Preuve non constructive du Théorème de Kolmogorov

Félix Piédallu & Nicolas Lebbe

Énoncé du Théorème de Kolmogorov :

Toute fonction continue réelle définie sur $I^n = [0,1]^n$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x_1, \dots, x_2) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q \left(\sum_{p=1}^{n} \varphi_{p,q}(x_p) \right)$$

où les g_p et les $\varphi_{p,q}$ sont réelles continues; $\varphi_{p,q}$ croissantes sur I et indépendantes de f.

Cet énoncé sera adapté à :

Pour quasi tout $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}) \in \Phi^{2n+1}$, toute fonction f continue sur I^n est représentable sous la forme :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_q(x_p) \right) \tag{1}$$

où g est continue sur I, et les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont strictement positifs, de somme 1.

Notations utilisées :

- On dit qu'une propriété est vraie *pour quasi tout a* si elle est vraie pour une intersection d'ouverts denses.
- Φ est l'ensemble des fonctions φ croissantes, continues sur I, telles que $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$.
- L'oscillation de f sur I sera $\max_I(f) - \min_I(f)$.

Démonstration :

Soit $\epsilon > 0$. Pour $f \in C(I^n)$, définissons
$\Omega(f) = \left\{(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}) \in \Phi^{2n+1} | \exists h \in C(I^n)\right\}$ avec :

$$\begin{array}{ll} (i) & \|h\| \leq \|f\| \\ (ii) & \left\| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{q=1}^{2n+1} h \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_q(x_p) \right) \right\| < (1-\epsilon)\|f\| \end{array} \tag{2}$$

$\Omega(f)$ est bien un ouvert de Φ^{2n+1}; Nous montrerons plus tard qu'il y est dense.

Soit F un ensemble dénombrable dense dans $C(I^n) \setminus \{0\}$. Par le grand théorème de Baire, $\bigcap_{f \in F} \Omega(f)$ est dense dans Φ^{2n+1}; On y prend $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1})$.
Pour $f \in C(I^n)$ non nulle, il existe $f_0 \in F$, telle que $\|f_0\| \leqslant \|f\|$ et $\|f - f_0\| < \frac{\epsilon}{2}\|f\|$;
ainsi que h vérifiant l'équation (2) avec f_0. Notons-la $h = \gamma(f)$, avec $\gamma(0) = 0$.
Par récurrence, nous définissons $h_j = \gamma(f_j)$, et

$$f_{j+1}(x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1, \dots, x_n) - \sum_{q=1}^{2n+1} h_j \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_q(x_p) \right)$$

Comme (2) a lieu, la série $\sum_{j=0}^{\infty} h_j$ converge dans $C(I)$ vers g qui vérifie alors (1).

CQFD

Densité de $\Omega(f)$:

Soit G un ouvert de Φ^{2n+1} ; $\delta > 0$ dépendant de G, ϵ, f. Soit , pour $j \in \mathbb{Z}$

$$I_q(j) = [q\delta + (2n+1)j\delta, \sim +2n\delta], q \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$$

- À q fixé, les $I_q(j)$ sont disjoints et séparés de δ
- Pour tout x de $[0,1]$, il existe au plus un q, tel que $x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} I_q(j)$.

Pour passer en dimension n, définissons $P_q(j_1, \dots, jn) = I_q(j_1) \times \dots \times I_q(j_n)$; et de même, pour tout x de I^n, il existe au plus **n** valeurs de q, tel que $x \notin \bigcup_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{Z}^n} P_q(j_1, \dots, j_n)$.

Soit $\Delta = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}\} \in \Phi^{2n+1}$ telle que pour tout $q = 1, \dots, 2n+1$, φ_q est constante sur I_q et linéaire sur les intervalles consécutifs.

On pose alors δ telle que :
- L'oscillation de f sur chaque P_q ne dépasse pas $\epsilon\|f\|$
- $G \cap \Delta \neq \varnothing$

On prend alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}) \in G \cap \Delta$. On peut modifier très légèrement la valeur des φ_q, tout en restant dans $G \cap \Delta$, afin de pouvoir supposer que

$$\chi_q(x_1, \dots, x_{2n+1}) = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_q(x_p),$$

soit constante sur chaque P_q, y prenne des valeurs différentes., et que les $\chi_q(P_q)$ sont toutes différentes, pour des valeurs de q différentes. Formellement,

$$q, j_1, \dots, j_n \mapsto \chi_q(P_q(j_1, \dots, j_n))$$

est injective.

Soit $\mathcal{M}(P_q)$ la valeur moyenne de f sur P_q.
Définissons, sur tout pavé $P_q(j_1, \dots, j_n)$,

$$h(\chi_q(P_q)) = 2\epsilon\mathcal{M}(P_q)$$

et on prolonge h "arbitrairement" de sorte que l'on ait $\|h\| \leqslant 2\epsilon\|f\|$.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n$. Si $x \in P_q$, on a

$$h(\chi_q(x)) = 2\epsilon\|f(x)\| + \rho, \qquad |\rho| \leqslant 2\epsilon^2\|f\|.$$

Comme x est contenu dans au moins $n+1$ cubes P_q, alors pour $\epsilon < \frac{n+1}{2}$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sum_{q=1}^{2n+1}| &\leqslant (1 - 2(n+1)\epsilon)|f(x)| + 2(n+1)\epsilon^2\|f\| + 2n\epsilon\|f\| \\
&\leqslant (1 - 2\epsilon + 2(n+1)\epsilon^2)\|f\| \\
&\leqslant (1-\epsilon)\|f\| \qquad \equiv (2)
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.