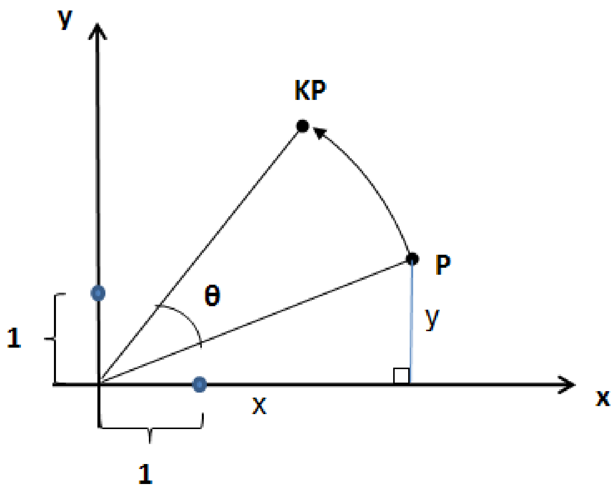
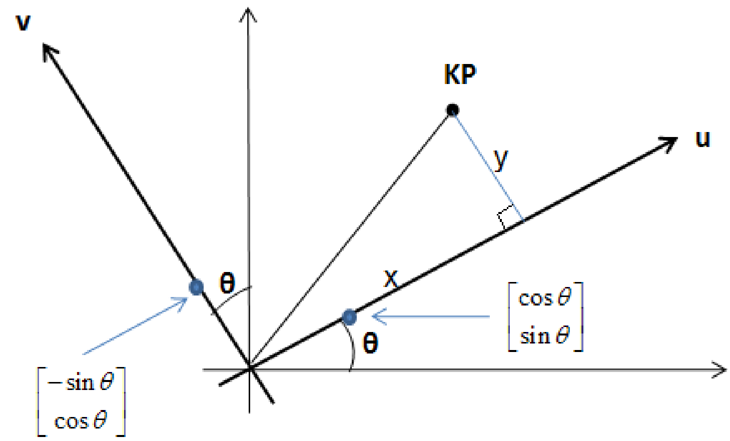
Kiertomatriisi 2D:ssä

Kierto origon $O = [0, 0]$ ympäri kulman θ verran (vastapäivään, jos $\theta > 0$; myötäpäivään, jos $\theta < 0$)





Kierretyllä pisteellä KP on samat koordinaatit x ja y kierretyssä uv-koordinaatistossa, eli jos

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

niin

$$KP = x \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

$$= \begin{bmatrix} x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta) \\ x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

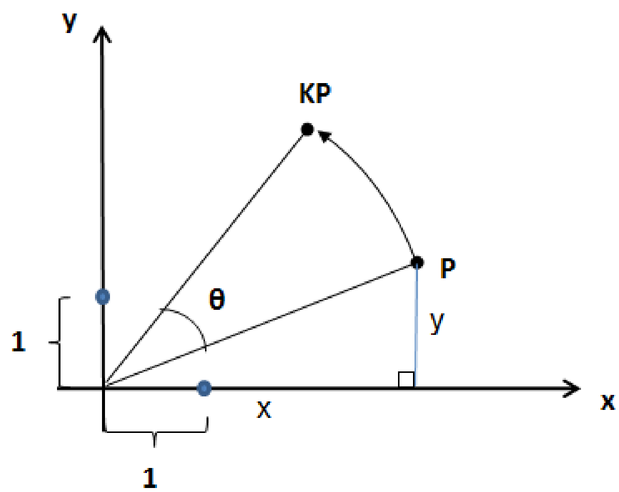
$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K_\theta * P$$

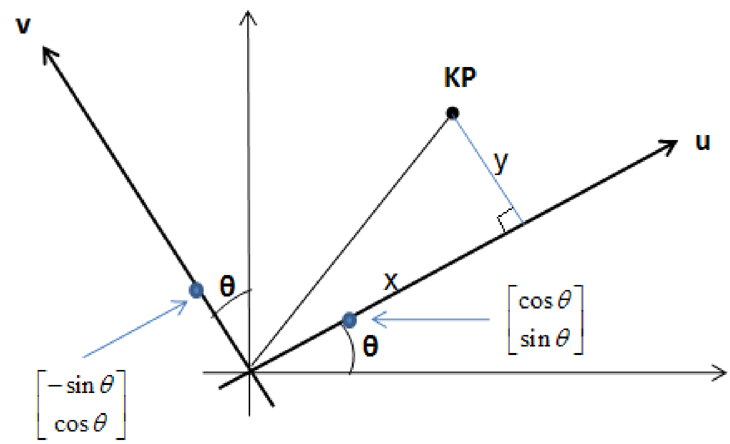
eli kierto saadaan aikaan kertomalla pisteen koordinaatit **kiertomatriisi**lla

$$K_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Huom 1. Kiertomatriisin sarakkeet kertovat, mihin x- ja y-akselit (eli pisteet [1,0] ja [0,1]) joutuvat kierrossa, eli

$$K_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad K_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$





Huom 2: Käänteismatriisi vastaa käänteistä toimenpidettä eli kiertoa kulman $-\theta$ verran:

$$K_\theta^{-1} = K_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Huom 3: jos tasokuvio koostuu pisteistä

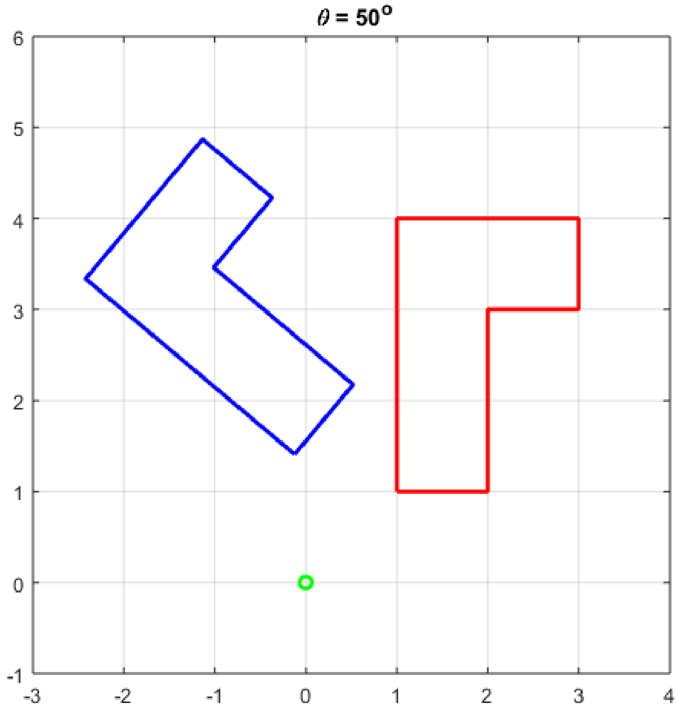
$$[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_N, y_N]$$

niin matriisin

$$KP = K_\theta * \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_N \end{bmatrix}}_{P}$$

sarakkeina ovat kulman θ verran kierretyn kuvion pisteiden koordinaatit

$$K_\theta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad K_\theta \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \ldots, K_\theta \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \end{bmatrix}$$



P =

1	1	3	3	2	2	1
1	4	4	3	3	1	1

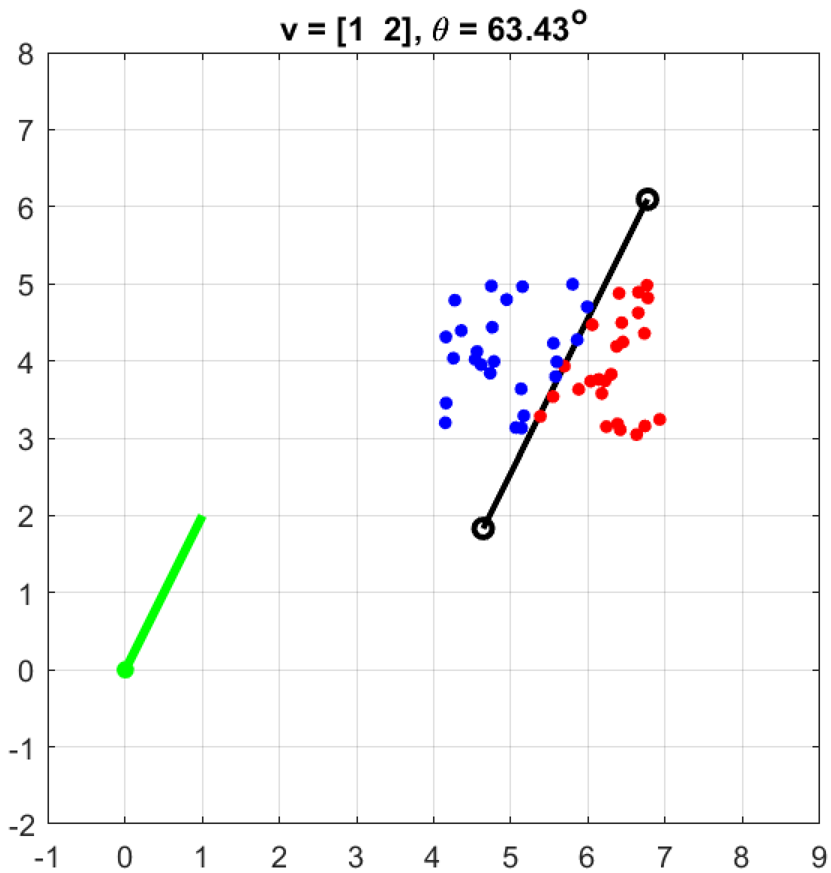
K =

0.6428	-0.7660
0.7660	0.6428

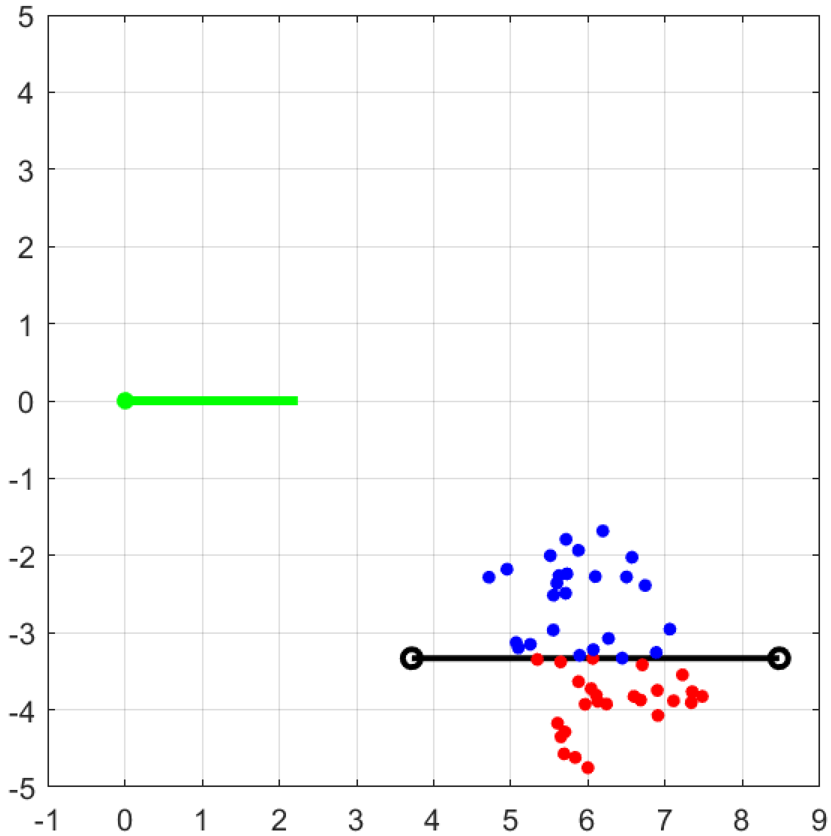
KP =

-0.1233	-2.4214	-1.1358	-0.3698	-1.0126	0.5195	-0.1233
1.4088	3.3372	4.8693	4.2265	3.4605	2.1749	1.4088

Esim: Jaetaan pistejoukko (parillinen määrä pisteitä) vektorin $\mathbf{v}$ suuntaisella viivalla niin, että molemmilla puolilla on yhtä monta pistettä.



Strategia: jos θ on $\mathbf{v}$:n suuntakulma, niin kierretään pisteitä O:n ympäri $-\theta$:n verran ja jaetaan kierretyt pisteet vaakasuoralla viivalla kahteen osaan



Esim: kierto pisteen

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ympäri saadaan aikaan seuraavasti:

1. siirretään $P_0 \to O$

2. kierretään O:n ympäri

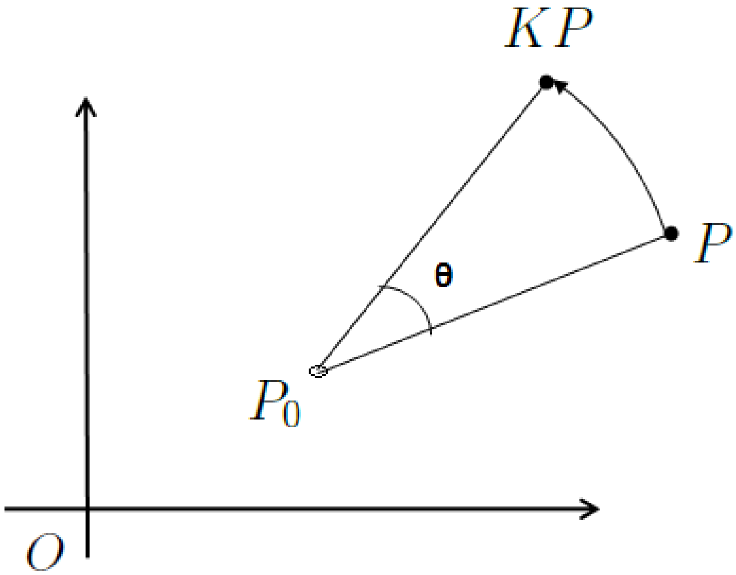
3. siirretään takaisin $O \to P_0$

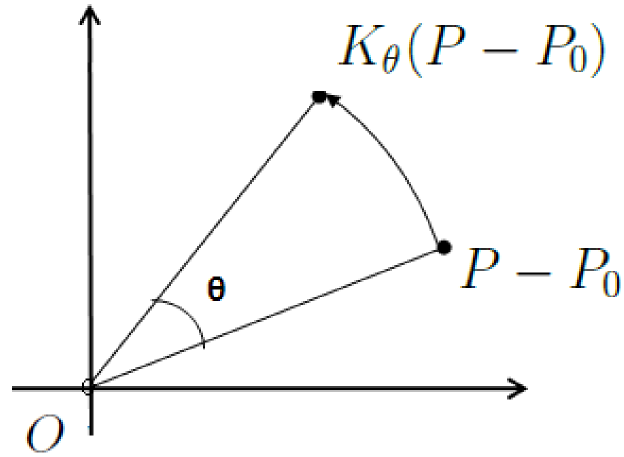
eli

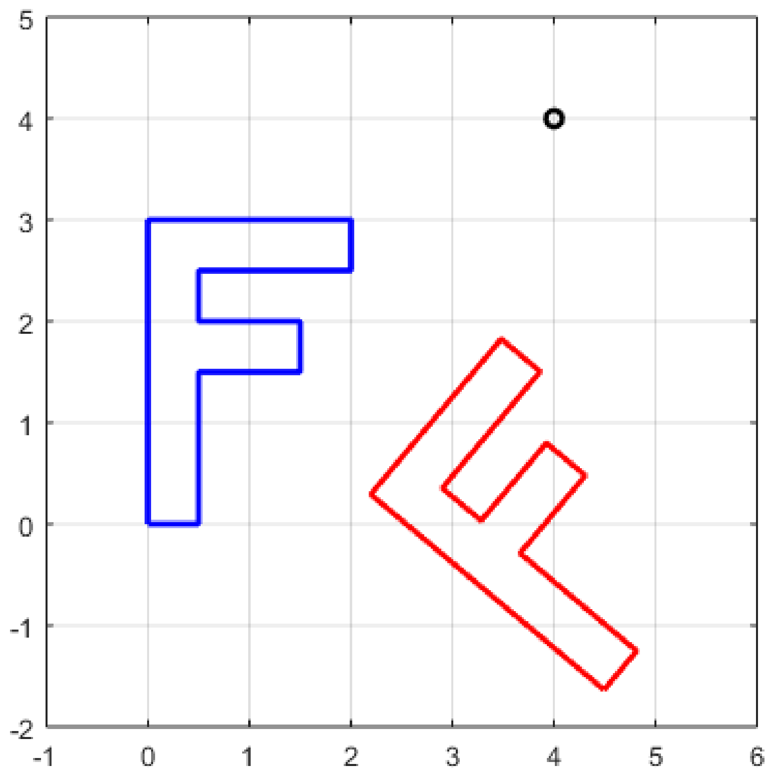
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to KP = K_\theta(P - P_0) + P_0$$

Aukikirjoitettuna KP:n koordinaatit ovat

$$\begin{cases} KPx = \cos(\theta)(x - x_0) - \sin(\theta)(y - y_0) + x_0 \\ KPy = \sin(\theta)(x - x_0) + \cos(\theta)(y - y_0) + y_0 \end{cases}$$


KP
P
θ
P_0
O


$K_\theta(P - P_0)$
$P - P_0$
θ
O


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Homogeeniset koordinaatit

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kierto kulman θ verran $[0, 0]$:n ympäri:

$$K_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siirto vektorin $[a, b]$ verran:

$$S_{a,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{a,b} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{a,b}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S_{-a,-b}$$

Esim: kierto pisteen

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ympäri saadaan aikaan seuraavasti:

1. siirretään $P_0 \to O$

2. kierretään O:n ympäri

3. siirretään takaisin $O \to P_0$

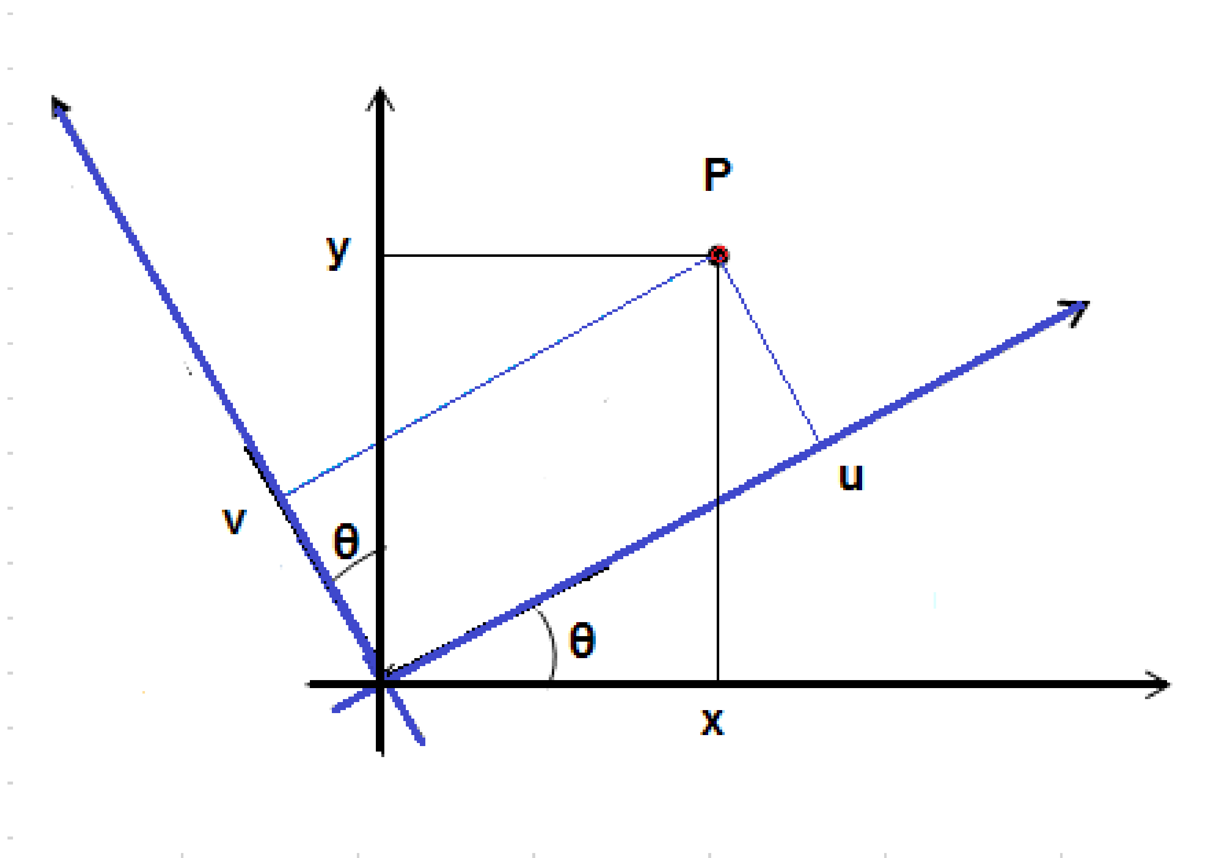
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \to S_{-x_0,-y_0} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = S^{-1}_{x_0,y_0} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to K_\theta S^{-1}_{x_0,y_0} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \to S_{x_0,y_0} K_\theta S^{-1}_{x_0,y_0} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

eli kierto P_0:n ympäri saadaan aikaan kertomalla matriisilla

$$S_{x_0,y_0} K_\theta S^{-1}_{x_0,y_0} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x_0 - x_0\cos(\theta) + y_0\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y_0 - x_0\sin(\theta) - y_0\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Koordinaatiston muunnos



Jos pisteellä P on koordinaatit x, y "peruskoordinaatistossa" ja koordinaatit u, v kulman θ verran kierretyssä koordinaatistossa, niin

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} = K_\theta \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ja toisinpäin,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = K_\theta^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K_{-\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eli

$u, v \to x, y$: kertomalla K_θ:lla

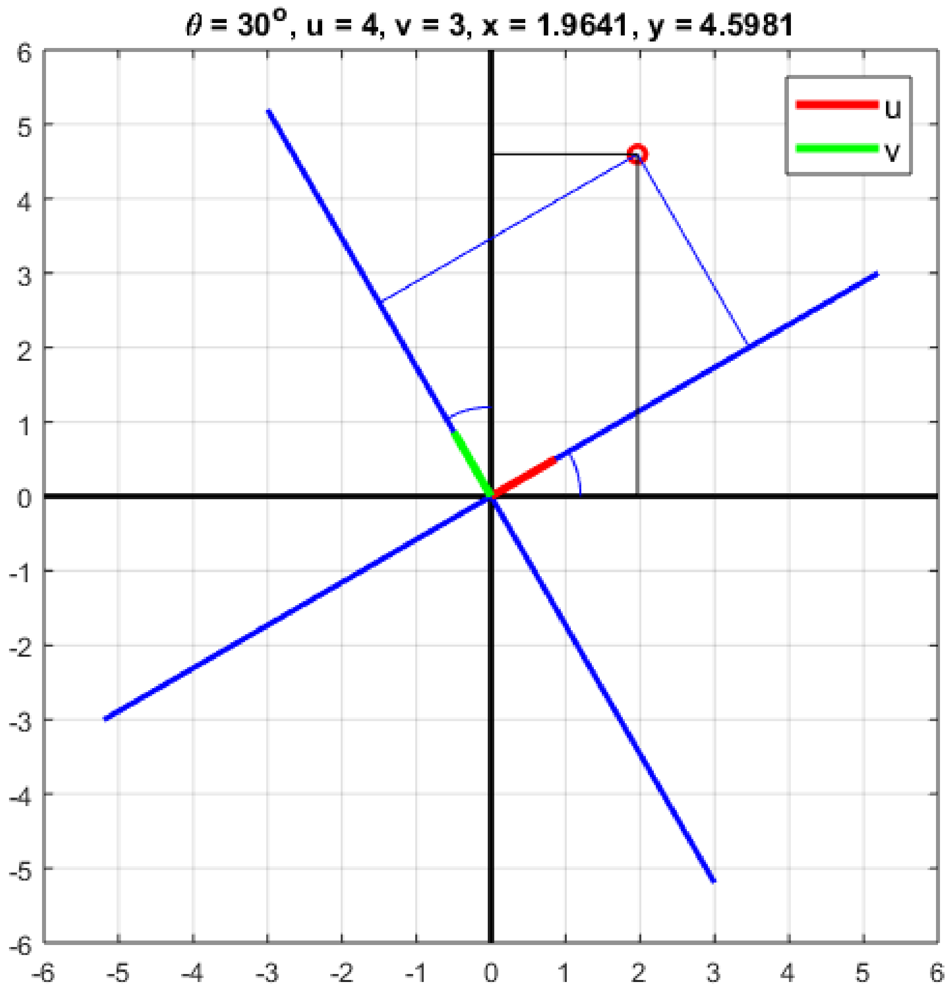
$x, y \to u, v$: kertomalla K_θ^{-1}:llä

Aukikirjoitettuna,

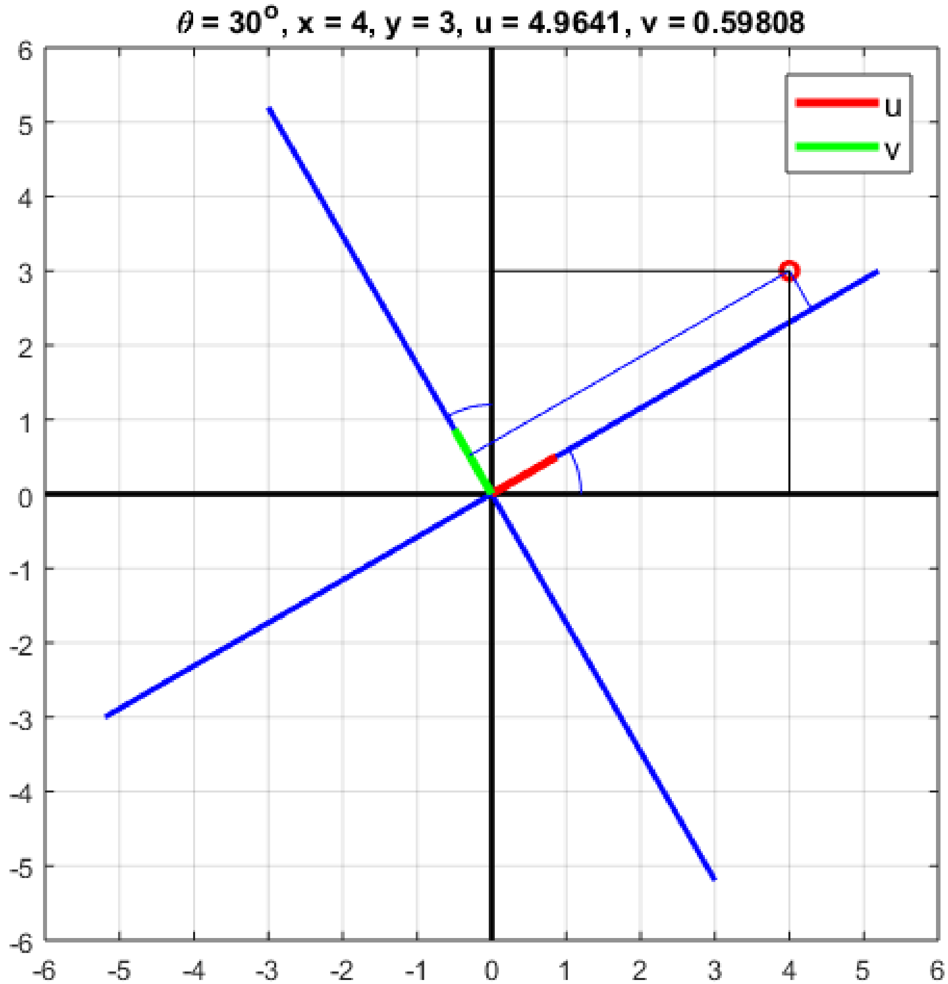
$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \cdot u - \sin(\theta) \cdot v \\ y = \sin(\theta) \cdot u + \cos(\theta) \cdot v \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} u = \cos(\theta) \cdot x + \sin(\theta) \cdot y \\ v = -\sin(\theta) \cdot x + \cos(\theta) \cdot y \end{cases}$$

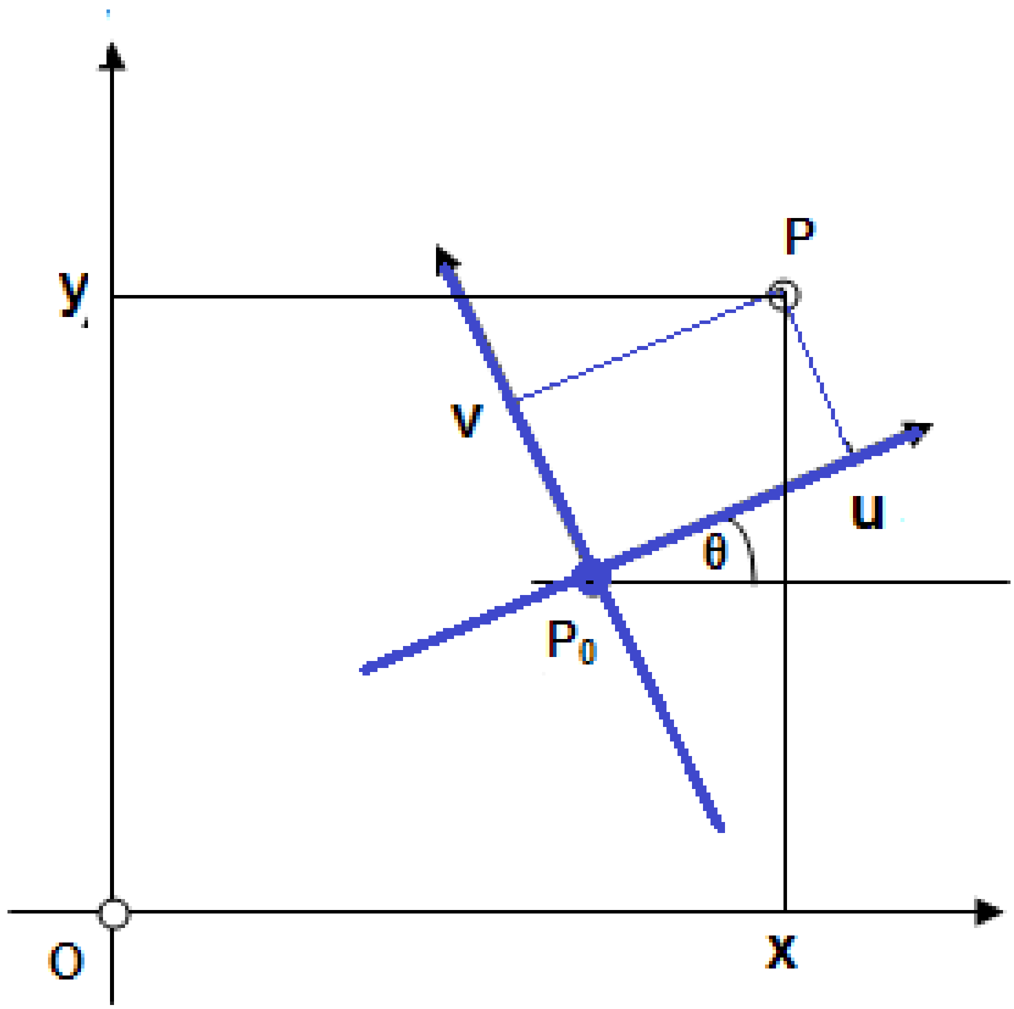


$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K_\theta \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = K_\theta^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Esim: Jos pisteellä P on koordinaatit x, y "peruskoordinaatistossa", ja koordinaatit u, v kulman θ verran kierretyssä koordinaatistossa, jonka origo on pisteessä $P_0 = [x_0, y_0]$



niin

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

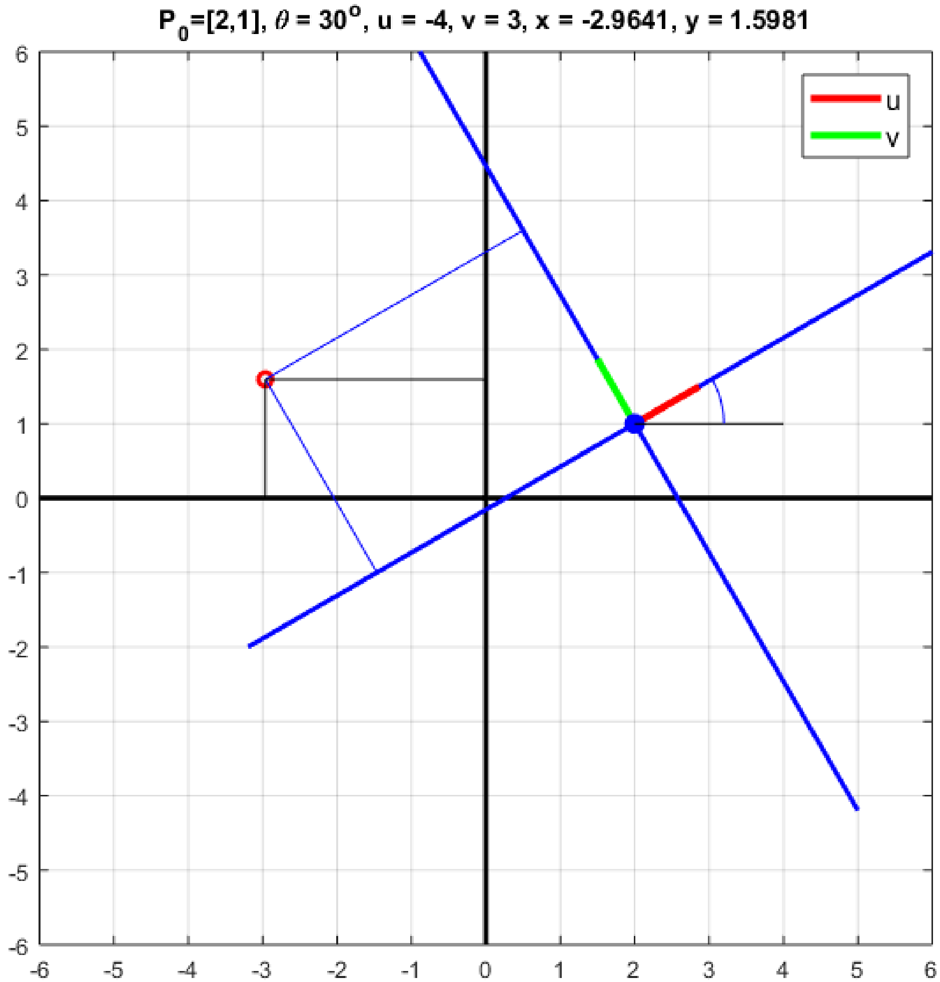
eli

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x_0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=K} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

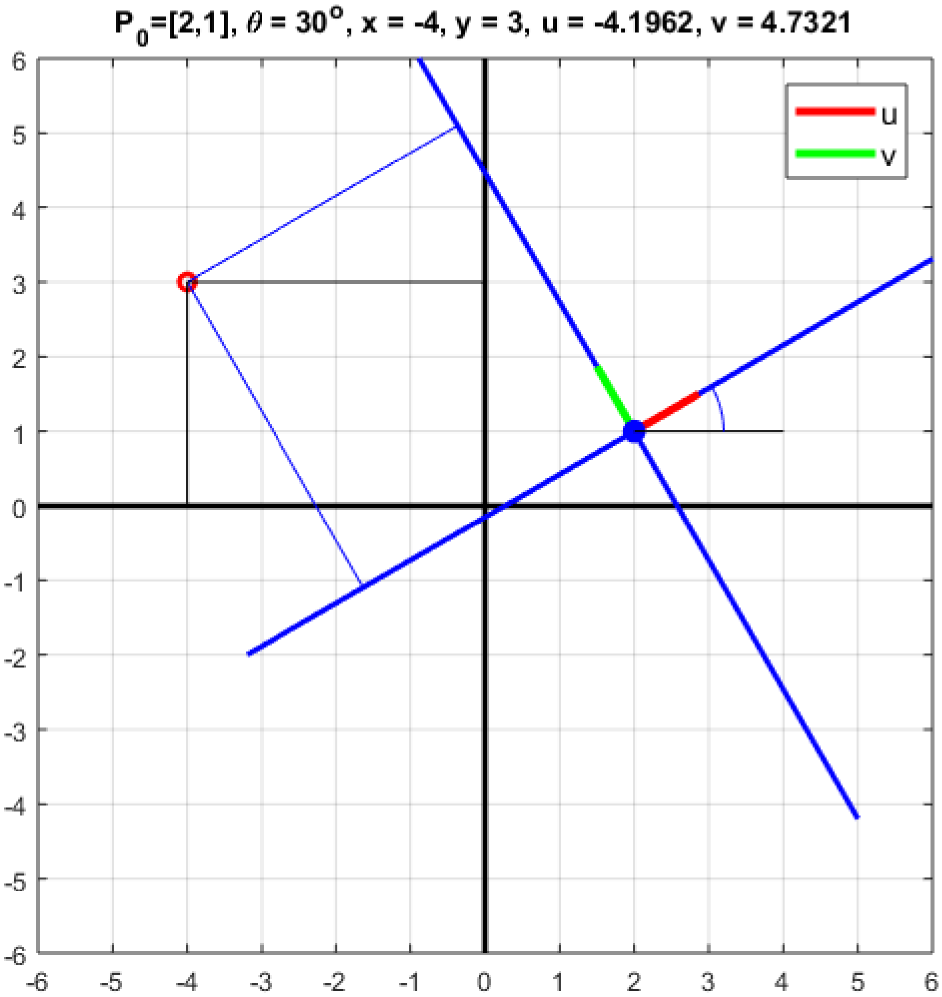
ja

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & -x_0 \cos(\theta) - y_0 \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & x_0 \sin(\theta) - y_0 \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

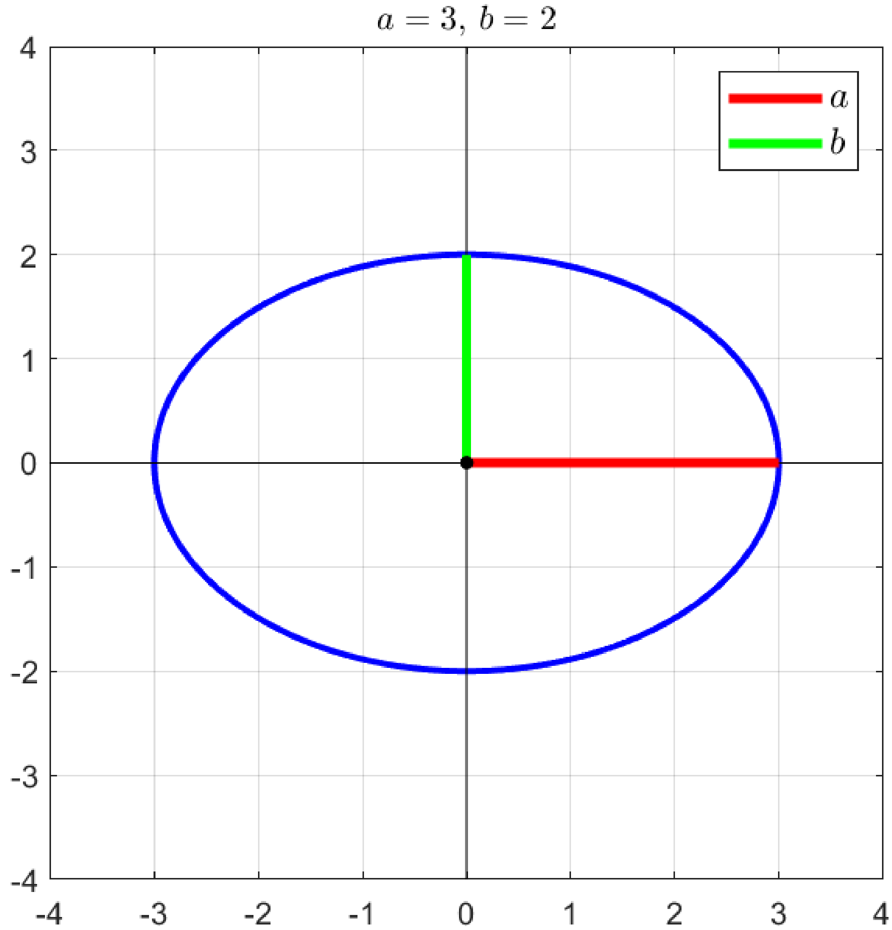


$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esim: Ellipsi, puoliakselit a ja b, keskipiste [0,0]



Yhtälö:

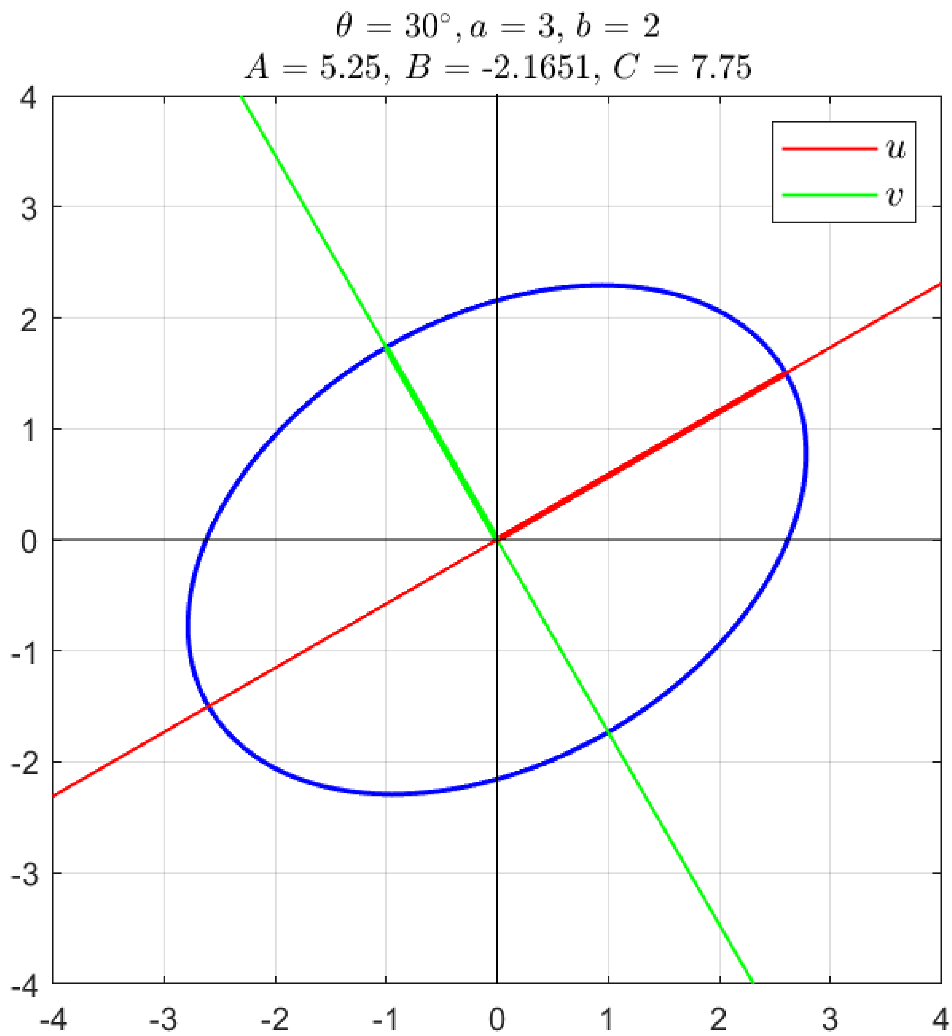
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\leftrightarrow\ b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2b^2$$

Matriisimuodossa

$$\leftrightarrow \quad [x, y] \underbrace{\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a^2b^2$$

Kulman θ verran kierretty ellipsi, puoliakselit a ja b, keskipiste [0,0]



kulman θ verran kierretyssä uv-koordinaatistossa ellipsin yhtälö on

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad \text{eli} \qquad b^2u^2 + a^2v^2 = a^2b^2$$

Matriisimuodossa

$$[u, v] \underbrace{\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = a^2 b^2$$

Koordinaatiston muunnos:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad K = K_\theta$$

$$[u, v] = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T (K^{-1})^T = [x, y](K^{-1})^T$$

joten ellipsin yhtälö xy-koordinaatistossa on

$$[x, y](K^{-1})^T M K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a^2 b^2$$

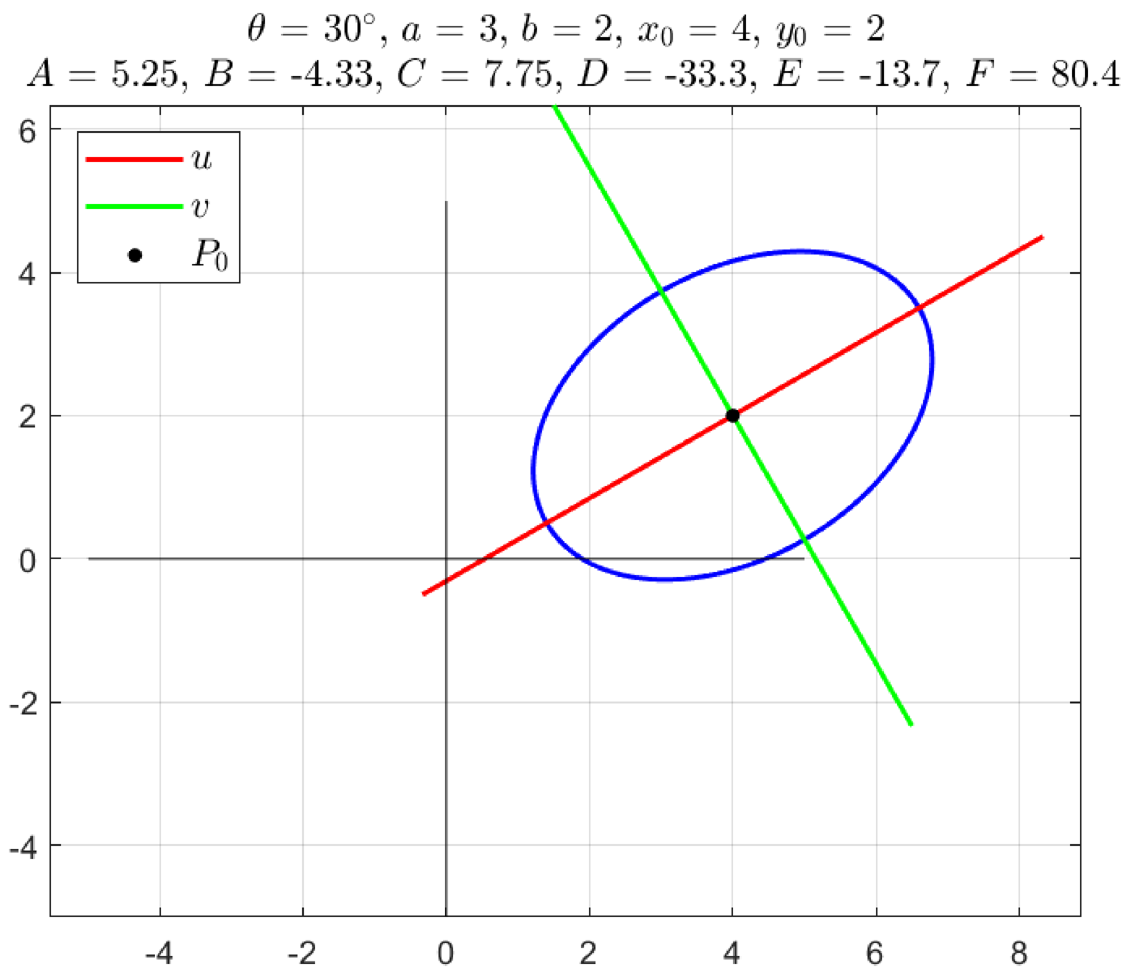
eli

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = a^2 b^2$$

missä

$$(K^{-1})^T M K^{-1} = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

Kulman θ verran kierretty ellipsi, puoliakselit a ja b, keskipiste $P_0 = [x_0, y_0]$



uv-koordinaatistossa (origo P_0) ellipsin yhtälö on

$$b^2u^2 + a^2v^2 = a^2b^2$$

Matriisimuodossa

$$[u, v, 1] \underbrace{\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = a^2b^2$$

$$
\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x_0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow [u, v, 1] = [x, y, 1](K^{-1})^T
$$

joten ellipsin yhtälö xy-koordinaatistossa on

$$
[x, y, 1](K^{-1})^T M K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = a^2 b^2
$$

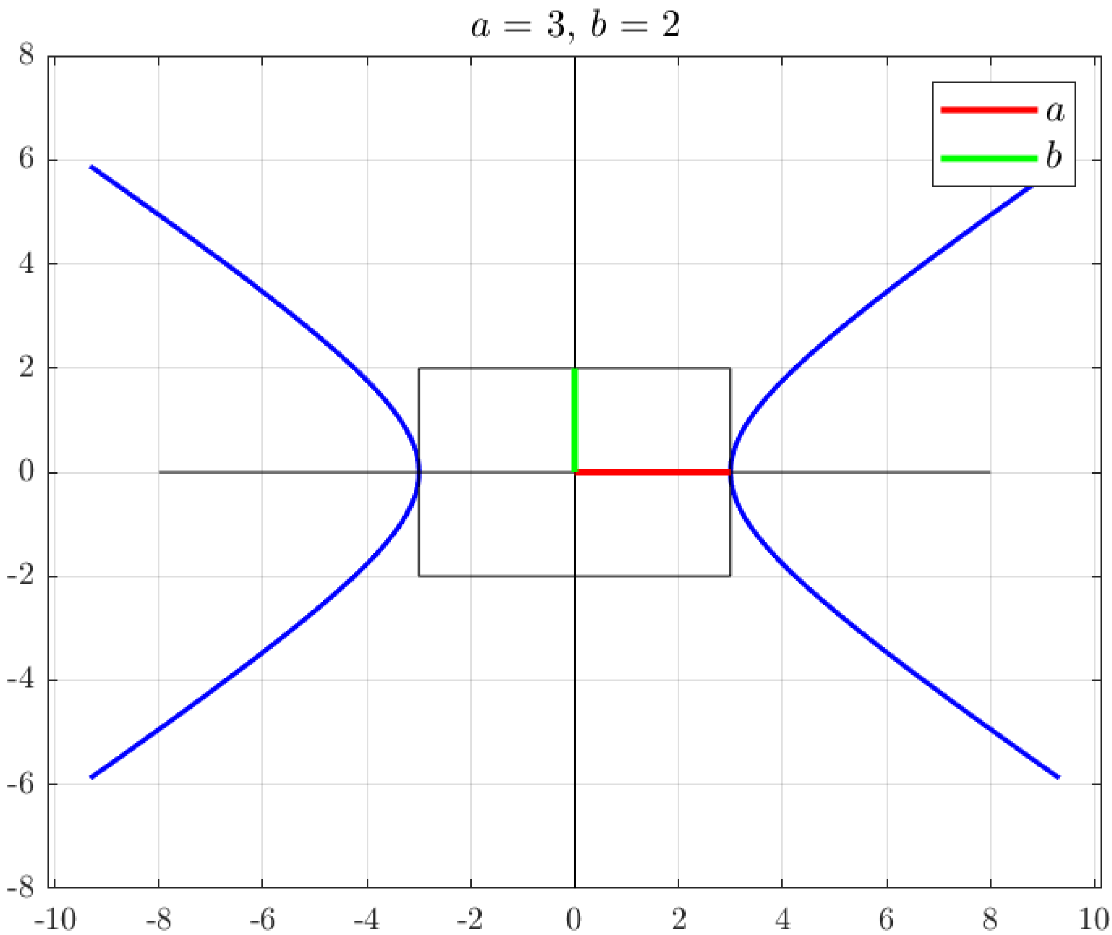
eli

$$
Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = a^2 b^2 - F
$$

missä

$$
(K^{-1})^T M K^{-1} = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}
$$

Esim: Hyperbeli, puoliakselit a ja b, keskipiste [0,0]



Yhtälö:

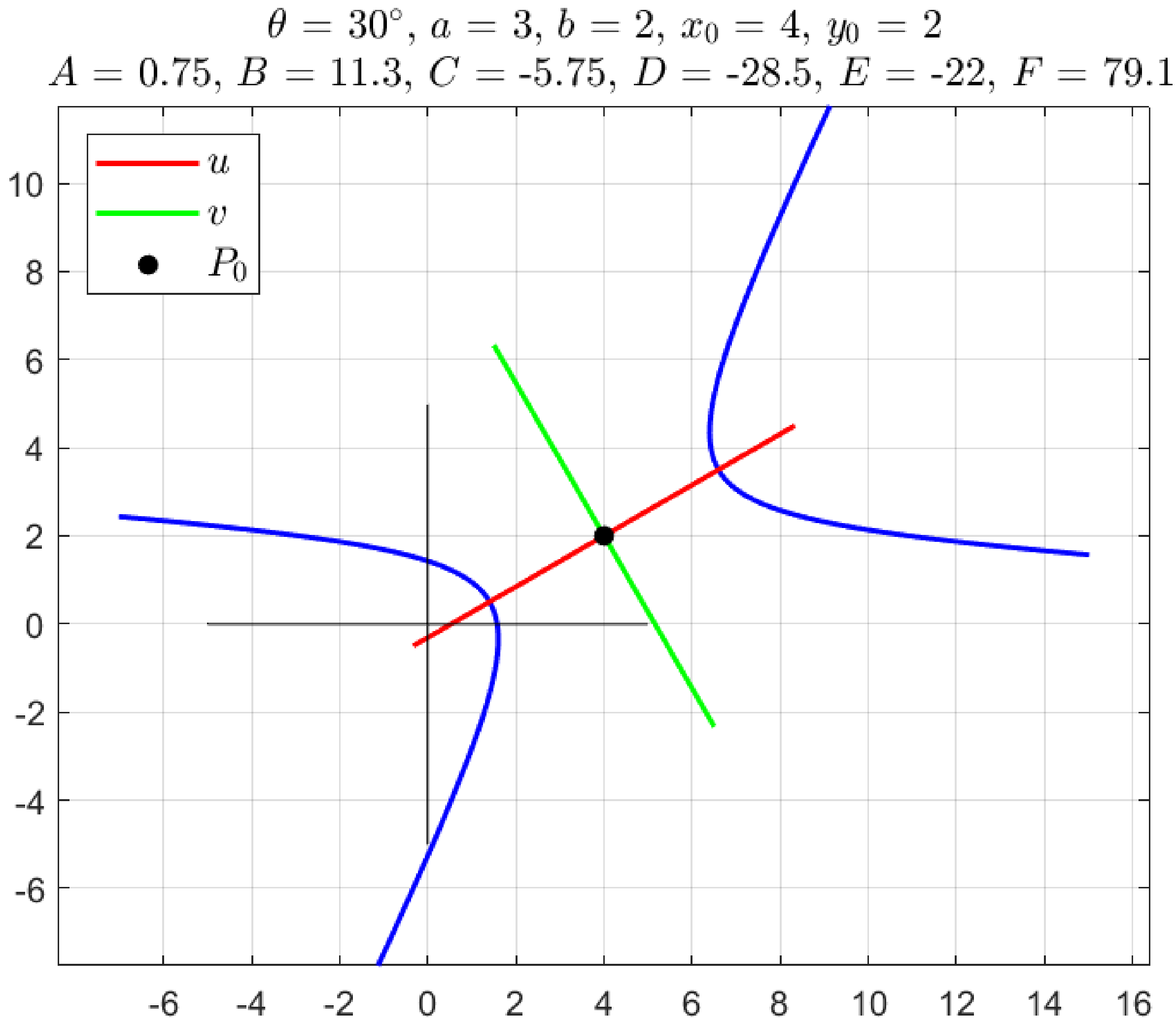
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\leftrightarrow b^2\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2b^2$$

Matriisimuodossa

$$\leftrightarrow \quad [x, y] \underbrace{\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a^2b^2$$

Kulman θ verran kierretty hyperbeli, puoliakselit a ja b, keskipiste $P_0 = [x_0, y_0]$



uv-koordinaatistossa (origo P_0) hyperbelin yhtälö on

$$b^2u^2 - a^2v^2 = a^2b^2$$

Matriisimuodossa

$$[u, v, 1] \underbrace{\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = a^2b^2$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x_0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [u, v, 1] = [x, y, 1](K^{-1})^T$$

joten hyperbelin yhtälö xy-koordinaatistossa on

$$[x, y, 1](K^{-1})^T M K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = a^2 b^2$$

eli

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = a^2 b^2 - F$$

missä

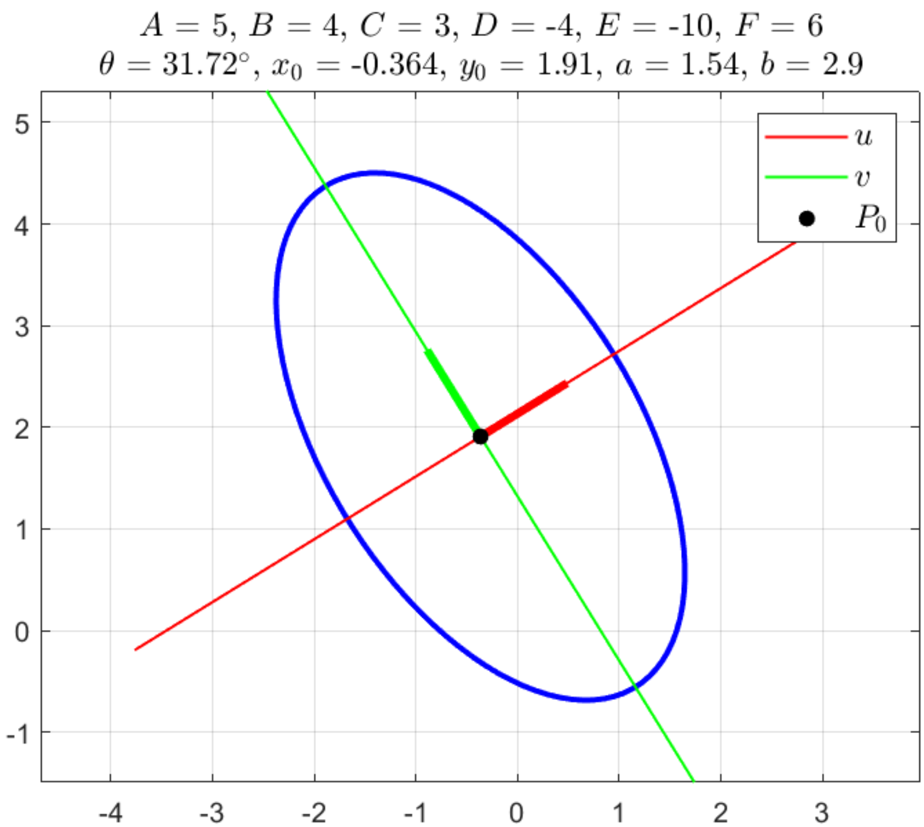
$$(K^{-1})^T M K^{-1} = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}$$

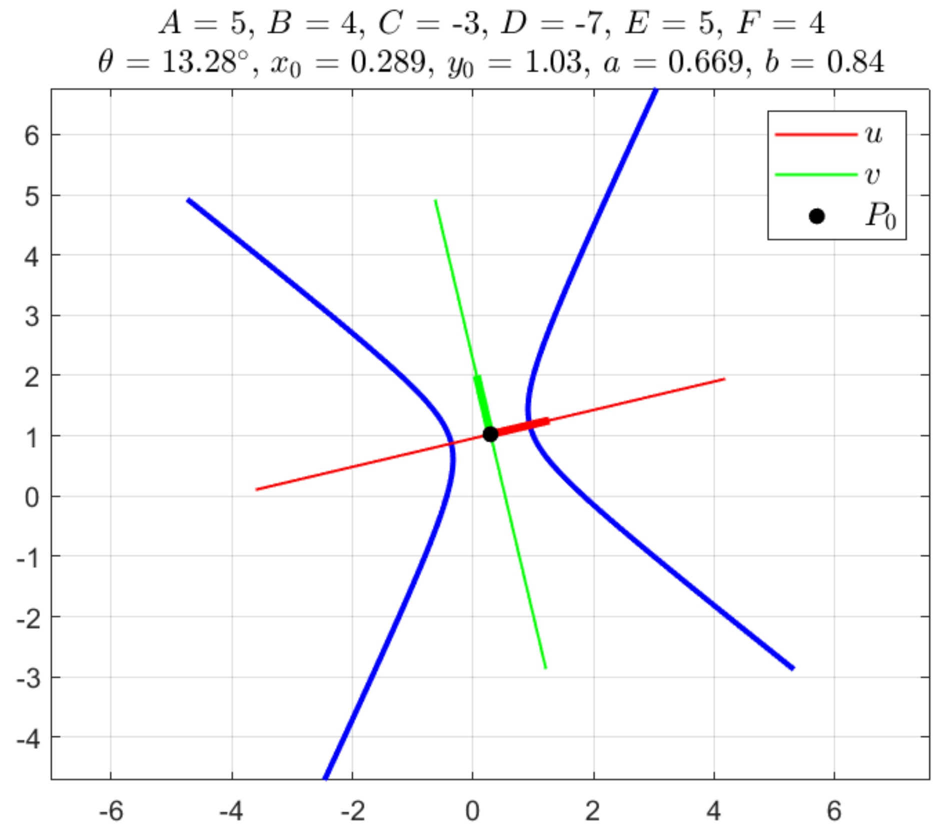
Huom: Yhtälö

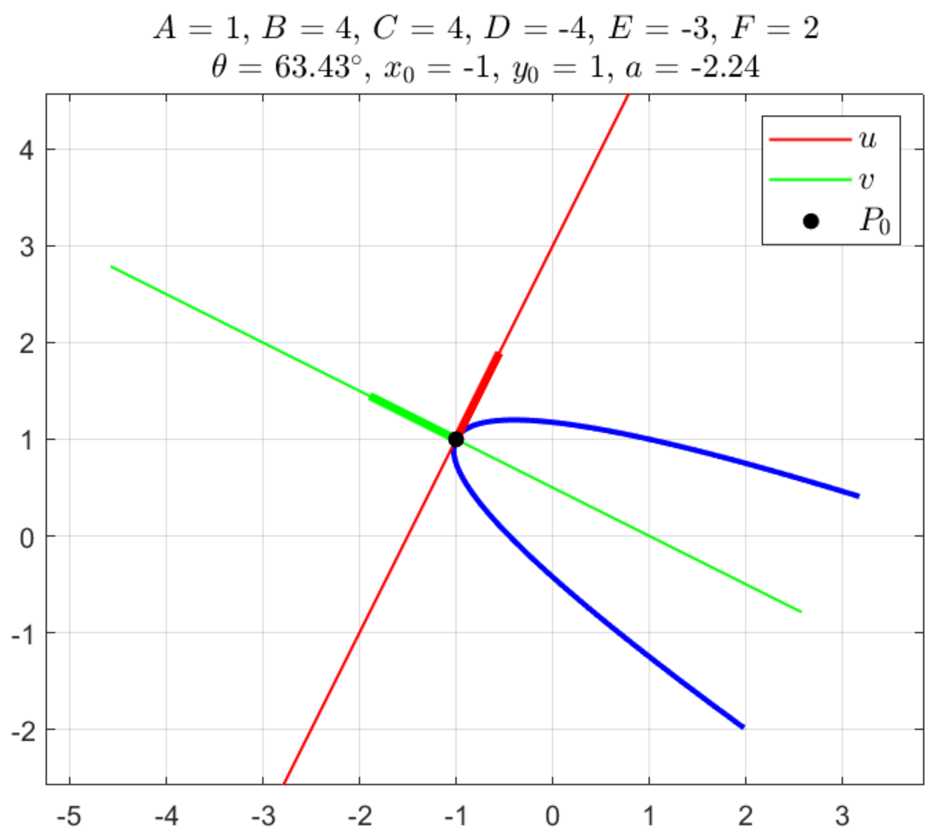
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

esittää kierrettyä ellipsiä, hyperbeliä tai paraabelia (tai yhtä tai kahta suoraa, yhtä pistettä tai yhtälöllä ei ole ratkaisuja)

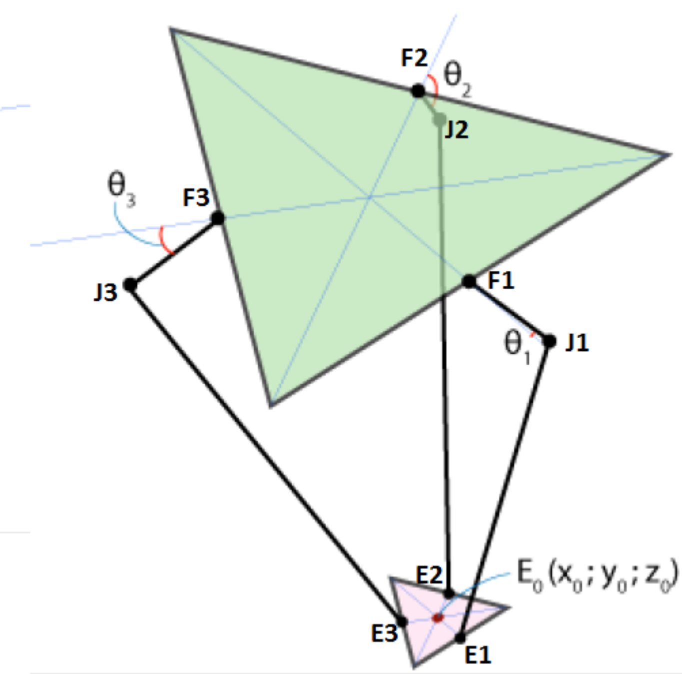
(toisen_asteen_kayrat.pdf ja .m)

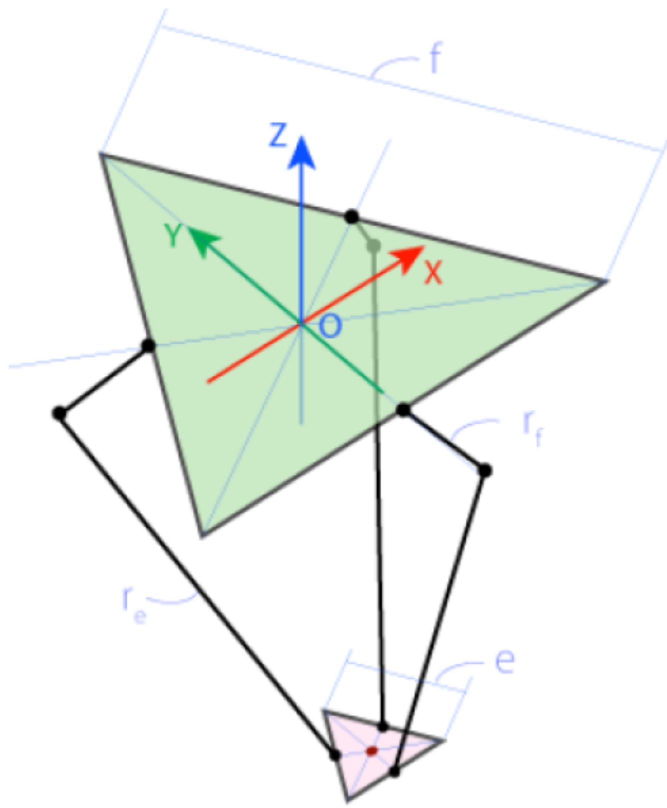



A = 5, B = 4, C = -3, D = -7, E = 5, F = 4
θ = 13.28°, x_0 = 0.289, y_0 = 1.03, a = 0.669, b = 0.84
u
v
P_0


A = 1, B = 4, C = 4, D = -4, E = -3, F = 2
θ = 63.43°, x_0 = -1, y_0 = 1, a = -2.24
u
v
P_0

Esim. 3D delta-robotti





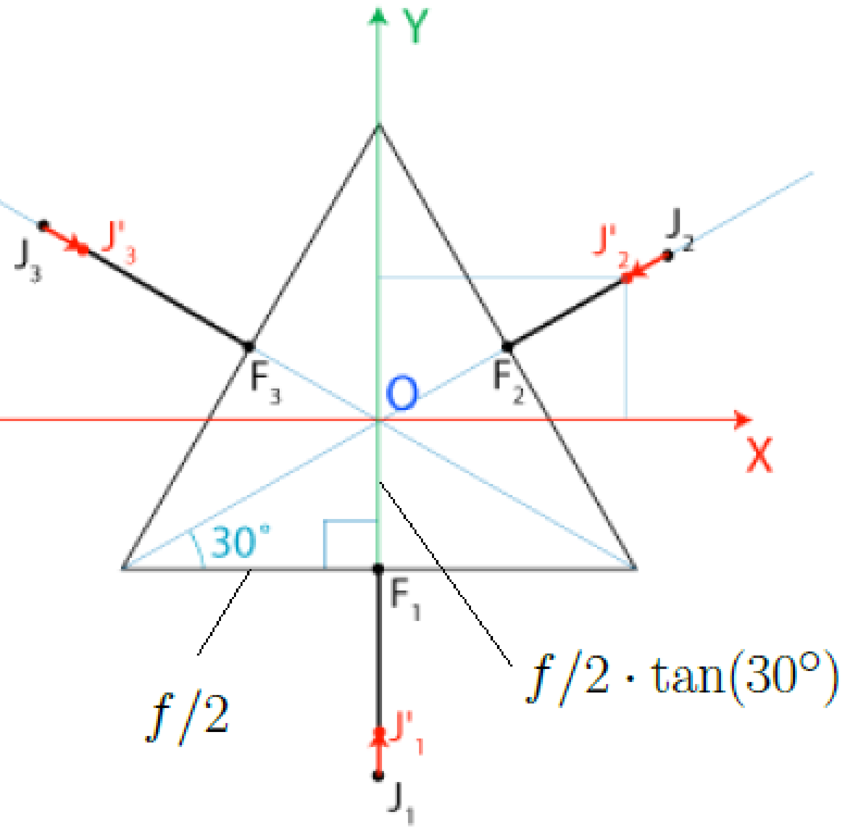
Yläosa kiinteä tasasivuinen kolmio
sivun pituus f, keskipiste $O = [0, 0, 0]$
sivujen keskipisteet F_1, F_2, F_3, kääntyvät varret
$F_1 J_1,\ F_2 J_2,\ F_3 J_3$ kohtisuorassa kolmion sivuja vastaan,
pituus r_f, kulmat vaakatasoon nähden $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

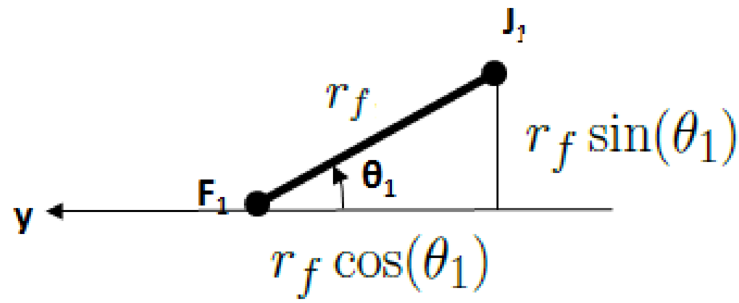
Alaosa liikkuva tasasivuinen kolmio
sivun pituus e, keskipiste $E_0 = [x_0, y_0, z_0]$
sivujen keskipisteet E_1, E_2, E_3, varsien
$J_1 E_1,\ J_2 E_2,\ J_3 E_3$ pituus r_e.

Sopiva mekanismi pitää alakolmion koko ajan samassa
vaakasuorassa asennossa.

Suora kinematiikka:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \rightarrow E_0 = [x_0, y_0, z_0]$$





$$F_1 = [0, -f/2 \cdot \tan(30°), 0]$$

$$F_1J_1 = \left[0, -r_f \cos(\theta_1), r_f \sin(\theta_1)\right]$$

$$J_1 = F_1 + F_1J_1$$

$$K = K_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \theta = 120^\circ$$

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix},\ F_{2z} = 0$$

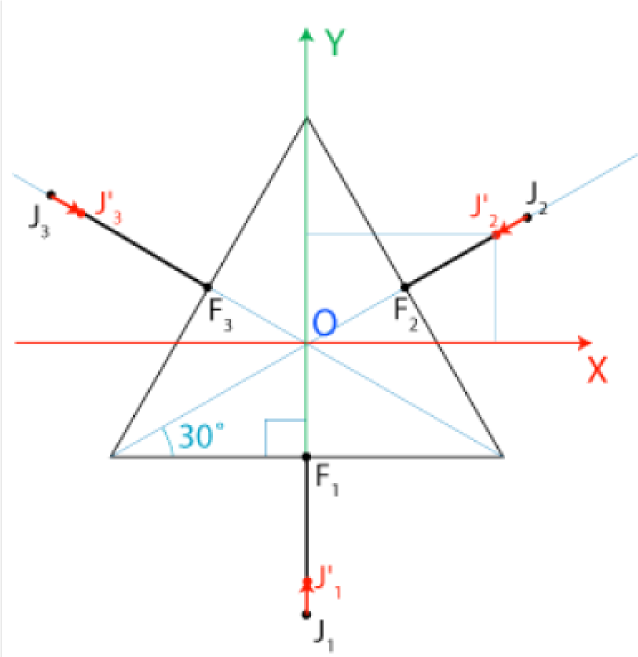
$$\begin{bmatrix} F_2 J_2 x \\ F_2 J_2 y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 0 \\ -r_f \cos(\theta_2) \end{bmatrix},\ F_2 J_2 z = r_f \sin(\theta_2)$$

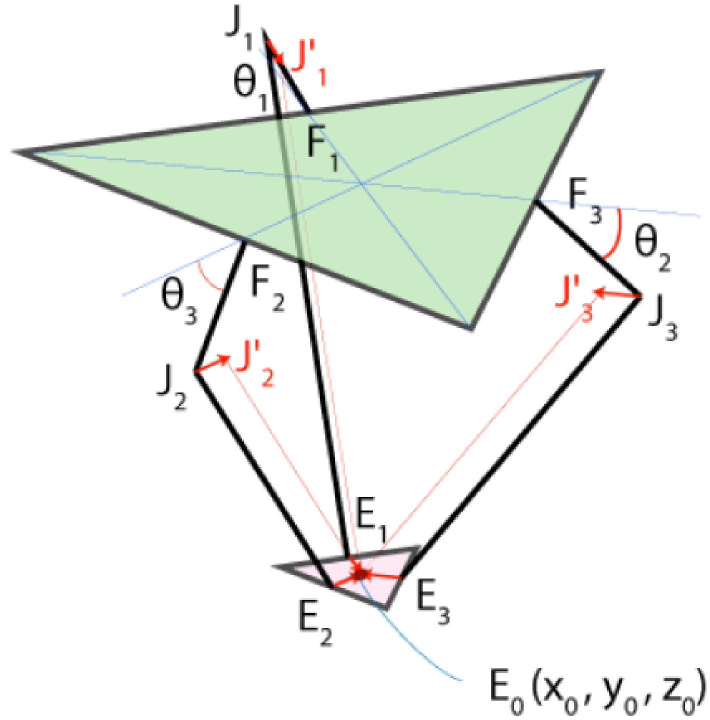
$$J_2 = F_2 + F_2 J_2$$

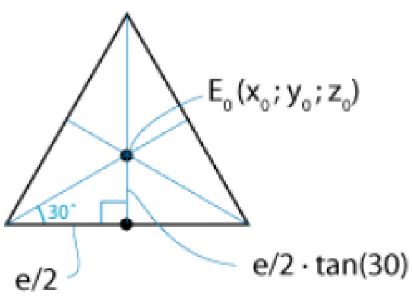
$$\begin{bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix},\ F_{3z} = 0$$

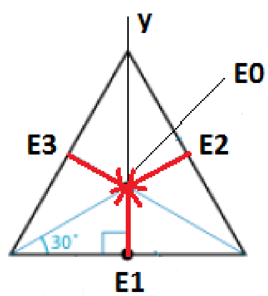
$$\begin{bmatrix} F_3 J_3 x \\ F_3 J_3 y \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -r_f \cos(\theta_3) \end{bmatrix},\ F_3 J_3 z = r_f \sin(\theta_3)$$

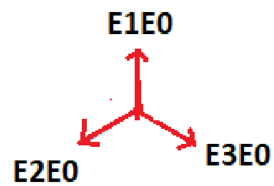
$$J_3 = F_3 + F_3 J_3$$









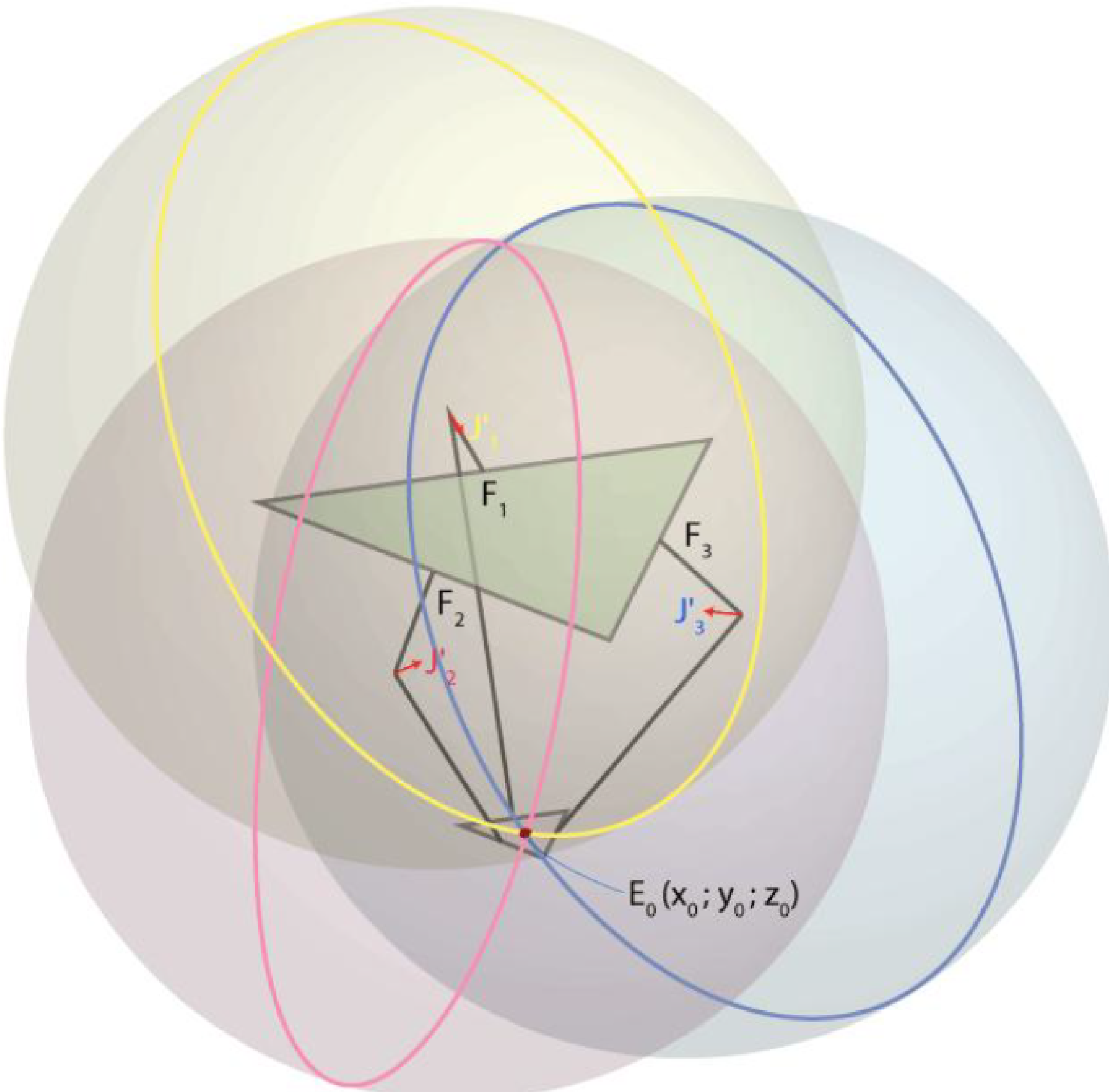


$$E_1E_0 = [0, e/2 \cdot \tan(30°), 0]\,,\; J_1' = J_1 + E_1E_0$$

$$\begin{bmatrix} E_2E_0x \\ E_2E_0y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} E_1E_0x \\ E_1E_0y \end{bmatrix},\; E_2E_0z = 0,\; J_2' = J_2 + E_2E_0$$

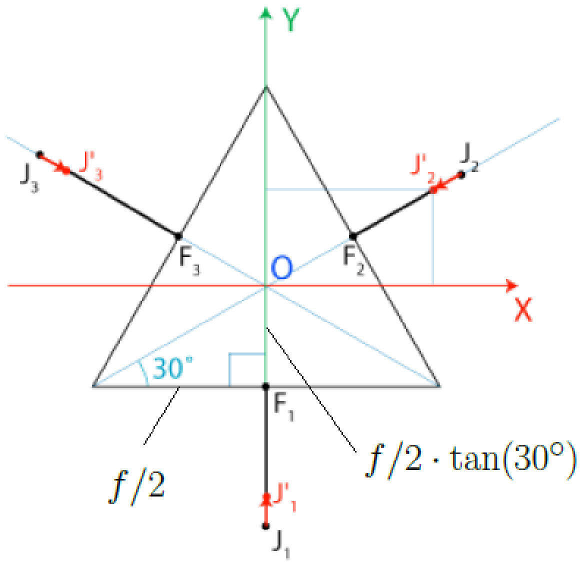
$$\begin{bmatrix} E_3E_0x \\ E_3E_0y \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} E_1E_0x \\ E_1E_0y \end{bmatrix},\; E_3E_0z = 0,\; J_3' = J_3 + E_3E_0$$

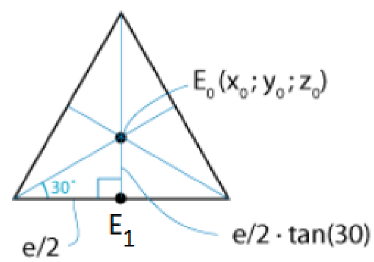
E_0 on kolmen pallon (alempi) leikkauspiste, keskipisteet J_1', J_2', J_3', säde r_f



Käänteinen kinematiikka:

$$E_0 = [x_0, y_0, z_0] \to \theta_1, \theta_2, \theta_3$$





$$F_1 = [0, -f/2 \cdot \tan(30°), 0]$$

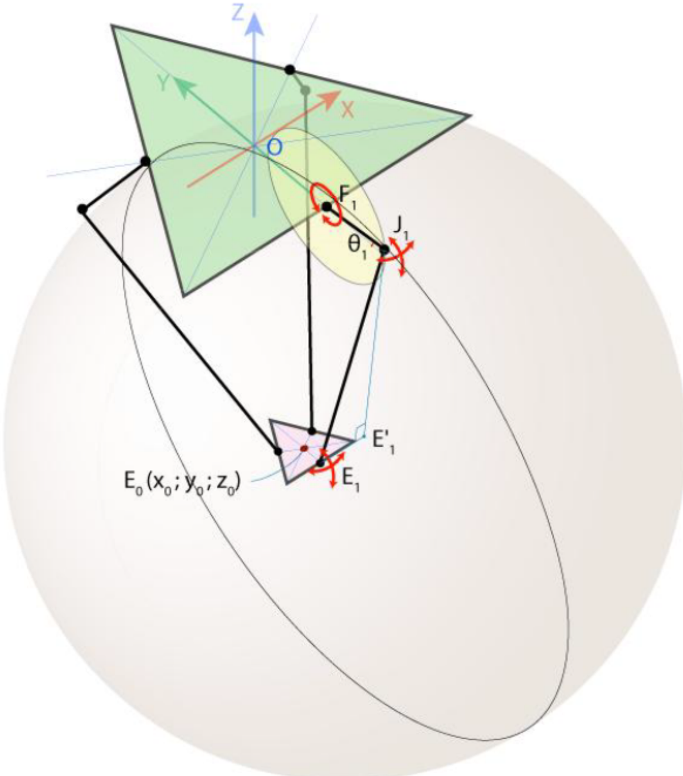
$$E_1 = [x_0, y_0 - e/2 \cdot \tan(30°), z_0]$$

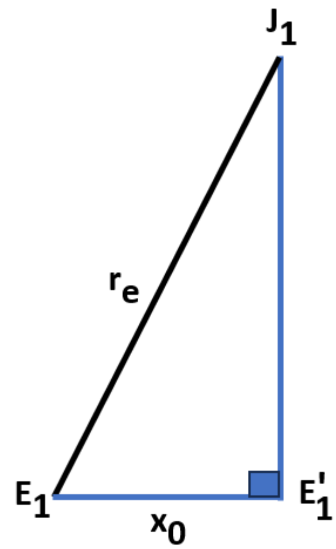
$$E_1' = [0, y_0 - e/2 \cdot \tan(30°), z_0]$$

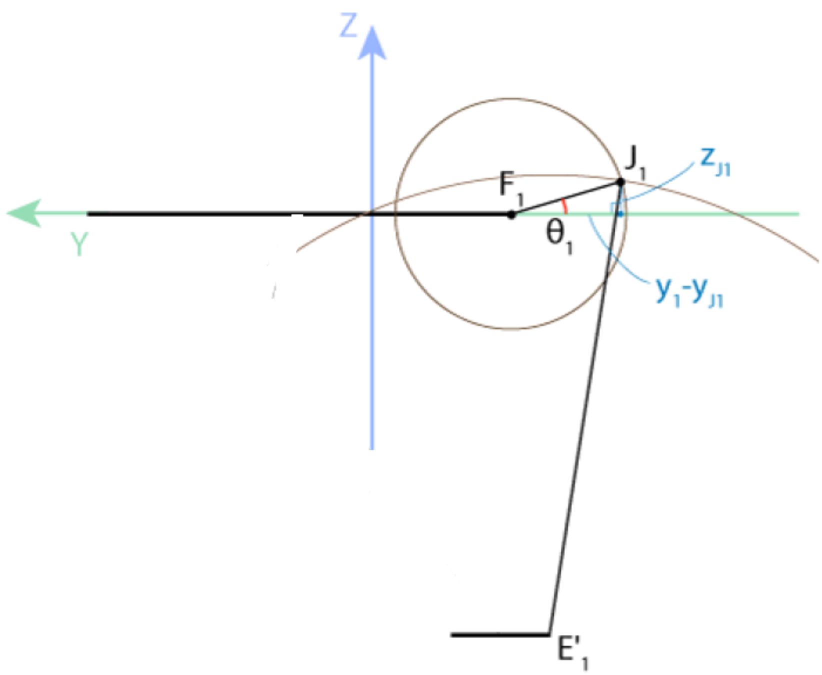
$J_1 = [0, J_{1y}, J_{1z}]$ on kahden yz-tason ympyrän leikkauspiste (se, jonka y-koordinaatti on pienempi)

keskipiste $[F_{1y}, F_{1z}]$, säde r_f

keskipiste $[E'_{1y}, E'_{1z}]$, säde $\sqrt{r_e^2 - x_0^2}$



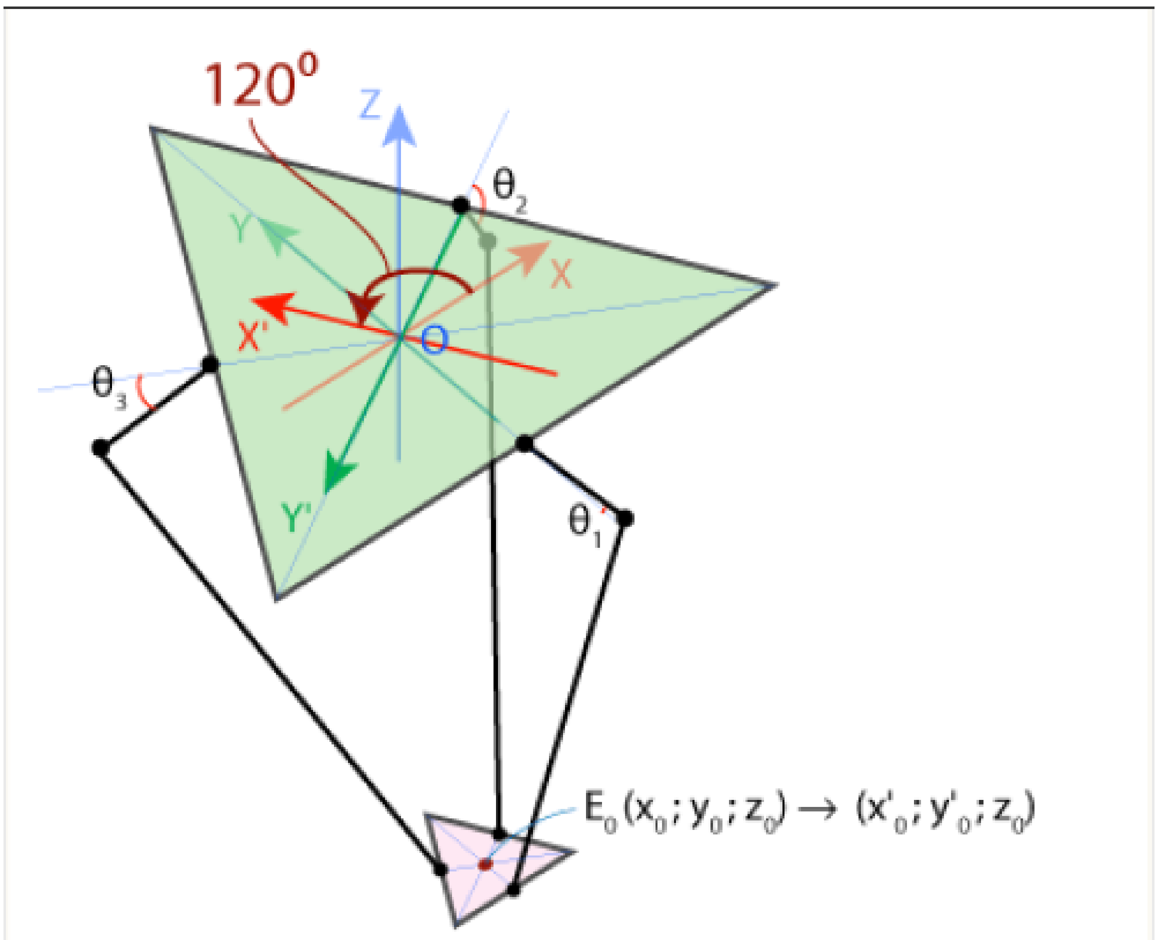




$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(J_{1z} - F_{1z}, -(J_{1y} - F_{1y}))$$

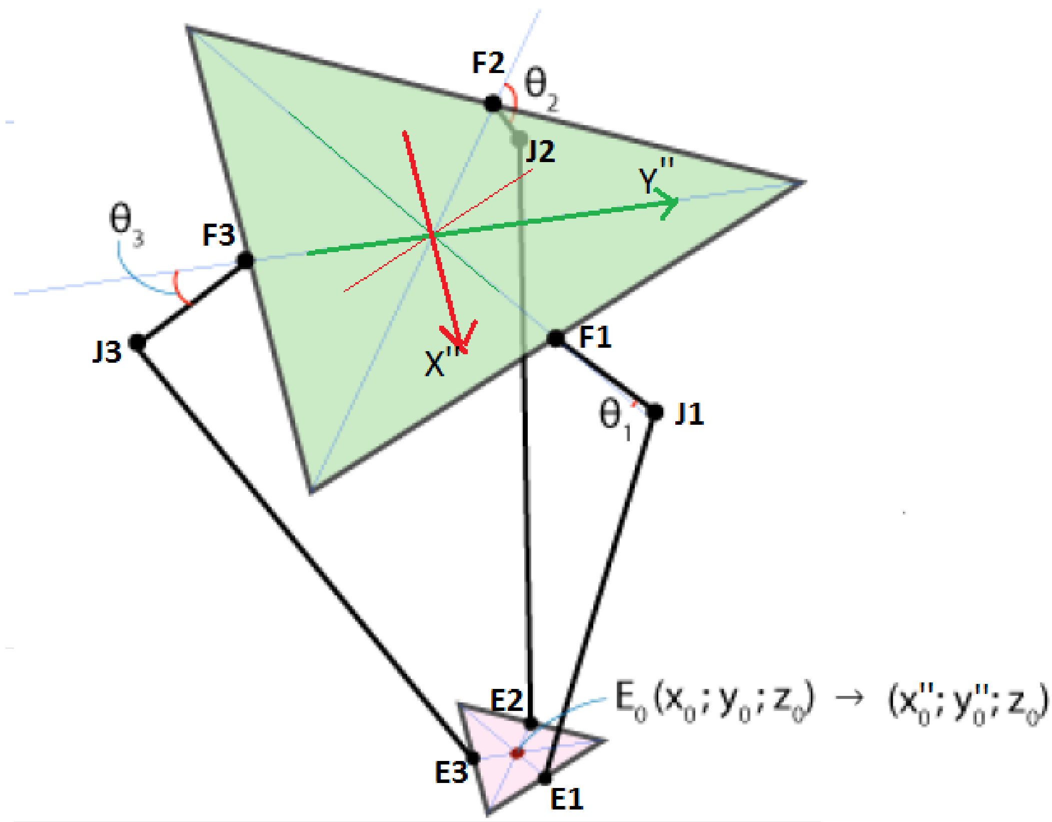
θ_2 saadaan samalla laskulla kuin θ_1, kun käytetään x_0:n ja y_0:n tilalla E_0:n koordinaatteja x_0', y_0' 120° kierretyssä X', Y'-koordinaatistossa

$$\begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

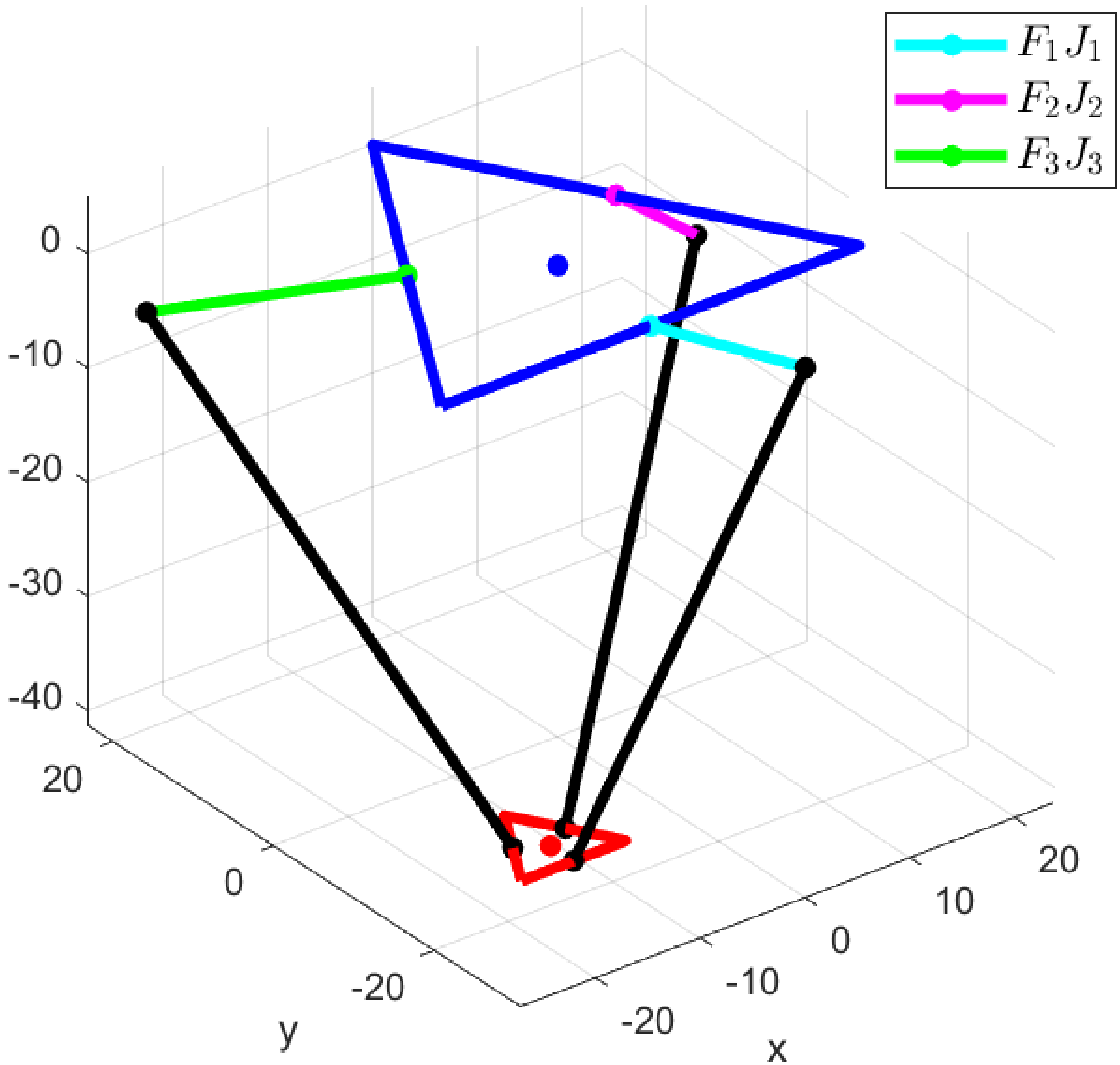


θ_3 vastaavasti, kun käytetään x_0:n ja y_0:n tilalla E_0:n koordinaatteja x_0'', y_0'' $-120°$ kierretyssä X'', Y''- koordinaatistossa

$$\begin{bmatrix} x_0'' \\ y_0'' \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

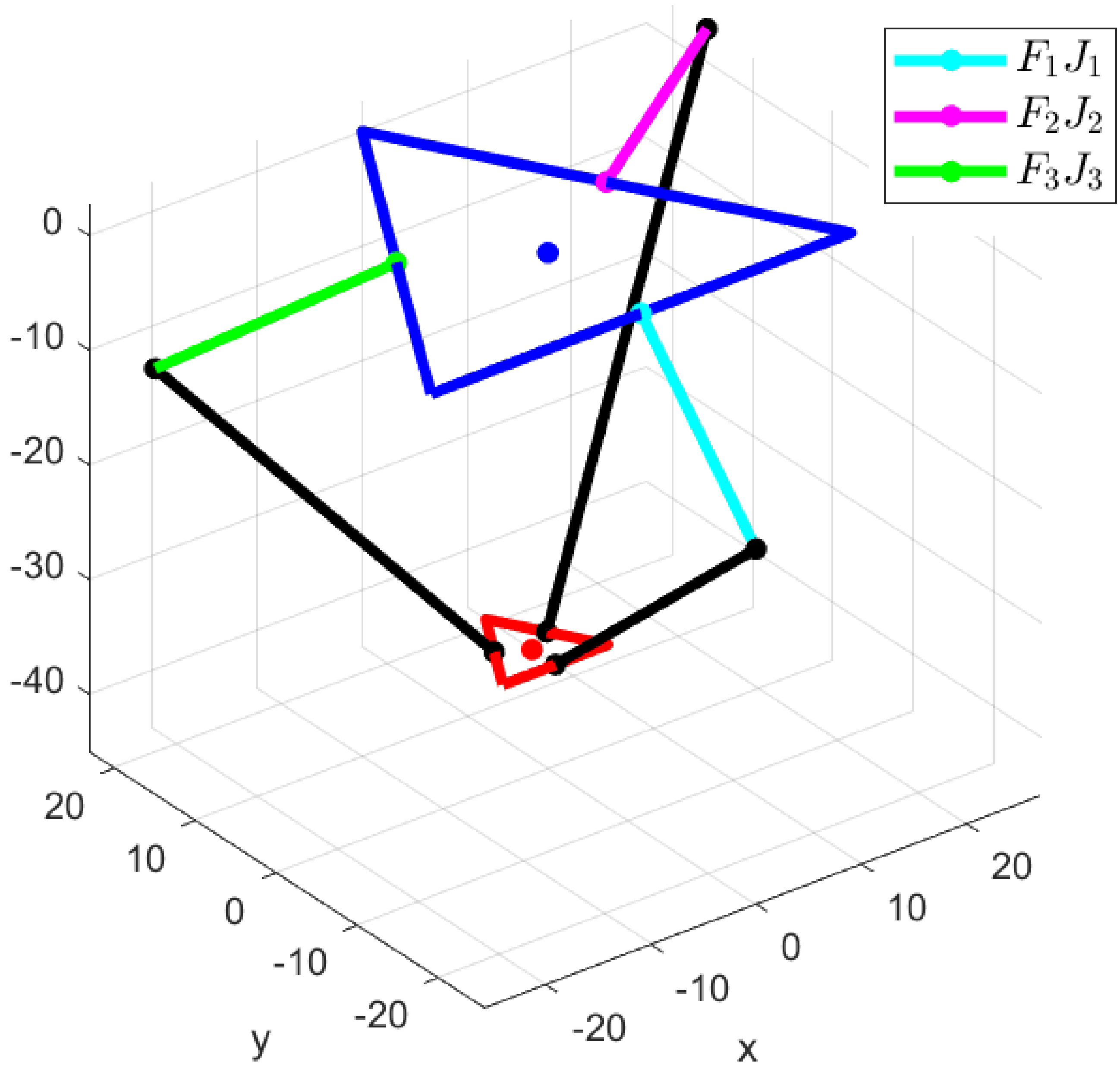


$$\theta_1 = 15,\ \theta_2 = \text{-}37,\ \theta_3 = \text{-}5$$
$$\rightarrow \quad E_0 = [\text{-}10.5117\ \text{-}12.7902\ \text{-}41.2866]$$



E_0 = [10 15 -45]

$\rightarrow \quad \theta_1$ = -44.447, θ_2 = 8.0463, θ_3 = -23.1068



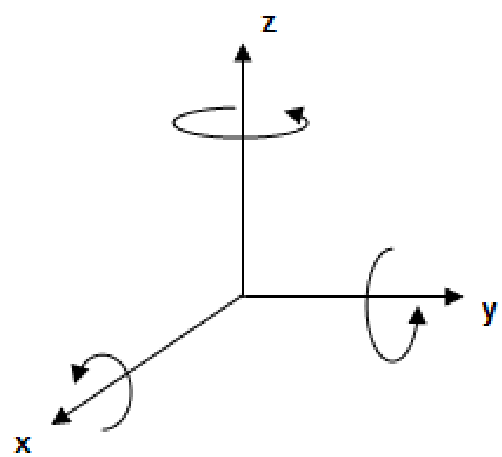
Kiertomatriisit 3D:ssä

Kierrot x, y ja z-akseleiden ympäri (kiertosuunta vastapäivään kunkin akselin plus-merkkiseltä puolelta origoon katsottuna, jos $\theta > 0$; myötäpäivään, jos $\theta < 0$) saadaan aikaan matriiseilla

$$K_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

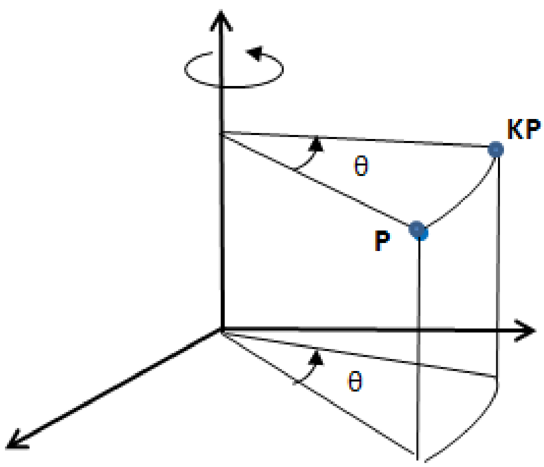
$$K_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

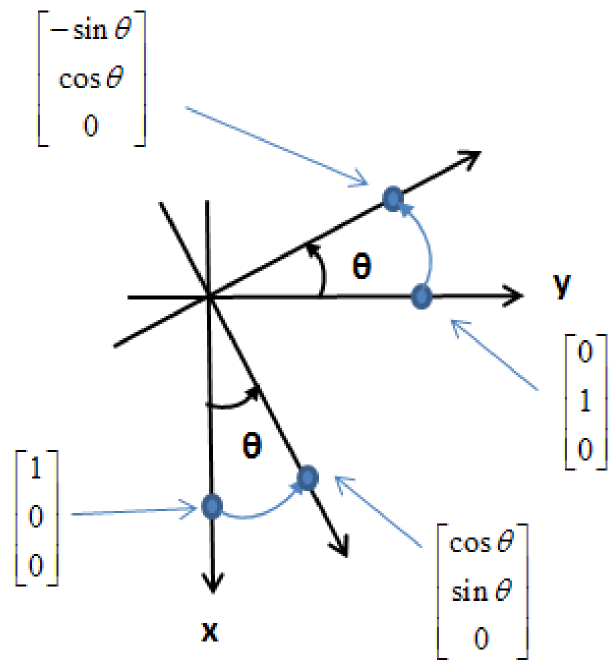
$$K_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



eli esimerkiksi z-akselin ympäri kierrettäessä

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to KP = K_{z,\theta} * P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot x - \sin(\theta) \cdot y \\ \sin(\theta) \cdot x + \cos(\theta) \cdot y \\ z \end{bmatrix}$$





Kuten 2D:ssä, kiertomatriisien sarakkeet kertovat mihin x, y- ja z-akselit (eli pisteet [1,0,0], [0,1,0] ja [0,0,1]) joutuvat:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

HUOM: Kiertojärjestys on tärkeä

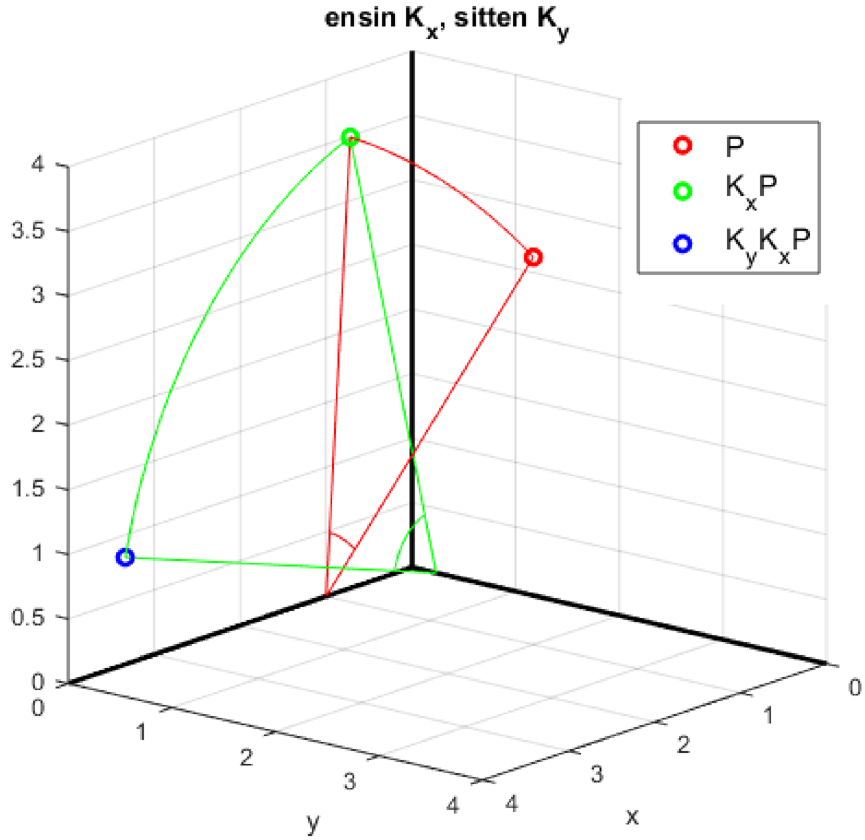
Esim. Jos

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

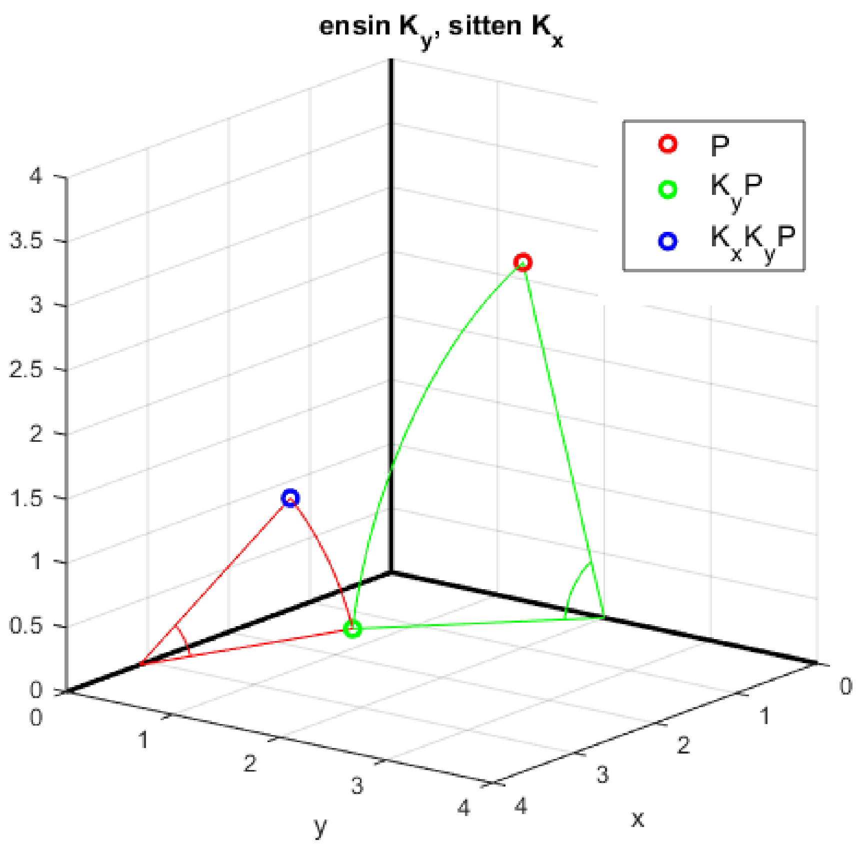
niin

$$K_{y,60^\circ} * K_{x,30^\circ} * P = K_{y,60^\circ} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0.23 \\ 3.60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.62 \\ 0.23 \\ 0.93 \end{bmatrix}$$

$$K_{x,30^\circ} * K_{y,60^\circ} * P = K_{x,30^\circ} * \begin{bmatrix} 3.10 \\ 2 \\ 0.63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.10 \\ 1.42 \\ 1.55 \end{bmatrix}$$



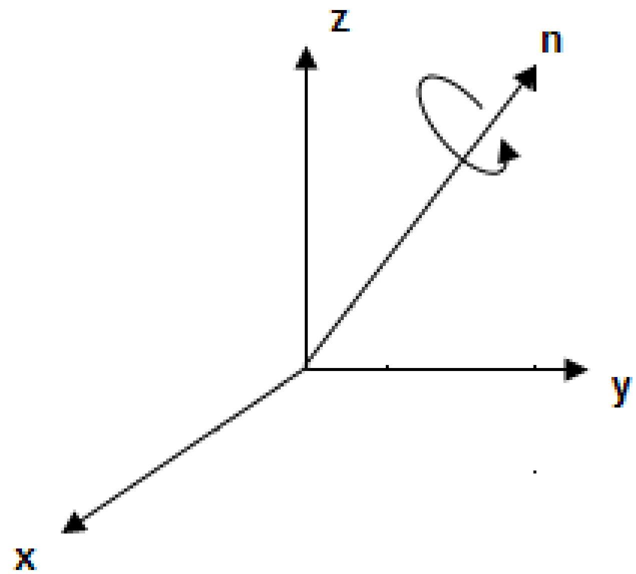
ensin K_x, sitten K_y
P
K_xP
K_yK_xP
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
y
x

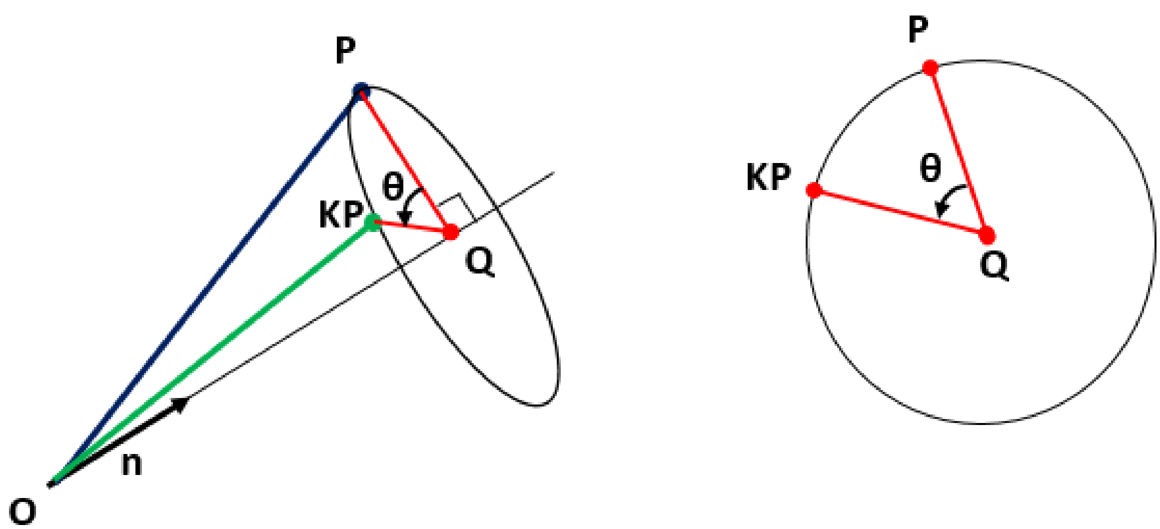


ensin K_y, sitten K_x
P
K_yP
K_xK_yP
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
y
x

Yleinen kiertomatriisi

eli 3×3-matriisi $K_{\mathbf{n},\theta}$, jolla kertomalla saadaan aikaan kierto annetun (origon eli pisteen [0,0,0] kautta kulkevan) akselin $\mathbf{n}$ ympäri kulman θ verran ($\theta > 0$, jos kierto vastapäivään akselin $\mathbf{n}$ nokasta origoon katsottuna):





Jos kiertoakseli $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$ on **ykkösen pituinen pystyvektori**, niin

$$K_{\mathbf{n},\theta} = \cos(\theta) * I_3 + (1 - \cos(\theta)) * \mathbf{n} * \mathbf{n}^T + \sin(\theta) * A$$

missä

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{n}^T = [n_x, n_y, n_z]$$

Aukikirjoitettuna: $K_{\mathbf{n},\theta} =$

$$\begin{bmatrix} c + n_x^2(1-c) & n_x n_y(1-c) - n_z s & n_x n_z(1-c) + n_y s \\ n_x n_y(1-c) + n_z s & c + n_y^2(1-c) & n_y n_z(1-c) - n_x s \\ n_x n_z(1-c) - n_y s & n_y n_z(1-c) + n_x s & c + n_z^2(1-c) \end{bmatrix}$$

missä $c = \cos(\theta)$ ja $s = \sin(\theta)$

Esim: Jos kiertoakseli

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(eli vektorin [1,1,1] suuntainen) ja kiertokulma $\theta = 45^\circ$, niin

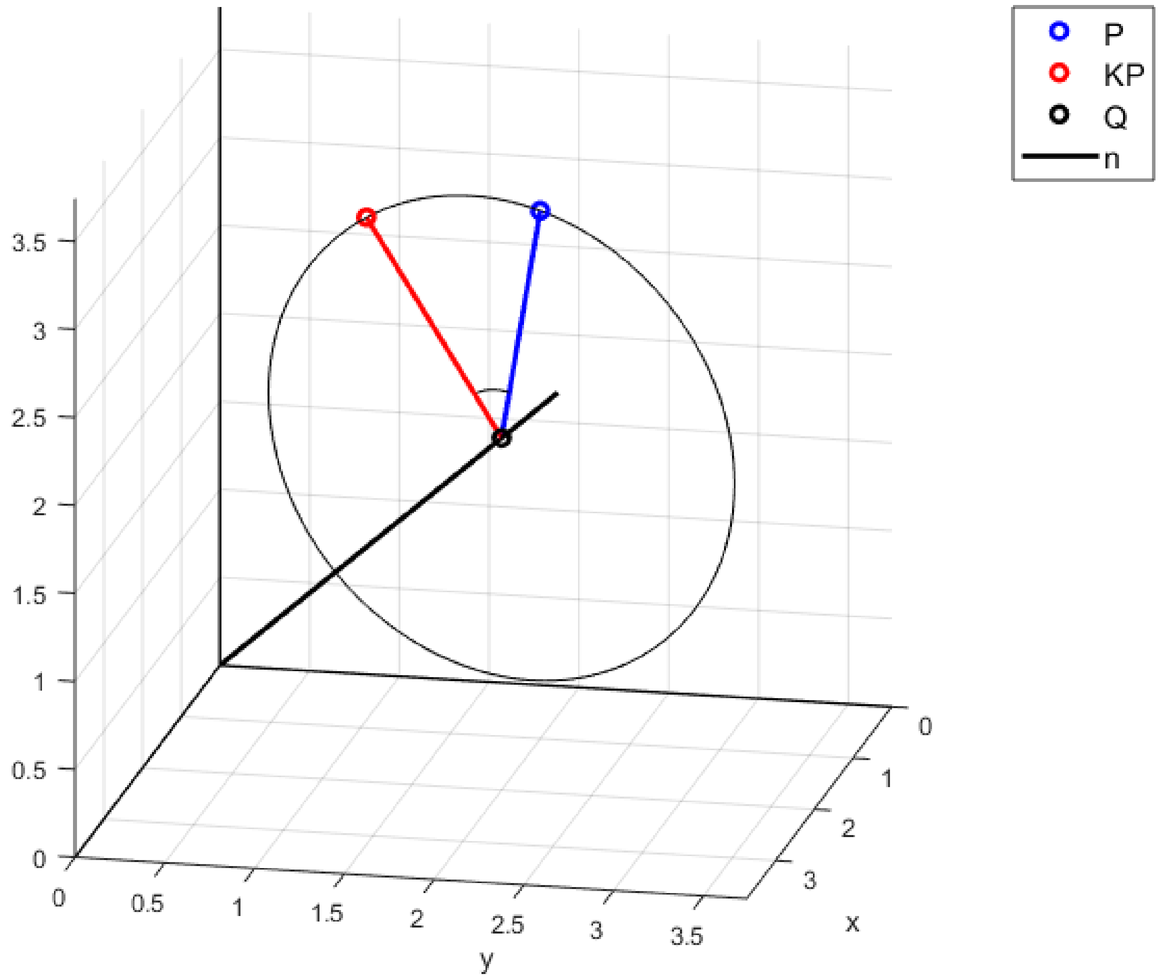
$$K_{\mathbf{n},\theta} = \begin{bmatrix} 0.8047 & -0.3106 & 0.5059 \\ 0.5059 & 0.8047 & -0.3106 \\ -0.3106 & 0.5059 & 0.8047 \end{bmatrix}$$

ja esimerkiksi piste $P = [1, 2, 3]$ päätyy pisteeseen

$$KP = K_{\mathbf{n},\theta} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.70 \\ 1.18 \\ 3.12 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.8047 \\ 0.5059 \\ -0.3106 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.3106 \\ 0.8047 \\ 0.5059 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.5059 \\ -0.3106 \\ 0.8047 \end{bmatrix}$$

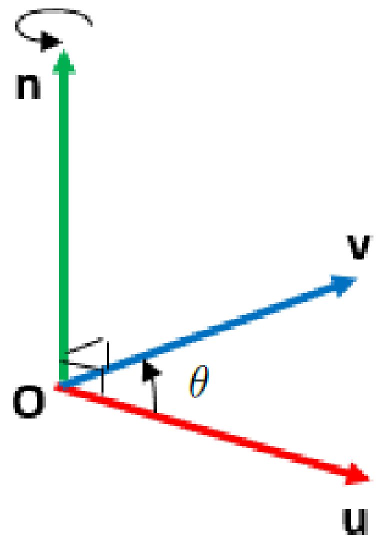


Huom: Käänteismatriisi

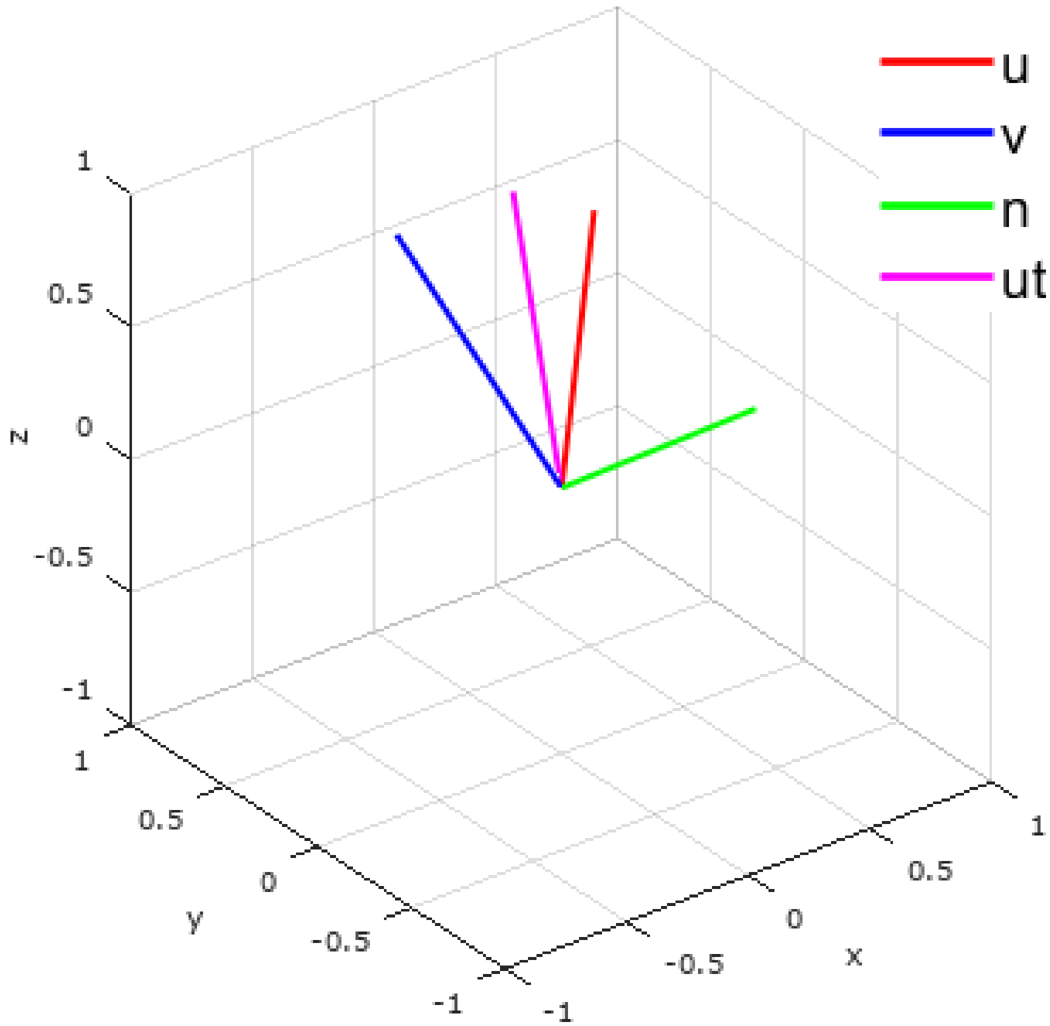
$$K_{\mathbf{n},\theta}^{-1} = K_{\mathbf{n},-\theta} = \begin{bmatrix} 0.8047 & 0.5059 & -0.3106 \\ -0.3106 & 0.8047 & 0.5059 \\ 0.5059 & -0.3106 & 0.8047 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.8047 \\ 0.5059 \\ -0.3106 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.3106 \\ 0.8047 \\ 0.5059 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5059 \\ -0.3106 \\ 0.8047 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

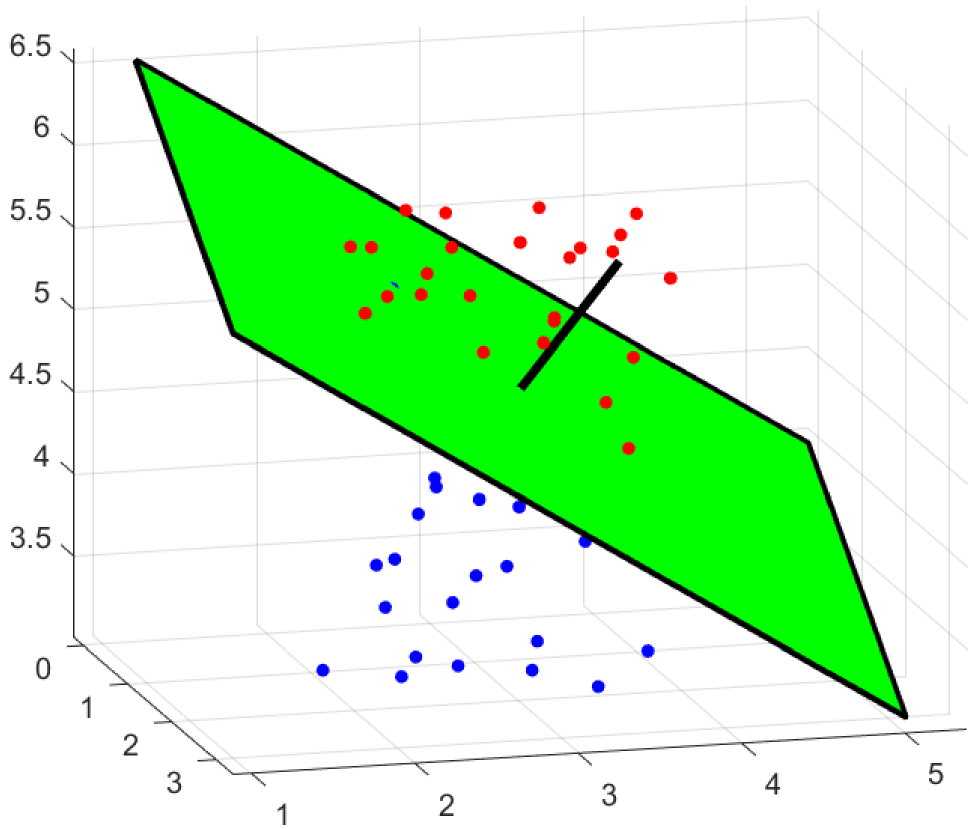
Esim. Kierto, joka vie yksikkövektorin $\mathbf{u}$ yksikkövektoriksi $\mathbf{v}$, saadaan aikaan kiertämällä vektorin $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ suuntaisen akselin ympäri vektoreiden välisen kulman θ verran.



Väliasento $\mathbf{ut}$ on kulman $t\theta$, $t = 0 \ldots 1$, verran kierretty $\mathbf{u}$.


u
v
n
ut
z
y
x
1
0.5
0
-0.5
-1

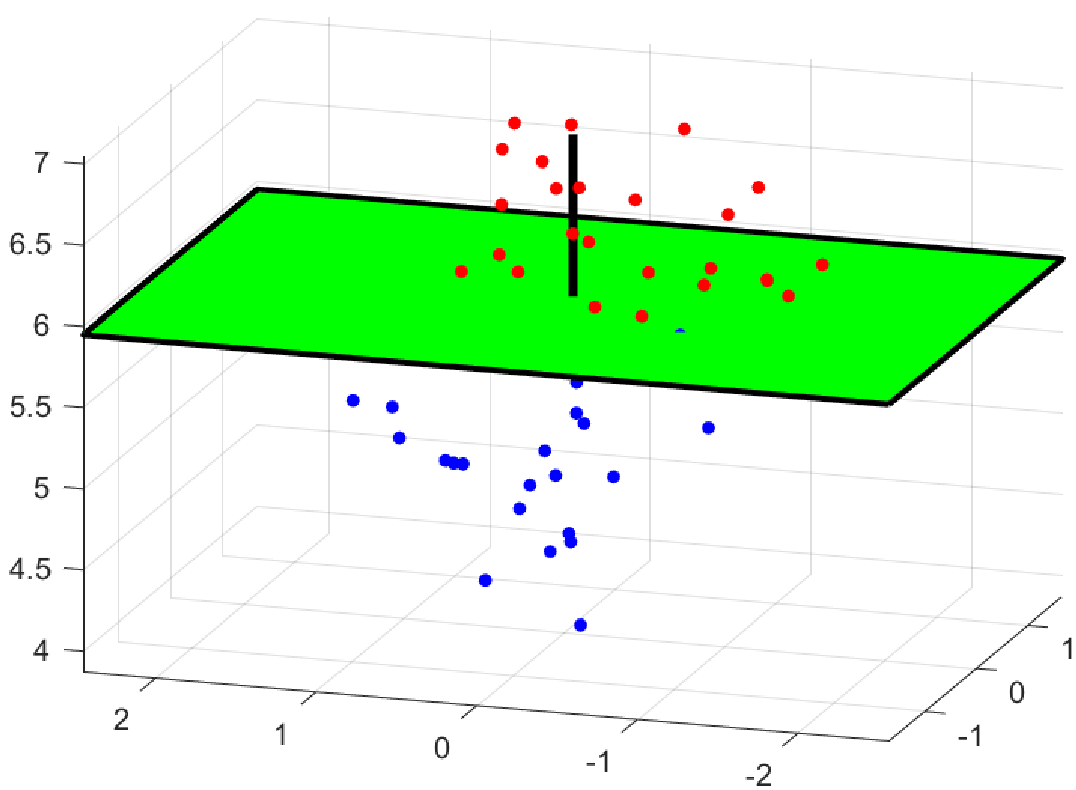
Esim: Etsi annettua yksikkövektoria **u** vastaan kohtisuora taso, jonka molemmilla puolilla on yhtä monta annetun pistejoukon pistettä.



Strategia (kuten 2D:ssä): kierretään

$$\mathbf{u} \to \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ja etsitään taso $z = z_0$, jonka ylä- ja alapuolella on yhtä monta kierrettyä pistettä
(järjestetään niiden z-koordinaatit suuruusjärjestykseen, jolloin z_0 on kahden keskimmäisen keskiarvo).



Huom: Kiertomatriisin

$$K = K_{\mathbf{n},\theta} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

sarakevektorit

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \end{bmatrix}$$

kertovat, mihin pisteet [1,0,0],[0,1,0] ja [0,0,1] joutuvat kyseisessä kierrossa (eli x, y ja z-akseleiden suunnat kierron jälkeen),

$$K * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}, \quad K * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}, \quad K * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{w}$$

joten ne ovat ykkösen pituisia ja kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lisäksi **u**,**v** ja **w** muodostavat oikeakätisen kolmikon eli kolmas on kahden ensimmäisen ristitulo, $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Jokainen 3×3-matriisi K, jonka sarakkeet $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat **ykkösen pituisia, kohtisuorassa toisiaan vastaan ja muodostavat oikeakätisen kolmikon (eli kolmas on kahden ensimmäisen ristitulo)** on kiertomatriisi sopivan akselin ympäri sopivan kulman verran.

Toisin sanoen, "xyz-koordinaatisto"saadaan haluttuun asentoon kiertämällä sitä sopivan akselin ympäri sopivan kulman verran

Kaavat: Kiertoakseli $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]$ ja kiertokulma θ voidaan määrätä kiertomatriisin perusteella (ratkaisemalla ne ehdosta $K = K_{\mathbf{n},\theta}$):

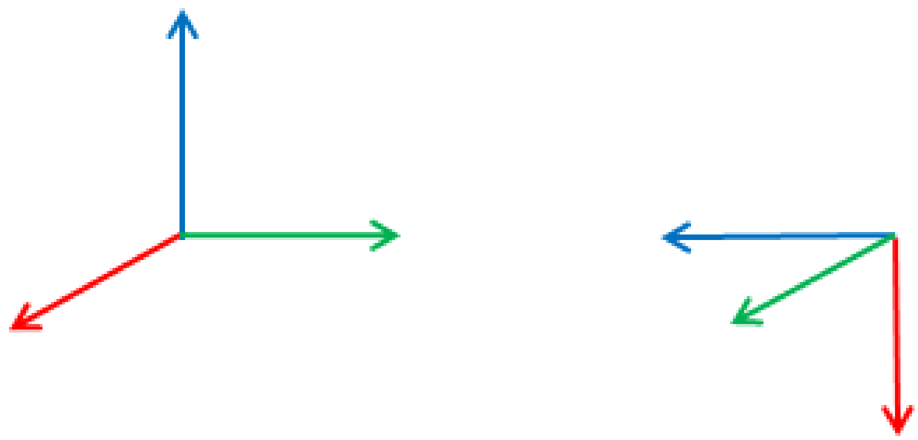
$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = K_{\mathbf{n},\theta}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{k_{11} + k_{22} + k_{33} - 1}{2}\right)$$

$$n_x = \frac{k_{32} - k_{23}}{2\sin(\theta)}, \quad n_y = \frac{k_{13} - k_{31}}{2\sin(\theta)}, \quad n_z = \frac{k_{21} - k_{12}}{2\sin(\theta)}$$

Esim: Jos

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

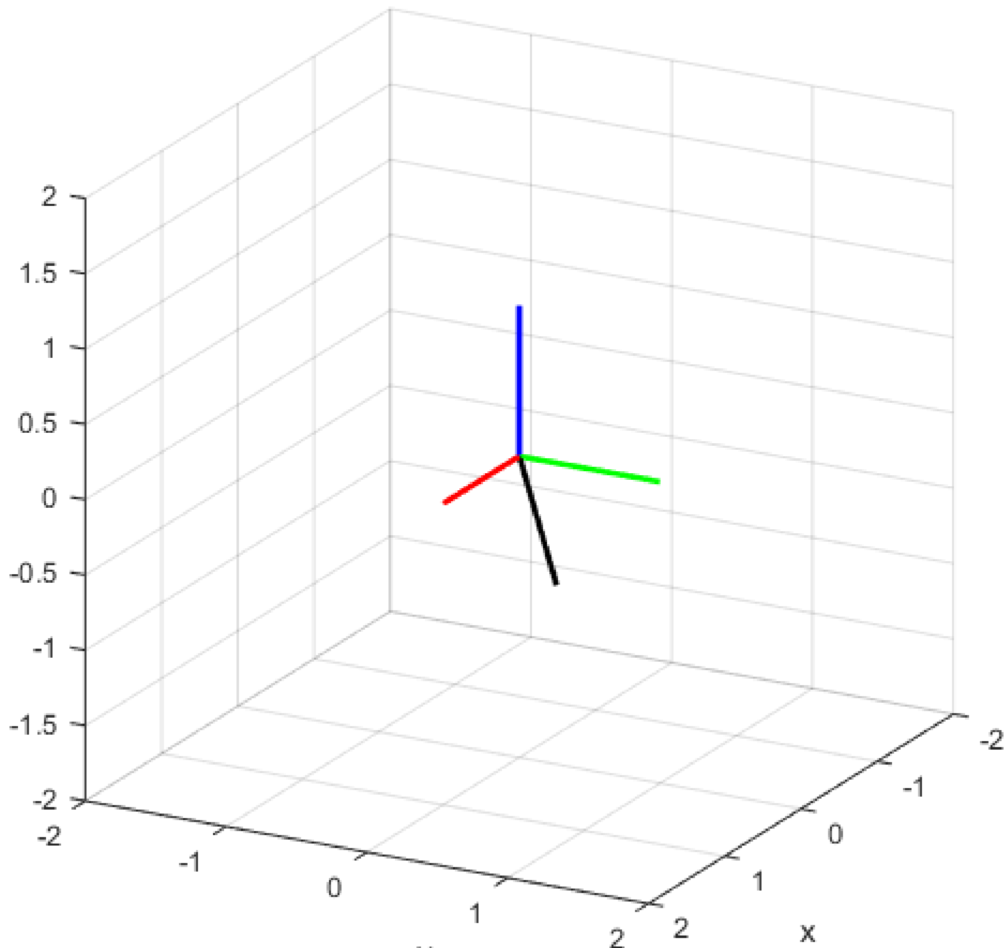


eli

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

niin $K = K_{\mathbf{n},\theta}$, missä kiertokulma $\theta = 120^\circ$ ja akseli

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ -0.577 \end{bmatrix}$$



Esim: Kierto, joka vie x-akselin vektorin $\mathbf{u} = [1, 2, 3]$ ja y-akselin vektorin $\mathbf{v} = [2, -1, 0]$ suuntaiseksi (jolloin z-akseli päätyy vektorin $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [3, 6, -5]$ suuntaiseksi):

Yksikkövektorit

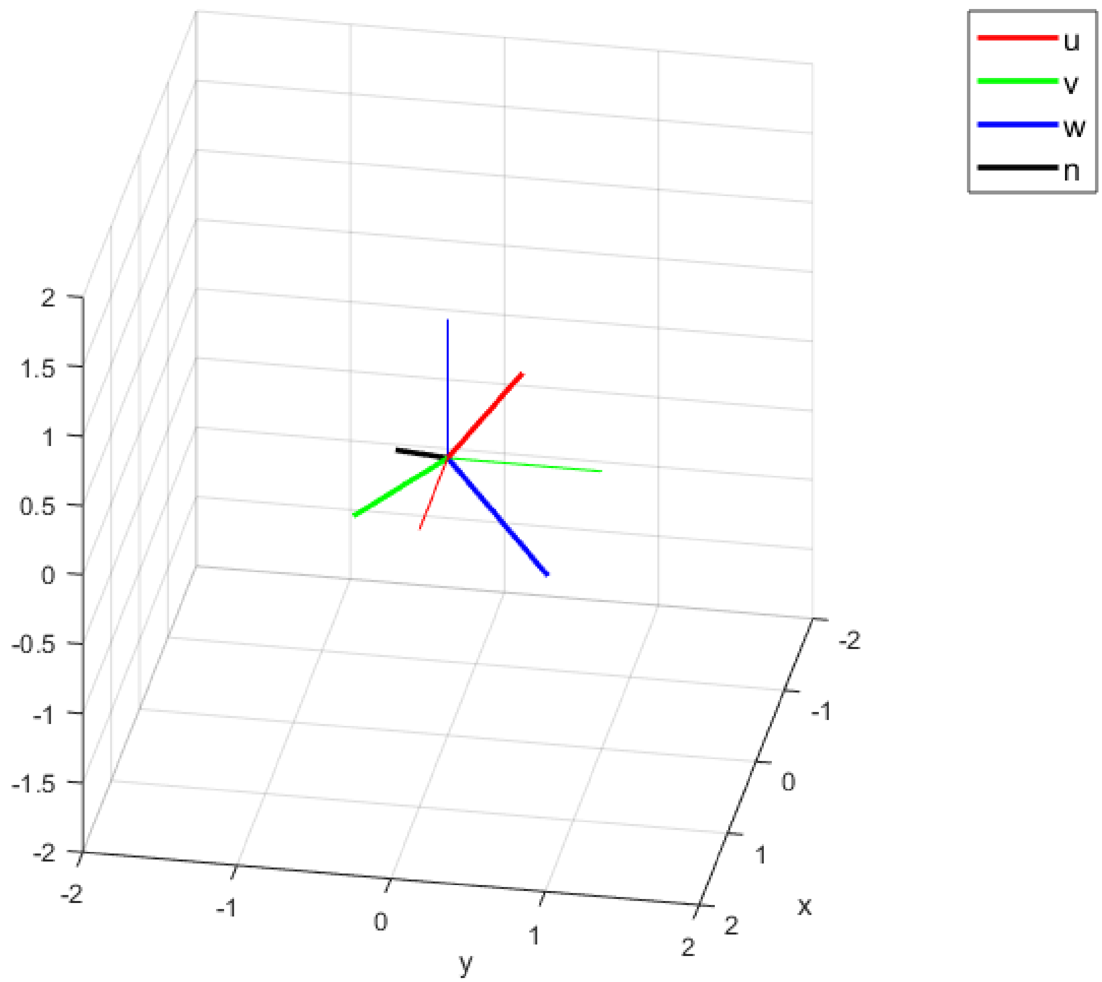
$$\mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} 0.2673 \\ 0.5345 \\ 0.8018 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}^0 = \begin{bmatrix} 0.8944 \\ -0.4472 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w}^0 = \begin{bmatrix} 0.3586 \\ 0.7171 \\ -0.5976 \end{bmatrix}$$

eli kiertomatriisi

$$K = \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.8944 & 0.3586 \\ 0.5345 & -0.4472 & 0.7171 \\ 0.8018 & 0 & -0.5976 \end{bmatrix} = K_{\mathbf{n},\theta}$$

missä $\theta = 152.7^\circ$ ja

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -0.7823 \\ -0.4835 \\ -0.3926 \end{bmatrix}$$



Huom: Käänteismatriisi $K^{-1} = K_{\mathbf{n},-\theta}$

$$\mathbf{u}^0 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}^0 \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w}^0 \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eulerin kulmat

Jokainen 3D-kiertomatriisi K saadaan aikaan tekemällä 3 kiertoa kohtisuorien akseleiden ympäri, käyttäen kahta tai kolmea akselia, kiertokulmina ns. Eulerin kulmat (Euler angles).

zxz: (kaksi akselia, proper Euler angles)

$$K = K_{z_2,\gamma} * K_{x_1,\beta} * K_{z,\alpha}$$

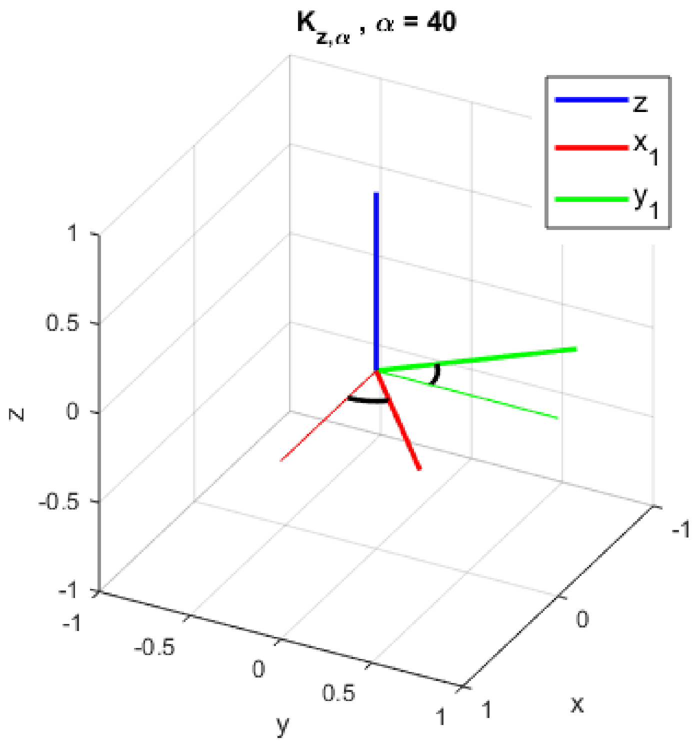
missä

$$x_1 = K_{z,\alpha} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2 = K_{x_1,\beta} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

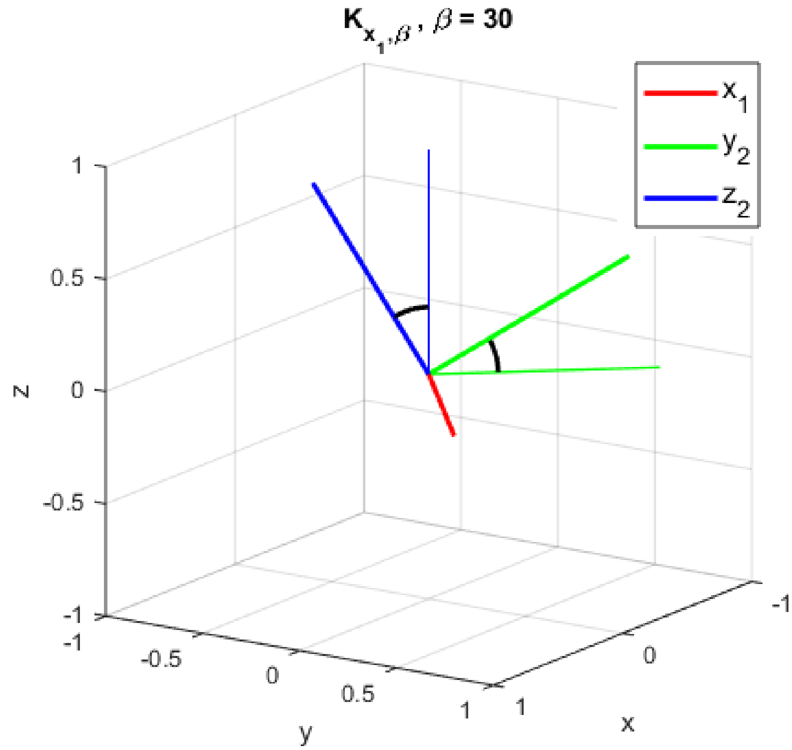
$\alpha = \text{atan2}(k_{13}, -k_{23})$, $\beta = \cos^{-1}(k_{33})$ ja

$\gamma = \text{atan2}(k_{31}, k_{32})$

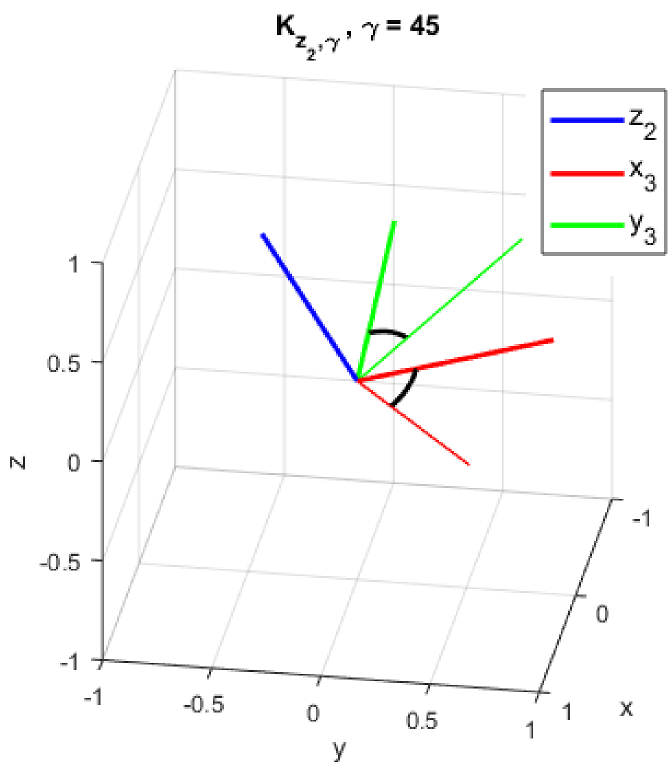
eli kierretään ensin z-akselin ympäri kulman α verran, sitten kierretyn x-akselin ympäri β:n verran ja lopuksi kierretyn z-akselin ympäri γ:n verran



$K_{z,\alpha}$, α = 40
z
x_1
y_1
z
y
x



$K_{x_1,\beta}$, β = 30
x_1
y_2
z_2
z
y
x



$K_{z_2,\gamma}$, γ = 45
z_2
x_3
y_3
z
y
x

xyz: (kolme akselia, Tait-Bryan angles)

$$K = K_{x_2,\phi} * K_{y_1,\theta} * K_{z,\psi}$$

missä

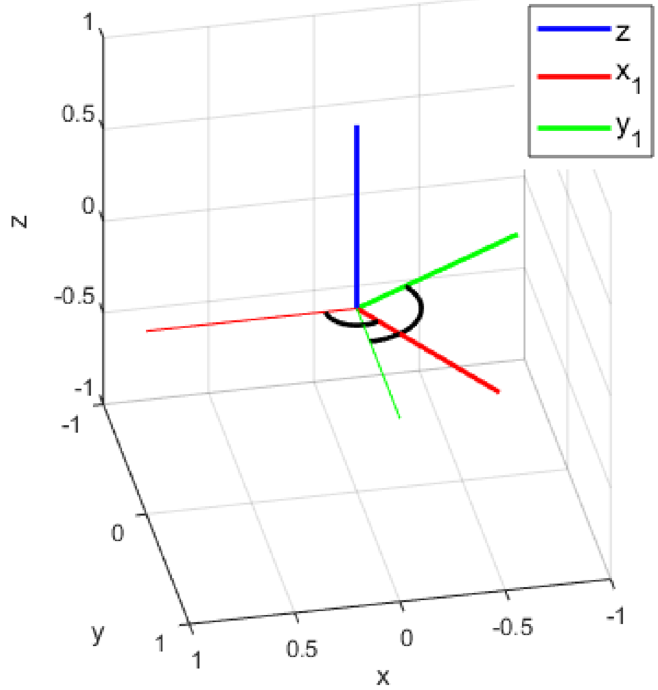
$$y_1 = K_{z,\psi} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = K_{y_1,\theta} * K_{z,\psi} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi = \text{atan2}(k_{21}, k_{11}),\ \theta = \sin^{-1}(-k_{31}) \text{ ja}$$

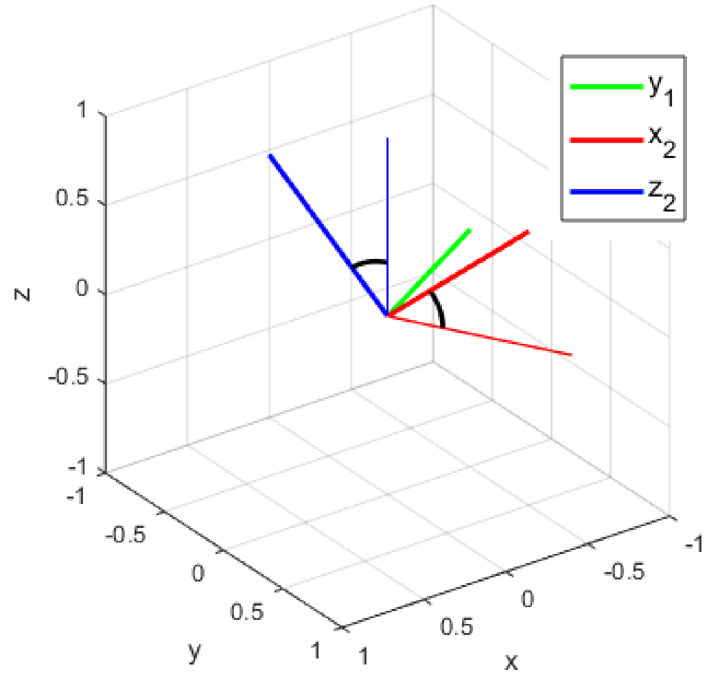
$$\phi = \text{atan2}(k_{32}, k_{33})$$

eli kierretään ensin z-akselin ympäri kulman ψ verran, sitten kierretyn y-akselin ympäri θ:n verran ja lopuksi kahdesti kierretyn x-akselin ympäri ϕ:n verran

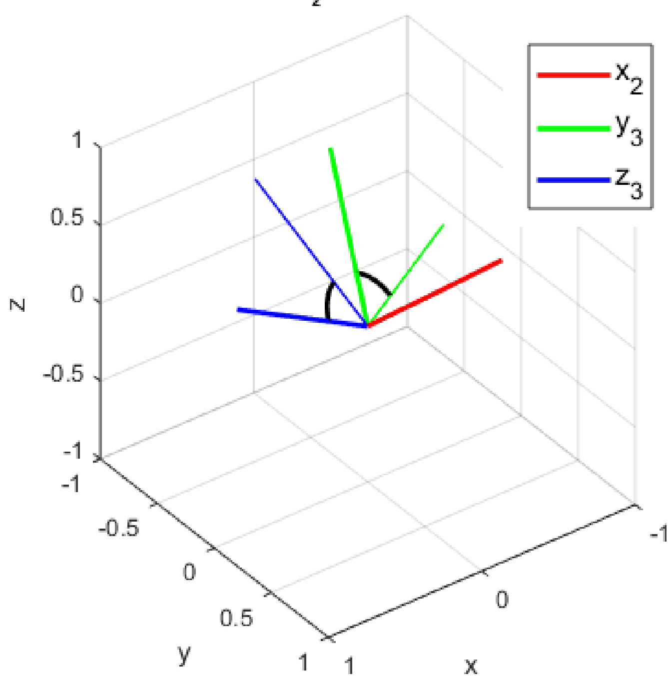
$K_{z,\psi}$, ψ = 120



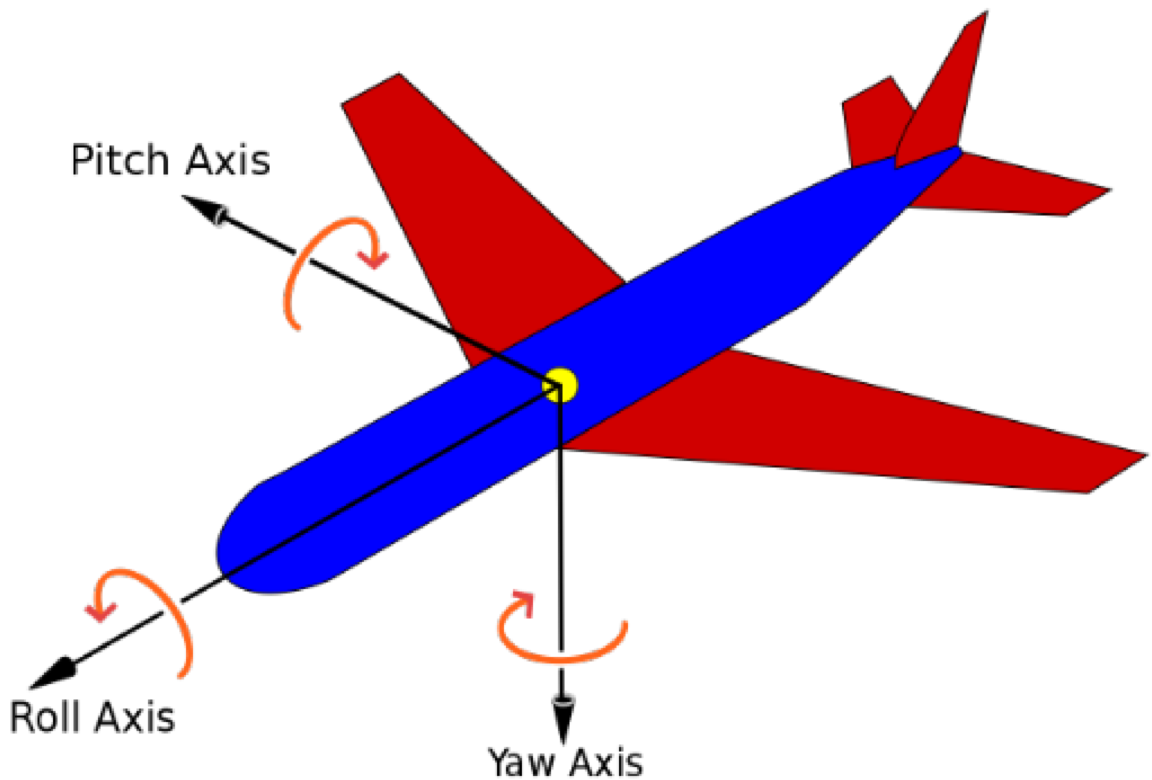
$K_{y_1,\theta}$, θ = -40



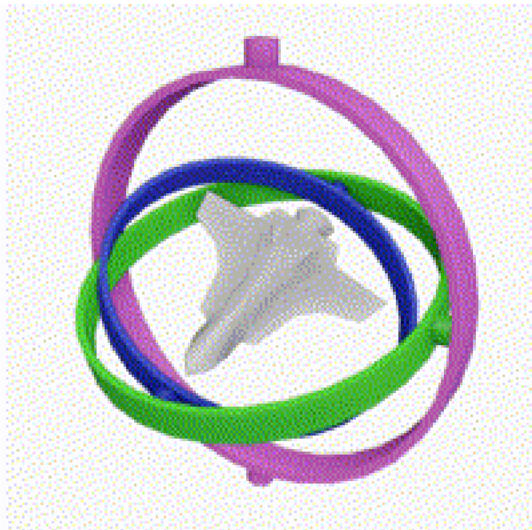
$K_{x_2,\phi}$, ϕ = 50



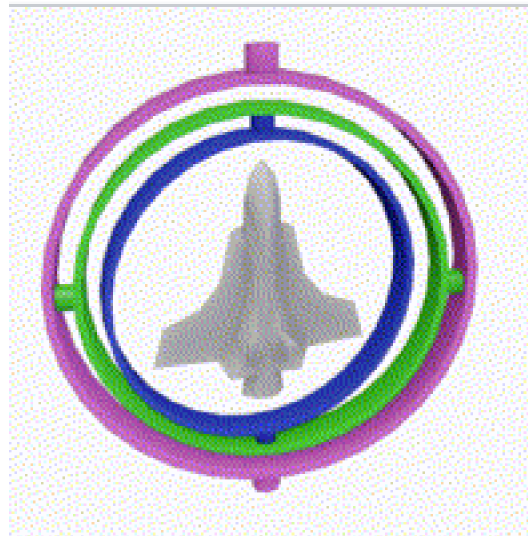
Huom 1: Kulmia ψ, θ ja ϕ kutsutaan lentokonehommissa nimillä yaw, pitch ja roll.



Huom 2. Gimbal lock: jos $\theta = \pm 90^\circ$, niin x_2-akseli on z-akselin suuntainen, eli yhteensä z-akselin ympäri kierretään $\psi + \phi$:n verran, mutta kulmia ψ ja ϕ ei voi erikseen määrätä kiertomatriisin perusteella.



Gimbal with 3 axes of rotation. When two gimbals rotate around the same axis, the system loses one degree of freedom.



Gimbal locked airplane. When the pitch (green) and yaw (magenta) gimbals become aligned, changes to roll (blue) and yaw apply the same rotation to the airplane.

Kvaterniot (Quaternions)

ovat 4D-vektoreita, joiden avulla on kätevä laskea 3D-kiertoja. Jos

$$Q = [q_0, q_1, q_2, q_3] = [q_0, \mathbf{q}]$$

niin luku q_0 on sen skalaariosa ja 3D-vektori $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$ vektoriosa

Kertolasku: Kvaternioiden

$$Q = [q_0, \mathbf{q}],\ R = [r_0, \mathbf{r}]$$

tulo on kvaternio

$$QR = [q_0 r_0 - \mathbf{q} \bullet \mathbf{r}, q_0 \mathbf{r} + r_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{r}]$$

missä $\mathbf{q} \bullet \mathbf{r}$ ja $\mathbf{q} \times \mathbf{r}$ ovat 3D-vektoreiden $\mathbf{q}$ ja $\mathbf{r}$ piste- ja ristitulo.

Huom: $RQ = [r_0 q_0 - \mathbf{r} \bullet \mathbf{q}, r_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{q}] \neq QR$, koska $\mathbf{r} \times \mathbf{q} = -\mathbf{q} \times \mathbf{r}$

Huom: $(QR)S = Q(RS) = QRS$ eli kertomis-järjestyksellä ei ole väliä

Kvaternion $Q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ pituus

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

ja käänteiskvaternio (inverse)

$$Q^{-1} = \frac{[q_0, -\mathbf{q}]}{\|Q\|^2} = \left[\frac{q_0}{\|Q\|^2}, -\frac{\mathbf{q}}{\|Q\|^2}\right]$$

Kvaternion ja käänteiskvaternion tulo

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = \mathbf{1}$$

missä $\mathbf{1} = [1, 0, 0, 0]$ on kvaterniokertolaskun ykkönen eli

$$Q\mathbf{1} = \mathbf{1}Q = Q$$

Huom: Jos Q on yksikkökvaternio eli $\|Q\| = 1$, niin

$$Q^{-1} = [q_0, -\mathbf{q}]$$

Kierto akselin $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$, $\|\mathbf{n}\| = 1$, ympäri kulman θ verran: jos

$$Q = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{n}]$$

niin

$$\|Q\| = 1$$

ja

$$Q^{-1} = [\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2)\mathbf{n}]$$

ja jos

$$P = [0, x, y, z]$$

niin

$$KP = QPQ^{-1} = [0, X, Y, Z]$$

eli

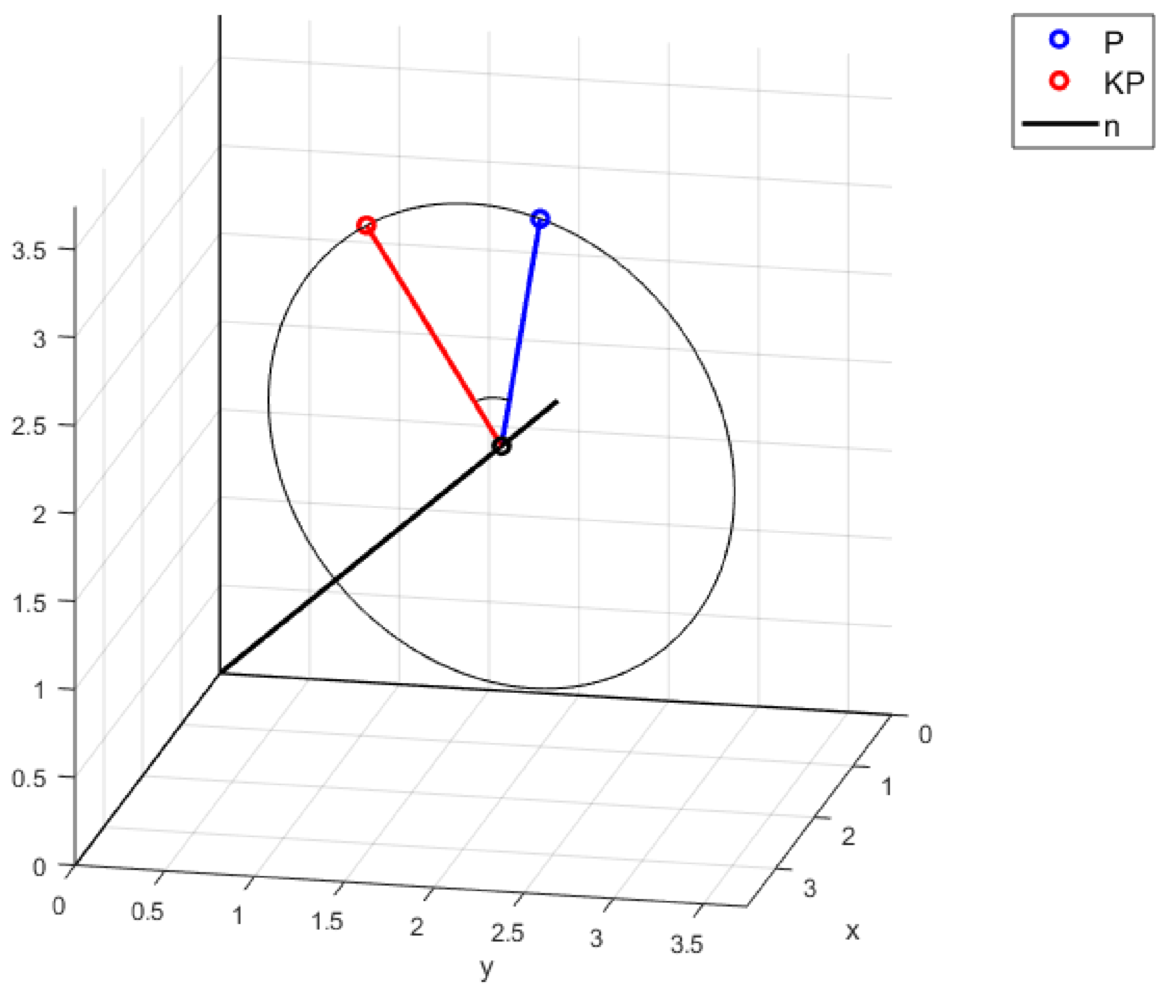
$$[x, y, z] \to [X, Y, Z]$$

Esim: jos $\mathbf{n} = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ (eli vektorin [1,1,1] suuntainen) ja kiertokulma $\theta = 45°$, niin

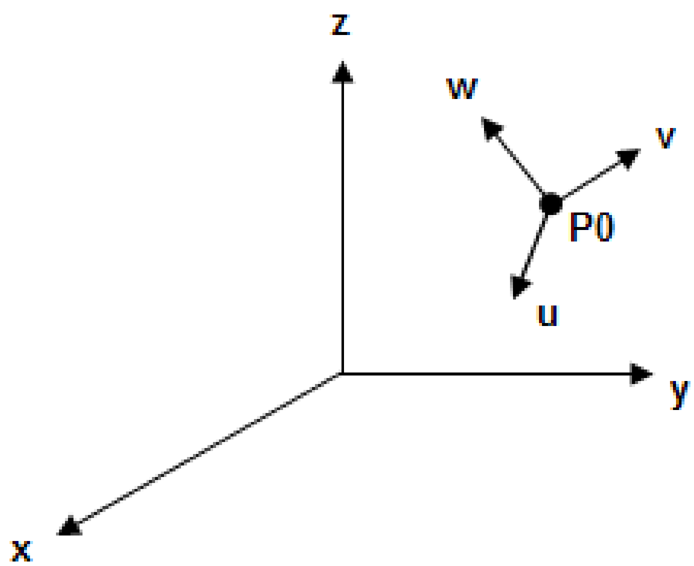
$$Q = [0.924, 0.221, 0.221, 0.221]$$

$$Q^{-1} = [0.924, -0.221, -0.221, -0.221]$$

$$P = [0, 1, 2, 3] \rightarrow KP = QPQ^{-1} = [0, 1.70, 1.18, 3.12]$$



Koordinaatiston muunnos:



Jos pisteellä P on koordinaatit x, y, z "peruskoordinaatistossa", ja koordinaatit u, v, w koordinaatistossa, jonka origo on pisteessä $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$, ja akselit ovat (kohtisuorien) **yksikkövektoreiden** $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ ja $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$ suuntaiset, ja

$$K = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & x_0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & y_0 \\ u_3 & v_3 & w_3 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

niin

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}}_{P_{xyz}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{P_0} + u \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + v \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} + w \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

$$= K \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}}_{P_{uvw}}$$

eli

$$P_{xyz} = K P_{uvw}$$

ja toisinpäin,

$$P_{uvw} = K^{-1} P_{xyz}$$

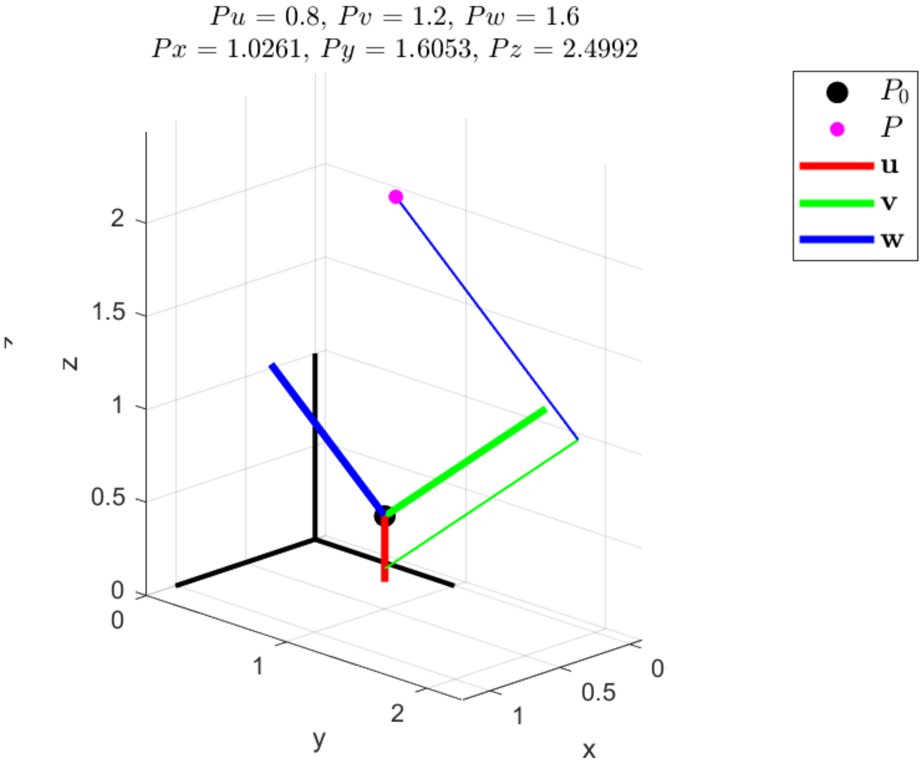
Esim. Jos $P_0 = [0.5, 1, 0.5]$, u-akseli on vektorin $[1, 1, 0]$, v-akseli vektorin $[-1, 1, 1]$ ja w-akseli vektorin $[1, -1, 2]$ suuntainen, niin

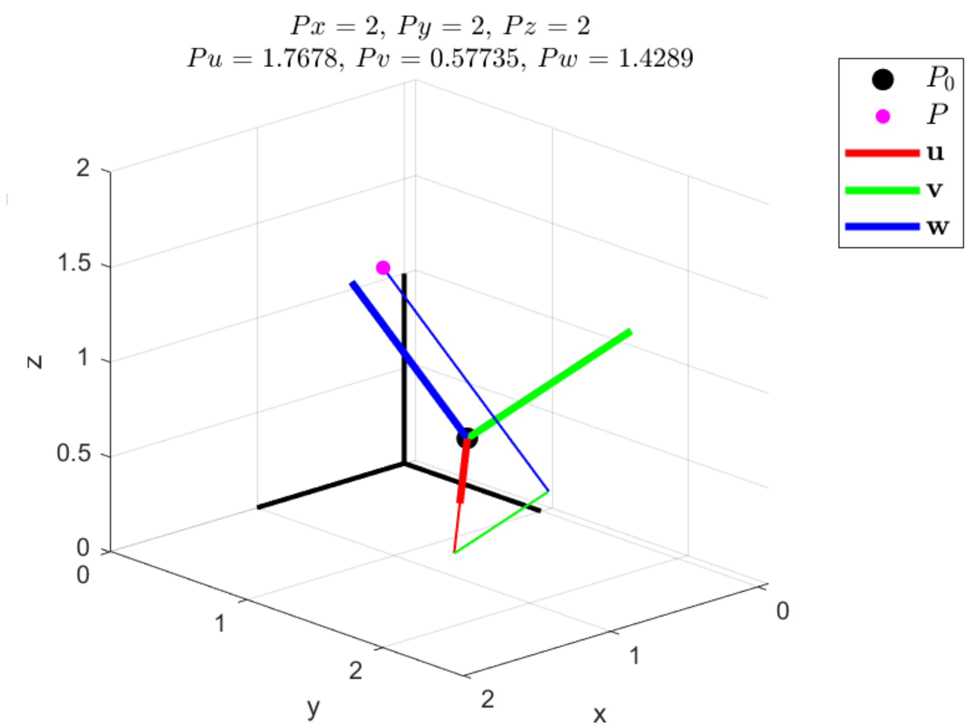
$$K = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.5774 & 0.4082 & 0.5 \\ 0.7071 & 0.5774 & -0.4082 & 1 \\ 0 & 0.5774 & 0.8165 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja esimerkiksi

$$P_{uvw} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 1 \end{bmatrix} \to P_{xyz} = KP_{uvw} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.6 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{xyz} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 1 \end{bmatrix} \to P_{uvw} = K^{-1}P_{xyz} \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.6 \\ 1.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

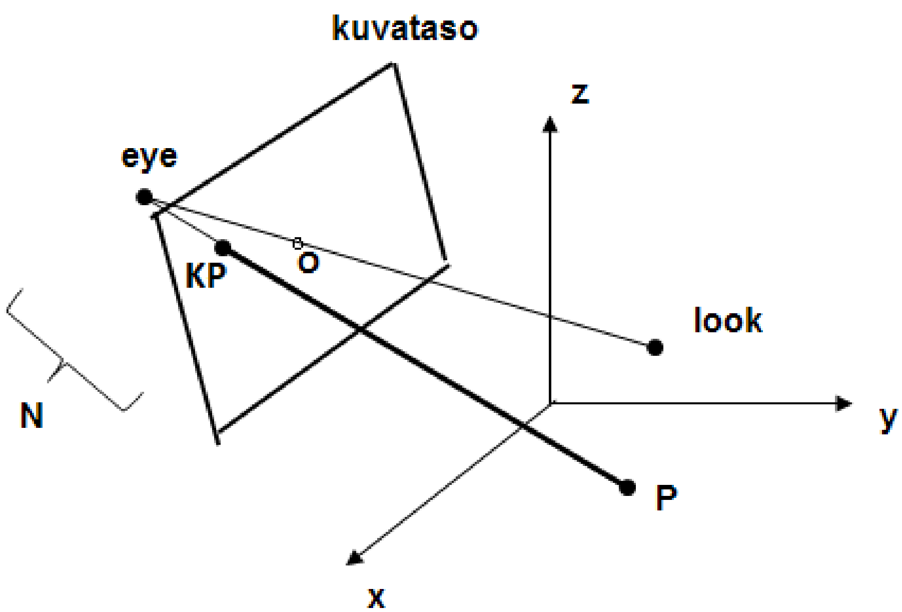

$Pu = 0.8,\ Pv = 1.2,\ Pw = 1.6$
$Px = 1.0261,\ Py = 1.6053,\ Pz = 2.4992$
P_0
P
$\mathbf{u}$
$\mathbf{v}$
$\mathbf{w}$
z
0
0.5
1
1.5
2
y
0
1
2
x
0
0.5
1


$Px = 2,\ Py = 2,\ Pz = 2$
$Pu = 1.7678,\ Pv = 0.57735,\ Pw = 1.4289$
P_0
P
$\mathbf{u}$
$\mathbf{v}$
$\mathbf{w}$
z
0
0.5
1
1.5
2
y
0
1
2
x
0
1
2

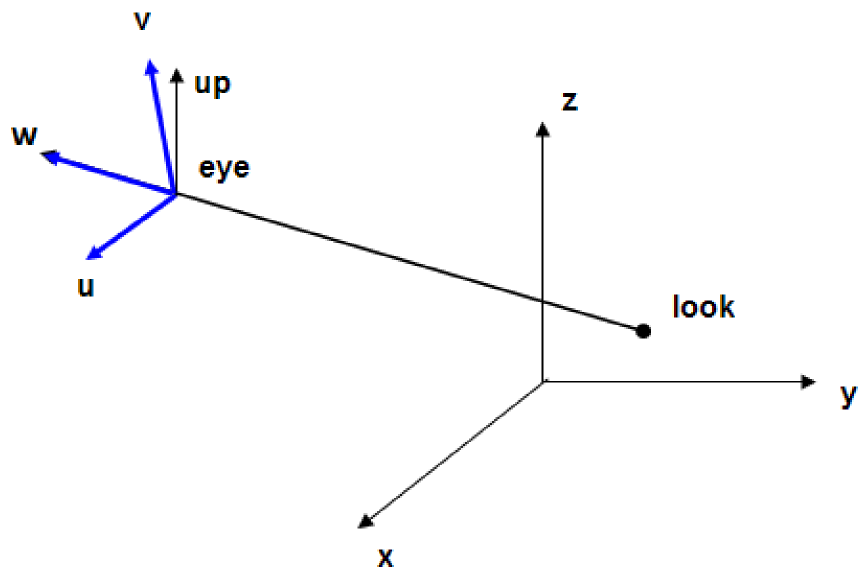
3D-kamera

Annettu: kameran paikka eli piste **eye**, katsomispiste **look** (jonka kuvapiste on kuvan keskipiste O), kameran ja kuvatason välinen etäisyys N (kuvataso on kohtisuorassa suoran **eye-look** kanssa), kameran asennon määräävä vektori **up** ja piste P

Tavoite: etsitään pisteen P paikka KP kuvatasolla.



Muodostetaan ensin pisteeseen $P_0 = \mathbf{eye}$ allaolevan kuvan mukainen koordinaatisto katsomispisteen **look** ja vektorin **up** avulla:



$\mathbf{w} = \mathbf{eye} - \mathbf{look}$

$\mathbf{u} = \mathbf{up} \times \mathbf{w}$ ($\times$ on 3D-vektoreiden ristitulo)

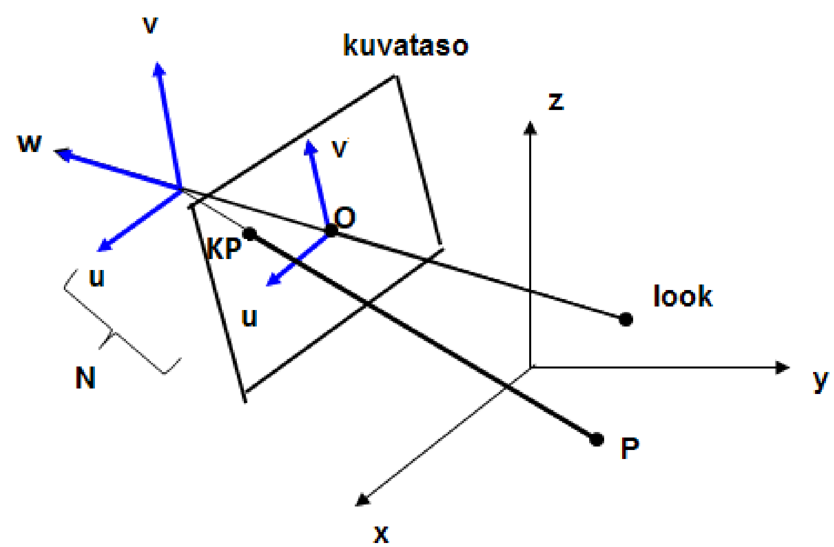
$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

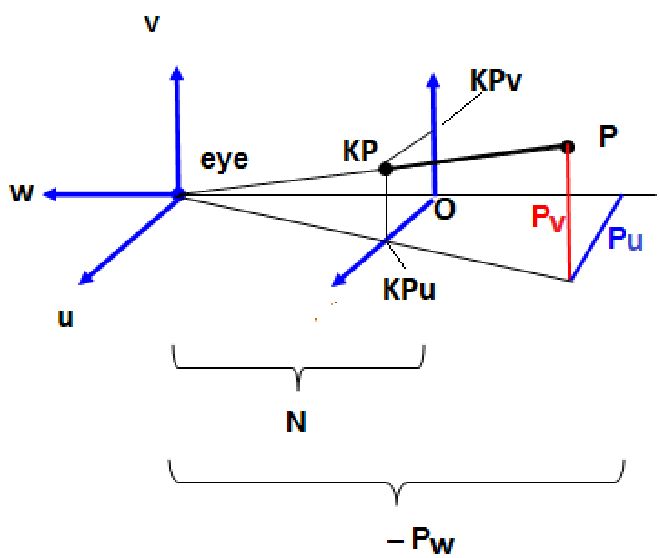
ja jakamalla nämä vielä pituudellaan saadaan kolme kohtisuoraa yksikkövektoria.
Muodostetaan koordinaatistonmuutosmatriisi K ja lasketaan P:n uvw-koordinaatit

$$P_{uvw} = K^{-1} P_{xyz}$$

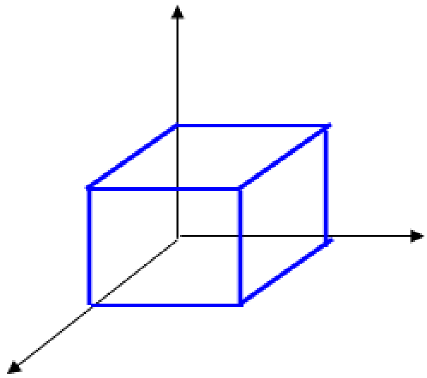
Kuvapisteen KP koordinaatit KPu ja KPv saadaan allaolevan kuvan mukaisesti P:n uvw-koordinaattien Pu, Pv ja Pw avulla (yhdenmuotoisista kolmioista) eli

$$KPu = \frac{N \cdot Pu}{-Pw} \quad \text{ja} \quad KPv = \frac{N \cdot Pv}{-Pw}$$





Esim. Yksikkökuution (kärkipisteet [1,0,0], [1,1,0],[1,1,1], ...)



projektiokuva, kun

$$eye = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \, look = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \, up = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \, N = 1$$