

Teoría de conjuntos básica

Conjuntos, relaciones y funciones

M. Antònia Huertas Sánchez

PID_00149520

Índice

Introducción	5
Objetivos	6
1. Conjuntos	7
1.1. Definición de un conjunto	7
1.2. Subconjuntos y partes de un conjunto	10
1.3. Operaciones con conjuntos	12
1.4. Álgebra de Boole de los conjuntos	13
1.5. Diagramas de Venn	15
2. Relaciones	16
2.1. Conceptos básicos	16
2.2. Relaciones en un conjunto	18
2.3. Grafos	20
2.4. Relaciones de equivalencia	21
3. Funciones	24
3.1. Conceptos básicos	24
3.2. Tipos de las funciones	26
3.3. Conjuntos finitos y conjuntos infinitos	27
Resumen	29
Ejercicios de autoevaluación	30
Solucionario	32
Glosario	33
Bibliografía	34

Introducción

La teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas que forma parte de la fundamentación de la lógica y de la informática. En este módulo se hará una introducción básica necesaria para la fundamentación de la lógica de predicados, pero su estudio en profundidad requiere conocimientos complejos de matemáticas y también de lógica. Nuestro objetivo es, únicamente, presentar las nociones básicas de la teoría de conjuntos con ejemplos y ejercicios sencillos.

Actualmente es indiscutible el hecho de que la teoría de conjuntos es imprescindible para fundamentar la lógica y en particular la lógica de predicados, ya que proporciona el lenguaje formal con el que expresar la semántica de la lógica de predicados, que será equivalente a las tablas de verdad de la lógica de enunciados. Este módulo, por tanto, además de proporcionaros una herramienta matemática de amplio uso en muchas otras asignaturas de informática, es importante para comprender una parte del módulo de lógica de predicados.

En los capítulos que siguen se presenta la llamada teoría básica de conjuntos, con los conceptos básicos de conjunto, subconjunto, elemento y pertenencia. Se presentan también los conceptos de relación y de función, que son fundamentales en muchos campos de la informática.

Encontraréis muchos ejemplos, que es importante que leáis e intentéis entender. Al final del módulo hay ejercicios de autoevaluación para que podáis comprobar el nivel de comprensión de los conceptos y técnicas fundamentales del módulo.

La teoría de conjuntos es el lenguaje donde se expresan las matemáticas y la lógica, y por ello impregna todos los campos de la ciencias y la ingeniería. Este módulo que consiste en una introducción especialmente preparada para la lógica, os servirá, sin embargo, en muchos otros contextos formales de todo tipo.

Objetivos

En los recursos docentes facilitados en este módulo, encontraréis los conceptos, técnicas y herramientas necesarias para alcanzar los objetivos siguientes:

1. Comprender la necesidad de formalizar los conceptos para manipularlos con rigor.
2. Saber definir correctamente conjuntos y condiciones de pertenencia de un elemento a un conjunto.
3. Saber expresar correctamente operaciones entre conjuntos.
4. Entender los conceptos formales de relación y de función.
5. Conocer la representación gráfica de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos básica: diagramas de Venn y grafos.
6. Saber manipular los símbolos formales de la teoría de conjuntos básica.

1. Conjuntos

1.1. Definición de un conjunto

La teoría de conjuntos fue creada por los matemáticos alemanes **Georg Cantor** y **Richard Dedekind** en la década de 1880, y más tarde reformulada axiomáticamente por el también alemán **Ernst Zermelo**.

El concepto intuitivo de conjunto es el de una *colección de objetos*. De forma habitual se habla de un conjunto de personas, objetos, países, etc. Desde un punto de vista matemático la cuestión importante es la de que un conjunto esté bien definido, esto es, la de si se puede siempre decir sin ningún tipo de ambigüedad si un determinado elemento forma parte del conjunto. Así, por ejemplo, el conjunto de las personas con título universitario está bien definido, mientras que el conjunto de las personas calvas no lo está (hay personas que para algunos serían calvas pero para otros no, y no hay un criterio objetivo para decidir la frontera entre ser calvo y no serlo).

La teoría de conjuntos que formuló Cantor se conoce con el nombre de básica o intuitiva y es la que presentaremos aquí. En ella se define un conjunto a través de la determinación no ambigua de los elementos de ese conjunto. Esta manera de definir conjuntos tan intuitiva puede, sin embargo, llevar a problemas que se resuelven con la definición de conjunto dada en la teoría de conjuntos axiomática de Zermelo-Fraenkel (que por su notable complejidad no veremos en este módulo). Según la definición de conjunto que hace Cantor, éste es “una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto”. En 1903, Bertrand Russell demostraría que la teoría de conjuntos de Cantor era inconsistente y cuestionaría la definición de conjunto dada por Cantor. Pero pronto la teoría axiomática de Zermelo (1908) y refinamientos de ésta debidos a Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Newman (1925) y otros sentaron las bases para la teoría de conjuntos actual en la que no se dan esos problemas.

Partimos de la **noción intuitiva de conjunto** como una colección de objetos. Cada uno de esos objetos constituyen la **noción intuitiva de elemento de ese conjunto**. Los conceptos de conjunto y elemento expresados así no se definen a partir de otras nociones y, por tanto, serán los conceptos primitivos (no definibles) de la teoría básica de conjuntos que vamos a desarrollar en este módulo. Todos los demás conceptos serán definidos a partir de estos dos conceptos primitivos. Es por ello que la teoría que vamos a presentar es formal

**Georg Cantor
(1845-1918)**

fue un matemático alemán, inventor de la teoría de conjuntos; fue, además, el primero en formalizar la noción de infinito.

**Richard Dedekind
(1831-1916)**

fue un matemático alemán; su trabajo sobre los números naturales fue fundamental para fundar las bases de la teoría de conjuntos.


y rigurosa, ya que todas y cada una de las nociones que no sean primitivas estarán definidas sin ninguna ambigüedad.

En la teoría de conjuntos hay una cuestión que es especialmente clave, la de considerar una colección de elementos como una entidad individual, esto es, **un conjunto**. Será fundamental establecer cómo se determinarán estas colecciones de forma no ambigua para que toda esta teoría forme parte de las matemáticas, donde el rigor y el formalismo son una característica esencial. Por el momento, provisionalmente, *tomamos como equivalentes los conceptos de conjunto y colección de objetos* y consideramos a los objetos de la colección como los **elementos del conjunto**.

Si simbolizamos A un conjunto y a un elemento de ese conjunto, se escribe $a \in A$ y se lee “ a pertenece a A ”.

Para indicar que un objeto b no es un elemento del conjunto A se escribe $b \notin A$ y se lee “ b no pertenece a A ”.

En general, usaremos letras mayúsculas del alfabeto latino para representar conjuntos y letras minúsculas para indicar elementos; aunque esta convención no es fundamental y puede obviarse cuando sea preciso (pensad, por ejemplo, en el caso de un conjunto cuyos elementos sean, a su vez, conjuntos).

Hay algunos conjuntos concretos que tienen un símbolo fijo por su importancia. El más importante de todos ellos es un conjunto raro pero fundamental: el conjunto que no tiene ningún elemento (algo equivalente al número cero para la aritmética), éste se llama **conjunto vacío** y se representa con el símbolo \emptyset . 

Otros conjuntos importantes con símbolos fijos son los numéricos:

- El conjunto de los números naturales (1,2,3,4,5, ... etc), que se escribe con el símbolo \mathbb{N} .
- El de los números enteros (0, +1, -1, +2, -2, ... etc.) que se escribe \mathbb{Z} .
- El de los números racionales (formado por todas las fracciones de números enteros) que se escribe con el símbolo \mathbb{Q} .
- El conjunto de los números reales (los números enteros y los números decimales) que se escribe \mathbb{R} .

Hay, por tanto, conjuntos con una cantidad infinita de elementos (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}).

Se llama **conjunto finito** a aquel que tiene un número finito de elementos, y **conjunto infinito** a aquel que tiene un número infinito de elementos. La cantidad de elementos de un conjunto se llama **cardinal del conjunto** y se escribe $|A|$ o también $Card(A)$ y en ambos casos se lee "cardinal de A".

Infinito

El símbolo matemático para infinito es ∞ . En el último apartado del módulo veréis que hay diferentes tipos de infinitos.

Volviendo a la cuestión inicial de cómo determinar de forma inequívoca (rigurosa) la colección de elementos que forma un conjunto, veremos que hay básicamente dos maneras.


Definición de un conjunto por extensión. Consiste en la descripción de un conjunto mediante la escritura del listado de sus elementos. El procedimiento más sencillo para especificar los elementos es nombrarlos en una lista ordenada que se presenta encerrada entre llaves $\{\}$.

Lecturas complementarias

Para ampliar el estudio de la teoría de conjuntos y conocer la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel, se puede consultar el documento digital Huertas, A. y Manzano, M. (2002) *El Universo Matemático*, en <http://logicae.usal.es> en el apartado *Fundamentos/teoría de conjuntos*.

Ejemplos de definición de un conjunto por extensión

- 1) $\{a, b, c\}$, que se lee "el conjunto formado por a , b y c ", es el conjunto cuyos elementos son exactamente los tres elementos a , b y c .
- 2) $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
- 3) $\{\text{rojo}, \text{amarillo}, \text{verde}\}$

Aunque la condición para poder usar el método de definición de un conjunto por extensión es que éste tenga un número finito de elementos (en la práctica un número pequeño) si el conjunto no es finito o es finito pero muy numeroso, se puede también determinar por extensión si nombrando unos cuantos elementos todos los demás quedan completamente determinados por alguna regla que se deduce sin ninguna ambigüedad, lo cual se indicará utilizando puntos suspensivos. 

Ejemplos de definición de un conjunto no finito o finito muy numeroso por extensión

- 1) El conjunto de los números naturales se determina y escribe de la siguiente forma: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
- 2) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$.
- 3) El conjunto de los elementos atómicos $\{\text{hidrógeno}, \text{helio}, \text{litio}, \dots\}$

Definición de un conjunto por intensión. Consiste en la descripción de un conjunto mediante una o varias propiedades que caracterizan a los elementos de ese conjunto sin ambigüedad. Las llaves se utilizan igualmente para delimitar el comienzo y el final de dicha descripción de los elementos del conjunto.

Ejemplos de definición de un conjunto por intensión

- 1) $\{n \mid n \text{ es un número natural par}\}$, que se lee “el conjunto de los n tal que n es un número natural par”.
- 2) $\{n \mid n \text{ es un número natural entre } 10 \text{ y } 10^{9999999}\}$
- 3) $\{x \mid x \text{ es un elemento atómico}\}$, que se lee “el conjunto de los x tal que x es un elemento atómico”.

Observad que para esta manera de definir conjuntos se usan símbolos de variables (n, x) que representan a cualquier elemento de ese conjunto.


Hay conjuntos definidos por extensión, que también se pueden definir por intensión si se encuentra una propiedad que caracteriza precisamente a los elementos de ese conjunto.

Ejemplos de definición por intensión de conjuntos definidos por extensión

- 1) $\{x \mid x \text{ es una de las tres primeras letras minúsculas del abecedario latino}\}$
- 2) $\{n \mid n \text{ es un número natural par entre } 5 \text{ y } 15\}$
- 3) $\{x \mid x \text{ es un color de semáforo}\}$
- 4) $\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ es un número natural}\}$

En particular el conjunto vacío es posible definirlo de esta forma utilizando cualquier propiedad que sea contradictoria para que ningún elemento la pueda satisfacer. Por ejemplo,

$$\emptyset = \{x \mid x \text{ es un número natural mayor que } 10 \text{ y menor que } 9\}$$

Un conjunto puede definirse por intensión de maneras diversas si la colección de objetos puede describirse con propiedades diferentes. 

Decimos que **dos conjuntos son iguales** si tienen exactamente los mismos elementos. Lo escribimos $A = B$.

Los símbolos formales básicos de la teoría de conjuntos son el de **pertenencia** \in (que relaciona un elemento y su conjunto) y el de **igualdad** $=$ (que relaciona dos conjuntos).

1.2. Subconjuntos y partes de un conjunto

Se dice que un conjunto A es **subconjunto** de B si todos los elementos de A son también elementos de B . Formalmente, esto se puede expresar con la propiedad: *si $x \in A$ entonces $x \in B$* .

Cuando A es subconjunto de B pero no es igual que B , se expresa $A \subset B$ y se lee “ A está estrictamente contenido en B ”, o simplemente, “ A contenido en B ”, o “ A incluido en B ”.

Escribiremos $A \subseteq B$, que se lee “ A contenido o igual que B ”, para indicar que A es subconjunto de B y puede ser igual a B .

Formalmente, se expresa de la siguiente manera:


$A \subset B$ si y sólo si A es subconjunto de B y $A \neq B$

$A \subseteq B$ si y sólo si $A \subset B$ o $A = B$

Escribimos $A \not\subseteq B$ (se lee “ A no contenido en B ”) para indicar que A no es un subconjunto de B .

Formalmente:

$A \not\subseteq B$ si y sólo si para todo $x \in A$ entonces $x \notin B$

Es muy importante diferenciar el uso de **pertenencia** e **inclusión**. Se escribe $a \in A$ si el objeto a es uno de los elementos del conjunto A . Mientras que escribimos $a \subseteq A$ si a es un conjunto y todos los elementos de a están en A . Observad también la diferencia que hay entre un elemento a , el conjunto $\{a\}$ (un conjunto que sólo tiene el elemento a) y el conjunto $\{\{a\}\}$ (un conjunto cuyo único elemento es el conjunto $\{a\}$). 

Propiedad. Para cualquier conjunto A, B, C se cumple:

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq A$ (se llama propiedad **reflexiva**)
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$ (se llama propiedad **transitiva**).

Ahora definiremos un conjunto muy importante, el que contiene como elementos a todos los subconjuntos de un conjunto dado.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto A se llama **el conjunto de las partes de A** , y se escribe con la notación $\mathcal{P}(A)$ (se lee “*partes de A* ”).

Formalmente: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

Propiedad. Para cualquier conjunto A se cumple:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$ (dado que $\emptyset \subseteq A$ y que $A \subseteq A$)
2. Si $|A| = n$ entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ (el cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es $2^{|A|}$).

Ejemplos de subconjuntos

Consideremos los tres conjuntos siguientes

$A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$; $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$

entonces se cumple lo siguiente:

- $1 \in A, 1 \in B, 1 \notin C$
- $\{1\} \subset B, \{1\} \in C, \{1\} \not\subseteq C$
- $\{1,2\} \subset A, \{1,2\} \subseteq B, \{1,2\} \in C$
- $A \in B, A \notin C$
- $A \subseteq B, A \not\subseteq C$
- $|A| = 3, |B| = 4, |C| = 2$

1.3. Operaciones con conjuntos

A continuación definiremos las operaciones básicas con conjuntos.

Unión. $A \cup B$ se lee “*A unión B*” y es el conjunto formado por la totalidad de elementos de A y de B .

Formalmente: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o bien } x \in B\}$

Entonces se cumple que A y B son subconjuntos de $A \cup B$; esto es:


$$A \subseteq A \cup B \text{ y } B \subseteq A \cup B$$

Intersección. $A \cap B$ se lee “*A intersección B*” y es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos simultáneamente.

Formalmente: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

Tanto A como B contienen su intersección; esto es:

$$A \cap B \subseteq A \text{ y } A \cap B \subseteq B$$

Dos conjuntos A y B se llaman **disjuntos** si si no tienen ningún elemento en común, esto es si su intersección es el conjunto vacío ($A \cap B = \emptyset$). Aquí se ve la importancia de disponer del conjunto vacío, ya que $A \cap B = \emptyset$ es una forma no ambigua de expresar esta importante noción. 

Diferencia. $A - B$ se lee “*A menos B*” (o también “*la diferencia de A y B*”) y es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A pero no a B . Formalmente, $A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Diferencia

Otra notación para la diferencia de conjuntos que se usa a menudo es $A \setminus B$, equivalente a $A - B$.

$A - B$ es un subconjunto del primero de ellos; esto es: $A - B \subseteq A$.

Ejemplos de operaciones con conjuntos

1) Para $A = \{1, \{1\}, 2\}$ y $B = \{1\}$ es cierto lo que sigue:

- a) $A \cup B = A$ y $A \cap B = \{1\}$
- b) $A \cap B \in A$ y $A \cap B = B$
- c) $B \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$, $\emptyset \subseteq B$
- d) $A - B = \{\{1\}, 2\}$
- e) $B - A = \emptyset$
- f) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B\}$
- g) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{\{1\}, 2\}, A\}$

2) Para $A = \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$ y $B = \{\emptyset, \{2\}\}$ se cumple que:

- a) $A \cap B = \{\{2\}\}$
- b) $A - B = \{2, \{\{2\}\}\}$
- c) $B - A = \{\emptyset\}$
- d) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, B\}$
- e) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{\{2\}\}, \{\{\{2\}\}\}, \{2, \{2\}\}, \{2, \{\{2\}\}\}, \{\{2\}, \{\{2\}\}\}, A\}$


Normalmente no estamos interesados en todos los conjuntos posibles, sino en los formados a partir de una colección limitada de objetos, que constituyen nuestro **universo** o **dominio**. Por ejemplo, si estamos haciendo un estudio sociológico, nuestro universo son personas, y si estamos haciendo un estudio lingüístico nuestro universo son palabras.

Cuando se fija un **universo o dominio** U , entonces los conjuntos que se consideran han de ser subconjuntos de dicho conjunto total U .

En los casos en que se ha fijado un universo o dominio, se puede definir la operación sobre un conjunto que consiste en seleccionar precisamente los elementos del universo o dominio que no están en ese conjunto.

Complementario de un conjunto. $\bar{A} = U - A$ se lee “*complementario de A*” y es el conjunto formado por todos los elementos del universo U que no son de A .

Formalmente: $\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}$.

Mientras que las operaciones de unión, intersección o diferencia de conjuntos se definen sin necesidad de recurrir al universo de discurso, la del complementario requiere que se haya fijado previamente el universo U . 

1.4. Álgebra de Boole de los conjuntos

Las operaciones entre conjuntos presentadas en el apartado anterior cumplen una serie de propiedades propias de la estructura matemática llamada álgebra de Boole, que son las siguientes.

Complementario

El complementario de un conjunto A también se puede escribir con los símbolos $\sim A$ o bien A^c .

Propiedades. En lo que sigue A, B, C representan a conjuntos cualesquiera. Es muy fácil comprobar que se cumplen las siguientes propiedades:

Asociatividad:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Conmutatividad:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Distributividad:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Idempotencia:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

Absorción:

$$(A \cap B) \cup A = A$$

$$(A \cup B) \cap A = A$$

Fijado un dominio U , podemos definir complementarios, y se cumplen, además:

Leyes de De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Doble negación:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Cero y uno:

$$A \cap U = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Las propiedades anteriores son las mismas que caracterizan a las álgebras de Boole.

Considerando un dominio o universo U , el conjunto vacío \emptyset y las operaciones de unión, intersección y complementario se cumplen las anteriores propiedades, que caracterizan la estructura matemática llamada **álgebra de Boole de los conjuntos**.

En este caso, \emptyset y U se toman como el **cero** y el **uno**, respectivamente, del álgebra de Boole.

La definición de álgebra de Boole se presenta en el módulo "Lógica y álgebra de Boole".



1.5. Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn son la representación gráfica usual para conjuntos.

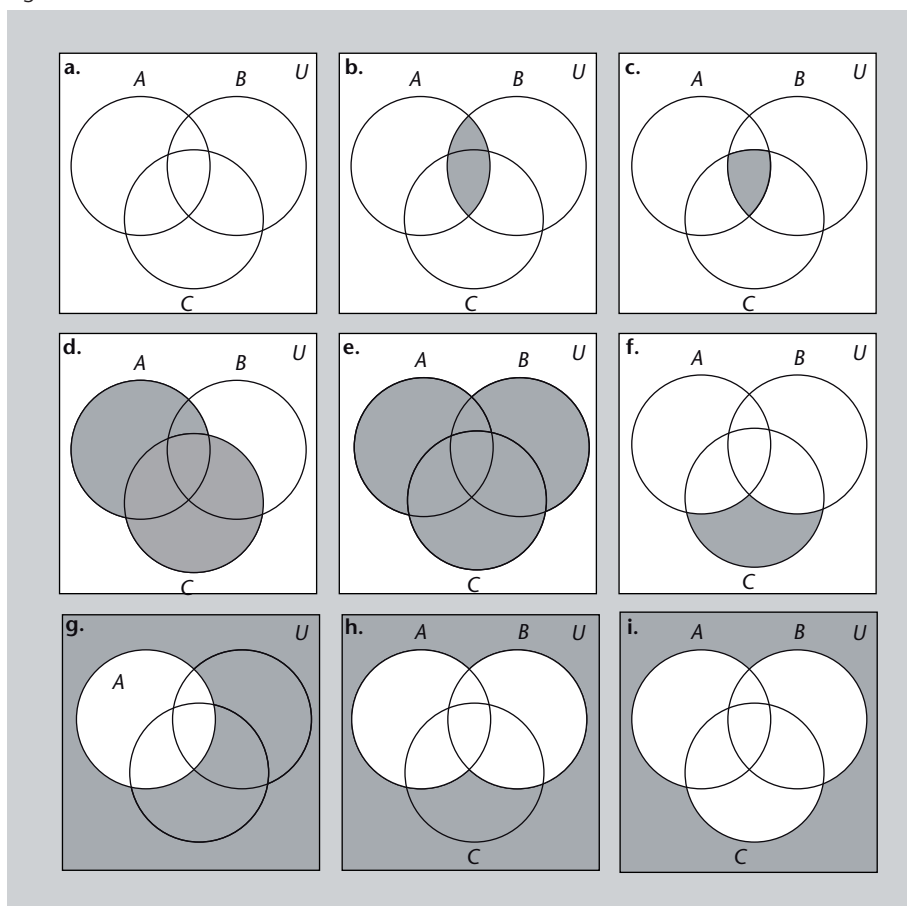
Un **diagrama de Venn** consiste, generalmente, en un rectángulo que representa el universo U y en su interior figuras cerradas, círculos o elipses, que representan a conjuntos.

Ejemplos de diagrama de Venn

En la figura 1 podéis ver ejemplos de diagrama de Venn para tres conjuntos A , B y C . En particular, se observa cómo se pueden representar las operaciones entre conjuntos (los recintos sombreados):

- (a) A , B y C , (b) $A \cap B$, (c) $A \cap B \cap C$,
 (d) $A \cup C$, (e) $A \cup B \cup C$, (f) $C - (A \cup B)$,
 (g) \bar{A} , (h) $\overline{A \cup B}$ (i) $\overline{A \cup B \cup C}$

Figura 1



2. Relaciones

2.1. Conceptos básicos

En la definición de conjuntos por extensión, esto es, enumerando sus elementos, el orden en que éstos aparecen no importa, ya que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Por eso, si queremos especificar un orden determinado entre los elementos de un conjunto no podemos usar las llaves {}, que se sustituyen por paréntesis (). Entonces se habla de **conjuntos ordenados**. Dependiendo del cardinal del conjunto se habla de pares ordenados cuando son dos elementos, de triplas cuando son tres elementos y, en general, de n -plas para conjuntos ordenados de n elementos cualesquiera. Vamos a dar una definición rigurosa, a continuación.

Par ordenado. (a,b) es el conjunto ordenado formado por los elementos a y b en este orden, y se lee “*par ordenado a,b* ”. Se dice que a es la **primera componente** y b es la **segunda componente** del par ordenado.

Este concepto se generaliza de dos elementos a cualesquiera n elementos ordenados, de la siguiente forma.

Una **n -pla** (x_1, x_2, \dots, x_n) es el conjunto ordenado formado por los n elementos x_1, x_2, \dots, x_n en ese orden, y se lee “ *n -pla x_1, x_2, \dots, x_n* ”. Se dice que x_i es la **i -ésima componente** para cada i .

Teniendo en cuenta este nuevo concepto de par ordenado, es posible definir una nueva operación entre conjuntos conocida como producto cartesiano.

Producto cartesiano de dos conjuntos. Se llama producto cartesiano de A por B al conjunto definido por todos los pares ordenados formados por un elemento de A en la primera componente y un elemento de B en la segunda componente. Se escribe $A \times B$ y se lee “*producto cartesiano de A por B* ” o también, simplemente, “ *A por B* ”.

Formalmente: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$.

Esta operación se generaliza al **producto cartesiano de n conjuntos**:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

Si $|A| = n$ y $|B| = m$, entonces el **cardinal de su producto cartesiano** es

$$|A \times B| = n \cdot m.$$

Ejemplos de producto cartesiano

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{s, t\}$, entonces:

a) $A \times B = \{(a, s), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t)\}$

b) $B \times A = \{(s, a), (s, b), (s, c), (t, a), (t, b), (t, c)\}$

c) $A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

d) $|A \times B| = 3 \cdot 2 = 6$ y $|A \times A| = 3 \cdot 3 = 9$

Ahora se puede definir formalmente el concepto intuitivo de relación entre elementos de conjuntos diferentes. Por ejemplo, la relación [*ser el doble de*] entre números, la relación [*ser hijo/a de*] entre personas, etc. La idea es que el concepto formal de **relación** es un conjunto cuyos elementos son pares ordenados, precisamente los pares de elementos que se relacionan entre sí. Por tanto, los elementos de una relación serán elementos en un determinado orden. Daremos una definición general.

Relación.

Si A y B son conjuntos cualesquiera, una **relación binaria** R es un conjunto de pares ordenados $(a, b) \in R$, con $a \in A$ y $b \in B$.

Formalmente: $R \subseteq A \times B$.

En este caso $(a, b) \in R$ se suele escribir también aRb y se lee “*a relacionado con b por R*”.

Esta definición se generaliza fácilmente a A_1, \dots, A_n conjuntos cualesquiera:

una **relación n -aria** R es un subconjunto de $A_1 \times \cdots \times A_n$. Un elemento de la relación es, por tanto, una n -pla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$.

Si $R \subseteq A \times B$ es una relación entre A y B , los elementos de A que están relacionados con algún elemento de B se llaman *dominio de R* ; recíprocamente, los elementos de B que están relacionados con algún elemento de A se llaman *el rango de R* . A continuación definimos los conceptos de dominio y rango de una relación.

Supongamos que $R \subseteq A \times B$ es una relación binaria cualquiera.

Dominio de la relación. El dominio de R es el conjunto de todas las primeras componentes de pares ordenados de R ; por tanto es un subconjunto de A . Se escribe $Dom(R)$.

Rango de la relación. El rango de R es el conjunto de todas las segundas componentes de pares ordenados de R ; por tanto, es un subconjunto de B . Se escribe $Rang(R)$.

Formalmente:

$$Dom(R) = \{a \mid \text{existe } b \in B \text{ con } (a,b) \in R\}$$

$$Rang(R) = \{b \mid \text{existe } a \in A \text{ con } (a,b) \in R\}$$

Si $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ es una relación n -aria, estos conceptos se generalizan así:

$$Dom(R) = \{(a_1, \dots, a_{n-1}) \mid \text{existe } a_n \in A_n \text{ con } (a_1, \dots, a_n) \in R\}$$

$$Rang(R) = \{a_n \mid \text{hay } a_1 \in A_1, \dots, a_{n-1} \in A_{n-1} \text{ y } (a_1, \dots, a_n) \in R\}$$

Ejemplos de dominio y de rango

Si $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,4), (2,6), (2,8)\}$ entonces

$$Dom(R) = \{1,2\} \text{ y } Rang(R) = \{1,2,3,4,6,8\}$$

Relación inversa. Si R es una relación binaria su inversa es la relación definida por los pares ordenados de R pero con las componentes invertidas. Se escribe R^{-1} y se lee “la inversa de R ”.

$$\text{Formalmente: } R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Se verifica, por tanto, que $Dom(R^{-1}) = Rang(R)$ y que $Rang(R^{-1}) = Dom(R)$.

2.2. Relaciones en un conjunto

Se llaman así las que relacionan elementos de un mismo conjunto. En la práctica, éstas son las relaciones más usadas, las que se definen sobre un conjunto A previamente fijado, y se pueden considerar como maneras de relacionar elementos de ese universo entre sí. La definición formal es la siguiente:

Cuando $R \subseteq A \times A$ se dice que R es una **relación (binaria) en A** .

En general, $R \subseteq A \times \dots \times A$ es una **relación en A**

Ejemplos de relaciones en un conjunto

1) El conjunto de los pares de números naturales (x,y) tal que x es el cuadrado de y .

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\} = \{(1,1), (2,4), (3,9), \dots\}$$

2) El conjunto de triplas (x,y,z) de números naturales tal que $x^2 + y^2 = z^2$.

$$R = \{(3,4,5), (6,8,10), \dots\}.$$

3) El conjunto de cuádruplas de números naturales tales que (x,y,z,n) tales que $x^n + y^n = z^n$ (el último teorema de Fermat).

$$R = \{(x,y,z,n) \in \mathbb{N}^4 \mid x^n + y^n = z^n\}$$

Si P es una propiedad entre elementos de un conjunto A , se puede considerar P como una relación binaria sobre A , la relación formada por los pares ordenados que esa propiedad define. Veamos algunos ejemplos de esto.

Ejemplos de relaciones definidas a partir de propiedades

1) $R = \{(a,b) \mid a \text{ y } b \text{ son personas y } a \text{ es hijo o hija de } b\}$.

Aquí la propiedad es $P = [\text{ser hijo o hija de}]$.

2) $S = \{(a,b) \mid a \text{ y } b \text{ son números naturales y } a \text{ divide a } b\}$.

Aquí la propiedad es $P = [\text{dividir a}]$.

Las relaciones binarias son muy importantes y conviene conocer algunas de las propiedades que pueden tener.

Si R es una relación binaria sobre un conjunto A cualquiera, se definen las siguientes propiedades:

- R es **reflexiva** si $(a,a) \in R$ para todo $a \in A$.
- R es **simétrica** si $(a,b) \in R$ implica $(b,a) \in R$.
- R es **transitiva** si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ implica $(a,c) \in R$.
- R es **irreflexiva** si $(a,a) \notin R$ para todo $a \in A$.
- R es **antisimétrica** si $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$ implica $a = b$.
- R es **conectada** si se verifica que $(a,b) \in R$ o $(b,a) \in R$ para todo $a, b \in A$ con $a \neq b$.

Ejemplos de propiedades de relaciones

En cada uno de los siguientes ejemplos decid si la relación R tiene las propiedades: simétrica, reflexiva o transitiva.

a) La relación $[\text{ser hermanos/as}]$ en el conjunto de todas las personas tiene las propiedades simétrica y transitiva pero no reflexiva.

b) La relación $[\text{ser madre de}]$ en el conjunto de todas las personas no tiene ninguna de esas propiedades.

c) La relación $[\text{ser múltiplo de}]$ en el conjunto de los números naturales tiene la propiedad reflexiva y transitiva pero no simétrica.

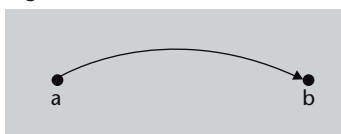
2.3. Grafos

Un **grafo** es una representación gráfica que consta de un conjunto de objetos llamados **vértices** o **nodos** unidos por enlaces llamados **aristas** o **arcos**. Los grafos permitirán la representación de las **relaciones binarias** entre elementos de un conjunto. En matemáticas y ciencias de la computación, existe toda una parte llamada *teoría de grafos* cuyo objeto principal de estudio son los grafos, sus propiedades teóricas y sus aplicaciones prácticas en la resolución de problemas reales. Eso sobrepasaría los objetivos de esta asignatura, pero en alguna otra asignatura del plan de estudios de informática estudiaréis esta teoría y sus aplicaciones.

En lo que sigue en este subapartado se darán los elementos básicos que os permitirán usar los grafos como representación de las relaciones binarias. Por ejemplo, una red de ordenadores puede representarse y estudiarse mediante un grafo, en el cual los vértices representan terminales y las aristas representan conexiones entre ordenadores.

Un **grafo** es una representación gráfica de una relación binaria R sobre los elementos de un conjunto A que consiste en representar con **puntos** (**vértices** o **nodos**) los elementos de A y simbolizar el par ordenado $(a,b) \in R$ con una **flecha** (**arista** o **arco**) con origen en a y final en b (figura 2).

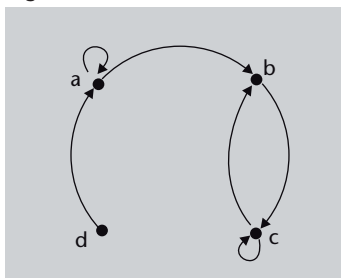
Figura 2



Ejemplo de grafo

La relación $R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,c), (c,b), (d,a)\}$ se representa con el diagrama de flechas de la figura 3.

Figura 3



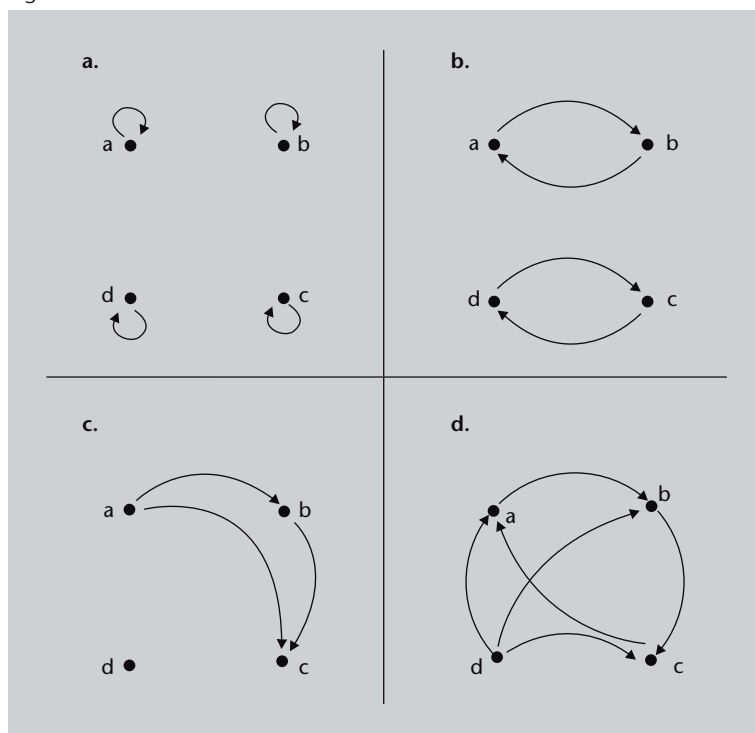
Las propiedades de las relaciones binarias tienen, con este tipo de diagramas, una representación característica. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos de grafos característicos de diferentes propiedades

En la figura 4 se pueden ver grafos característicos de algunas propiedades de relaciones correspondientes a los casos:

- a) Reflexiva: $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$
- b) Simétrica: $R = \{(a,b), (b,a), (c,d), (d,c)\}$
- c) Transitiva: $R = \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$
- d) Conectada: $R = \{(a,b), (b,c), (c,a), (d,a), (d,b), (d,c)\}$

Figura 4



2.4. Relaciones de equivalencia

En este subapartado se presenta un tipo especial y muy importante de relaciones binarias: las relaciones de equivalencia entre los elementos de un conjunto A . Estas relaciones permiten dividir el conjunto A en una serie de subconjuntos disjuntos que se llaman clases de equivalencia, que es su propiedad característica.

Si R es una relación binaria en un conjunto A que cumple las propiedades **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva** se llama **relación de equivalencia**.

En ese caso, para todo $a \in A$ se llama **clase de equivalencia de a según R** al conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a , y se escribe formalmente $[a]_R$ o $[a]$ cuando la relación se sobrentiende.

Si R es una relación de equivalencia en A se llama **conjunto cociente de A por R** al conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos de A según R . Este conjunto se escribe con la notación A/R .

Formalmente:

$[a]_R = \{b \mid (a,b) \in R\}$ es la clase de equivalencia de a según R

$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ es el conjunto cociente de A por R

Ejemplo de relación de equivalencia y conjunto cociente

Si $R = \{(x,y) \mid x,y \text{ son dos personas que han nacido el mismo mes del año}\}$, es fácil comprobar que es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las personas vivas.

Cada clase de equivalencia es el conjunto que contiene a todas las personas vivas nacidas en un determinado mes. Esta relación define exactamente 12 clases de equivalencia, correspondiente cada una a un mes del año.

Si notamos las clases como $[enero]$, $[febrero]$, etc. El conjunto cociente por R es el conjunto que contiene exactamente esas 12 clases: $R = \{[enero], [febrero], \dots\}$

Particiones

H es una **partición de A** si y sólo si se cumple que H es un conjunto formado por subconjuntos no vacíos de A , que son disjuntos dos a dos y tales que la unión de todos ellos sea A . Esto es, una partición de un conjunto A es una serie de subconjuntos disjuntos de A en los que se puede *partir* o separar A

Formalmente, H es una **partición de A** si se cumple:

1. Si $X \in H$, entonces $X \subseteq A$ y $X \neq \emptyset$ (subconjuntos no vacíos de A)
2. Si $X, Y \in H$ y $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \emptyset$ (disjuntos dos a dos)
3. Si $a \in A$, entonces $a \in X$ para algún $X \in H$ (la unión de todos los conjuntos de H es A)

El resultado más importante sobre relaciones de equivalencia es que **el conjunto cociente $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ de las clases de equivalencia de R sobre A forma una partición de A** . Su demostración es un ejercicio.

Ejemplo de relación de equivalencia y partición

Consideremos la relación R sobre el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} definida por:

xRy si $x - y$ es divisible por 5.

Se demuestra que R es una relación de equivalencia sobre \mathbb{Z} , y que sólo tiene estas cinco clases de equivalencia:

$$[0] = \{0, 5, -5, 10, -10, 15, -15, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 6, -4, 11, -9, 16, -14, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 7, -3, 12, -8, 17, -13, \dots\}$$

$$[3] = \{3, 8, -2, 13, -7, 18, -12, \dots\}$$


$$[4] = \{4, 9, -1, 14, -6, 19, -11, \dots\}$$

Estos cinco subconjuntos del conjunto de los números enteros \mathbb{Z} forman una partición de \mathbb{Z} . Es decir, son conjuntos disjuntos dos a dos y su unión es el conjunto \mathbb{Z} .

3. Funciones

3.1. Conceptos básicos

Una de las nociones más importantes en matemáticas es la de función, ya que formaliza el concepto intuitivo de ley o regla que asigna un único objeto a otro u otros objetos (asignar un número de matrícula a un vehículo en circulación, asignar una nota a un estudiante, etc). Así, por ejemplo, es una función la regla que asigna el doble a un número cualquiera (2 a 1, 4 a 2, 6 a 3, etc.) porque cada número sólo tiene un doble; pero no es una función la regla que asigna el resultado de calcular la raíz cuadrada de un número positivo ya que se asignaría dos valores a cada número positivo: -1 y 1 a 1, -2 y 2 a 4, etc.

Una función es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos A y B , es decir una relación entre elementos de A y B , que cumple que un elemento de A sólo se puede relacionar con un elemento de B . Veamos su definición formal. 

Función. Si A, B son conjuntos, una **función unaria** sobre estos conjuntos es una relación $f \subseteq A \times B$ que cumple que para cada elemento $a \in A$ existe como máximo un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

En ese caso, se escribe $f(a) = b$, leyéndose “ f de a es b ”, y se dice que b es la **imagen** de a por f (o que f **asigna** b a a). Se dice también que a es la **antiimagen** de b por f .

Cuando una relación f es una función de A en B se escribe $f : A \rightarrow B$.

Generalización. Esta definición se puede generalizar de la siguiente manera:

Si A_1, \dots, A_n, B son conjuntos, una **función n -aria** sobre estos conjuntos es una relación $(n+1)$ -aria, $f \subseteq A_1 \times \dots \times A_n \times B$ tal que para cada elemento $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ existe como máximo un elemento $b \in B$ tal que $(a_1, \dots, a_n, b) \in f$.

En ese caso se escribe $f(a_1, \dots, a_n) = b$ y entonces se dice que b es la **imagen** de (a_1, \dots, a_n) por f , o que f **asigna** b a (a_1, \dots, a_n) . Se dice también que (a_1, \dots, a_n) es la **antiimagen** de b por f .

Se representa con $f : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$.

En el caso de una función se usan los conceptos de dominio y rango propios de las relaciones, que se definen formalmente así:

$$\text{Dom}(f) = \{a \mid \text{existe } b \in B \text{ con } f(a) = b\}$$

$$\text{Rang}(f) = \{b \mid \text{existe } a \in A \text{ con } f(a) = b\}.$$

Rango y recorrido

En el ámbito de las funciones se suele usar $\text{Rec}(f)$ (**recorrido** de f) como equivalente a $\text{Rang}(f)$ (rango de f).

Ejemplos de relaciones que son funciones y relaciones que no lo son

No todas las relaciones son funciones:

1) La relación $R = \{(1,2), (2,4), (4,8), (8,16), (16,32)\}$ es función, ya que verifica la condición de que la imagen de un elemento es única (asigna a un elemento su doble). Podemos escribir $f : \{1,2,4,8,16\} \longrightarrow \{2,4,8,16,32\}$ con $f(x) = 2x$ para todo $x \in \{1,2,4,8,16\}$.

2) La relación $R = \{(1,2), (2,1), (2,4), (4,2)\}$ no es función porque hay dos pares ordenados que tienen igual la primera componente y diferente la segunda componente: $2R1$ y $2R4$ (a 2 se le asigna más de una imagen).

3) La relación [ser hijo/a de] en el conjunto de todas las personas no es función, ya que una persona es hijo/a de más de un progenitor (normalmente de dos).

4) La relación [ser hijo/a biológico/a de una mujer] en el conjunto de todas las personas es función, porque una persona sólo tiene una madre biológica.

Composición de funciones

Se pueden definir diferentes operaciones entre funciones, pero la más característica es la operación de composición entre funciones, que formaliza la idea de que dos reglas de asignación de valores (representadas por dos funciones) se pueden combinar encadenando las asignaciones respectivas, de manera que el resultado se considere como una única regla o asignación (una función). Veamos la definición formal de componer o encadenar dos funciones:

Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ son dos funciones y se verifica $B \subseteq C$, entonces se puede definir **la composición de f y g** como la función:

$$g \circ f : A \longrightarrow D$$

Obsérvese que $g \circ f$ se lee “ f compuesta con g ”, en orden inverso de escritura.

Y se define $(g \circ f)(a) = d$ si existe algún c tal que $f(a) = c$ y $g(c) = d$, y entonces se define $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Ejemplo de composición de funciones

Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 3x + 1$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(y) = y^2 + 4$, entonces se puede calcular tanto $g \circ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como $f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ya que se verifica la condición necesaria para ello y la definición de éstas es:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x + 1) = (3x + 1)^2 + 4 = 9x^2 + 6x + 5$$

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(y^2 + 4) = 3(y^2 + 4) + 1 = 3y^2 + 13$$

3.2. Tipos de las funciones

Dependiendo de ciertas propiedades o comportamientos, las funciones se clasifican, entre otros, en los siguientes tipos.

Funciones inyectivas

Cuando dos elementos diferentes del dominio de la función no pueden tener la misma imagen.

$f : A \rightarrow B$ es una función **inyectiva** si f es una función y se cumple que dos elementos diferentes del $Dom(f)$ tienen imágenes diferentes por f , esto es:

si dos elementos tienen la misma imagen $f(a) = b$ y $f(c) = b$, entonces tienen que ser iguales $a = c$.

Funciones suprayectivas

Cuando todo elemento del conjunto de llegada de la función tiene al menos una antiimagen.

$f : A \rightarrow B$ es **suprayectiva (epiyectiva o exhaustiva)** si $Rang(f) = B$ (todo elemento de B tiene alguna antiimagen).

Funciones biyectivas

Cuando la función empareja un elemento del dominio de la función con uno del conjunto de llegada de la función.

$f : A \rightarrow B$ es **biyectiva** si f es inyectiva y suprayectiva ($Rang(f) = B$ y dos elementos diferentes de $Dom(f)$ tienen imágenes diferentes). Es fácil comprobar que esta condición implica que los elementos del $Dom(f)$ se relacionan uno a uno con los elementos de B .

Cuando se cumpla que $A = \text{Dom}(f)$, que será lo habitual, la condición de ser biyectiva implicará que los conjuntos de A y B tengan los elementos emparejados uno a uno, y que, por tanto, A y B tengan la misma cantidad de elementos (cardinal).

La función $f : A \rightarrow A$ definida por $f(a) = a$ se llama **función identidad sobre A** (se suele notar con el símbolo Id_A) y es el ejemplo más sencillo de función biyectiva.

Ejemplos de funciones inyectivas, suprayectivas o biyectivas

1) Si $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f(a) = 2, f(b) = 2, f(c) = 3$, entonces f es función pero no tiene ninguna de las propiedades anteriores. No es inyectiva ya que $f(a) = 2$ y $f(b) = 2$. No es suprayectiva porque $4 \in B$ no tiene antiimagen por f . No es biyectiva por no ser inyectiva o suprayectiva.

2) Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función sobre el conjunto de los números naturales definida por $f(x) = 2x$, entonces f es una función inyectiva pero no es suprayectiva (los números impares no tienen antiimagen), por tanto tampoco biyectiva.

3) Si A es el conjunto de todas las fechas del siglo XX escritas en la forma día-mes-año, B es el conjunto de los siete días de la semana y se define la función de A en B $f(x, y, z) = t$ con t el día de la semana correspondiente al día x del mes y del año z , entonces la función f no es inyectiva, ya que hay al menos dos fechas diferentes a las que corresponde el mismo día de la semana y, por tanto, tampoco es biyectiva. Es suprayectiva, ya que todos los días de la semana corresponden a alguna fecha.

4) Si y es un ciudadano que vota en una determinada mesa electoral, x es un número de identificación para esa mesa electoral y se define $f(x) = y$, entonces es una función biyectiva, ya que podemos emparejar cada ciudadano que vota en la mesa con un número de identificación (siempre que la lista de números de identificación esté bien hecha).

3.3. Conjuntos finitos y conjuntos infinitos

A lo largo del capítulo se han usado de manera informal los conceptos de conjunto finito y conjunto infinito. En esta sección se van a definir de forma rigurosa estos conceptos usando la propiedad de que cuando existe una función biyectiva entre dos conjuntos, éstos tienen el mismo cardinal.

Para ello vamos a escribir el subconjunto de los números naturales menores o iguales que un número determinado n como $\{1, \dots, n\}$.

Conjunto finito

A es un conjunto finito si existe $n \in \mathbb{N}$ y una función biyectiva $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$.

Entonces el cardinal $|A| = n$.

Conjunto infinito

A es un conjunto infinito si no es finito. Se puede demostrar que esto equivale a que exista una función biyectiva entre A y un subconjunto propio de A

(X es un subconjunto propio de A si es diferente de A).

Conjunto infinito numerable

Si A es un conjunto infinito, se dice que A es numerable si existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Equivale a que el cardinal de A es igual al cardinal de \mathbb{N} .

La pregunta inmediata es si hay conjuntos infinitos no numerables. La respuesta es sí. Por ejemplo, el conjunto de los números reales \mathbb{R} es infinito, pero no es numerable (no es posible definir una función biyectiva entre \mathbb{N} y \mathbb{R}). El cardinal infinito de \mathbb{R} se puede decir que *es mayor* que el cardinal infinito de \mathbb{N} . Hay toda una parte de las matemáticas que se ocupa de estudiar este fascinante tema de los diferentes tipos de infinitos, pero sobrepasa los objetivos de este apartado.

Ejemplo de infinito numerable

Si notamos $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ que es conjunto de los números enteros, veremos que es infinito numerable.

Definimos $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par (0 se considera par)} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

así $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = -1, \dots$ y se demuestra que es inyectiva y suprayectiva:

- Inyectiva: Si $f(n) = f(m)$, miramos su signo. Si son positivos, n y m son ambos pares y tenemos $f(n) = \frac{n}{2} = \frac{m}{2} = f(m)$; por tanto, $n = m$. Si son negativos, $f(n) = -\frac{n-1}{2} = -\frac{m-1}{2} = f(m)$ y también deducimos $n = m$.
- Suprayectiva: Dado $z \in \mathbb{Z}$, si z positivo tomamos $n = 2z$ y $f(n) = z$. Si z es negativo, tomamos $n = -2z + 1$ y $f(n) = z$.

Como consecuencia, \mathbb{Z} es infinito numerable, es decir, del mismo *grado* de infinito que su subconjunto propio \mathbb{N} .

Lecturas complementarias

Para ampliar el estudio de la teoría de cardinales, se pueden consultar en castellano la sección 2.6 del libro: Ferrando, J.C., Gregori, A. (2002) *Matemática discreta*. Ed. Reverté; y en inglés el capítulo 3 de: Devlin, K. (1993) *The Joy of Sets*. Springer-Verlag.

Resumen

En este módulo didáctico se ha presentado la teoría básica de conjuntos, poniendo el acento en el lenguaje formal para expresar conjuntos y sus operaciones.

Hemos comenzado con la definición intuitiva de conjunto dada por Cantor como colección de una serie de elementos y a partir de ella se han definido de forma rigurosa todos los demás conceptos. Se han presentado así los conceptos básicos de la teoría de conjuntos: conjunto, subconjunto, unión, intersección, complementario, etc.; y se ha repasado su representación con diagramas de Venn.

Posteriormente, se han definido los conceptos básicos necesarios para formalizar las relaciones entre elementos de conjuntos (par ordenado, producto cartesiano, dominio y rango de una relación, etc.) y su representación gráfica característica con grafos. Hemos presentado las principales propiedades de las relaciones en un conjunto y nos hemos detenido especialmente en estudiar las relaciones de equivalencia, que son las que verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Para finalizar, hemos introducido el concepto formal de función, que es un tipo particular de relación entre conjuntos muy utilizado en las ingenierías porque permite formalizar el concepto de ley o regla que asigna un elemento a otro u otros. Después de repasar las principales propiedades y tipos de funciones, hemos finalizado con la definición formal de conjunto infinito y cardinal infinito.

La teoría de conjuntos, como parte de las matemáticas, es mucho más compleja que la presentada aquí, la cual, sin embargo, es suficiente para poder manipular con corrección el lenguaje de teoría de conjuntos que se necesita en el grado de informática.

Ejercicios de autoevaluación

- Si $A = \{\emptyset, a, \{a\}\}$, decid si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
 - $\emptyset \in A$
 - $\{A\} \subset \mathcal{P}(A)$
 - $\{\emptyset, a\} \in A$
- Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, decidid si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:
 - $A \subseteq B$
 - $B \subseteq A$
 - $\emptyset \subseteq B$
- Si $A = \{1, 2\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, decidid si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:
 - $A \in B$
 - $A \subseteq B$
 - $\emptyset \in B$
- Sea U el universo de discurso y A un subconjunto cualquiera de U . En cada uno de los ejercicios siguientes, contestad si lo enunciado es cierto para todo conjunto A .
 - $A \cup \bar{A} = A$
 - $A \cap \bar{A} = \emptyset$
 - $A \cup \emptyset = \emptyset$
- En cada uno de los ejercicios siguientes, decid si lo enunciado es cierto para todos los posibles conjuntos A, B , donde U es el universo de discurso.
 - $\bar{B} \not\subseteq \bar{A}$ si y sólo si $A \not\subseteq B$
 - $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ si y sólo si $\overline{A \cup B} = \emptyset$
 - $\bar{A} \cup \bar{B} \neq \emptyset$ si y sólo si $A \cup B = U$
- En cada uno de los ejercicios siguientes, decid si lo enunciado es cierto para todos los posibles conjuntos A, B .
 - $A \cap B \subseteq A$
 - Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = B$
 - $A \cap (A \cup B) = B$
- En cada uno de los ejercicios siguientes, decid si lo enunciado es cierto para todos los posibles conjuntos A, B, C . U es el universo de discurso.
 - $A - (B \cap A) = A - B$
 - $A - (B \cup C) = A - (B \cap C)$
 - Si $\bar{A} \cap \bar{B} = U$ entonces $A \cap B \subseteq \emptyset$
- En cada uno de los siguientes ejemplos, decid si la relación R tiene las propiedades: simétrica, reflexiva, transitiva.
 - La relación de ser de la misma altura en el conjunto de todas las personas.
 - La relación de ser exactamente un año más joven en el conjunto de todas las personas.
 - La relación de divisibilidad exacta en el conjunto de los números naturales.
 - La relación abuelo-nieto en el conjunto de todas las personas.
- En cada uno de los siguientes ejemplos decid si la relación R tiene la propiedad antisimétrica.
 - $R = \{(1, 2), (5, 10), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$
 - $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (a, c)\}$
 - $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$
 - $R = \{(x, y) \mid x \text{ es múltiplo de } y\}$
- Sean $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $S = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$. Contestad sí o no y justificad la respuesta.
 - ¿Son ambas relaciones reflexivas?
 - ¿Son ambas simétricas?
 - ¿Son ambas antisimétricas?
 - ¿Son ambas transitivas?
- Decid si las siguientes relaciones son o no funciones y justificad la respuesta.
 - $R = \{(a, k), (b, l), (c, m)\}$
 - $S = \{(a, k), (a, l), (a, m), (b, l), (c, m)\}$
 - $T = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
 - $V = \{(x, y) \in H \times H \mid y \text{ es la madre de } x\}$ con H el conjunto de los seres humanos.
- Decid si las siguientes relaciones son o no funciones y justificad la respuesta.
 - $R = \{(a, a, a), (a, b, a), (a, c, a)\}$
 - $S = \{(a, b, c), (a, b, a), (b, c, a)\}$

- c) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x - y = z\}$ con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números naturales.
 d) $W = \{(x, y, z) \in C^3 \mid z \text{ es la combinación de } x \text{ e } y\}$ con C el conjunto de los colores.

13. Decid si las siguientes relaciones son o no funciones y justificad la respuesta.

- a) $R = \{(x, y) \in A \times L \mid x \text{ es el autor del libro } y\}$ con A el conjunto de autores/as y L el conjunto de los libros de la Biblioteca Nacional.
 b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid 2 \cdot x \cdot y = z\}$ con \mathbb{N} el conjunto de los números naturales.
 c) $T = \{(x, y, z) \in H^3 \mid z \text{ es el hijo primogénito de } x \text{ e } y\}$ con H el conjunto de los seres humanos.
 d) $W = \{(x, y) \in H \times N \mid y \text{ es el NIF de } x\}$ con H el conjunto de los contribuyentes a Hacienda y N el conjunto de posibles NIF (número de identificación fiscal).

14. Decid si las siguientes relaciones son o no funciones y justificad la respuesta.

- a) $R = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4 \mid t = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z\}$ con \mathbb{N} el conjunto de los números naturales.
 b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4 \mid x \leq y \leq z \leq t\}$ con \mathbb{N} el conjunto de los números naturales.
 c) $T = \{(x, y, z, t) \in C^3 \times Ca \mid t \text{ trayecto para ir de } x \text{ a } y \text{ sin pasar por } z\}$ con C el conjunto de las ciudades de más de 5.000 habitantes y Ca el conjunto de las carreteras del mapa oficial.
 d) $V = \{(x, y, t) \in C^2 \times Ca \mid t \text{ es la única carretera que pasa por } x \text{ e } y\}$ con C el conjunto de las ciudades de más de 5.000 habitantes y Ca el conjunto de las carreteras del mapa oficial.

15. En cada uno de los siguientes ejemplos, decid si f es función de A en B y, si lo es, decid si tiene las propiedades inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

- a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{k, l, m\}$ y $f = \{(1, k), (2, l), (3, m)\}$.
 b) A es el conjunto de los números naturales, B es el conjunto de números naturales pares y $f(x) = 2x$ (el doble de x).
 c) $A = B$ es el conjunto de las mujeres vivas actualmente y $f(a) = \text{madre de } a$.
 d) A es el conjunto de las papeletas introducidas en una urna de un colegio electoral, B es el conjunto de candidatos elegibles y $f(x) = y$ si y es el candidato votado por x . (Suponemos que no hay ningún voto en blanco.)

Solucionario

1. La solución es:
 - a) Verdadera, porque \emptyset es un elemento de A .
 - b) Verdadera, ya que $A \subseteq A$.
 - c) Falsa, ya que el conjunto $\{\emptyset, a\}$ no es un elemento de A . Lo que sí se cumple es $\{\emptyset, a\} \subset A$.
2. La solución es:
 - a) Falsa.
 - b) Verdadera.
 - c) Verdadera.
3. La solución es:
 - a) Verdadera.
 - b) Falsa.
 - c) Verdadera.
4. La solución es:
 - a) Falso.
 - b) Cierto.
 - c) Falso.
5. La solución es:
 - a) Es cierto.
 - b) Es cierto.
 - c) Es falso.
6. La solución es:
 - a) Es cierto.
 - b) Es falso porque entonces $A \cap B = A$.
 - c) Es falso porque $A \cap (A \cup B) = A$.
7. La solución es:
 - a) Es cierto.
 - b) Es falso.
 - c) Es cierto.
8. La solución es:
 - a) R tiene las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva.
 - b) R no tiene ninguna de esas propiedades.
 - c) R tiene las propiedades reflexiva y transitiva, pero no simétrica.
 - d) R no tiene ninguna de esas propiedades.
9. La solución es:
 - a) Sí la tiene, porque no hay ningún caso en que $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$ con $a \neq b$.
 - b) Sí la tiene, porque no hay ningún caso en que $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$ con $a \neq b$.
 - c) No la tiene porque $(1,2) \in R$, $(2,1) \in R$ y $1 \neq 2$.
 - d) Sí la tiene porque no hay ningún caso en que $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$ con $a \neq b$.
10. La solución es:
 - a) Sí, porque ambas cumplen que $(a,a) \in R, S$ para todo $a \in \text{Dom } R, \text{Dom } S$
 - b) R sí porque cumple que sus elementos son todos de la forma $(a,a) \in R$. S también porque además $(1,2), (2,1) \in S$.
 - c) R sí, porque sus elementos son todos de la forma $(a,a) \in R$. Pero S no porque $(1,2), (2,1) \in S$.
 - d) R sí, porque sus elementos son todos de la forma $(a,a) \in R$. S también porque, además, $(1,2), (2,1) \in S$ y también $(1,1) \in S$.
11. La solución es:
 - a) Sí, porque para cada elemento $x \in \text{Dom}(f) = \{a,b,c\}$ existe solamente un elemento $y \in \text{Rang}(f) = \{k,l,m\}$ tal que $f(x) = y$.
 - b) No, porque $f(a) = k, f(a) = l$ y $f(a) = m$ y, por tanto, existe un elemento de $\text{Dom } f$ que tiene más de una imagen, contradiciendo la condición de ser una función.
 - c) Sí, porque para cada elemento $x \in \text{Dom}(f) = \{a,b,c\}$ existe solamente un elemento $y \in \text{Rang}(f) = \{k,l,m\}$ tal que $f(x) = y$.
 - d) No, porque si a y b son hijos de la misma mujer c se cumple que $f(a) = c$ y $f(b) = c$.
12. La solución es:
 - a) Sí porque para cada elemento $(x,y) \in \text{Dom } R$ existe solamente un elemento $z \in \text{Rang } R$ tal que $(x,y,z) \in R$.
 - b) No, porque $(a,b,c), (a,b,a) \in S$.
 - c) No, porque, por ejemplo $(3,1,2) \in T$ y $(5,3,2) \in T$.
 - d) Sí, porque un color z se obtiene por la exacta combinación de dos colores x,y .

13. La solución es:

- a) No, porque puede haber un autor a de dos libros diferentes c y d , y entonces $(a,c) \in R$ y $(a,d) \in R$.
- b) Sí, porque es imposible que $2 \cdot a \cdot b = c$ y $2 \cdot a \cdot b = d$ para dos elementos $c \neq d$.
- c) Sí, porque el hijo primogénito es único.
- d) Sí, porque el NIF es único.

14. La solución es:

- a) Sí, porque la descomposición de un número t en los factores primos 2,3,5 es única.
- b) No, porque $(1,2,3,8) \in S$ y $(2,4,6,8) \in S$.
- c) No, porque puede haber más de un trayecto t para ir de x a y sin pasar por z .
- d) Sí, porque por definición t es la única carretera que pasa por x e y .

15. La solución es:

- a) Es una función biyectiva (por tanto inyectiva y suprayectiva).
- b) Es una función inyectiva, y suprayectiva, por tanto, biyectiva.
- c) No es función que esté definida sobre el conjunto de las mujeres vivas porque a aquellas cuya madre haya fallecido la función no dará ningún valor.
- d) Es función pero no es inyectiva (dos papeletas diferentes son de un mismo candidato), ni suprayectiva (puede haber candidatos que no han recibido ningún voto o papeleta).

Glosario

antirreflexiva

Una relación en un conjunto en la que ningún elemento está relacionado consigo mismo.

antisimétrica

Una relación en un conjunto en la que dos elementos diferentes no pueden estar relacionados en los dos sentidos.

clase de equivalencia

Conjunto de todos los elementos relacionados entre sí en una relación de equivalencia

conjunto cociente

Conjunto de las clases de equivalencia de una relación de equivalencia.

conjunto vacío

Conjunto especial que no tiene ningún elemento.

función

Relación entre conjuntos en la que a todo elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango.

función biyectiva

Función exhaustiva e inyectiva.

función exhaustiva

Función en la que todo elemento del conjunto de llegada tiene como mínimo una antiimagen.

función inyectiva

Función en la que los elementos del conjunto de llegada tienen como máximo una única antiimagen.

intersección

Operación entre conjuntos que selecciona los que pertenecen a los dos conjuntos simultáneamente.

par ordenado

Conjunto de dos elementos en un orden determinado.

partición de un conjunto

Colección de subconjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es el conjunto original.

producto cartesiano

Operación entre conjuntos que produce los pares ordenados que se forman a partir de los conjuntos iniciales.

reflexiva

Una relación en un conjunto en la que todo elemento está relacionado consigo mismo.

relación

Subconjunto de un producto cartesiano de conjuntos.

relación de equivalencia

La que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

relación en un conjunto

Relación en la que los elementos relacionados son de un mismo conjunto.

unión

Operación entre conjuntos que produce el conjunto que contiene todos los elementos de los conjuntos iniciales.

Bibliografía

Devil, K. (1993). *The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Springer-Verlag. Texto complementario para a una exhaustiva y amena presentación de la teoría axiomática de conjuntos.

Ferrando, J.C., Gregori, A. (2002). *Matemática Discreta*. Ed Reverté. Capítulo 2: Teoría de Conjuntos. Es una presentación muy completa para quien quiera ampliar los contenidos de este módulo.

Halmos, P.R. (1971). *Teoría intuitiva de conjuntos*. Méjico: Compañía editora continental. Es el texto clásico.

Manzano, M., Huertas, A. (2004). *Lógica para principiantes*. Alianza Editorial. Parte II: Conjuntos y Diagramas. Es un texto introductorio, un buen complemento para este módulo.