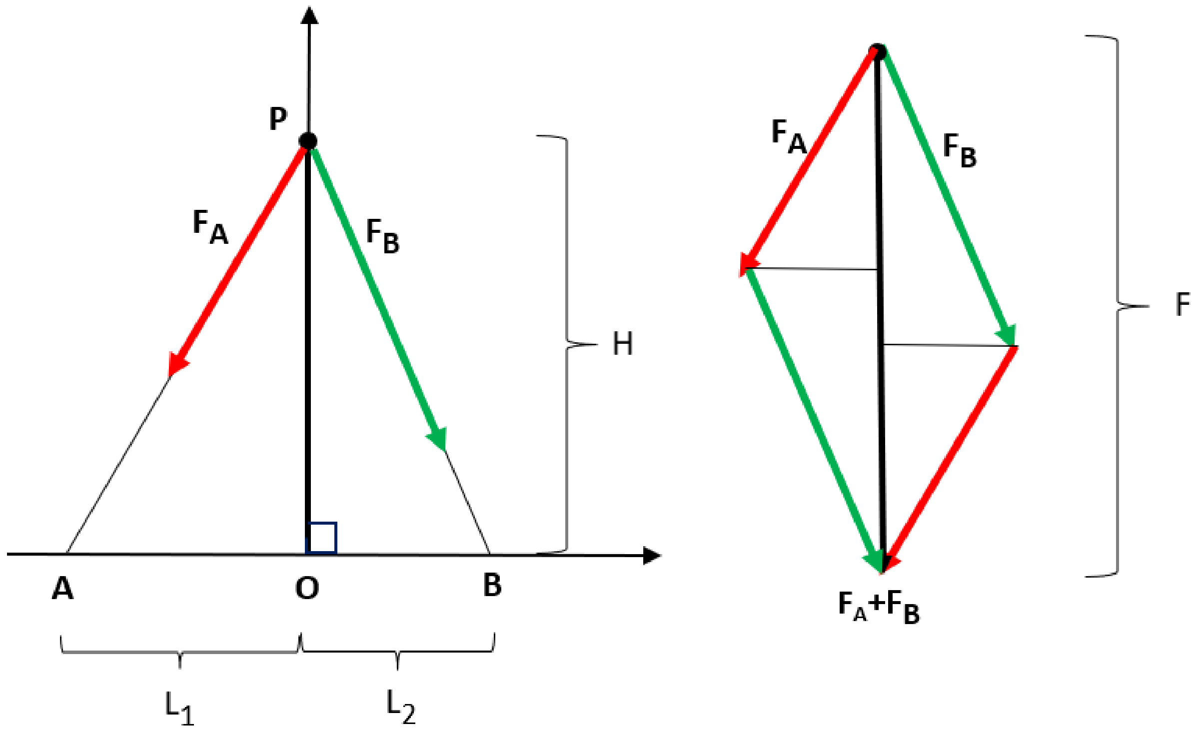
$$\mathbf{PQ} = Q - P = [3, -2],\ \|\mathbf{PQ}\| = \sqrt{13}$$

$$\mathbf{PQ}^0 = \left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right] \approx [0.83, -0.55]$$

$$\mathbf{PR} = 1.5 * \mathbf{PQ}^0 \approx [1.25, -0.83]$$

$$R = P + \mathbf{PR} \approx [3.25, 3.17]$$

Esim: Laske vektoreiden $\mathbf{F}_A$ ja $\mathbf{F}_B$ pituudet, kun $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = [0, -F]$



Suunnat:

$$\mathbf{PA} = [-L_1, -H], \; \mathbf{PB} = [L_2, -H]$$

Yksikkövektorit

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{PA}}{\|\mathbf{PA}\|}, \; \mathbf{v} = \frac{\mathbf{PB}}{\|\mathbf{PB}\|}$$

$$\mathbf{F}_A = \|\mathbf{F}_A\| * \mathbf{u},\ \mathbf{F}_B = \|\mathbf{F}_B\| * \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = [0, -F]$$

$$\rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{F}_A\| ux + \|\mathbf{F}_B\| vx = 0 \\ \|\mathbf{F}_A\| uy + \|\mathbf{F}_B\| vy = -F \end{cases}$$

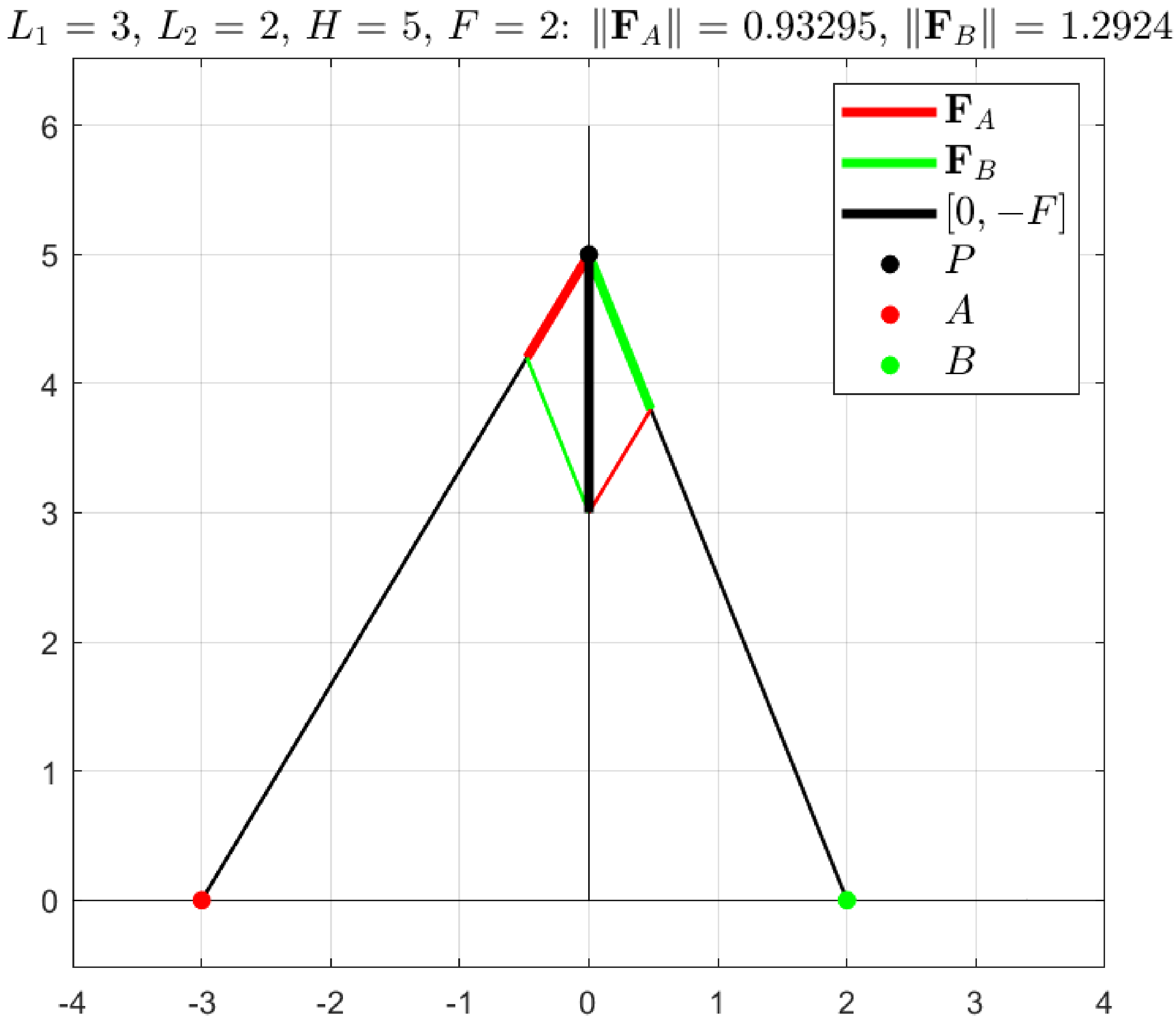
$$\rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{F}_A\| = \dfrac{vx}{D} * F \\ \|\mathbf{F}_B\| = \dfrac{-ux}{D} * F \end{cases}$$

$$D = ux * vy - uy * vx$$

solve u1*f1+v1*f2=0,u2*f1+v2*f2=-f, f1, f2

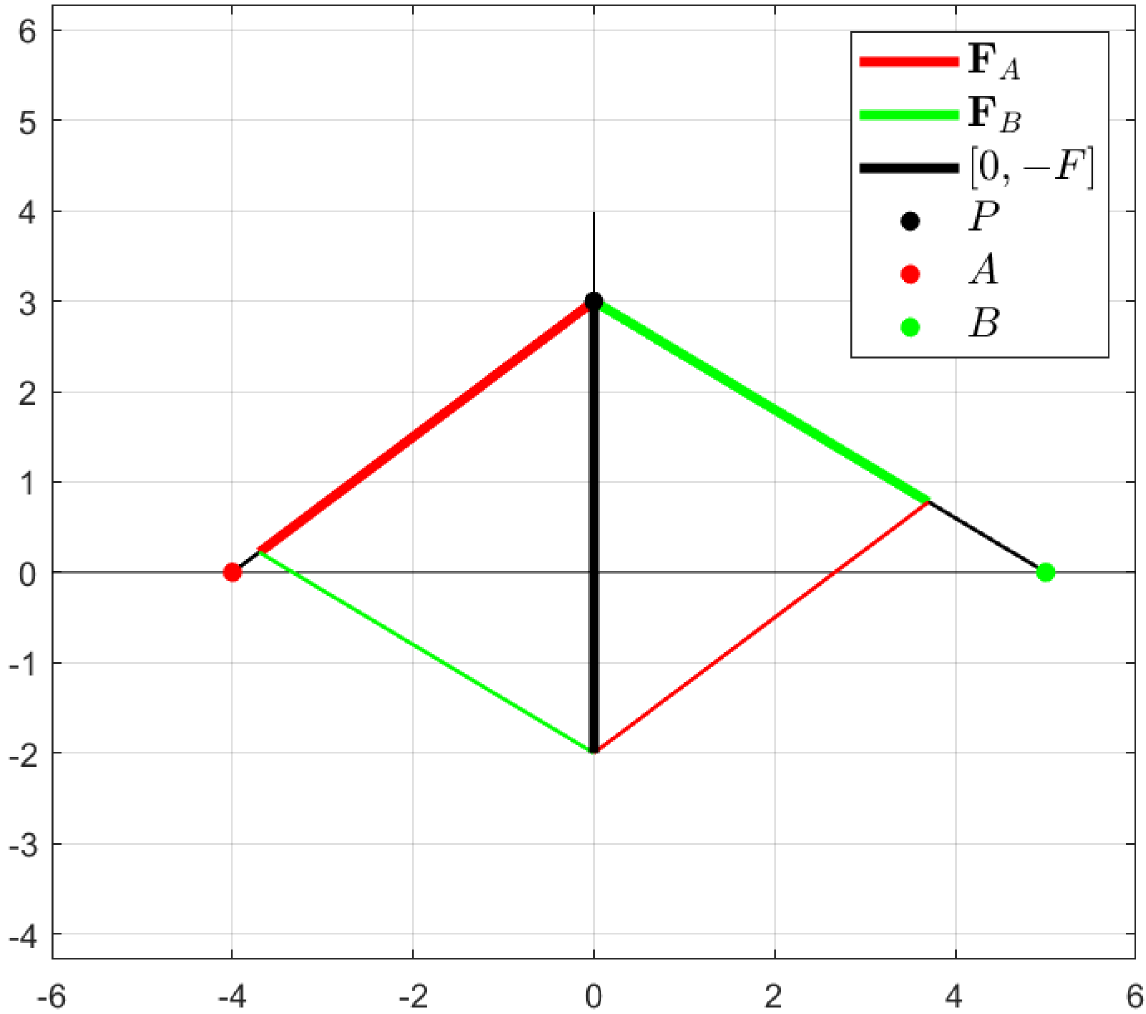
solve $\begin{array}{l} u1\,f1 + v1\,f2 = 0 \\ u2\,f1 + v2\,f2 = -f \end{array}$ for f1, f2

$f1 = \dfrac{f\ v1}{u1\ v2 - u2\ v1}$ and $f2 = \dfrac{f\ u1}{u2\ v1 - u1\ v2}$



$L_1 = 3,\ L_2 = 2,\ H = 5,\ F = 2$: $\|\mathbf{F}_A\| = 0.93295,\ \|\mathbf{F}_B\| = 1.2924$
$\mathbf{F}_A$
$\mathbf{F}_B$
$[0, -F]$
P
A
B
6
5
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

$L_1 = 4,\ L_2 = 5,\ H = 3,\ F = 5$: $\|\mathbf{F}_A\| = 4.6296,\ \|\mathbf{F}_B\| = 4.3192$



PISTETULO

(skalaaritulo, dot product)

Vektoreiden $\mathbf{u} = [ux, uy]$ ja $\mathbf{v} = [vx, vy]$ pistetulo on luku

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = ux * vx + uy * vy$$

Esim. jos $\mathbf{u} = [3, 2]$ ja $\mathbf{v} = [-1, 5]$, niin

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 3 * (-1) + 2 * 5 = 7$$

Octave/MATLAB: dot($\mathbf{u}, \mathbf{v}$)

Laskusäännöt:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$$

$$(t * \mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet (t * \mathbf{v}) = t * (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$$

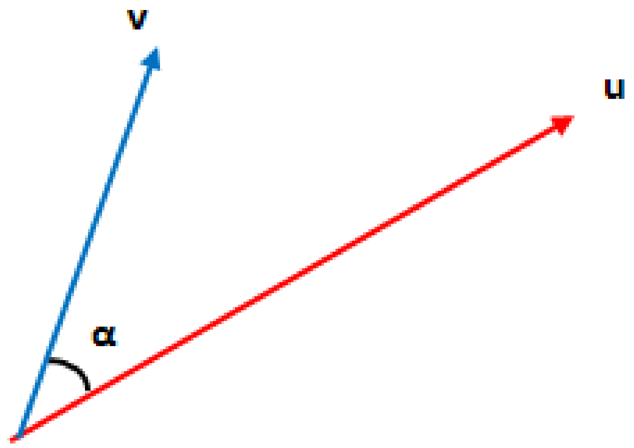
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

Pistetulon avulla voidaan laskea kulmia, koska

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| * \|\mathbf{v}\| * \cos(\alpha)$$

eli $\mathbf{u}$:n ja $\mathbf{v}$:n välinen kulma

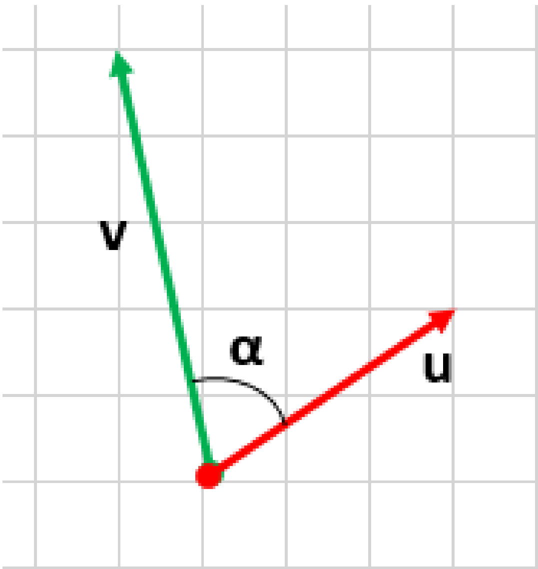
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| * \|\mathbf{v}\|}\right)$$



Esim: $\mathbf{u} = [3, 2]$, $\mathbf{v} = [-1, 5]$,

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{26}$, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 7$

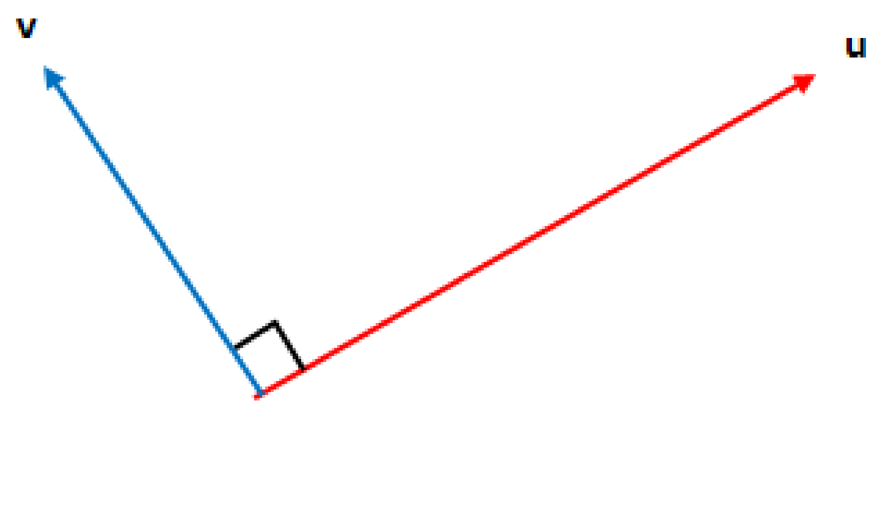
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{13} * \sqrt{26}}\right) \approx 68^\circ$$

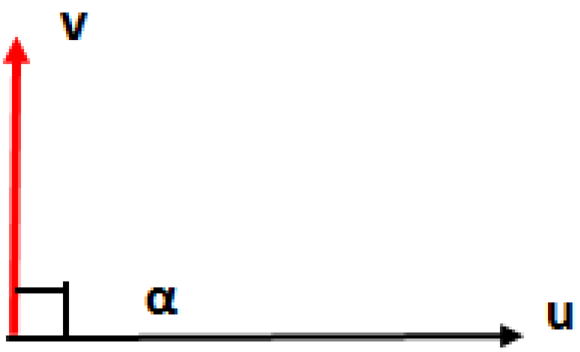


Pistetulon avulla on helppo testata kohtisuoruutta:

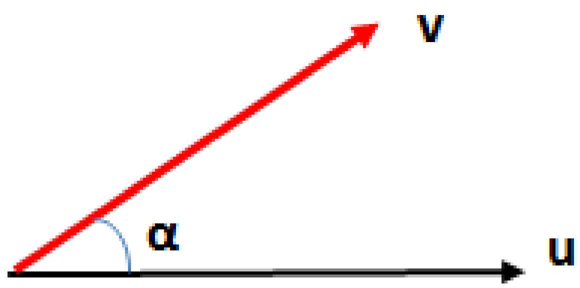
$\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat kohtisuoria eli $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

$\leftrightarrow \alpha = 90^\circ \leftrightarrow \cos(\alpha) = 0 \leftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$

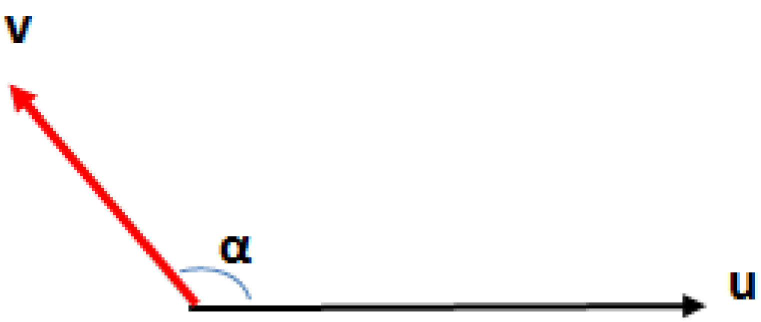




$\alpha = 90^{0}$, $\cos\alpha = 0$, $u \bullet v = 0$



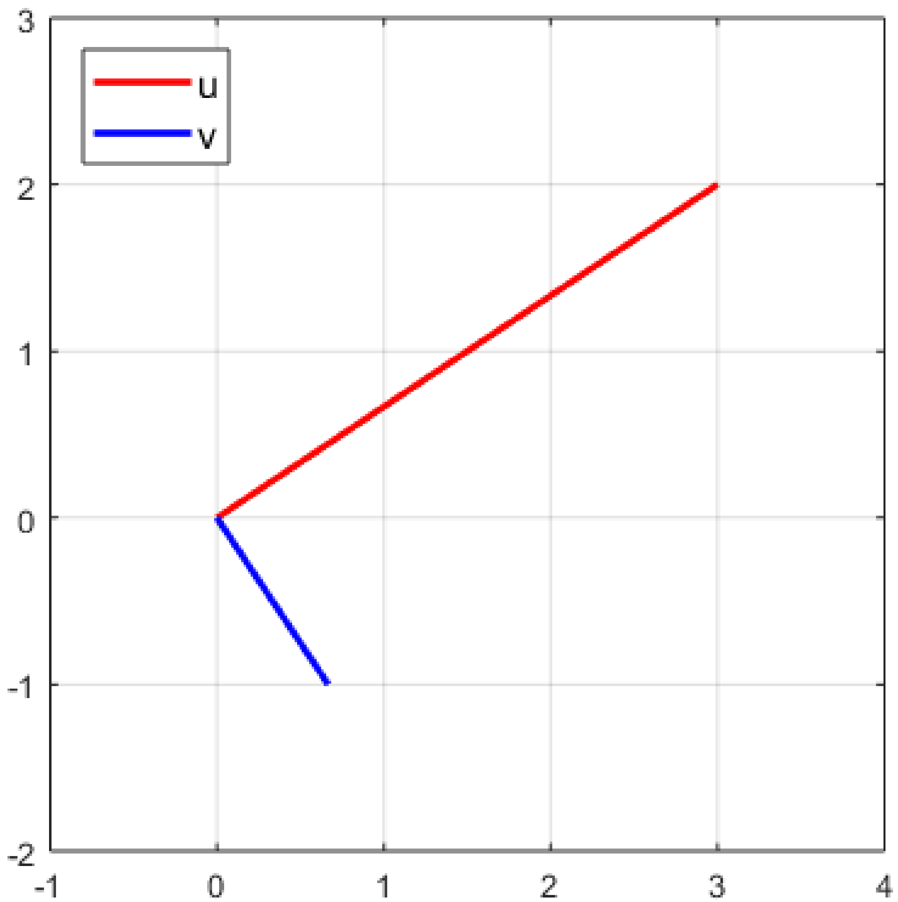
$\alpha < 90^{0}$, $\cos\alpha > 0$, $u \bullet v > 0$



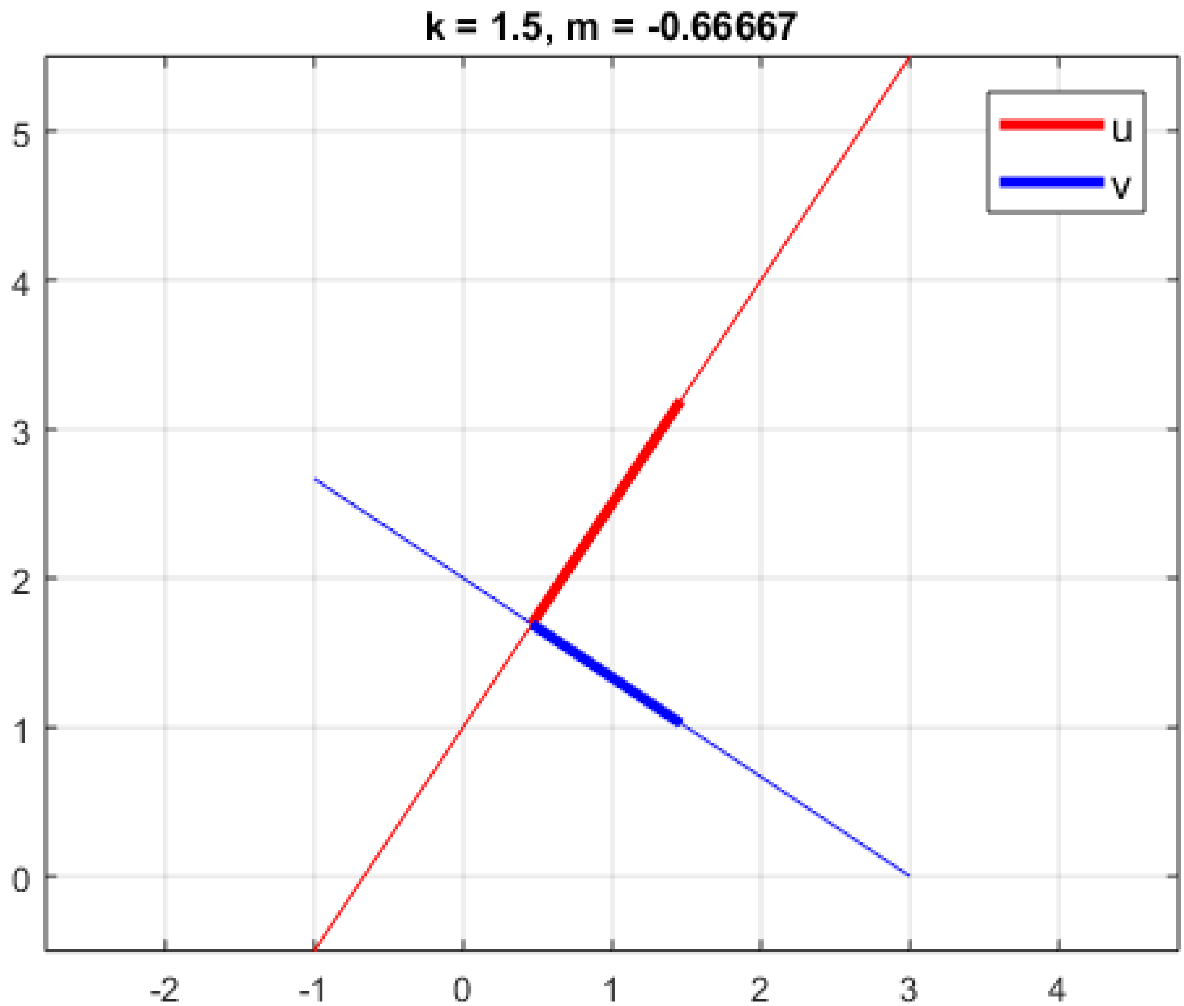
$\alpha > 90^{0}$, $\cos\alpha < 0$, $u \bullet v < 0$

Esim: $\mathbf{u} = [3, 2]$ ja $\mathbf{v} = [x, -1]$ ovat kohtisuoria, kun

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 3x - 2 = 0$ eli $x = 2/3$



Esim. Suorat $y = kx + b$ ja $y = mx + c$ ovat kohtisuoria, jos niiden suuntavektorit $\mathbf{u} = [1, k]$ ja $\mathbf{v} = [1, m]$ ovat eli jos $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 1 + km = 0 \leftrightarrow km = -1$

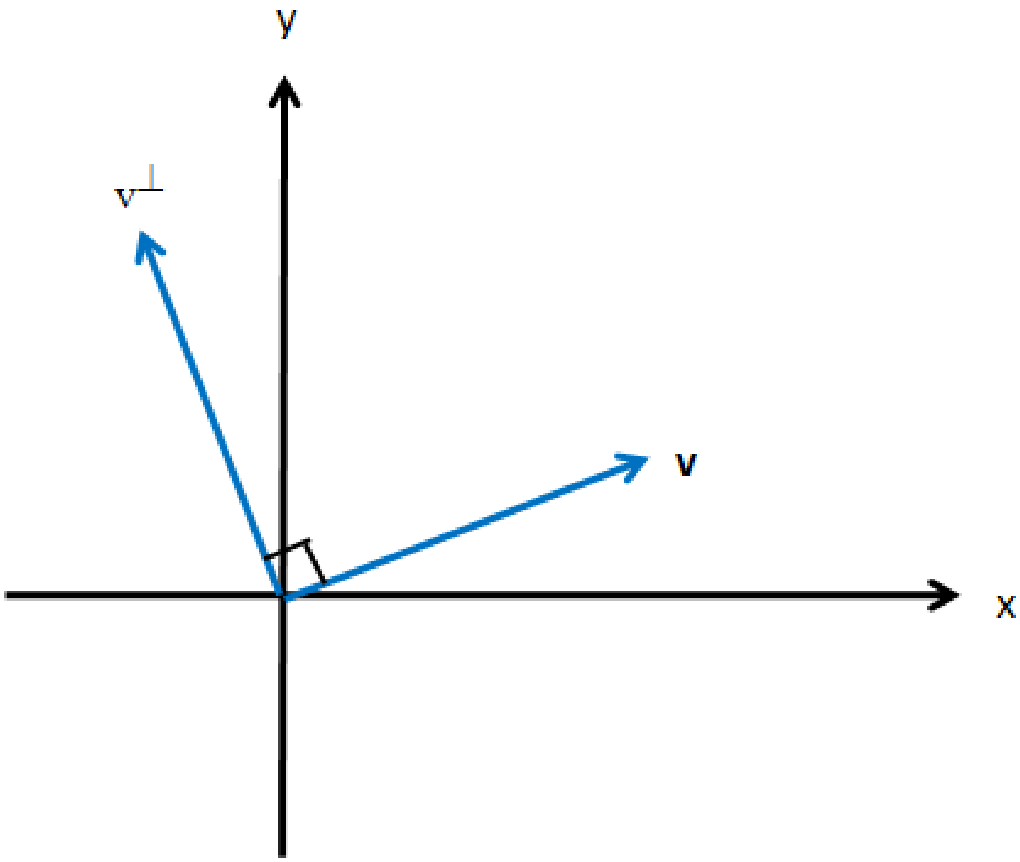


Merkintä:

Jos $\mathbf{v} = [vx, vy]$, niin $\mathbf{v}^{\perp} = [-vy, vx]$

$\mathbf{v}^{\perp}$ ja $\mathbf{v}$ ovat yhtä pitkiä ja kohtisuorassa toisiaan vastaan ja $\mathbf{v}^{\perp}$:n suunta on $\mathbf{v}$:stä vastapäivään,

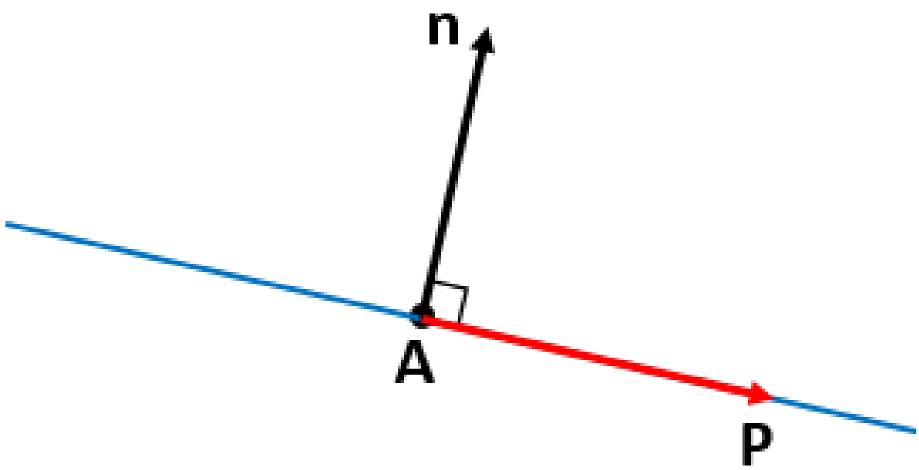
eli jos $\mathbf{v}$:n suuntakulma on θ, niin $\mathbf{v}^{\perp}$:n suuntakulma on $\theta + 90^{\circ}$



Esim. jos $\mathbf{v} = [3, 1]$, niin $\mathbf{v}^{\perp} = [-1, 3]$

Suoran normaalimuoto:

Pisteen $A = [Ax, Ay]$ kautta kulkeva, vektoria $\mathbf{n} = [a, b]$ vastaan kohtisuora suora



Piste $P = [x, y]$ on suoralla, jos

$\mathbf{n} \perp \mathbf{AP}$ eli

$\mathbf{n} \bullet \mathbf{AP} = 0$ eli

$[a, b] \bullet [x - Ax, y - Ay] = 0$ eli

$a(x - Ax) + b(y - Ay) = 0$ eli

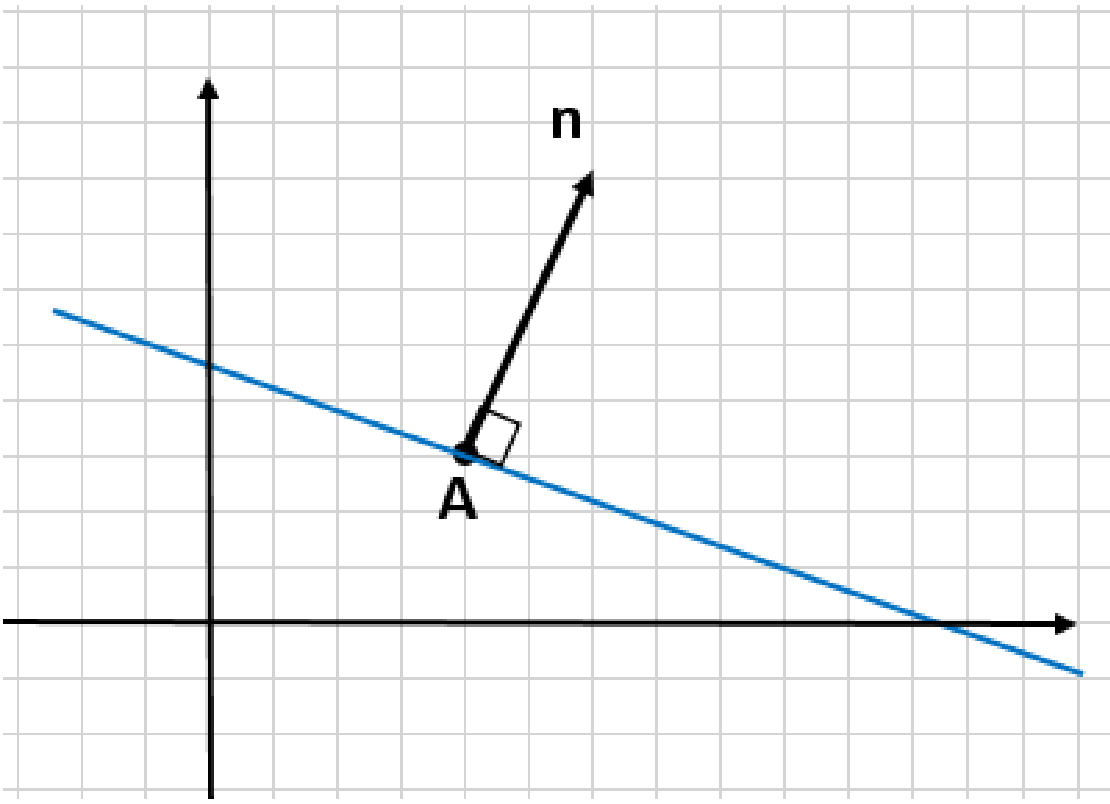
$ax + by = c$

missä $c = a\, Ax + b\, Ay = \mathbf{n} \bullet \mathbf{OA}$

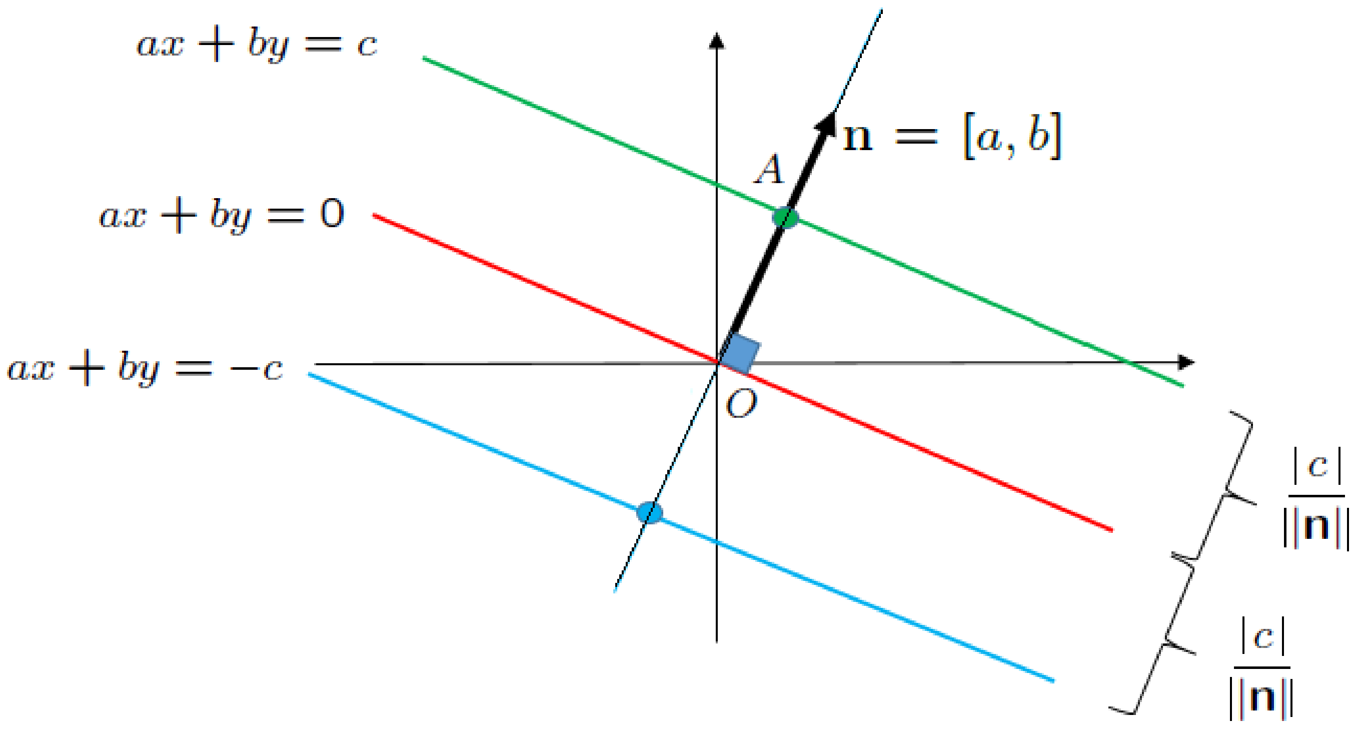
Esim. jos $A = [4, 3]$ ja $\mathbf{n} = [2, 5]$, niin suoran yhtälö on

$2(x - 4) + 5(y - 3) = 0$ eli

$2x + 5y = 23$



Huom: suora $ax + by = c$ kulkee pisteen $A = \frac{c}{\|\mathbf{n}\|} * \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$ kautta ja sen etäisyys origosta O on $\|\mathbf{OA}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{n}\|}$



Syy: $a\,Ax + b\,Ay = \mathbf{n} \bullet \mathbf{OA} = \mathbf{n} \bullet \left(\frac{c}{\|\mathbf{n}\|^2} * \mathbf{n} \right)$

$$= \frac{c}{\|\mathbf{n}\|^2} * (\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}) = \frac{c}{\|\mathbf{n}\|^2} * \|\mathbf{n}\|^2 = c$$

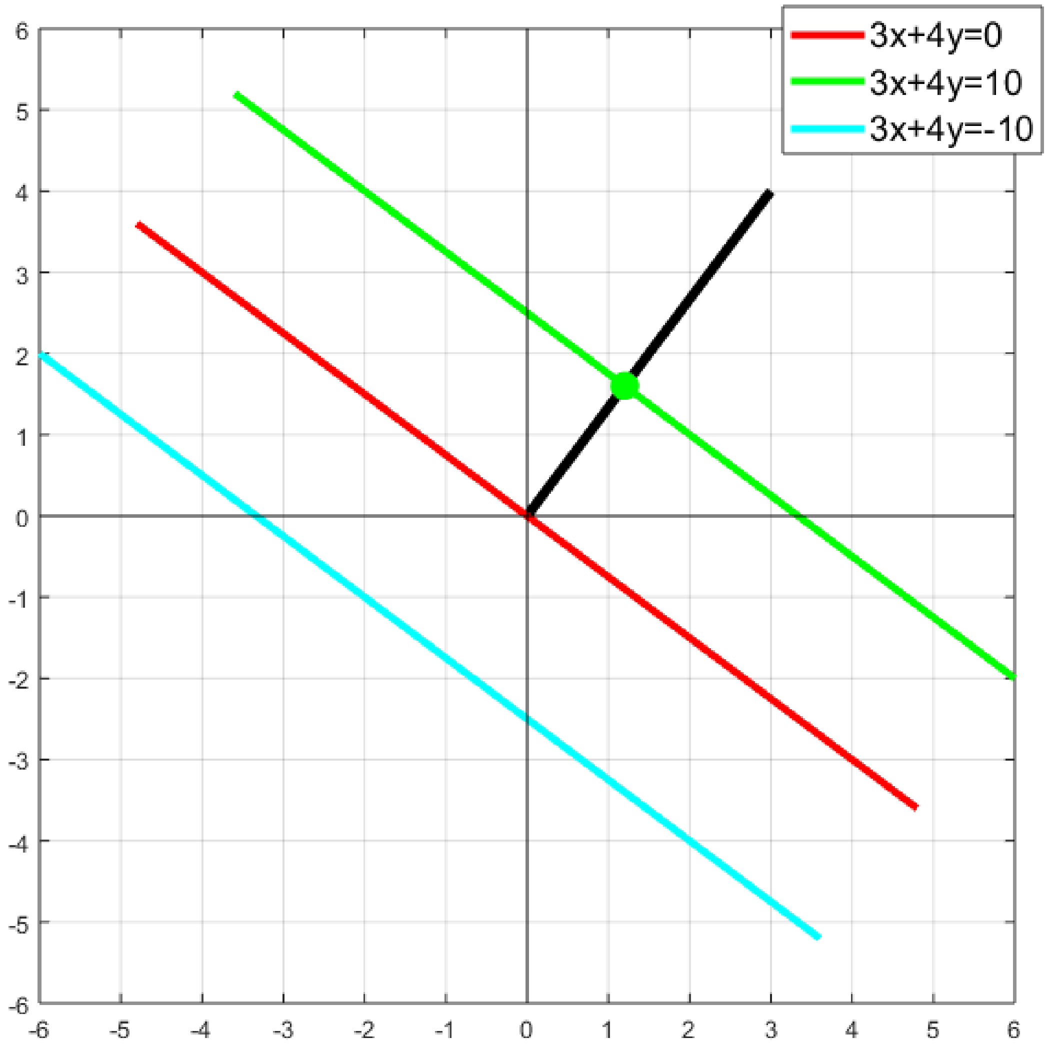
Esim: suora $3x + 4y = 10$

$\mathbf{n} = [3, 4], \|\mathbf{n}\| = 5, c = 10,$

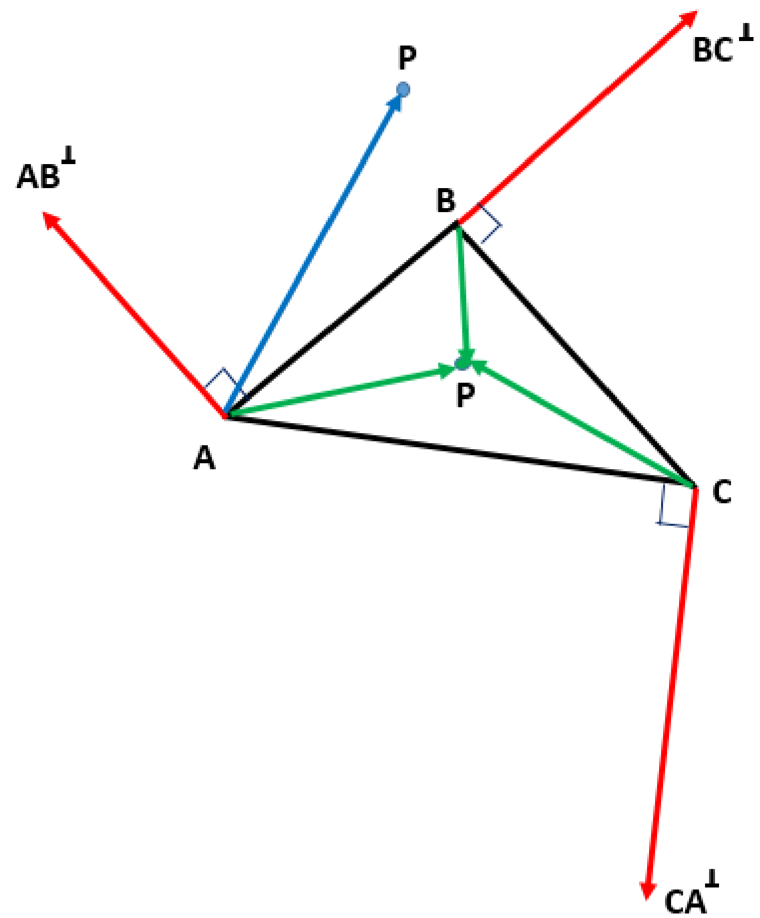
kulkee pisteen

$$A = \frac{c}{\|\mathbf{n}\|} * \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = 2 * \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right] = [1.2, 1.6]$$

kautta ja $\|\mathbf{OA}\| = \dfrac{|c|}{\|\mathbf{n}\|} = 2$


3x+4y=0
3x+4y=10
3x+4y=-10
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

Esim. Onko annettu piste P annetun kolmion ABC sisä- vai ulkopuolella ?



Jos kiertosuunta ABC on myötäpäivään, niin piste P on kolmion sisällä, jos vektoreiden

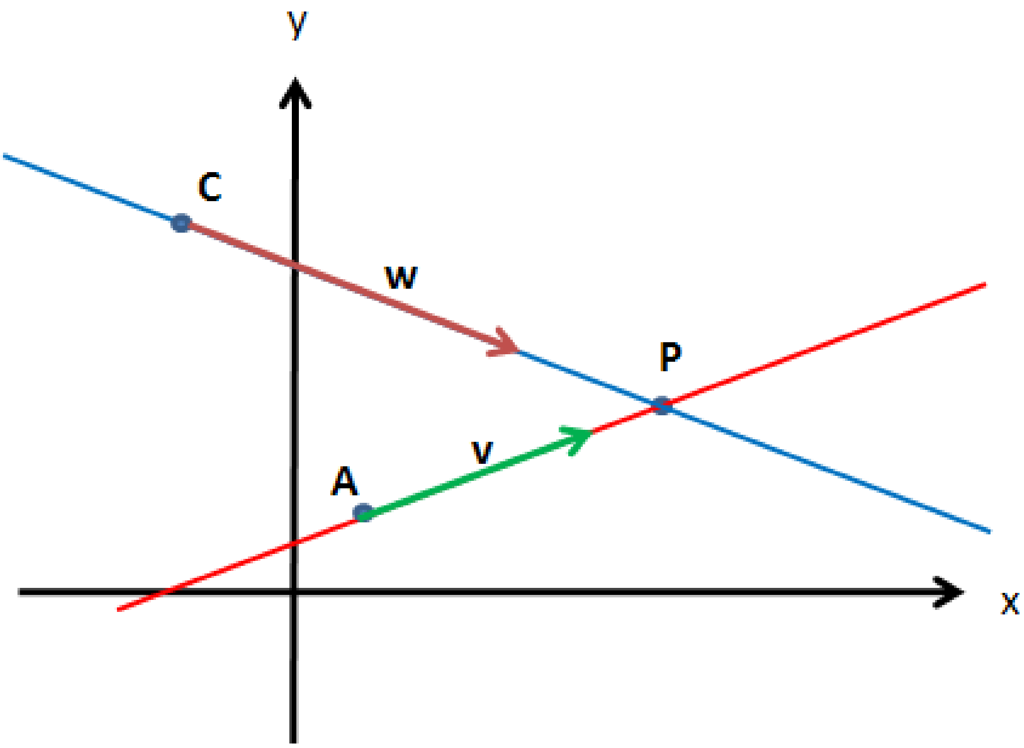
$\mathbf{AP}$ ja $\mathbf{AB}^{\perp}$, $\mathbf{BP}$ ja $\mathbf{BC}^{\perp}$ ja $\mathbf{CP}$ ja $\mathbf{CA}^{\perp}$

väliset kulmat ovat yli 90° eli jos pistetulot

$\mathbf{AP} \bullet \mathbf{AB}^{\perp}$, $\mathbf{BP} \bullet \mathbf{BC}^{\perp}$, $\mathbf{CP} \bullet \mathbf{CA}^{\perp}$

ovat < 0

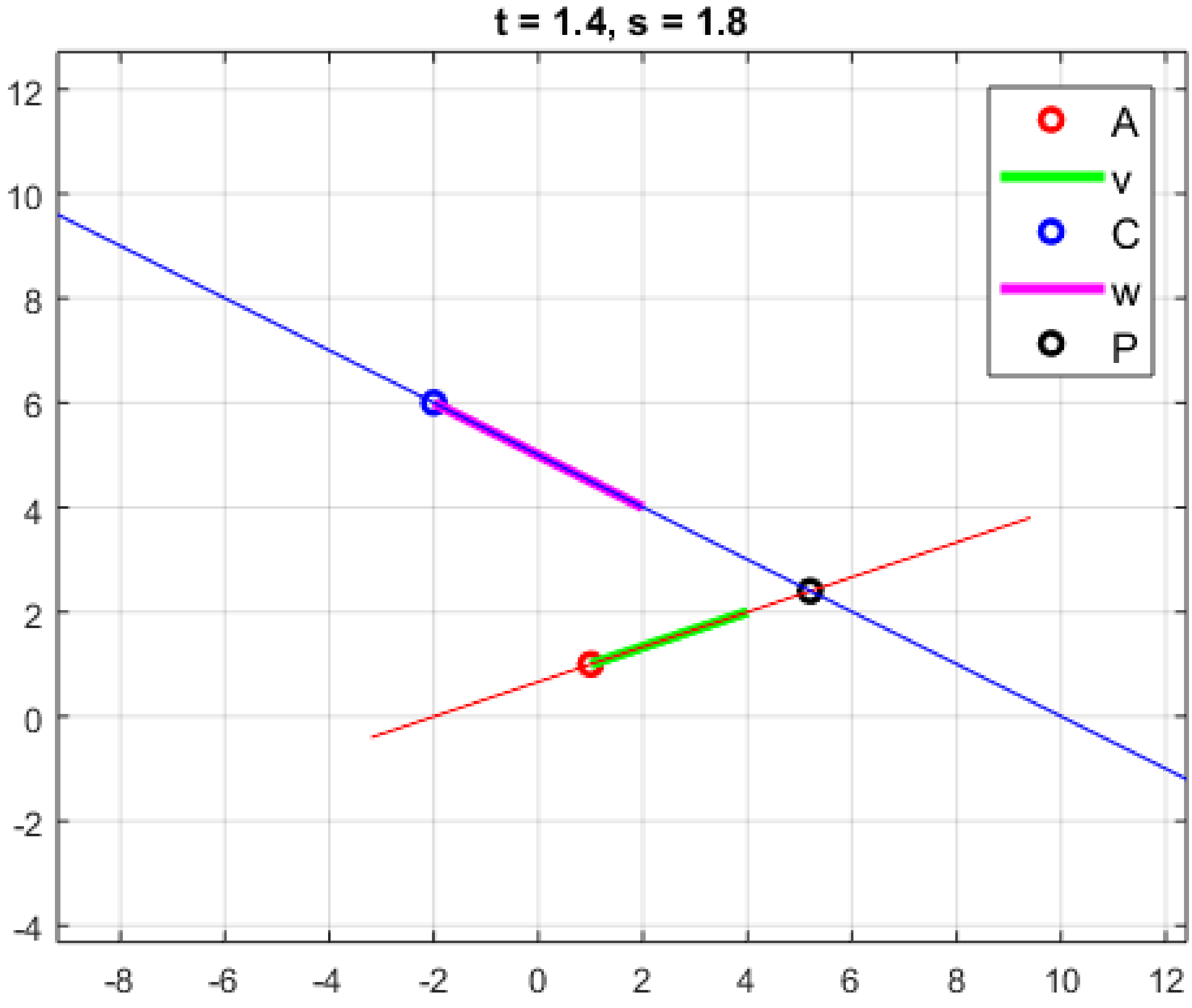
Esim. Suorien $A, \mathbf{v}$ ja $C, \mathbf{w}$ leikkauspiste



$P = A + t * \mathbf{v} = C + s * \mathbf{w}$, missä

$$t = \frac{\mathbf{AC} \bullet \mathbf{w}^{\perp}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}^{\perp}} \text{ ja } s = -\frac{\mathbf{AC} \bullet \mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{v}^{\perp}}$$

Huom: Jos $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}^{\perp} = 0$, niin suorat ovat yhdensuuntaisia



t = 1.4, s = 1.8
A
v
C
w
P
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12

Syy: Etsitään parametrit t ja s niin että

$$A + t * \mathbf{v} = C + s * \mathbf{w} \text{ eli}$$

$$t * \mathbf{v} - s * \mathbf{w} = \underbrace{C - A}_{= \mathbf{AC}}$$

Ratkaistaan vaikkapa t laskemalla molempien puolien pistetulo vektorin $\mathbf{w}^{\perp}$ kanssa:

$$(t * \mathbf{v} - s * \mathbf{w}) \bullet \mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{AC} \bullet \mathbf{w}^{\perp}$$

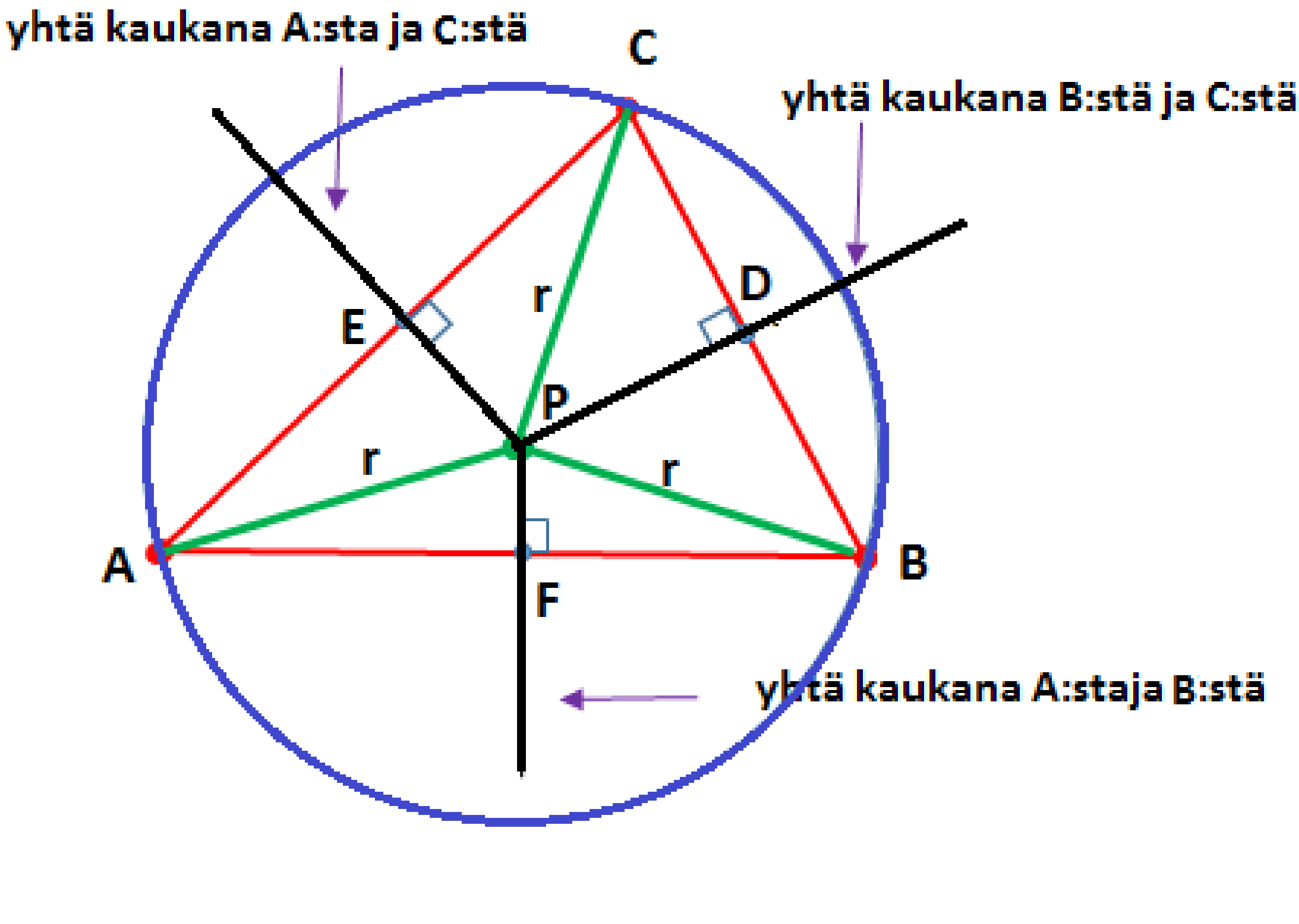
$$t * (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}^{\perp}) - s * (\underbrace{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}^{\perp}}_{=0}) = \mathbf{AC} \bullet \mathbf{w}^{\perp}$$

$$t = \frac{\mathbf{AC} \bullet \mathbf{w}^{\perp}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}^{\perp}}$$

Vastaavasti, laskemalla molempien puolien pistetulo vektorin $\mathbf{v}^{\perp}$ kanssa,

$$s = -\frac{\mathbf{AC} \bullet \mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{v}^{\perp}}$$

Esim: Pisteiden A, B ja C kautta kulkevan ympyrän keskipiste P on kolmion ABC sivujen keskinormaalien leikkauspiste.



Sivun keskinormaali = sivun keskipisteen kautta kulkeva, sivua vastaan kohtisuora suora = ne pisteet jotka ovat yhtä kaukana sivun päätepisteistä

Eli, jos

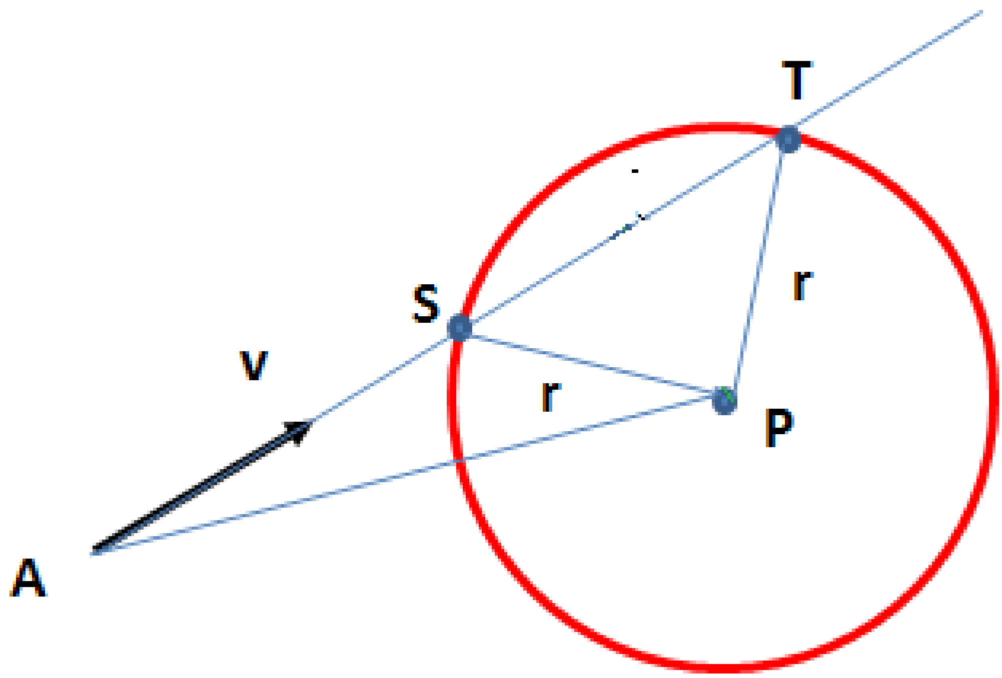
$$D = \frac{B+C}{2},\ E = \frac{A+C}{2},\ F = \frac{A+B}{2}$$

ovat kolmion sivujen keskipisteet, niin P on suorien

$D, (\mathbf{BC})^{\perp}$, $E, (\mathbf{AC})^{\perp}$ ja $F, (\mathbf{AB})^{\perp}$

leikkauspiste

Esim: Suoran $A, \mathbf{v}$ ja ympyrän P, r leikkauspisteet:



etsitään ne suoran pisteet $S = A + t * \mathbf{v}$, joiden etäisyys P:stä on r eli vektorin $\mathbf{PS} = \mathbf{PA} + t * \mathbf{v}$ pituus $\|\mathbf{PS}\| = r$

$$\|\mathbf{PS}\|^2 = \mathbf{PS} \bullet \mathbf{PS}$$

$$= (\mathbf{PA} + t * \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{PA} + t * \mathbf{v})$$

$$= \mathbf{PA} \bullet \mathbf{PA} + \mathbf{PA} \bullet (t * \mathbf{v})$$

$$+(t * \mathbf{v}) \bullet \mathbf{PA} + (t * \mathbf{v}) \bullet (t * \mathbf{v})$$

$$= \|\mathbf{PA}\|^2 + 2 * (\mathbf{PA} \bullet \mathbf{v}) * t + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}) * t^2$$

$$= \|\mathbf{v}\|^2 * t^2 + 2 * (\mathbf{PA} \bullet \mathbf{v}) * t + \|\mathbf{PA}\|^2$$

eli

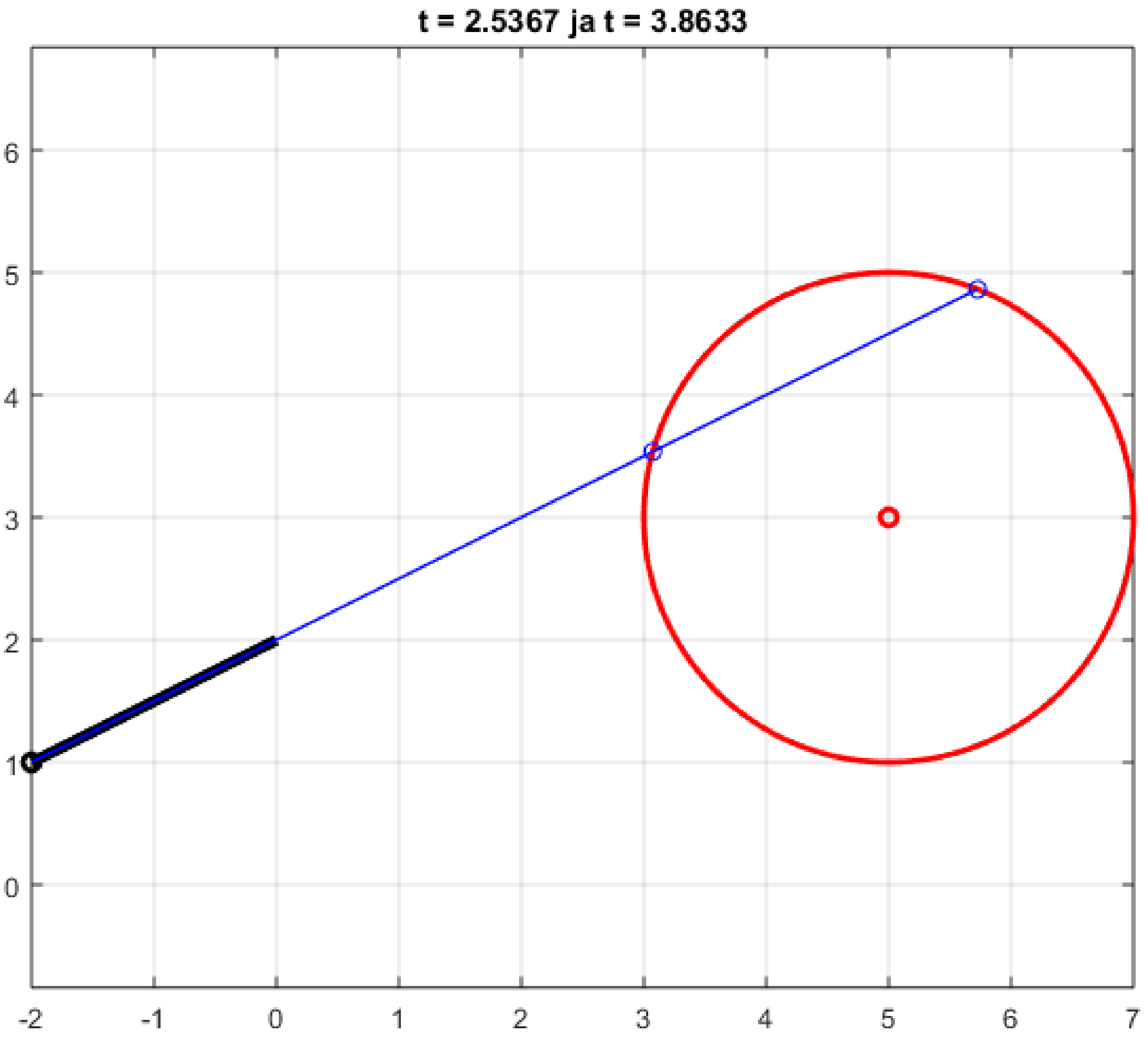
$$\|\mathbf{PS}\|^2 = r^2 \quad \leftrightarrow \quad at^2 + bt + c = 0$$

missä

$$a = \|\mathbf{v}\|^2$$
$$b = 2(\mathbf{PA} \bullet \mathbf{v})$$
$$c = \|\mathbf{PA}\|^2 - r^2$$

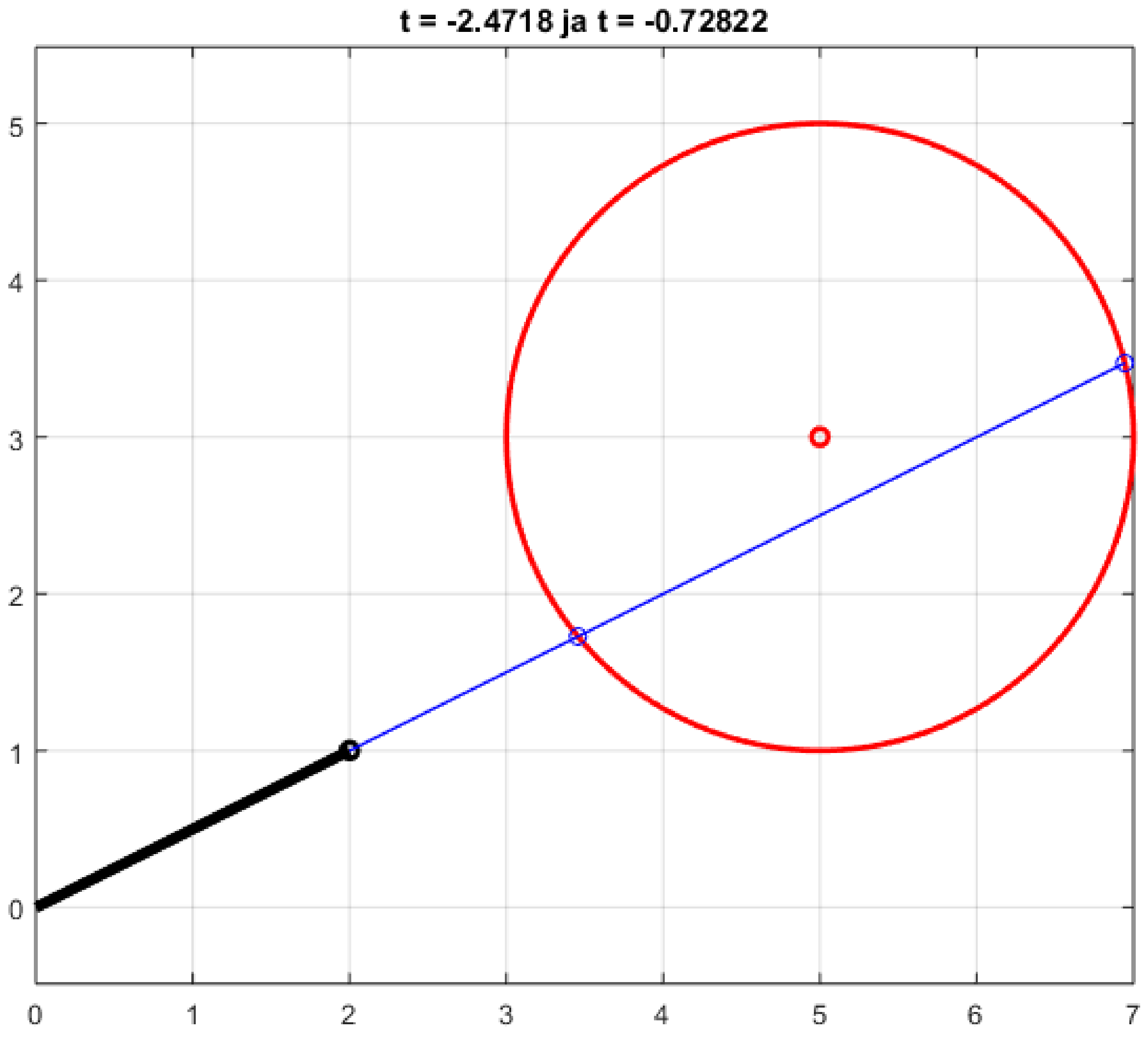
Esim: $A = [-2, 1]$, $v = [2, 1]$

$P = [5, 3]$ ja $r = 2$



Esim: $A = [2,1]$, $v = [-2,-1]$

$P = [5,3]$ ja $r = 2$



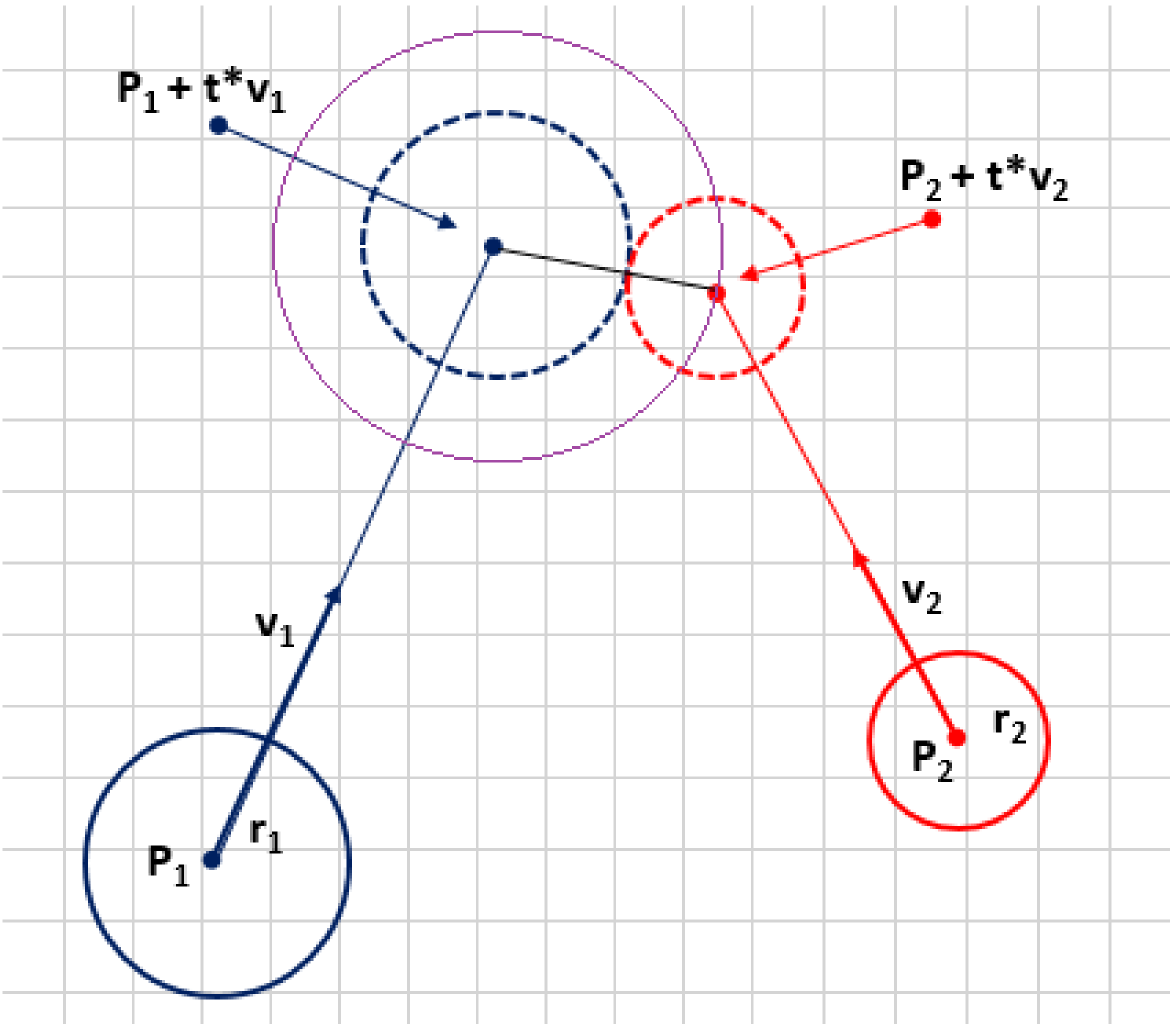
Esim. Hetkellä $t = 0$ ympyrä P_1, r_1 alkaa liikkua nopeudella $\mathbf{v}_1$ ja ympyrä P_2, r_2 nopeudella $\mathbf{v}_2$.

Millä hetkellä $t > 0$ ne törmäävät ?

Hetkellä t ympyröiden keskipisteet ovat

$P_{1t} = P_1 + t * \mathbf{v}_1$ ja $P_{2t} = P_2 + t * \mathbf{v}_2$

ja ympyrät törmäävät, jos niiden välinen etäisyys $\|\mathbf{P}_{1t}\mathbf{P}_{2t}\| = r_1 + r_2$


$P_1 + t^*v_1$
$P_2 + t^*v_2$
v_1
v_2
r_1
r_2
P_1
P_2

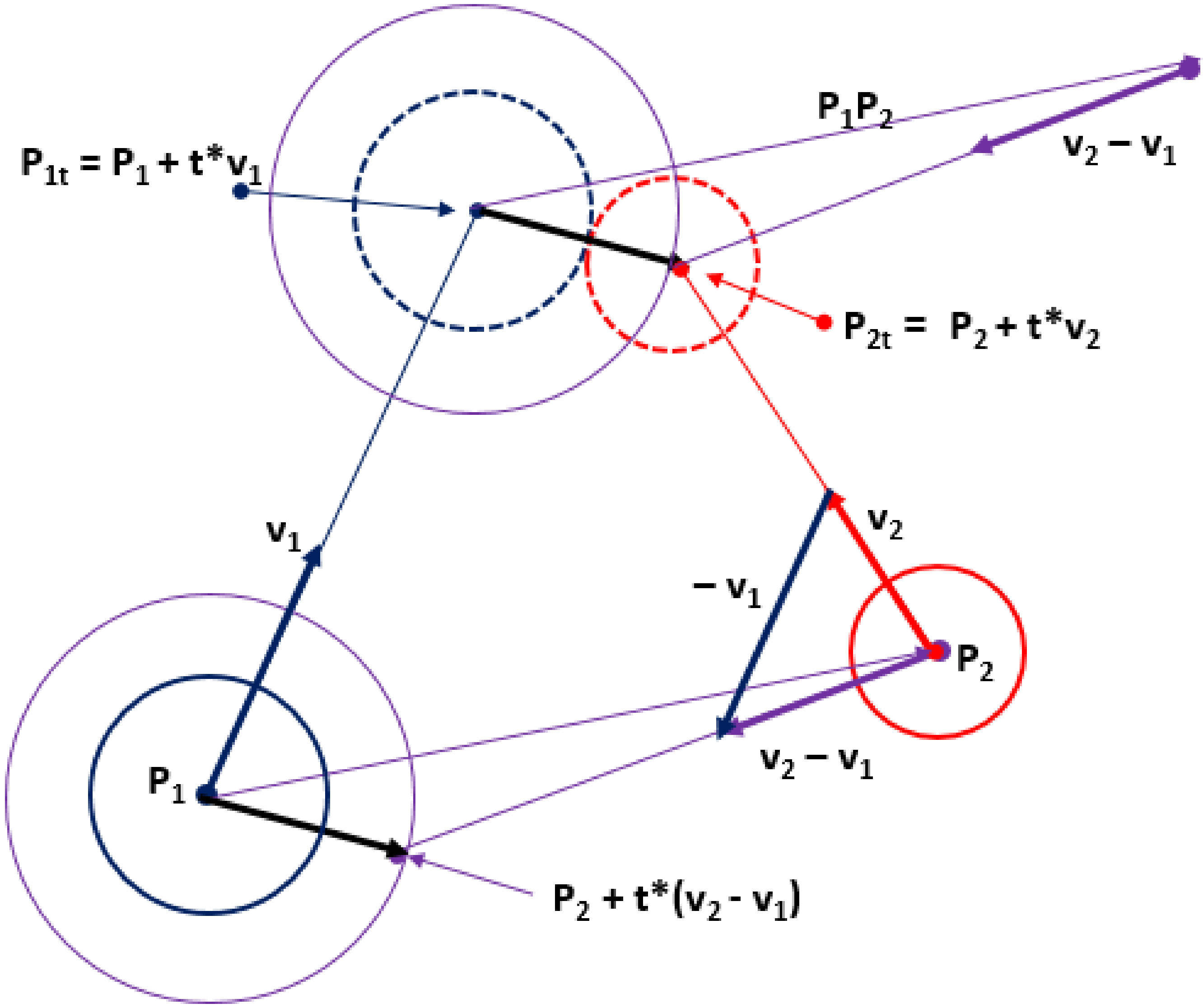
$$\mathbf{P}_{1t}\mathbf{P}_{2t} = P_{2t} - P_{1t}$$

$$= (P_2 + t * \mathbf{v}_2) - (P_1 + t * \mathbf{v}_1)$$

$$= (P_2 - P_1) + t * (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

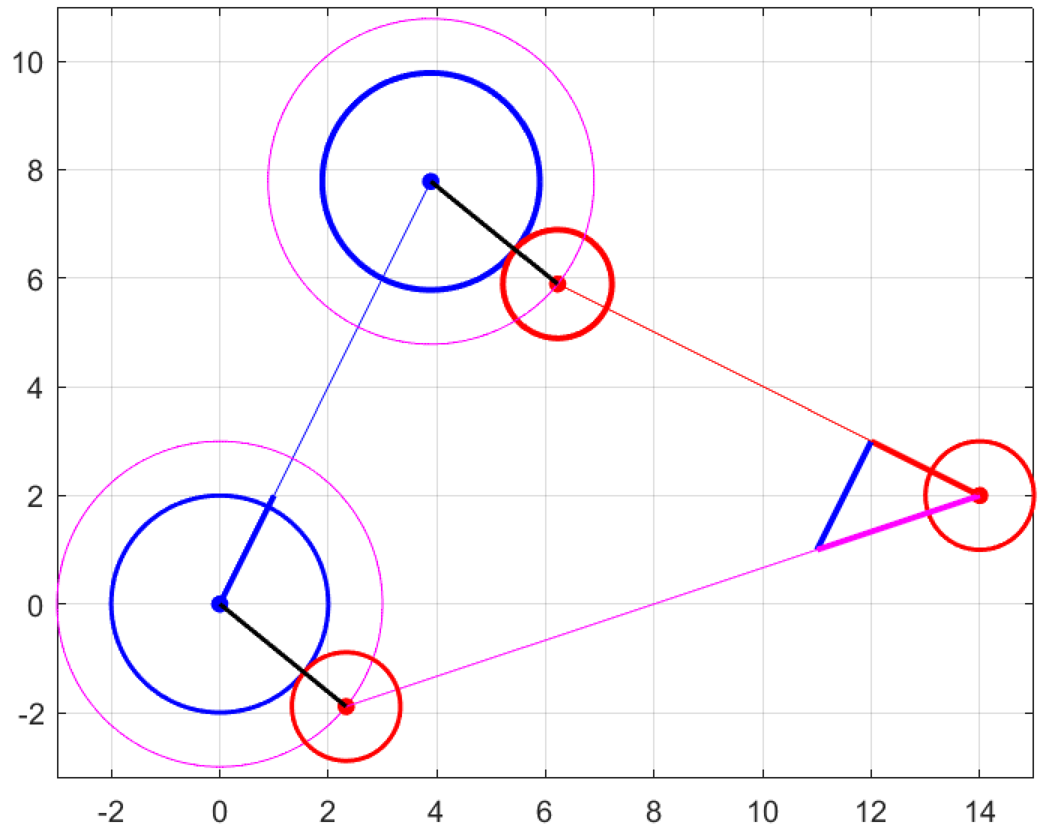
$$= \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + t * (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

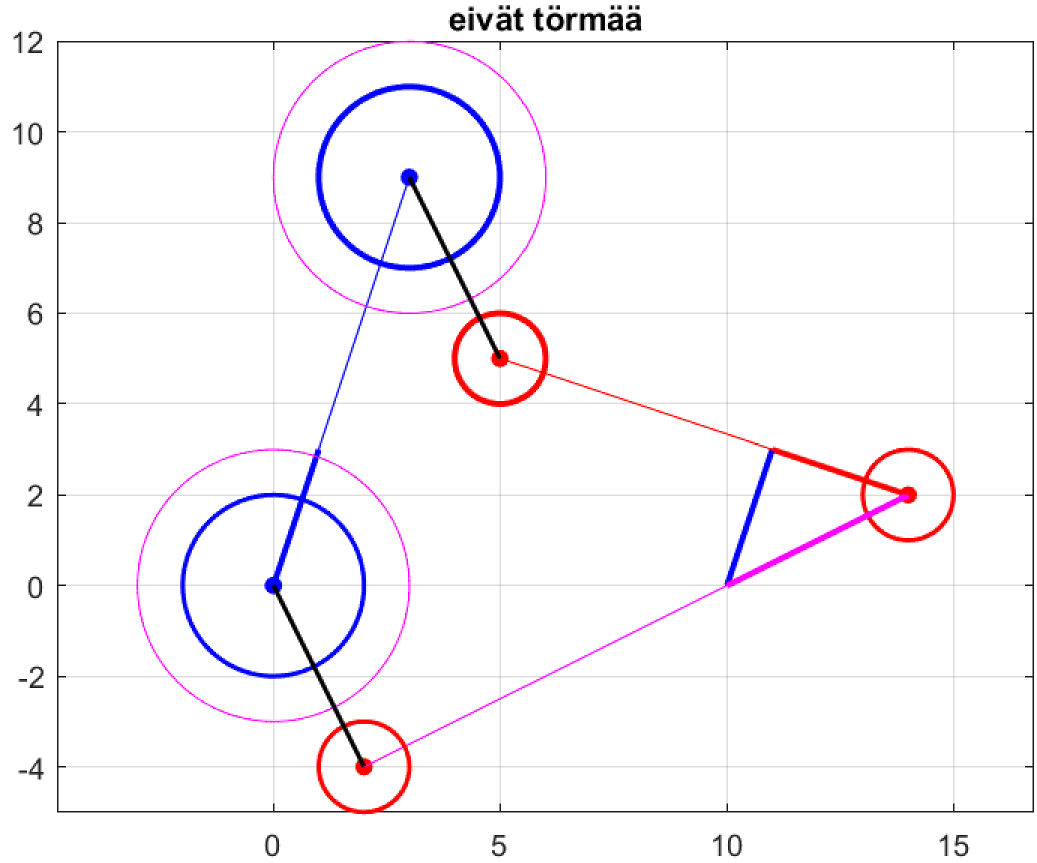
joten $\|\mathbf{P}_{1t}\mathbf{P}_{2t}\| = r_1 + r_2$ eli ympyrät törmäävät hetkellä $t > 0$, jos pisteen P_2 kautta kulkeva, vektorin $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ suuntainen suora leikkaa ympyrän, jonka keskipiste on P_1 ja säde $r_1 + r_2$, pisteessä $P_2 + t * (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$.



P_1P_2
$v_2 - v_1$
$P_{1t} = P_1 + t^*v_1$
$P_{2t} = P_2 + t^*v_2$
v_2
v_1
$- v_1$
P_2
P_1
$v_2 - v_1$
$P_2 + t^*(v_2 - v_1)$

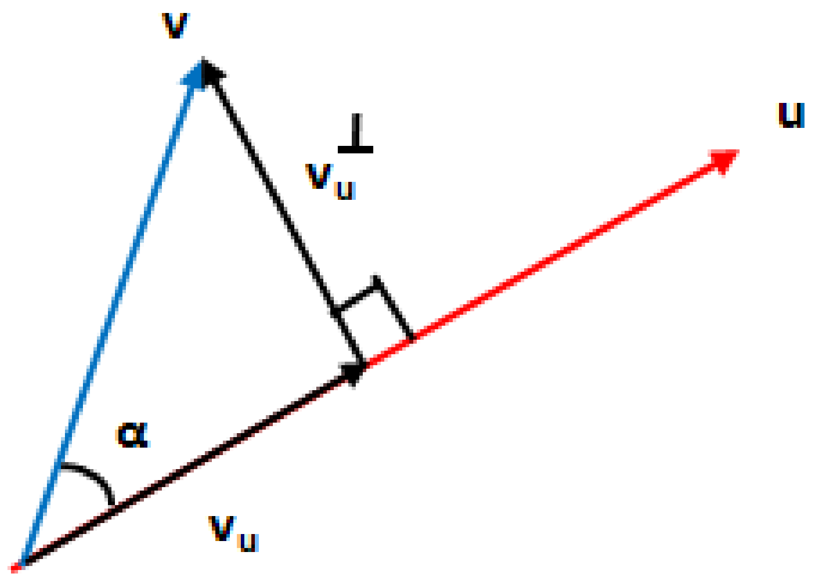
törmäävät hetkellä t = 3.8901




eivät törmää
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
0
5
10
15

Komponentteihin jako:

Jaetaan vektori $\mathbf{v}$ kahteen osaan, vektorin $\mathbf{u}$ suuntaiseen ja $\mathbf{u}$:ta vastaan kohtisuoraan: $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_u^\perp}$



$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} * \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} * \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

$$\mathbf{v_u^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v_u}$$

$\mathbf{v_u}$ on $\mathbf{u}$:n suuntainen ja $\|\mathbf{v_u}\| = \dfrac{|\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}|}{\|\mathbf{u}\|}$

$\mathbf{v_u^\perp}$ on **kohtisuora**ssa $\mathbf{u}$:ta vastaan

Syy: $\mathbf{v_u^\perp} \bullet \mathbf{u} = (\mathbf{v} - \mathbf{v_u}) \bullet \mathbf{u}$

$$= \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} - \mathbf{v_u} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} - \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} * (\mathbf{u} \bullet \mathbf{u})$$

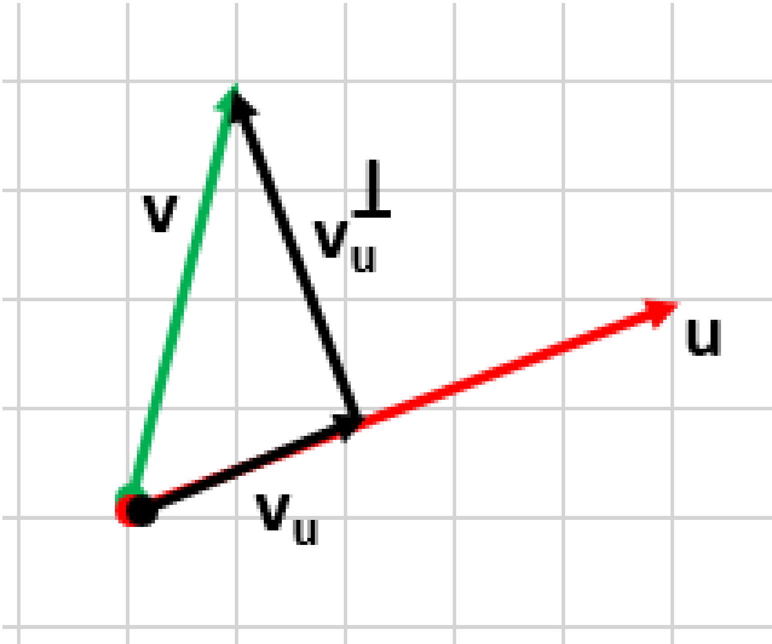
$$= \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} - \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} * \|\mathbf{u}\|^2 = 0$$

Esim. jos $\mathbf{v} = [1, 4]$ ja $\mathbf{u} = [5, 2]$, niin

$\mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = 13$ ja $\|\mathbf{u}\|^2 = 29$, joten

$\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \dfrac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} * \mathbf{u} = \dfrac{13}{29} * \mathbf{u} \approx [2.24, 0.90]$ ja

$\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathbf{u}} \approx [-1.24, 3.10]$



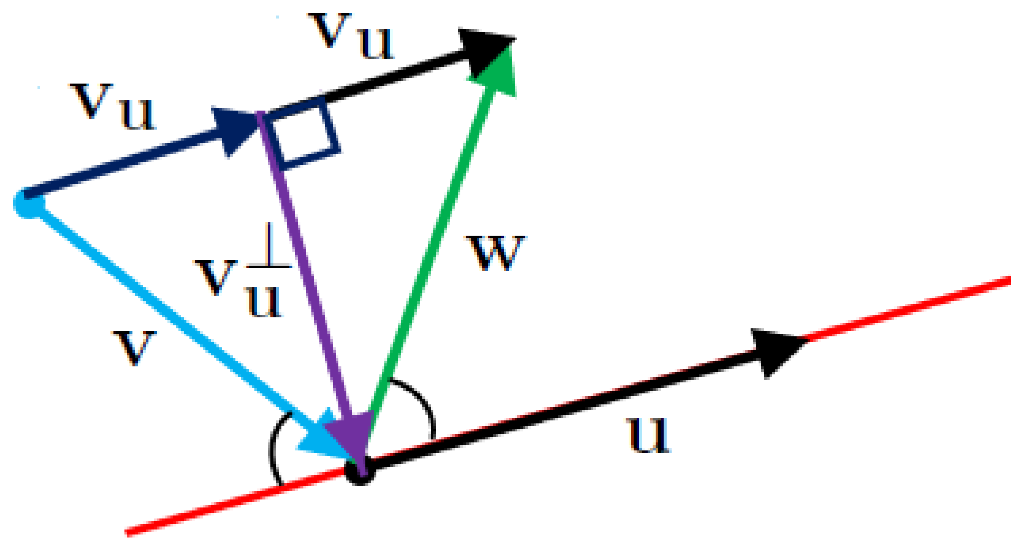
v
$v_u^{\perp}$
u
v_u

Esim. Vektorin $\mathbf{v}$ suuntainen säde heijastuu vektorin $\mathbf{u}$ suuntaisesta suorasta. Heijastunut säde on vektorin

$$\mathbf{w} = \mathbf{v_u} - \mathbf{v_u^\perp}$$

suuntainen eli $\mathbf{w}$:n ja $\mathbf{v}$:n $\mathbf{u}$:n suuntaiset komponentit ovat samat, kohtisuorat komponentit yhtä pitkät mutta vastakkaissuuntaiset,

$$\mathbf{w_u} = \mathbf{v_u}, \, \mathbf{w_u^\perp} = -\mathbf{v_u^\perp}$$



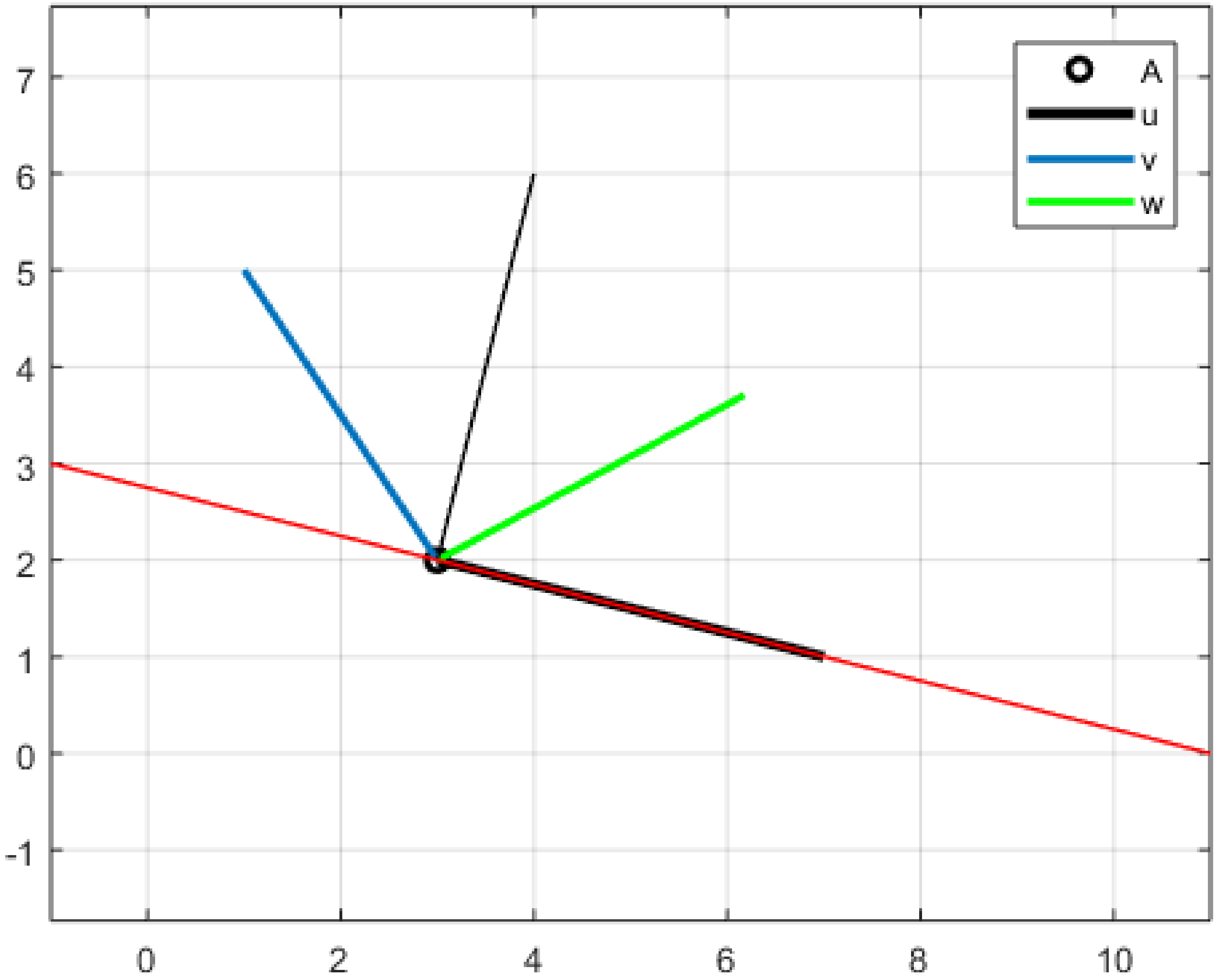
v_u
v_u
$v_u^\perp$
w
v
u

Esim: Jos $\mathbf{v} = [2, -3]$ ja $\mathbf{u} = [4, -1]$, niin

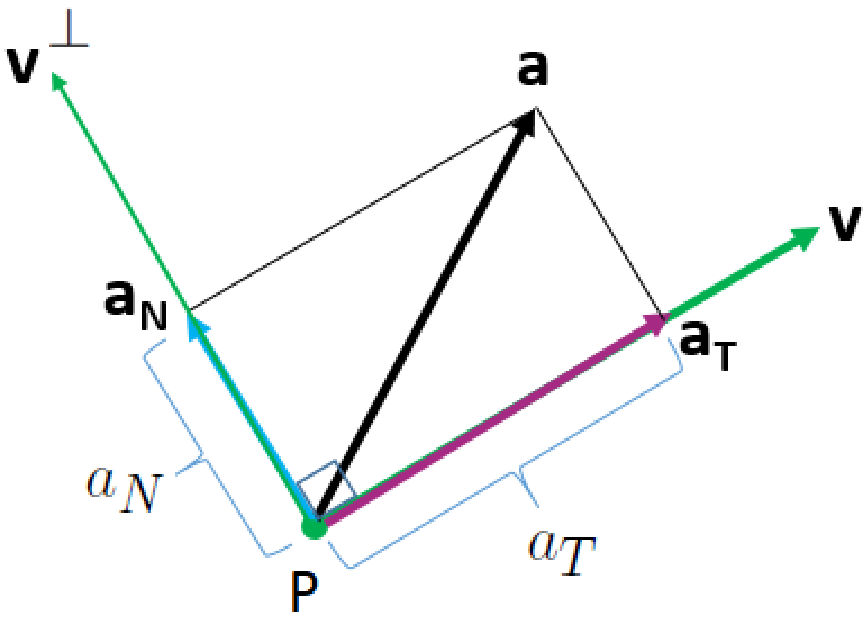
$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} * \mathbf{u} \approx [2.59, -0.65]$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v_u} \approx [-0.59, -2.35]$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v_u} - \mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} \approx [3.18, 1.70]$$


A
u
v
w
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
0
2
4
6
8
10

Esim: Nopeus $\mathbf{v} = [vx, vy]$, kiihtyvyys $\mathbf{a} = [ax, ay]$, $\mathbf{v}^{\perp} = [-vy, vx]$



Tangentiaalikiihtyvyys

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} * \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = a_T * \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},$$ missä

$$a_T = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{ax * vx + ay * vy}{\|\mathbf{v}\|}$$

Normaalikiihtyvyys

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_{\mathbf{v}}^{\perp} = \mathbf{a}_{\mathbf{v}^{\perp}} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{v}^{\perp}}{\|\mathbf{v}^{\perp}\|} * \frac{\mathbf{v}^{\perp}}{\|\mathbf{v}^{\perp}\|}$$

$$= \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{v}^{\perp}}{\|\mathbf{v}\|} * \frac{\mathbf{v}^{\perp}}{\|\mathbf{v}\|} = a_N * \frac{\mathbf{v}^{\perp}}{\|\mathbf{v}\|}, \text{ missä}$$

$$a_N = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{v}^{\perp}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{-ax * vy + ay * vx}{\|\mathbf{v}\|}$$

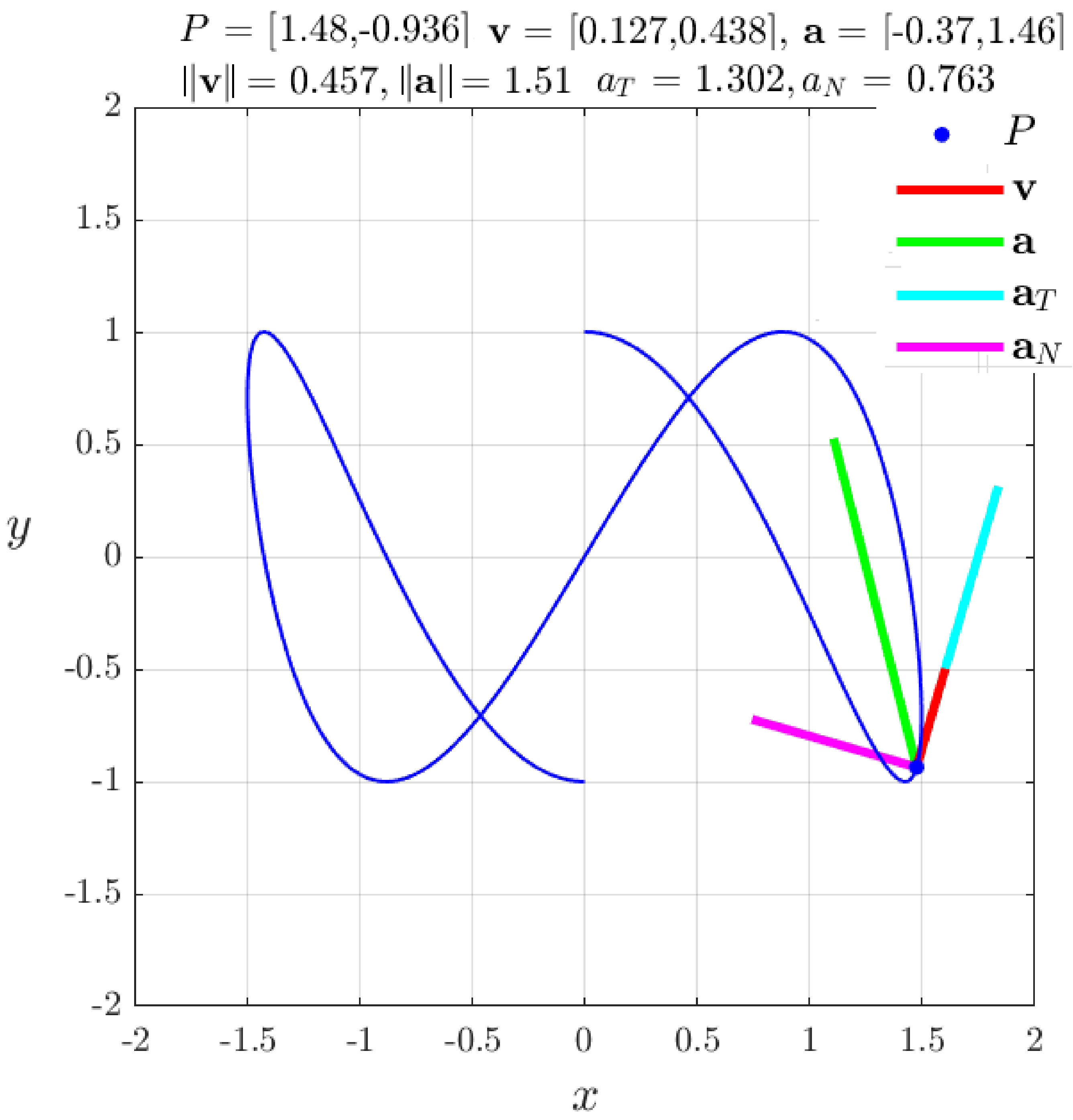
Eli: $\|\mathbf{a}_T\| = |a_T|$, $\|\mathbf{a}_N\| = |a_N|$, ja jos

$a_T > 0$, niin $\mathbf{a}_T$ on $\mathbf{v}$:n suuntainen

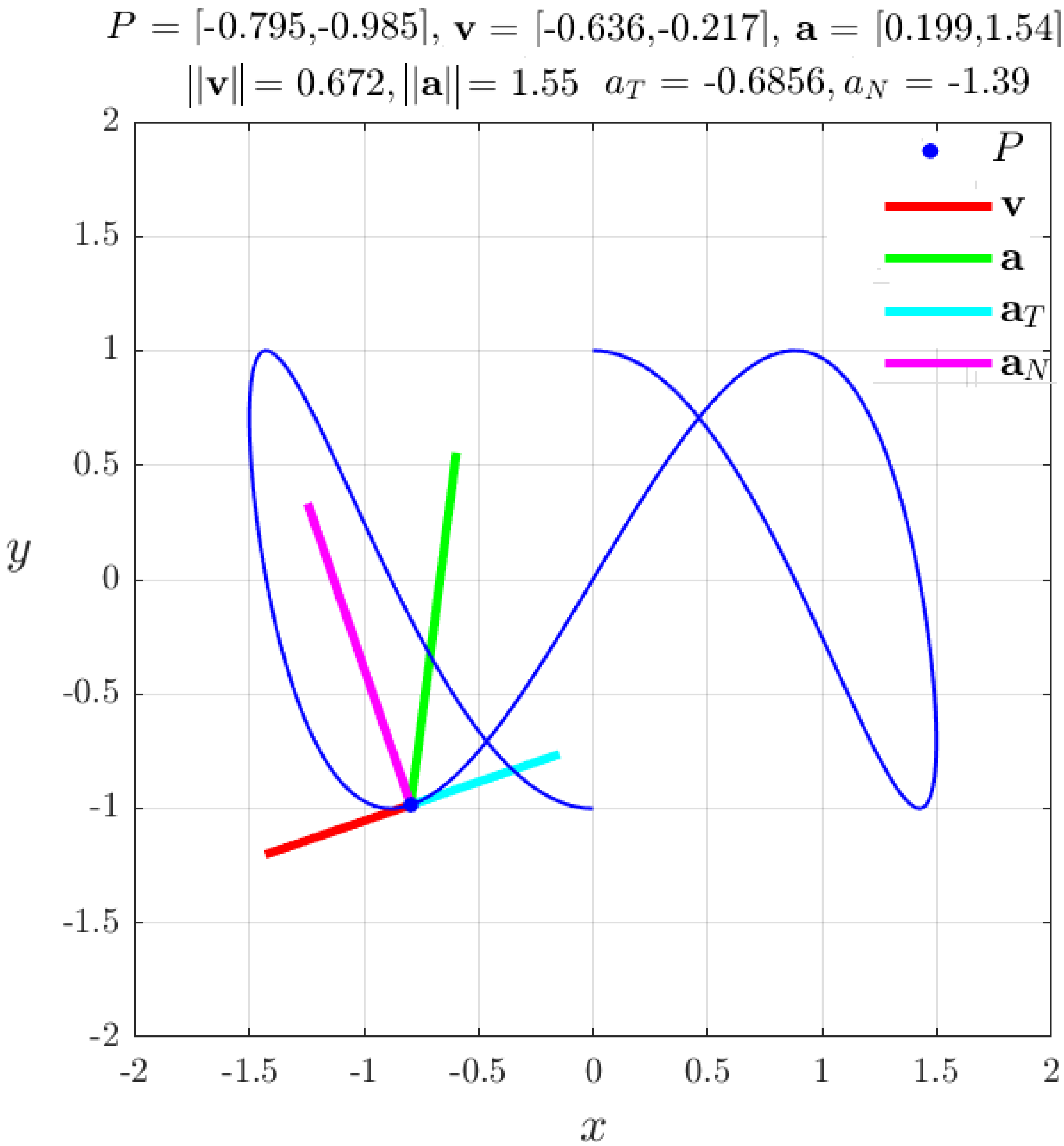
$a_T < 0$, niin $\mathbf{a}_T$ on $-\mathbf{v}$:n suuntainen

$a_N > 0$, niin $\mathbf{a}_N$ on $\mathbf{v}^{\perp}$:n suuntainen

$a_N < 0$, niin $\mathbf{a}_N$ on $-\mathbf{v}^{\perp}$:n suuntainen

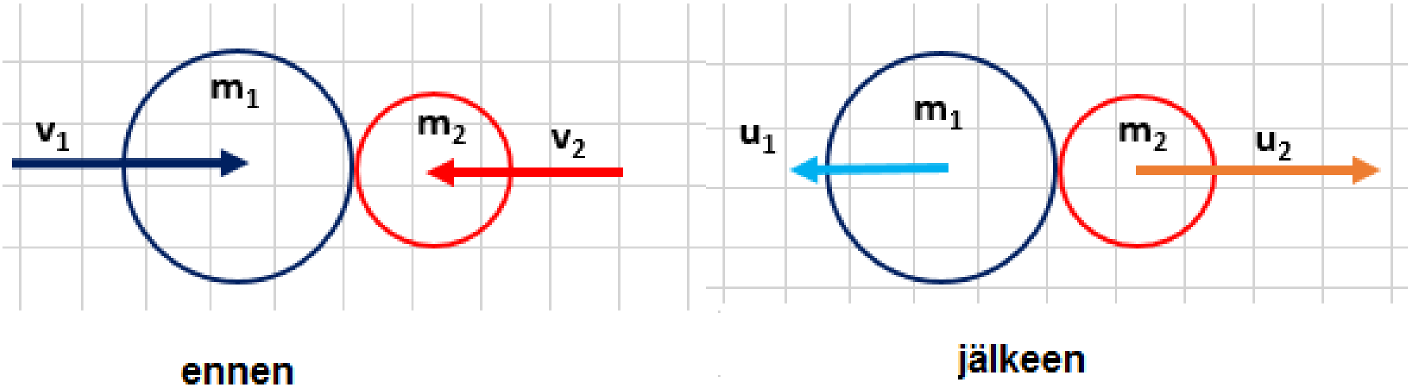


P = [1.48,-0.936] $\mathbf{v}$ = [0.127,0.438], $\mathbf{a}$ = [-0.37,1.46]
$\|\mathbf{v}\| = 0.457, \|\mathbf{a}\| = 1.51 \;\; a_T = 1.302, a_N = 0.763$
P
$\mathbf{v}$
$\mathbf{a}$
$\mathbf{a}_T$
$\mathbf{a}_N$
y
x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2



P = [-0.795,-0.985], v = [-0.636,-0.217], a = [0.199,1.54]
||v|| = 0.672, ||a|| = 1.55 a_T = -0.6856, a_N = -1.39
P
v
a
a_T
a_N
y
x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2

1D-törmäys:



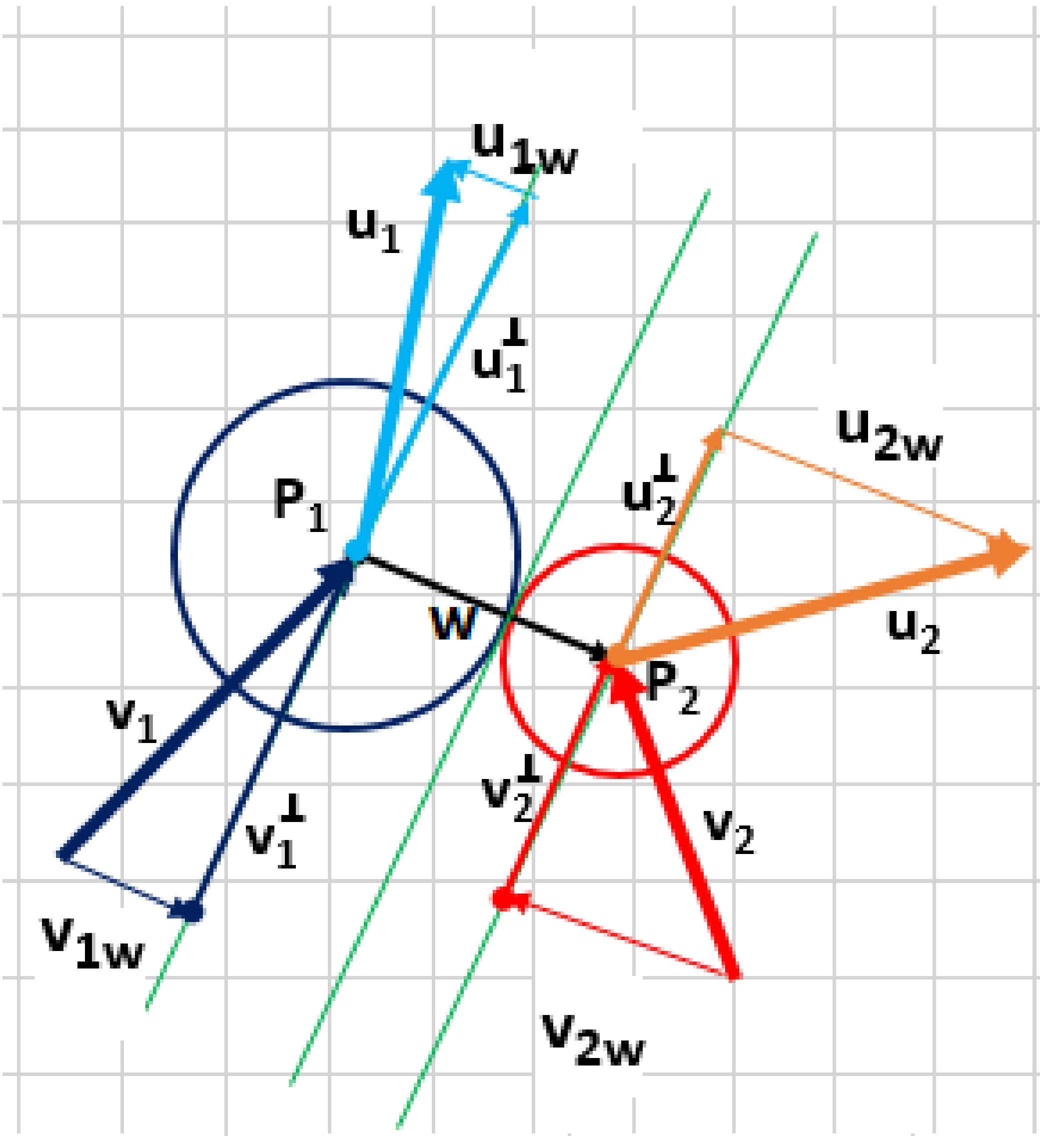
Massat m_1, m_2, nopeudet ennen törmäystä v_1 ja v_2, törmäyksen jälkeen u_1 ja u_2 (oikealle plus-, vasemmalle miinusmerkkiset).

Liikemäärä ja energia säilyvät:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} * v_1 + \dfrac{2 m_2}{m_1 + m_2} * v_2 \\ u_2 = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} * v_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} * v_2 \end{cases}$$

2D-törmäys: keskipisteet P_1 ja P_2



massat m_1 ja m_2, nopeudet ennen törmäystä $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$, törmäyksen jälkeen $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$

jaetaan tulonopeudet $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ vektorin $\mathbf{w} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ suuntaisiin ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin

$$\mathbf{v}_{1\mathbf{w}} = v_1 * \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}, \quad v_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

$$\mathbf{v}_1^{\perp} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1\mathbf{w}}$$

$$\mathbf{v}_{2\mathbf{w}} = v_2 * \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}, \quad v_2 = \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

$$\mathbf{v}_2^{\perp} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2\mathbf{w}}$$

Koska ympyrät vaikuttavat toisiinsa vain $\mathbf{w}$:n suuntaisesti, niin sitä vastaan kohtisuorat nopeudet eivät muutu eli

$$\mathbf{u}_1^{\perp} = \mathbf{v}_1^{\perp} \quad \text{ja} \quad \mathbf{u}_2^{\perp} = \mathbf{v}_2^{\perp}$$

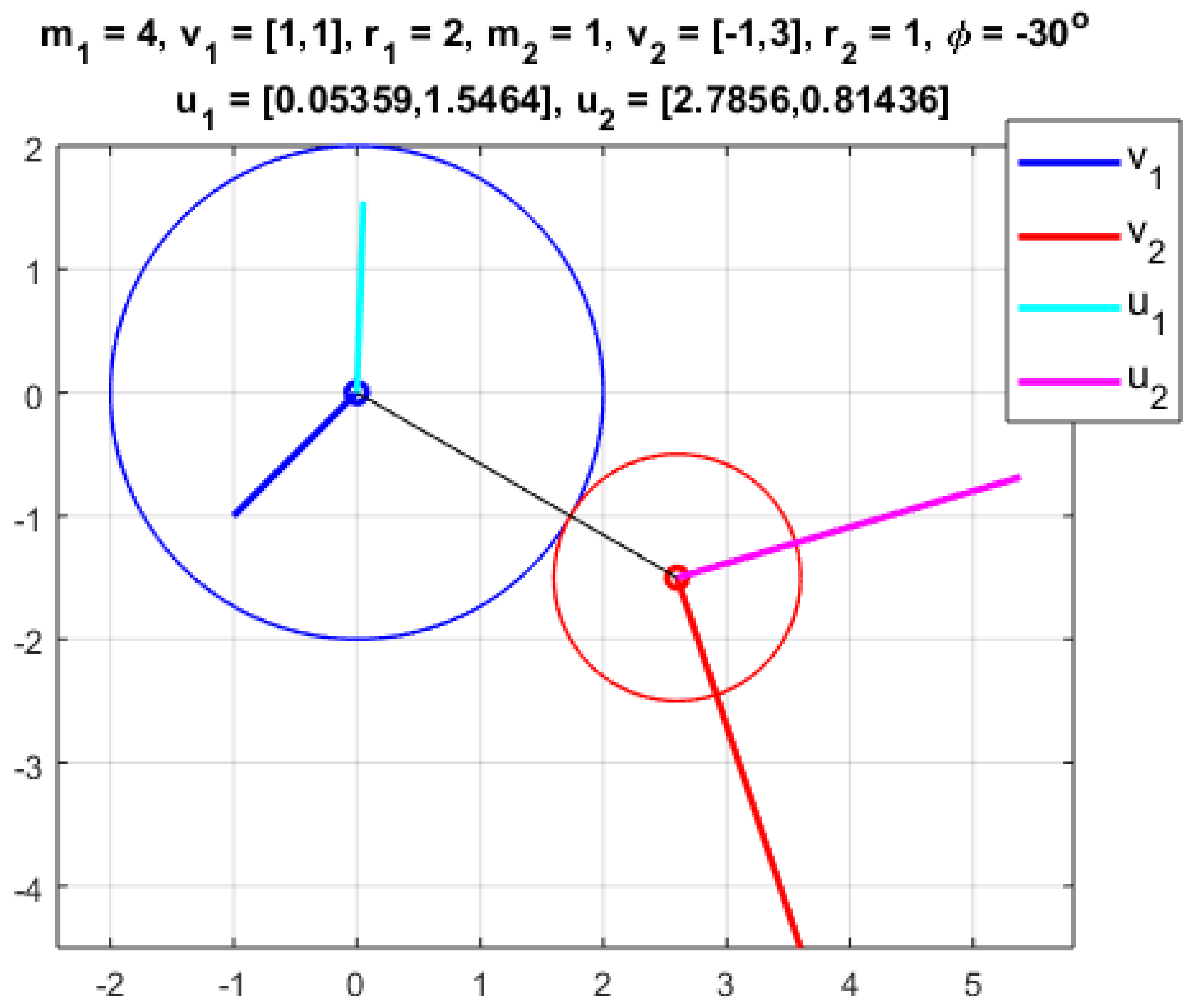
ja 1D-törmäyskaavojen nojalla

$$\mathbf{u}_{1\mathbf{w}} = u_1 * \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \text{ ja } \mathbf{u}_{2\mathbf{w}} = u_2 * \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} * v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} * v_2 \\[2ex] u_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} * v_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} * v_2 \end{cases}$$

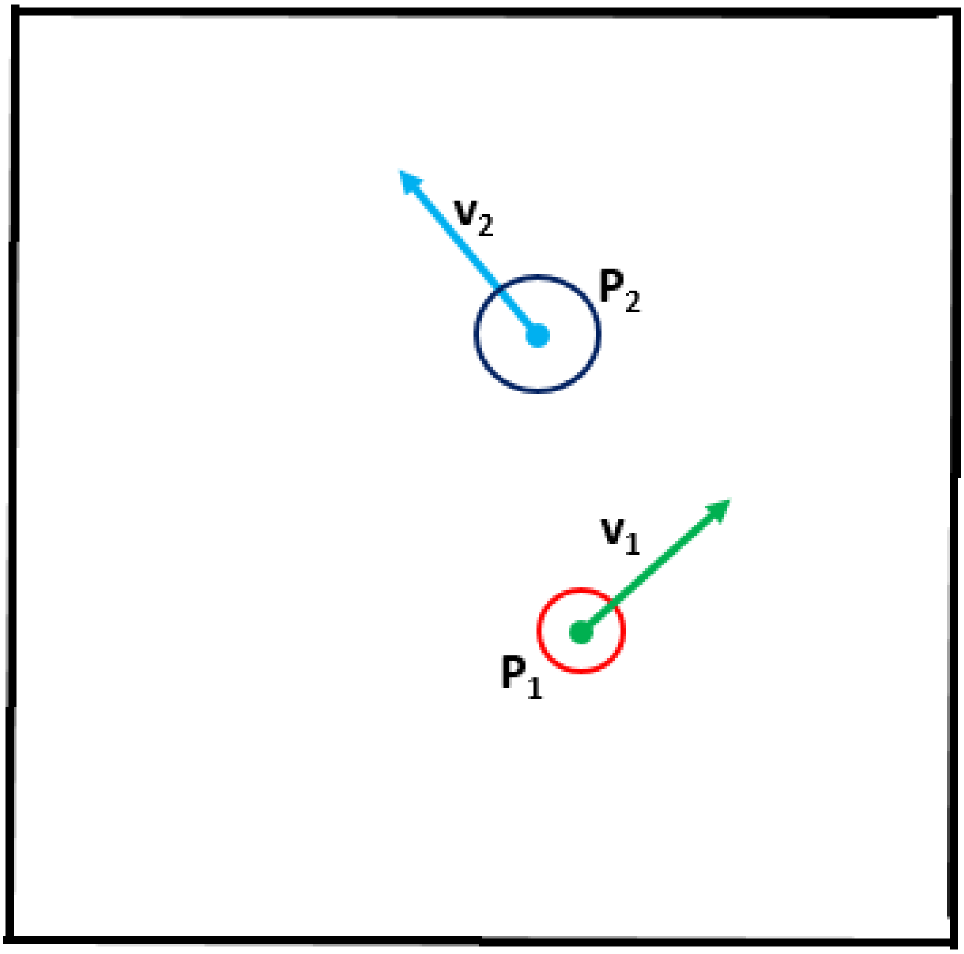
ja lähtönopeudet

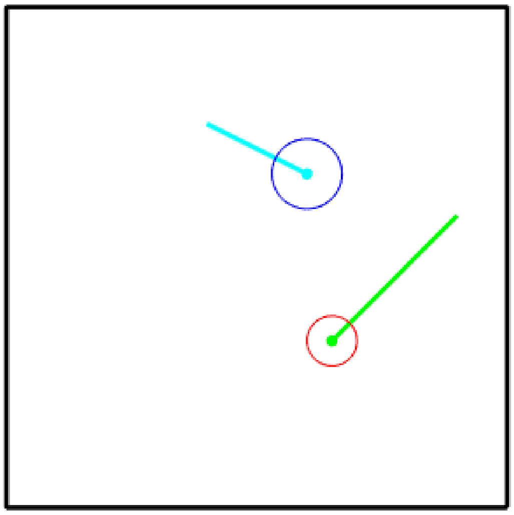
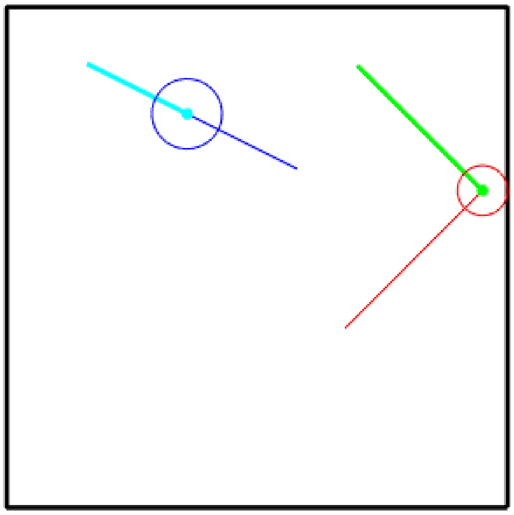
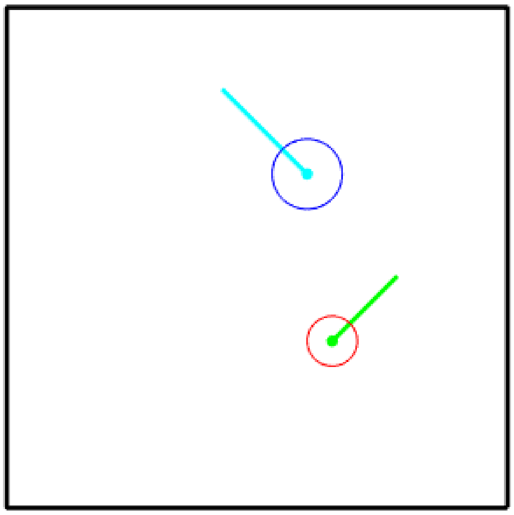
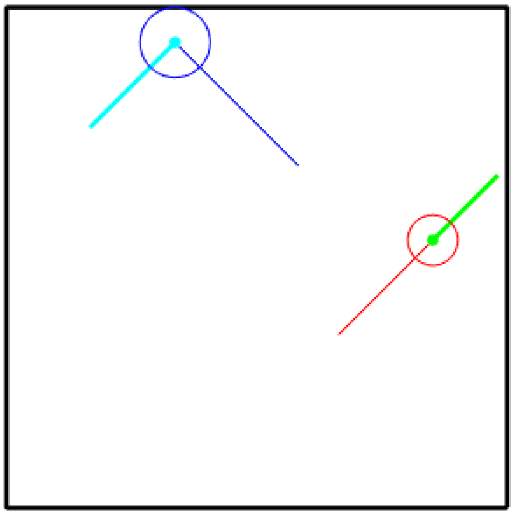
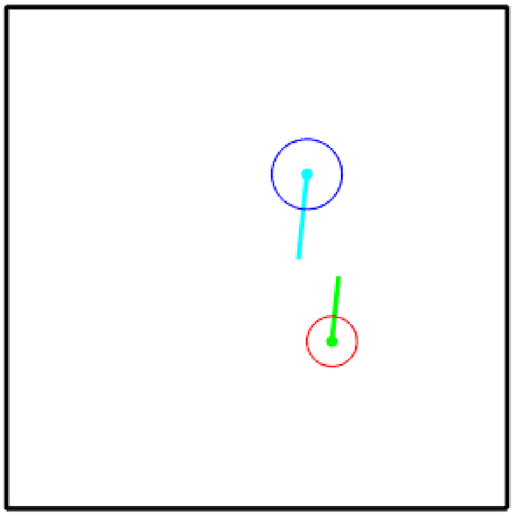
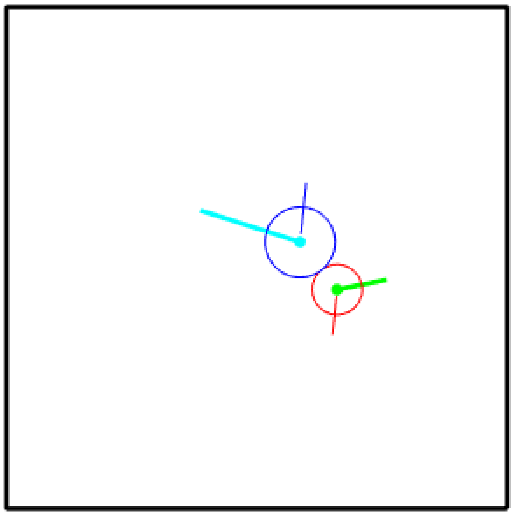
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1\mathbf{w}} + \mathbf{u}_1^{\perp}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{2\mathbf{w}} + \mathbf{u}_2^{\perp}$$



m_1 = 4, v_1 = [1,1], r_1 = 2, m_2 = 1, v_2 = [-1,3], r_2 = 1, ϕ = -30°
u_1 = [0.05359,1.5464], u_2 = [2.7856,0.81436]
v_1
v_2
u_1
u_2
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Esim. biljardi.m



Esim. Vektoreiden $\mathbf{u} = [ux, uy]$ ja $\mathbf{v} = [vx, vy]$ **2D-ristitulo** on luku

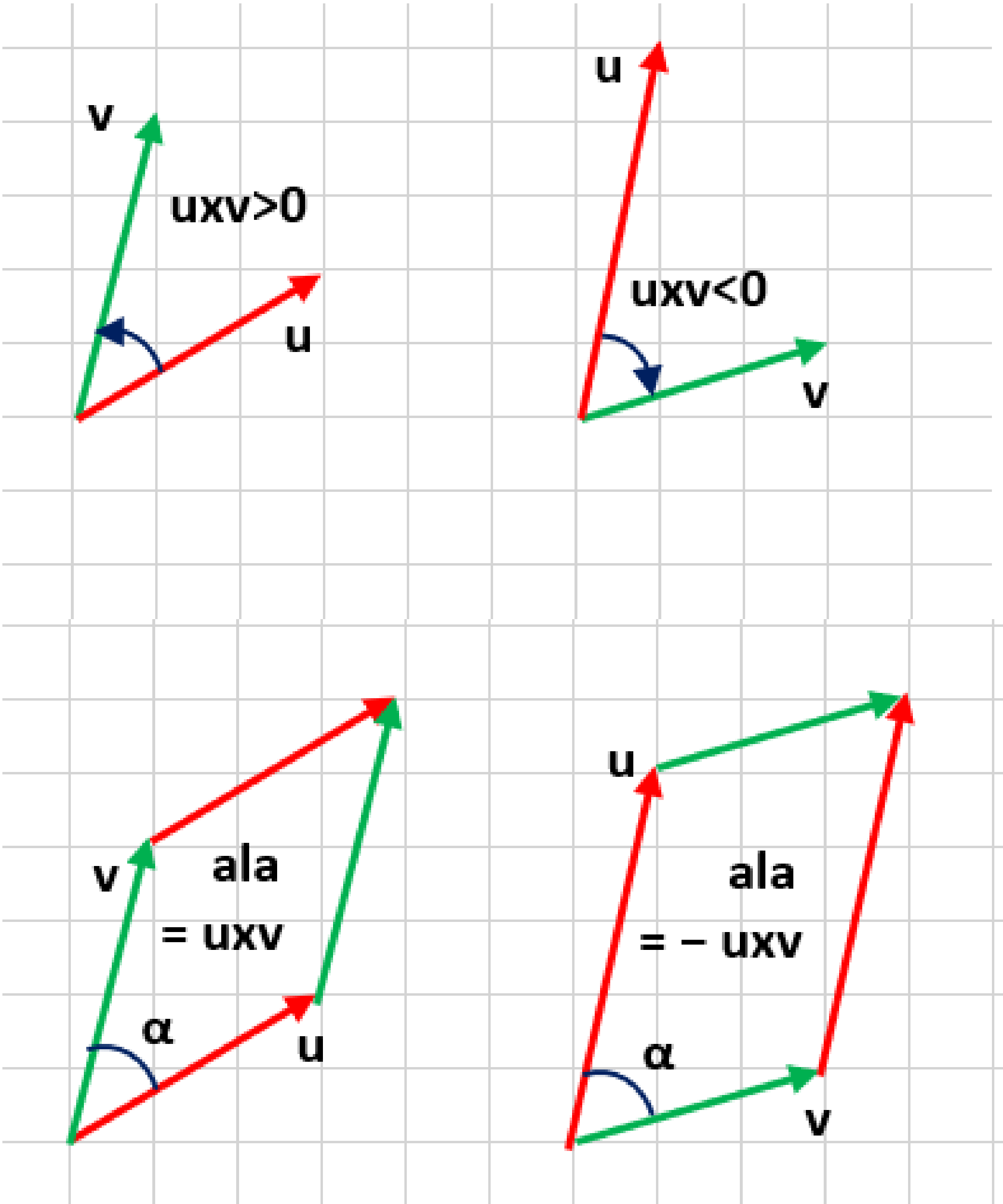
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = ux * vy - uy * vx = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} > 0 \leftrightarrow$ kiertosuunta $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ on vastapäivään

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} < 0 \leftrightarrow$ kiertosuunta $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ on myötäpäivään

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 \leftrightarrow$ kierto $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ on 0° tai 180° eli $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat saman- tai vastakkaissuuntaisia

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| * \|\mathbf{v}\| * \sin(\alpha)$ on $\mathbf{u}$:n ja $\mathbf{v}$:n määräämän suunnikkaan pinta-ala
(α on $\mathbf{u}$:n ja $\mathbf{v}$:n välinen kulma)



$$[3,2] \times [1,4] = 10$$

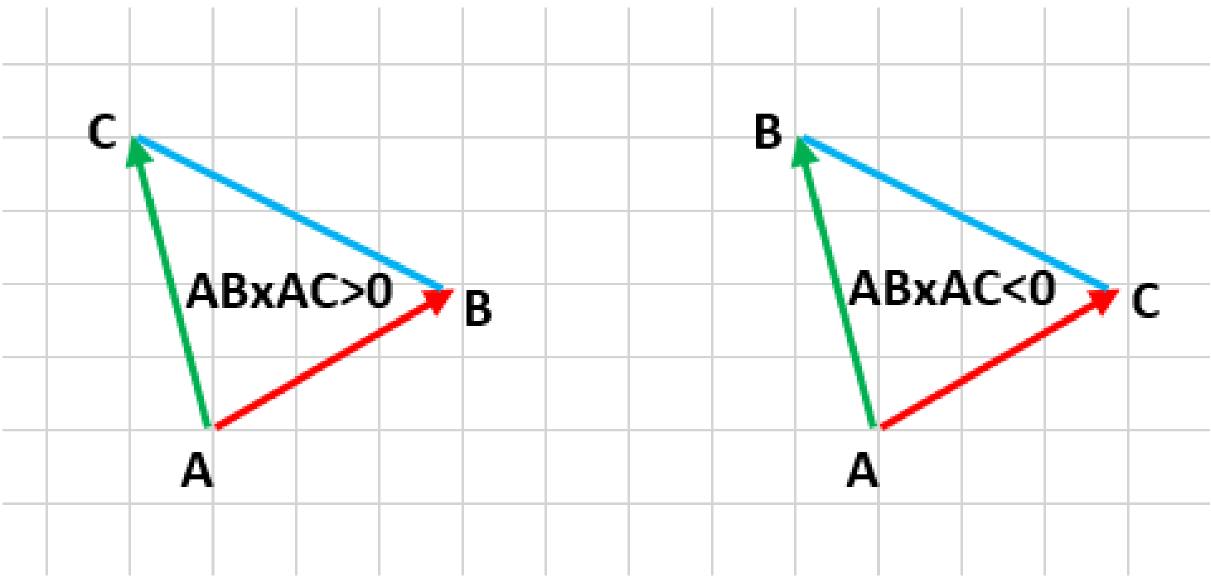
$$[1,5] \times [3,1] = -14$$

Esim: Pisteiden A, B ja C muodostaman kolmion ala on

$$\frac{1}{2} * |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| =$$

$$\frac{1}{2} * |[Bx - Ax, By - Ay] \times [Cx - Ax, Cy - Ay]| =$$

$$\frac{1}{2} * |(Bx - Ax)(Cy - Ay) - (By - Ay)(Cx - Ax)|$$



$$[3, 2] \times [-1, 4] = 14$$

$$[-1, 4] \times [3, 2] = -14$$

Huom:

$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} > 0 \leftrightarrow$ käännös $A \to B \to C$ on vastapäivään

$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} < 0 \leftrightarrow$ käännös $A \to B \to C$ on myötäpäivään

$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = 0 \leftrightarrow$ käännös $A \to B \to C$ on 0° tai 180° eli A, B ja C ovat samalla suoralla