

Applications du Théorème de Superposition de Kolmogorov à la compression d'images

Félix Piédallu

I. Introduction

II. Le Théorème de superposition de Kolmogorov

III. L'application à la compression d'images

En Physique :• **Problème de Navier-Stokes**

Dimension 2 : Résolu (Jean Leray, 1934)

Dimension 3 : 6^e Problème du Millénaire

• **Le problème à n corps**

2 corps : Solutions énoncées
Isaac Newton (1687)

3 corps : 1909 (Karl Sundman) :
résultats, mais inutilisables.
→ Théorie du Chaos
(incertitude)

En Mathématiques :• **Solutions d'équations polynômiales**

Degré inférieur à 4 : Formules exactes
par radicaux

Degré supérieur : Pas de solutions analytiques
(É. Galois, XVIII^e).

• **Le Théorème de Fermat : $a^n + b^n = c^n$**

Pour $n=2$: Théorème de Pythagore
(Antiquité)

Pour $n>2$: Impossible d'après A.Wiles
(1994)
→ Topologie algébrique

Le Théorème de Superposition de Kolmogorov

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^* \text{ de somme } 1 \\ \phi_1, \dots, \phi_{2n+1} \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \end{array} \right. \quad \text{universels telles que}$

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1]^n, \mathbb{R})$ quelconque,

$\exists g_1, \dots, g_{2n+1} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dépendantes de f , telles que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q \left(\sum_{p=1}^n \lambda_p \phi_q(x_p) \right)$$

Ceci représente toute fonction à n variables comme somme de composées de fonctions à une variable.

Par exemple, il existe $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_a, \dots, \lambda_c \\ \phi_1, \dots, \phi_5 \end{array} \right.$, tels que :

- Pour tout $(x, y, z) \in [0, 1]^3$, $\sqrt{\cos^2(xy)} + z = \sum_{q=1}^7 g_q (\lambda_a \phi_q(x) + \lambda_b \phi_q(y) + \lambda_c \phi_q(z))$
- Pour tout $(x, y, z) \in [0, 1]^3$, $e^{x \sin(z-y)} = \sum_{q=1}^7 h_q (\lambda_a \phi_q(x) + \lambda_b \phi_q(y) + \lambda_c \phi_q(z))$

Le Théorème de Baire

Soit E un espace vectoriel normé complet (Banach) et $(O_n)_n$ une suite d'ouverts denses de E .

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est dense dans E .

Déf : P est vraie pour **quasi tout** $x \in E$, si P est vraie sur une intersection d'ouverts denses dans E (notée un G_δ -dense)

Déf : Φ est l'ensemble des fonctions φ strictement croissantes, continues sur I , telles que $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$.

Muni de $\| \cdot \|_\infty$, c'est un espace métrique complet

Preuve non-constructive du Théorème de Kolmogorov :

Soit $\rho \in \mathcal{C}^0([0, 1]^n, \mathbb{R})$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ strictement positifs de somme 1.

Soit $\epsilon > 0$.

Définissons $\Omega(f) = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}) \in \Phi^{2n+1} \text{ tel qu'il existe } h \in C(I^n) \text{ avec } \|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty \text{ et}$

$$\left\| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{q=1}^{2n+1} h \left(\sum_{p=1}^n \lambda_p \varphi_q(x_p) \right) \right\|_\infty < (1 - \epsilon) \|f\|_\infty \quad (1)$$

$\Omega(f)$ est un ouvert de Φ^{2n+1} , admis dense.

Soit F un ensemble dénombrable dense dans $C(I^n) \setminus \{0\}$.

$\bigcap_{f \in F} \Omega(f)$ est dense dans Φ^{2n+1} : c'est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E .

On y prend $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1})$.

Il existe $f_0 \in F$, telle que $\begin{cases} \|f_0\|_\infty & \leq & \|\rho\|_\infty \\ \|\rho - f_0\|_\infty & < & \frac{\varepsilon}{2} \|\rho\|_\infty \end{cases}$ et h_0 vérifiant (1) pour f_0 .

Notons $h_0 = \gamma(f_0)$, et $\gamma(0) = 0$.

Par récurrence, nous définissons $h_j = \gamma(f_j)$, et

$$f_{j+1}(x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1, \dots, x_n) - \sum_{q=1}^{2n+1} h_j \left(\sum_{p=1}^n \lambda_p \varphi_q(x_p) \right) \quad (2)$$

Or $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f_j\|_\infty = 0$. On peut sommer par télescopage.

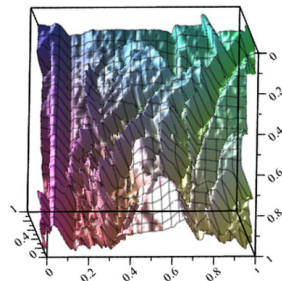
La série $\sum_{j=0}^{\infty} h_j$ converge dans $C(I)$ vers g qui vérifie alors, comme (1) a lieu, le théorème pour f_0 .

Application aux images :



Image originale
Fonction discrète
 n^2 points à enregistrer

Interpolation linéaire



Fonction f continue sur $[0, 1]^2$
Fonction superposable
par le théorème de Kolmogorov.

Un pixel repéré par (x, y) est associé au point $(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) \in [0, 1]^2$.

Le théorème dans le cas des images :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^4 g_n(\underbrace{\lambda_1 \cdot \phi(x + nb) + \lambda_2 \cdot \phi(y + nb)}_{\xi(x+nb, y+nb)}) \Rightarrow$$

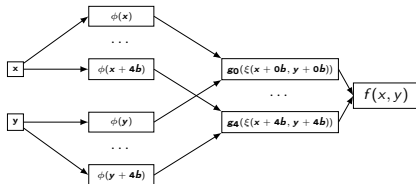
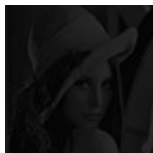
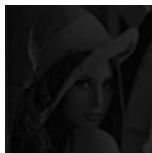


Image Originale

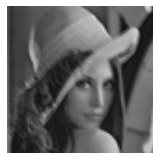
→

Première couche
($g_0(\xi)$)

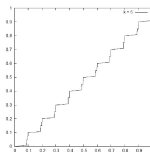
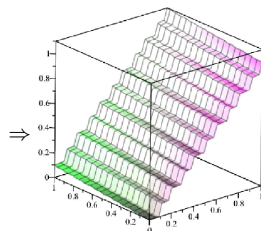
+ ... +

Cinquième couche
($g_4(\xi)$)

=

Reconstitution
après une itération

L'algorithme de Sprecher :

 ψ et ξ pour l'algorithme de Sprecher : ψ sur $[0, 1]$  ξ sur $[0, 1]^2$

$$f(x, y) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^4 \sum_{j=1}^r g_{n,j} \circ \xi(x + nb, y + nb)}_{g_n(\xi(x + nb, y + nb))}$$

Le stockage des fonctions :

Les λ_i et ϕ sont indépendantes de l'image.

On ne stocke que les $(g_i)_{i \in \{0, \dots, 2d\}}$ $\xrightarrow{\text{Discretisation}}$ $n * (2 \times d + 1)$ points à enregistrer.

	Image originale		Algorithme de Sprecher
Quantité de données :	n^2 points	$\xrightarrow{\text{Kolmogorov}}$	$5 \times n$ valeurs
Complexité :	$O(n^2)$	$\xrightarrow{\text{Kolmogorov}}$	$O(n)$

Comparaison des différents formats

40 × 40	128 × 128	500 × 500
BMP : 1.56Ko (1600 octets)	BMP : 16.0Ko (16384 octets)	BMP : 244.14Ko (250000 octets)
TSK : 1.93Ko (2000 octets)	TSK : 6.25Ko (6400 octets)	TSK : 24.14Ko (25000 octets)
JPG : 11.8Ko (12158 octets)	JPG : 4.38Ko (4491 octets)	JPG : 49.2Ko (50396 octets)

Conclusion

- ❶ Un puissant outil d'analyse et de traitement du signal
- ❷ Une démonstration non-constructive simple
- ❸ Peu de mises en application à ce jour...
- ❹ Permet un taux de compression très élevé pour de grands échantillons de données
- ❺ A un avenir prometteur (Vidéo,...)