Énoncé du théorème de Baire

Soit E un espace vectoriel normé et complet (Espace de Banach).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } (O_n)_n \text{ une suite d'ouverts denses de E.}\\ \text{Alors } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \text{ est dense dans E (Mais non ouvert).}\end{array}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } (F_n)_n \text{ est une suite de fermés d'intérieur vide,}\\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \text{ est un ensemble d'intérieur vide.}\end{array}}$$

A est d'intérieur vide $\Leftrightarrow$ son complémentaire est dense dans E.

Preuve

Soit $x \in E$ et $r > 0$. Montrons que

$$B = B(x,r) \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n) \neq \emptyset \tag{1}$$

(A dense $\Leftrightarrow \forall x, \forall r, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$)

O_1 dense $\Rightarrow \exists (x_1, r_1)$ tels que $B_1 = B(x_1, r_1) \subset (O_1 \cap B)$ et $r_1 < \frac{r}{3}$.
Par récurrence, on définit :

$$B_i = B(x_i, r_i) \subset (O_i \cap B_{i-1}) \text{ et } r_n < \frac{r_{n-1}}{3}$$

On obtient donc que pour tout n, $||x_{n+1} - x_n|| \leq r_{n+1} \leq \frac{r}{3^n}$.

Donc $\sum x_{n+1} - x_n$ converge absolument.
Enfin, par "critère suite-série" dans un espace de Banach, la suite des x_n converge vers un élément $x_\infty \in E$.

De plus, B_n étant une suite de boules emboîtées, elle vérifie :
$\forall p \in \mathbb{N}$:
$\forall n \geq p, B(x_n, r_n) \subset B(x_p, r_p) \subset O_p \cap \ldots \cap O_1$.
D'où $x_\infty \in O_p \cap \ldots \cap O_1$.
Comme la relation est vraie pour tout p, on a $x_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Et alors :

$$\begin{cases} x_\infty \in B(x,r) \\ x_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \end{cases} \Longrightarrow x_\infty \in B(x,r) \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n)$$

On a donc (1) et ce qui achève la démonstration.