

# Cálculo integrodiferencial y aplicaciones

Albert Gras i Martí  
Teresa Sancho Vinuesa

PID\_00183889



# Índice

<b>Sobre estos materiales de trabajo .....</b>	<b>5</b>
<b>1. El problema inverso: el espacio recorrido, conocidas velocidades y/o aceleraciones .....</b>	<b>7</b>
<b>2. Concepto de integral. Teorema fundamental del cálculo ....</b>	<b>10</b>
2.1. Significado geométrico de la integral .....	11
<b>3. Propiedades de las integrales y funciones primitivas de funciones elementales .....</b>	<b>13</b>
3.1. Recapitulemos, ¿qué hemos aprendido desde el inicio de este curso? .....	14
<b>4. Exploremos el concepto de diferencial .....</b>	<b>16</b>
4.1. Diferenciales, incrementos .....	16
<b>5. Exploremos el concepto de derivada .....</b>	<b>19</b>
5.1. Máximos y mínimos de una función .....	19
5.2. Determinación de los ceros de una función .....	20
5.3. El método de Newton para calcular los ceros de una función ....	21
5.4. Cálculo de ceros con la calculadora Wiris .....	26
<b>6. Aplicación de la diferencial: planteamiento de problemas de interés en ingeniería .....</b>	<b>27</b>
6.1. ¿Cómo se generan las ecuaciones diferenciales? .....	31
6.2. Otro ejemplo: un café que se enfría durante «mucho» tiempo ...	32
<b>Recapitulación final: ¿qué hemos aprendido en este módulo? .....</b>	<b>33</b>
<b>Tabla de derivadas e integrales .....</b>	<b>35</b>
<b>Resolución de actividades .....</b>	<b>37</b>



## Sobre estos materiales de trabajo

En el módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» hemos analizado dos procesos físicos: el enfriamiento de un café y la caída de un objeto por un plano inclinado. Para conseguir una buena descripción de los procesos y para estudiar cómo varían las magnitudes asociadas a cada proceso, hemos introducido los conceptos de primera y segunda derivada, y los hemos aplicado a las funciones matemáticas que describen los fenómenos correspondientes y que permiten «modelizar» el problema. Hemos obtenido estas funciones a partir de tablas de valores experimentales o a partir de algunas teorías físicas que permiten deducirlas. Hemos analizado también el significado geométrico que tiene la derivada, así como la diferencial de una función.

Ahora nos plantearemos el problema inverso: si conocemos la descripción de un fenómeno en términos de derivadas, ¿cómo se hace la operación inversa a la de derivar y qué significado geométrico tiene esta operación?

Veremos también otras aplicaciones de los conceptos de diferencial y de derivada.



## 1. El problema inverso: el espacio recorrido, conocidas velocidades y/o aceleraciones

A partir de la función que describe la trayectoria de un objeto en movimiento,  $s(t)$ , en los apartados 3 y 5 del módulo de «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales», hemos calculado diversas magnitudes que nos permiten describir propiedades de los movimientos como la velocidad y la aceleración. Pero se nos puede presentar el problema inverso: ¿cómo podemos conocer detalles de la trayectoria de un objeto a partir del conocimiento de su velocidad o de su aceleración, es decir, de  $s'(t)$  y  $s''(t)$ ?

### A1

El anuncio de un coche afirma: «De 30 a 120 km/h en 9 s».

- ¿Qué aceleración tiene el vehículo? (Suponed que la aceleración es constante.)
- A partir de la información que tenemos (velocidad, aceleración), ¿cómo podríamos calcular la distancia que habrá recorrido el coche durante estos 9 s?

En la solución de la actividad anterior hemos visto cómo podemos obtener una aproximación a la distancia que recorre el vehículo, suponiendo que mantiene la velocidad constante durante los 9 s de recorrido. Pero podemos hacer estimaciones del camino recorrido cada vez más aproximadas a la realidad. Supongamos un movimiento cualquiera, del que conocemos la velocidad en función del tiempo, como el que se muestra en la figura 1. Podemos calcular la velocidad en instantes sucesivos, por ejemplo, de segundo en segundo,  $t = t_1, t_2, t_3$ , etcétera, y después calcular el desplazamiento desde  $t = t_1$  hasta  $t = t_2$  (el desplazamiento que habría tenido el objeto si la velocidad se hubiera mantenido constante en  $v_1$  en este intervalo  $dt_1 = t_2 - t_1$  –véase la figura 1–), y luego de  $t_2$  a  $t_3$ , etc.

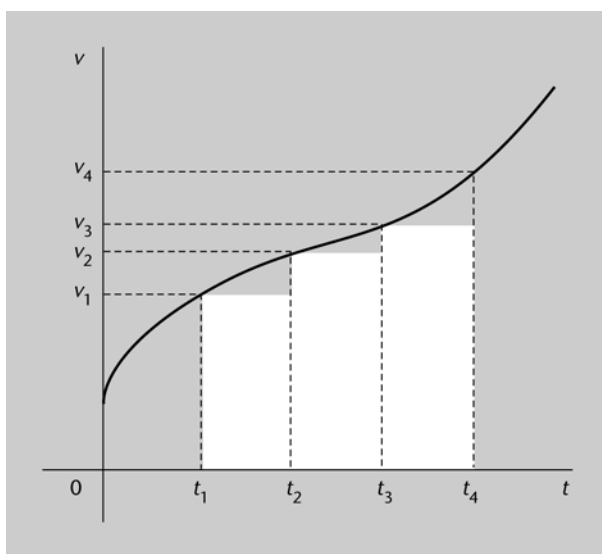


Figura 1: Velocidad de un objeto en función del tiempo. Dividimos un intervalo de tiempo,  $(t_1, t_4)$ , en unas cuantas partes y suponemos que las velocidades son constantes en cada intervalo. Las áreas de los rectángulos sombreados representan «espacios recorridos» en cada intervalo (productos de velocidades por tiempo). Por ejemplo,  $v_1 \cdot (t_2 - t_1)$  es el área del primer rectángulo y es el espacio recorrido por el objeto entre  $t_1$  y  $t_2$  si la velocidad fuera constante en este intervalo y valiera  $v_1$ .

Obtendremos así el valor de  $ds_1$ , el desplazamiento del vehículo que se mueve a velocidad constante  $v_1$ , a partir del instante  $t_1$  y para un incremento  $dt_1$ ,  $ds_1 = v_1 \cdot dt_1$ . Con este cálculo obtenemos el área del rectángulo definido por la base  $t_2 - t_1$  y la altura  $v_1$  (figura 1). Hacemos lo mismo con el intervalo siguiente de tiempo y con los restantes. Al final, sumaremos todas estas distancias,  $ds_i$ , es decir, el área de los rectángulos.

Hagamos los cálculos indicados.

## A2

a) Calculad la distancia  $s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}})$  que recorre el coche durante el intervalo de tiempo de 9 s que va del instante inicial al instante final, utilizando el procedimiento que acabamos de explicar: dividid el intervalo de 9 s en nueve intervalos de 1 s. Haced las cuentas a mano en una tabla como la siguiente, o con la Wiris, o con una hoja de cálculo..

$t$ (s)	$v$ (m/s)	Intervalo de $t$ (s)	Desplazamiento $s(m)$ que se produce, $ds = v \cdot dt$ , para $dt = 1$ s
1	8.3333333...	0 a 1	8.3333333...
2	...	...	...
9	...	8 a 9	...
Suma de desplazamientos			

$$\begin{aligned} s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}}) &\approx ds_1 + ds_2 + \dots + ds_9 \\ &= v_1 \cdot dt_1 + v_2 \cdot dt_2 + \dots + v_9 \cdot dt_9 \end{aligned} \quad (1)$$

b) Repetid el cálculo con un paso o intervalo  $dt = 0.5$  s.

c) Explicad por qué obtenemos siempre estimaciones inferiores al valor exacto del desplazamiento.

El desplazamiento total del vehículo entre 0 s y 9 s que resulta del cálculo anterior es de 175 m para  $dt = 1$  s, y de 181.25 m para  $dt = 0.5$  s. El resultado que obtenemos para  $dt = 0.5$  s es mayor que para  $dt = 1$  s, pero continúa sin ser exacto, porque la velocidad no es constante durante cada intervalo  $dt$  que hemos considerado.

Con el fin de abreviar sumas largas, donde todos los términos son semejantes, se utiliza el símbolo de sumatorio (la letra griega *sigma* mayúscula  $\Sigma$ ). Así, la ec.(1) se escribe:

$$s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}}) \approx \sum_{i=1}^9 ds_i = \sum_{i=1}^9 v_i dt_i \quad (2)$$

Y resulta:  $s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}}) \approx 175.0$  m.

## A3

Utilizad la hoja de cálculo para calcular  $s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}})$  para  $dt = 0.1$  s



La ventaja del procedimiento de ir haciendo estimaciones cada vez más aproximadas a la realidad es que se puede mejorar el proceso todo lo que se quiera: podemos subdividir el intervalo de tiempo en 100 subintervalos, en 1 000, etcétera, y suponer que la velocidad se mantiene constante en cada intervalo de la subdivisión. Con la ayuda de los ordenadores (de una hoja de cálculo, por ejemplo), este cálculo no representa ningún problema. Sin embargo, seguirá sin coincidir el resultado con el desplazamiento real del coche durante los 9 s, porque la velocidad es diferente en cada instante. Y en un movimiento como el de la curva representada en la figura 1, siempre nos quedaremos cortos en la estimación, porque la suma de las áreas de los rectángulos siempre es menor que el área bajo la curva, aunque la estimación que haremos será cada vez más próxima al valor exacto.

#### A4

---

Utilizad la hoja de cálculo para calcular  $s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}})$  en el siguiente caso:

$$dt = 0.01 \text{ s}$$

---

En general, si dividimos el intervalo total  $[t_{\text{inicial}}, t_{\text{final}}]$ , de longitud  $[t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}]$ , en  $N$  subintervalos, cada uno del tamaño  $dt = (t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}})/N$ , el procedimiento que hemos seguido para obtener el desplazamiento consiste en calcular este sumatorio:

$$s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}}) \approx \sum_{i=1}^N ds_i = \sum_{i=1}^N v_i dt_i \quad (3)$$

Vemos que este procedimiento numérico nos da expresiones aproximadas y que la estimación será tanto mejor cuanto mayor sea el número de subintervalos ( $N$ ), es decir, cuanto menor sea la duración de cada subintervalo ( $dt$ ), porque el valor de la velocidad que hemos utilizado en cada intervalo de tiempo se aproximará cada vez más al valor real que tiene el vehículo en cada instante.

El procedimiento que hemos utilizado para calcular áreas de manera cada vez más precisa es uno de los problemas que aborda el cálculo numérico, una rama muy importante de las matemáticas, especialmente desde que disponemos de computadoras.

## 2. Concepto de integral. Teorema fundamental del cálculo

En un movimiento cualquiera, si conocemos la función velocidad  $v(t)$  y queremos calcular el desplazamiento del móvil entre dos instantes  $t_{\text{inicial}}$  y  $t_{\text{final}}$ , tenemos un procedimiento para acercarnos cada vez más al valor del incremento de desplazamiento que buscamos,  $s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}})$ : dividimos el intervalo de tiempo  $[t_{\text{inicial}}, t_{\text{final}}]$  en  $N$  subintervalos, calculamos la diferencial de la posición en cada uno de ellos,  $ds_i = v_i \cdot dt_i$ , y sumamos todas estas diferenciales, ec.(3).

Cada diferencial ( $ds_i$ ) se acerca progresivamente al incremento correspondiente  $\Delta s_i$  cuanto menor sea el intervalo de tiempo ( $\Delta t_i$ ) para el que se calcula, es decir, cuanto mayor sea el número  $N$  de subintervalos; pero en ningún caso se cumplirá que  $\Delta s_i = ds_i$ , ya que la velocidad de un vehículo no será constante en cada intervalo, en general, por pequeño que sea  $\Delta t_i$ . Podemos afirmar entonces que el error  $\varepsilon_i$  asociado a cada estimación,  $\varepsilon_i = \Delta s_i - ds_i$ , nunca es cero, aunque el error es menor cuanto más pequeño sea este  $\Delta t_i$ .

El límite del error total cuando  $N$  tiende a infinito sí puede tender a cero, y entonces podremos escribir una igualdad:

$$s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{inicial}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta s_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N ds_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N v_i \cdot dt_i \quad (4)$$

porque será un resultado exacto. La condición que se tiene que cumplir es que, para cada subintervalo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{ds - \Delta s}{\Delta t} = 0 \quad (5)$$

podemos reescribir esta ecuación si tenemos en cuenta que  $\Delta t = dt$  y que el cociente  $ds/dt$  depende sólo de  $t$  y es independiente de  $\Delta t$ ; entonces el resultado de la ec.(5) será cierto si se cumple que:

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (6)$$

pero el miembro de la derecha es  $s'$ , la derivada de  $s$  respecto de  $t$ ,

$$\frac{ds}{dt} = s' \quad (7)$$

Y como el cociente  $ds/dt$  es precisamente la velocidad, esta condición significa que  $v = s'$ , es decir, que  $s$  es la antiderivada de  $v$ :  $s(t)$  será una función cuya derivada nos da  $v$ . La función  $s$  también se llama **función primitiva** de la función  $v$ .

El último miembro de la ec.(4) se llama *integral*, y se representa así:

$$\int_{t_A}^{t_B} v dt \quad (8)$$

donde  $t_A$  y  $t_B$  son los extremos del intervalo de tiempo en el que queremos calcular el incremento total de espacio recorrido por el móvil. Se lee así: «integral desde  $t_A$  hasta  $t_B$  de la función  $v(t)$ ».

En definitiva, si unimos las expresiones (4) y (8), el cálculo del espacio recorrido equivale a encontrar la función antiderivada de la velocidad y a calcularla en los extremos del intervalo de integración:

$$\int_{t_A}^{t_B} v \, dt = s(t_B) - s(t_A), \text{ siempre que } s' = v \quad (9)$$

## 2.1. Significado geométrico de la integral

Por el procedimiento que hemos seguido en la sección anterior para obtener el espacio recorrido a partir del conocimiento de la velocidad, vemos que, en general, la integral definida de una función calculada entre dos puntos A y B del eje de abscisas:

$$\int_A^B f(x) \, dx$$

tiene el significado geométrico siguiente (figura 2): una integral definida da el valor del área definida entre la curva que representa la función que estamos integrando y el eje de abscisas, calculada entre los extremos de integración, siempre que  $f(x)$  sea no negativa.

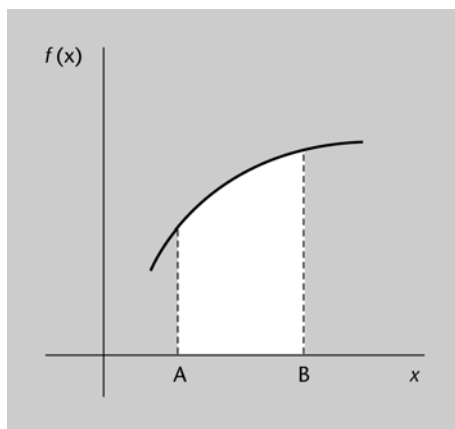


Figura 2: Significado geométrico de la integral: área definida entre la curva y el eje X, entre las ordenadas A y B.

Y el valor de esta integral definida (el valor del área correspondiente) es:

$$\int_A^B f(x) \, dx = F(x) \Big|_A^B = F(b) - F(a) \quad \text{con} \quad F'(x) = f(x)$$

Siempre que  $F(x)$  sea una función primitiva de  $f(x)$  (una función cuya derivada dé la función que hay en el integrando).

Este resultado es conocido con el nombre de Teorema Fundamental del Cálculo.

Como ejemplo de integración, haremos el cálculo sencillo de un área.

### A5

Demostred mediante el cálculo integral la expresión del área de un triángulo de base  $b$  y altura  $a$ ,  $A = \frac{1}{2} b \cdot a$ . (En este caso, estamos «matando moscas a cañonazos»). Tened en cuenta las propiedades de la tabla 1 y las funciones primitivas de la tabla 2.

Recuerda que es importante para el ingeniero saber verbalizar las expresiones y los conceptos matemáticos. Hagamos una práctica de expresión verbal.

### A6

El lenguaje simbólico está mucho más condensado que el lenguaje verbal. Expresad la ec.(9) únicamente con palabras (no con símbolos; ni siquiera escribáis  $t_A$ ,  $s(t_B)$ ...; explicad qué son).

## Integral indefinida

Cuando se quiere representar la operación inversa a la derivación, o integración, sin especificar el intervalo para el que la vamos a calcular, en lugar de la expresión (8) o (9), se escribe:

$$\int y(x)dx$$

Hablamos entonces de integral «indefinida» porque no se han especificado los límites de integración. La integral indefinida nos da la función **primitiva** de la función  $y(x)$ , es decir, aquella función  $F(x)$  cuya derivada coincide con  $y(x)$ .

$$\int y(x)dx = F(x) \quad \text{con} \quad F'(x) = y(x)$$

Hay infinitas primitivas: basta con sumar una constante cualquiera  $C$  a una función primitiva  $F(x)$  para que siga siendo una función primitiva, pues la derivada de una constante es nula. Por ello, debe escribirse la primitiva con la adición de una constante  $C$  arbitraria:

$$\int y(x)dx = F(x) + C$$

No olvidéis escribir siempre la constante arbitraria  $C$  cuando calculéis integrales indefinidas.

### 3. Propiedades de las integrales y funciones primitivas de funciones elementales

El cálculo de integrales de funciones aparece repetidamente en las aplicaciones de las matemáticas a la resolución de problemas de la ciencia o de la ingeniería. Se pueden demostrar las propiedades generales de las funciones primitivas de las funciones, que se recogen en la tabla 1. Es una tabla complementaria de la tabla 2 del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» que daba las propiedades de la función derivada, y por eso mostramos juntas en la tabla siguiente las propiedades de la derivada y de la primitiva. Fijaos en que la integral de un cociente no se da, porque no hay una expresión sencilla: depende mucho de la forma de las funciones  $u$  y  $v$ .

Tabla 1: Propiedades de las derivadas y de las integrales de funciones

Función de $x$ , $f(x)$	Derivada, $f'(x)$	Integral, $\int f(x) \cdot dx$	Enunciado (integral)
$A \cdot y$	$A \cdot y'$	$\int Ay(x) dx = A \int y(x) dx$	
$y + z$	$y' + z'$	$\int (y(x) + z(x)) dx = \int y(x) dx + \int z(x) dx$	La integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada función.
$uv$	$u'v + uv'$	$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$ (Regla de integración por partes)	
$u/v$	$(vu' - uv')/v^2$	–	

La regla de integración por partes es muy útil. Es una consecuencia inmediata de la regla de derivación de un producto:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

y de calcular la primitiva de ambos miembros de la igualdad anterior.

#### A7

Completad la columna de la derecha de la tabla 1 con los dos enunciados de las propiedades de las integrales que faltan.

Hemos visto en el apartado 2 que el teorema fundamental del cálculo muestra que el cálculo de una integral definida se reduce a encontrar la función «antiderivada» o «primitiva» y a calcularla en los extremos del intervalo de integración. La tabla 2 (que se encuentra al final de este módulo) da las primitivas de las funciones más usuales. Es una tabla complementaria de la de derivadas que ya conoces del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales», y por eso mostramos juntas las derivadas y las primitivas de las funciones más usuales. Se pueden demostrar fácilmente las fórmulas de las funciones primitivas de las funciones elementales que se recogen en la tabla.

**A8**

Completad algunas filas de la tabla 2, que está al final del documento, con los enunciados verbales de las propiedades que faltan. (Enunciad, al menos, hasta la función coseno.)

Tenéis que memorizar las fórmulas de las tablas 1 y 2. La mejor manera de hacerlo es con algunos ejercicios.

**A9**

a) Especificad qué propiedades de la integración utilizáis para comprobar que:

$$F_1(x) = x^4, F_2(x) = x^4 - 7, F_3(x) = x^4 + 100$$

son funciones primitivas de  $f(x) = 4x^3$ .

b) Comprobad que para cualquier valor de  $C$ , la función  $F(x) = x^4 + C$  es primitiva de  $f(x) = 4x^3$ .

c) Comprobad que para cualquier valor de  $C$ , la función  $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C$

es primitiva de  $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ .

Más ejercicios.

**A10**

Calculad estas integrales, un poco más complicadas. Cuando lo consideréis necesario, utilizad la propiedad llamada «integración por partes y cambio de variable».

a)  $\int \frac{x^3 + 3}{\sqrt{x}} dx$

b)  $\int \frac{4x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

c)  $\int \frac{2x}{x^2 + 6x + 13} dx$

d)  $\int 2^{\sin x} \cos x dx$

e)  $\int x^2 \ln x dx$

f)  $\int x \sin(4x) dx$

### 3.1. Recapitulemos, ¿qué hemos aprendido desde el inicio de este curso?

Desde el primer módulo hasta ahora hemos visto tres conceptos fundamentales y de gran utilidad en ingeniería: los conceptos de diferencial, de derivada y de integral. Todavía tendremos que aplicarlos en situaciones diversas para ver la potencia que tienen y apropiarnos bien de su significado. También

veremos que, con estos conceptos, seremos capaces de resolver muchos otros tipos de problemas, diferentes de los ejemplos que nos condujeron a introducirlos.

Una vez que hemos introducido el concepto de integral (que está íntimamente relacionado con el concepto de derivada y de diferencial), veremos algunas actividades y aplicaciones de los tres conceptos.

## 4. Exploremos el concepto de diferencial

En el módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» introdujimos el concepto de diferencial para resolver el problema de calcular la evolución de una función cualquiera,  $y(x)$ , si conocemos el valor que tiene en un punto determinado  $x$  y la pendiente de la curva en aquel punto  $y'(x)$ .

Por ejemplo, para la función desplazamiento de un móvil,  $s(t)$ , que analizamos en el módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales», definimos la diferencial de la posición ( $ds$ ) a partir de un instante  $t$  cualquiera (y de la posición correspondiente  $s$ ) y para un intervalo arbitrario  $\Delta t$  así: « $ds$  es lo que se desplazaría el objeto a partir de este instante  $t$  y durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  si lo hiciera con velocidad constante (con la velocidad que tiene en el instante  $t$ )». Como sabemos, la expresión matemática de este concepto es:

$$ds = v \cdot \Delta t = s' \cdot dt \quad (10)$$

donde  $v$  es la velocidad instantánea del móvil en el punto  $t$ , y  $\Delta t = dt$ .

Por lo tanto, la diferencial  $ds$  es una función de dos variables porque es función tanto del instante  $t$ , que determina  $v$ , como del valor del intervalo  $\Delta t$  que tomemos, que no depende de  $t$ .

Nota: El concepto de diferencial no implica necesariamente valores pequeños de  $\Delta t$  ni, por supuesto, valores que tiendan a cero. Puedo hacer  $\Delta t$  tan grande o tan pequeño como quiera, y  $ds$  podrá ser también, en general, muy grande o muy pequeño.

A partir del concepto de diferencial, de la misma definición (10) se ve que la derivada se puede expresar operativamente como un cociente de diferenciales:

$$s' = \frac{ds}{dt} \quad (11)$$

Como sabemos, la derivada de la función de desplazamiento  $s$  recibe el nombre de velocidad. En general, para una función cualquiera  $f(x)$ , la derivada  $f'(x) = df(x)/dx$  mide el ritmo de cambio de la función cuando varía la variable independiente.

### A11

Un vehículo se mueve por una carretera; en un instante determinado lo hace a 60 km/h. ¿Cuánto se habrá desplazado durante los 15 minutos siguientes? Explicad si el resultado que obtenéis es exacto o es más bien una cota superior o inferior.

### 4.1. Diferenciales, incrementos

También vimos en el módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» que en una gráfica del tipo de la figura 3 resulta siempre:

$$\Delta s > ds \quad (12)$$



Y eso es cierto para cualquier función monótona creciente (o sea, de pendiente positiva), como la de la figura 3, para cualquier instante  $t$  y cualquier incremento  $\Delta t$  que consideremos.

En otros tipos de funciones pasará lo contrario:

$$\Delta s < ds \quad (13)$$

E incluso puede pasar que:

$$\Delta s = ds \quad (14)$$

Pero en casos más complicados, una misma función tendrá zonas donde alternan algunos de los tres casos anteriores (12-14).

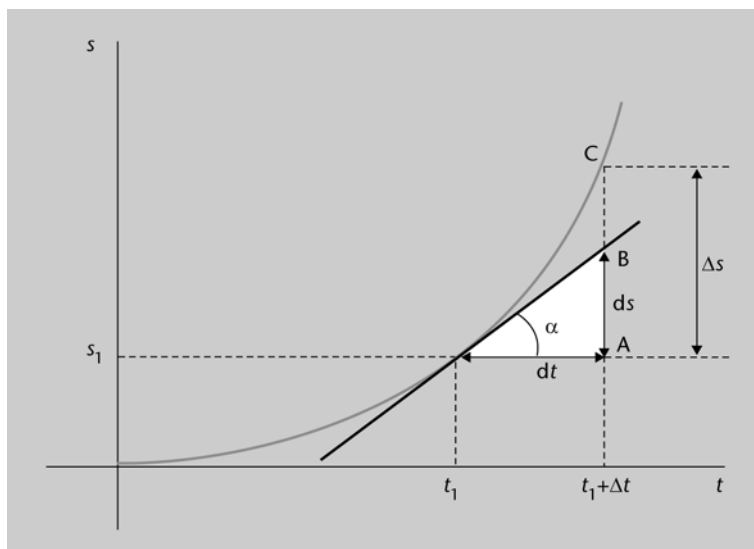


Figura 3: Para un incremento  $\Delta t = dt$  de la variable independiente, podemos obtener dos incrementos de la variable dependiente: uno, si nos movemos por la recta tangente,  $ds$ , y otro si nos movemos por la misma función,  $\Delta s$ .

## A12

- Explicad para qué tipo de gráfica o de movimiento ocurrirá, para cualquier valor de  $\Delta t$ , que  $\Delta s = ds$ .
- Elaborad el esquema de una función donde se dé siempre la situación  $\Delta s > ds$ , y otro esquema de una función donde se dé siempre la situación  $\Delta s < ds$ .
- ¿Puede haber puntos en una gráfica donde sea  $ds = 0$ ?
- Dibujad una gráfica de una función que tenga puntos donde  $\Delta s > ds$ , otros donde  $\Delta s < ds$ , y otros donde  $ds = 0$ .

Ahora aplicamos el concepto de diferencial y de derivada en dos contextos diferentes. Primero, en el caso del café que se enfría.

## A13

- Aplicad la definición de diferencial al caso de la función  $T(t)$  de la ec.(1) del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» y explicad el resultado que obtenéis. Es decir, calculad  $dT$  para:

$$T = -0.02 t + 56.0$$

donde  $T$  se mide en  $^{\circ}\text{C}$  y  $t$ , en segundos.

- ¿Cuánto vale y qué significa la pendiente de la función  $T(t)$ ?

Y utilizaremos el concepto de diferencial para hacer cálculos aproximados.

### A14

---

Con un sensor de velocidad se ha medido que un vehículo va a 20 m/s y tiene una aceleración de  $6 \text{ m/s}^2$  a las 12:45 h.

a) ¿Cuánto habrá cambiado la velocidad del vehículo en un intervalo de 3 s a partir de este instante?<sup>1</sup>

b) ¿Qué significado tiene el valor que habéis calculado?

---

---

1. Recordad la relación  $dv = a \cdot dt$  que vimos en el módulo de «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales».

## 5. Exploremos el concepto de derivada

Volvamos al concepto de derivada y veamos otras situaciones en las que lo podemos utilizar para resolver problemas prácticos.

### A15

---

¿Cómo es el signo de la función derivada, para un valor cualquiera de la variable independiente, para las funciones de las actividades A5, A7, A17, A18, A19 y A20 del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales»? Justificad brevemente las respuestas que deis.

---

### 5.1. Máximos y mínimos de una función

Como hemos visto en la actividad anterior, A15, la derivada de una función cambia de signo cuando la función que derivamos pasa por un máximo (o un mínimo).

### A16

---

¿Qué valor tiene la función derivada en el punto donde las funciones tienen el máximo o el mínimo? ¿Por qué?

---

Podemos aprovechar, pues, este resultado: si queremos calcular cuándo será mínima o máxima una función, sólo tenemos que ver para qué valores de la variable independiente se anulará la derivada de la función:

$$y' = 0 \quad (15)$$

### A17

---

Un programador está diseñando un juego en el que la pantalla tiene que estar dividida en dos partes: una para el juego en sí y la otra para mostrar la información del jugador. Ha decidido que una pantalla será rectangular y la otra será triangular con dos lados iguales (es decir, un triángulo isósceles). La base del triángulo será el lado superior del rectángulo y la altura será  $\frac{3}{8}$  de la longitud de la base, es decir, como se muestra en el dibujo (figura 4). Si el perímetro de la figura resultante ha de ser de 90 cm, determinad las dimensiones de los lados de las dos partes a fin de que la superficie que vea el jugador sea máxima.

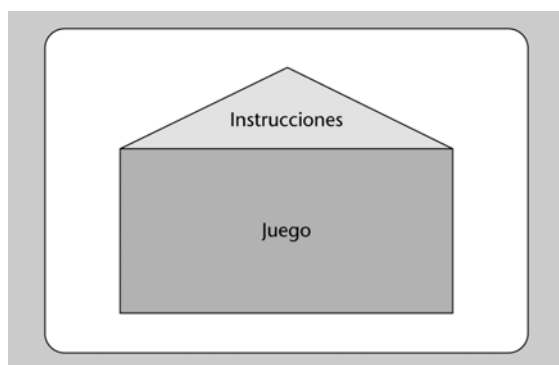


Figura 4: Pantalla del juego.

---

## 5.2. Determinación de los ceros de una función

Como ya sabemos, los ceros de una función  $y(x)$  cualquiera indican dónde corta esta función el eje  $X$ . Por otra parte, acabamos de ver que los ceros de la función derivada,  $y'(x) = 0$ , indican dónde es máxima o mínima la función  $y(x)$ . En ambos casos, necesitamos calcular los puntos donde una determinada función se anula.

Por tanto, en multitud de problemas se nos plantea la cuestión de ver cuándo se anula una función. Por ejemplo, en un juego de baloncesto, la función que describe la trayectoria de una pelota que se lanza desde el origen de coordenadas (figura 5) puede ser ésta:

$$y = 0.75x - 3.125 \cdot 10^{-2}x^2 \quad (16)$$

(Las distancias  $x$  e  $y$  se miden en metros.) ¿En qué punto A tocará tierra la pelota? ¿En qué punto B llegará la pelota a la altura máxima?

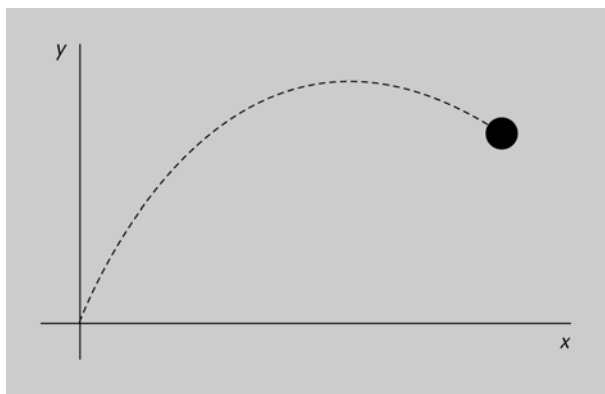


Figura 5: Trayectoria de una pelota que se lanza desde el origen de coordenadas.

La primera pregunta se puede contestar si buscamos las soluciones de la ecuación:

$$y(x) = 0 \quad (17)$$

Mientras que la respuesta a la segunda pregunta la dan las soluciones a la ecuación:

$$y'(x) = 0 \quad (18)$$

### A18

Para el ejemplo de la ec.(16), encontrad:

- a) el punto donde la pelota toca tierra,
- b) el punto donde la pelota llega a la altura máxima.

**Inciso:** Como sabéis, una ecuación de segundo grado como la ec.(16) tiene dos soluciones. En general, para un polinomio de grado  $n$ , es decir, un polinomio en el que la potencia  $n$  es la más alta, la ecuación:

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d = 0 \quad (19)$$

tiene  $n$  soluciones, aunque puede que no todas ellas sean números reales.

### A19

- a) Escribid un ejemplo de polinomios de grado 0, de grado 3 y de grado 6.
- b) Realizad las siguientes operaciones y escribid el polinomio resultante en la forma de la ec.(19):

$$y(x) = 3(x - 2)^2 \cdot (x + 1)$$

- c) ¿Podrías decir dónde se anula la función anterior?
- d) ¿Y dónde tiene sus extremos (máximos y mínimos)?
- e) ¿Podéis hacer un esquema aproximado de la función  $y(x)$  y explicar por qué creéis que tiene la forma que indicáis?

Otro ejemplo: si recordamos el experimento inicial del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales», un café que se enfría, ¿qué nos indicará el cálculo de los ceros de la función que da el enfriamiento del café y que reproducimos a continuación?

$$T(^{\circ}\text{C}) = -0.02 \, t(\text{s}) + 56.0 \quad (20)$$

### A20

- a) Si la función que describe el enfriamiento de un café es la de la ec.(20), ¿cuánto tiempo tardará el café en llegar a la temperatura cero?
- b) Completad la gráfica de  $T(t)$  de manera que llegue al punto de temperatura  $0^{\circ}\text{C}$ .

A veces efectuamos operaciones matemáticas con variables, manipulamos ecuaciones, etcétera, pero el ingeniero ha de tener siempre presente que el objetivo es describir situaciones del mundo real y ha de comprobar si lo que se obtiene de los cálculos matemáticos tiene o no tiene sentido. ¿Tiene sentido lo que hemos calculado para el café que se enfría hasta  $0^{\circ}\text{C}$ ?

### A21

Ahora nos hacemos una pregunta de ingeniería, no de matemáticas: ¿llegará a ser  $0^{\circ}\text{C}$  la temperatura del café que se enfría?

## 5.3. El método de Newton para calcular los ceros de una función

Normalmente, tendremos que encontrar los ceros de funciones no tan sencillas como las de las actividades A18, A19 y A20. Para tratar problemas complicados, se han inventado diversos métodos, pero sólo veremos uno: el método de Newton para encontrar los ceros de una función.

Supongamos que tenemos una función que en un dominio determinado tiene el aspecto de la figura 6 y no sabemos en qué punto corta el eje  $X$ . Sabemos, sin embargo, que, en un punto  $x_A$ , la función es positiva,  $y(x_A) > 0$ , y, en otro punto  $x_B$ , la función es negativa,  $y(x_B) < 0$ .

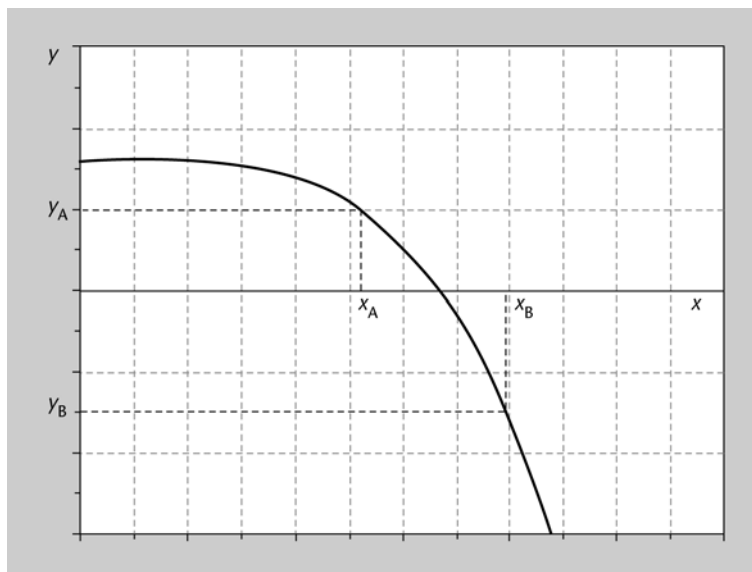


Figura 6: Una función que se anula en un punto en un cierto intervalo.

Para encontrar el cero de la función  $y(x) = 0$  en el intervalo anterior, tomamos uno de los puntos del intervalo, por ejemplo  $x_A$ , y trazamos la recta tangente a la curva que pasa por el punto  $x_A$ :

$$y - y_A = y'_A \cdot (x - x_A) \quad (21)$$

En la ecuación anterior aparece la pendiente de la curva, calculada en el punto  $x_A$ :  $y'_A = y'(x_A)$ . En efecto, si hacemos  $x = x_A$ , obtenemos  $y = y_A$ ; si, además, derivamos la expresión anterior, obtenemos  $y' = y'_A$ , es decir, la pendiente de la recta tangente en  $x_A$ . Por tanto, la recta (21) pasa por el punto  $(x_A, y_A)$  de la función y tiene la misma pendiente que la función en ese punto. Por eso la denominamos recta tangente a la función en ese punto.

La recta tangente (21) cortará el eje  $x$  en el punto  $x_1$ , como muestra la figura 7. El punto  $x_1$  es fácil de encontrar: es el que anula la variable  $y$  en la ec.(21):

$$y(x_1) = y_A + y'_A \cdot (x_1 - x_A) = 0$$

Es decir,

$$y'_A \cdot (x_1 - x_A) = -y_A, \text{ o bien, } x_1 - x_A = -y_A/y'_A.$$

Finalmente:

$$x_1 = x_A - \frac{y_A}{y'_A} \quad (22)$$

La fórmula anterior es la base del método de Newton y permite pasar de una primera aproximación al cero de la función, el punto  $x_A$ , a una segunda aproximación, el punto  $x_1$ . En la figura 7 vemos que  $x_1$  está ahora más cerca del cero de la función que el punto original,  $x_A$ .

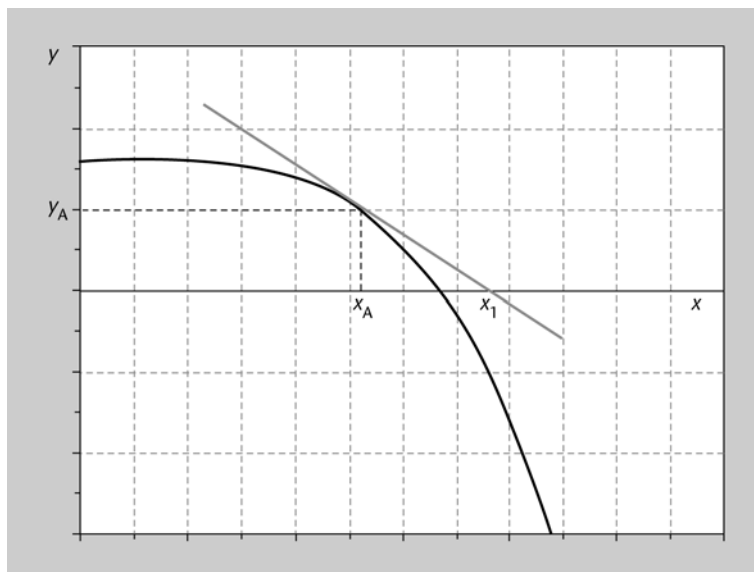


Figura 7: Trazamos la recta tangente a la función en el punto que tomamos como primera estimación del cero de la función y vemos dónde corta el eje X.

Se trata ahora de «iterar» el proceso, es decir, repetirlo de manera análoga: trazamos la recta tangente a la curva que pasa por el nuevo punto  $(x_1, y_1)$ :

$$y - y_1 = y'_1 \cdot (x - x_1) \quad (23)$$

donde  $y'_1 = y'(x_1)$ . Esta recta cortará el eje  $x$  en el punto  $x_2$ , como muestra la figura 8.

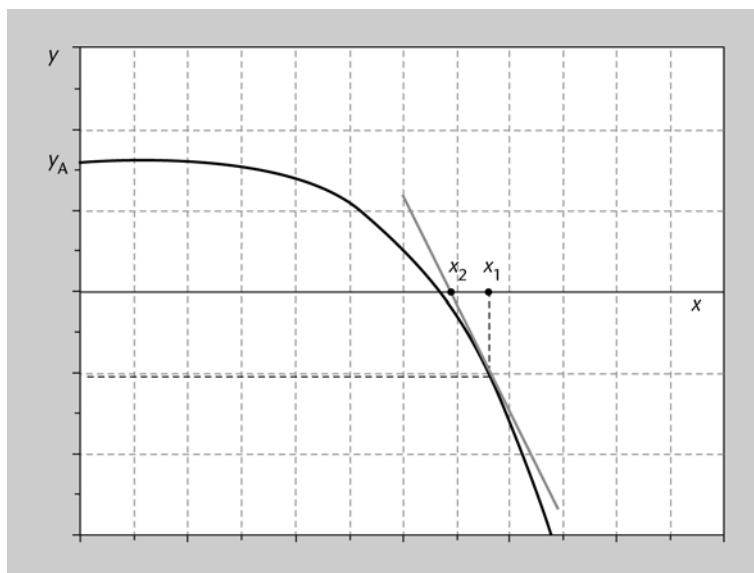


Figura 8: La recta tangente a la función en el punto  $x_1$  corta el eje  $X$  en el punto  $x_2$ , que tomamos como segunda estimación del cero de la función.

El punto  $x_2$  se calcula igual que hemos hecho para deducir la ec.(22), y obtenemos:

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{y'_1} \quad (24)$$

La figura 8 muestra que el punto  $x_2$  está más cerca del cero de la función que el punto  $x_1$ . Cada vez nos estamos acercando más al cero de la función.

**A22**

Demostrad la ecuación anterior, ec.(24).

Fijaos en que la ec.(24) es idéntica a la (22), pero hemos pasado del punto  $x_A$  al  $x_1$  y del  $x_1$  al  $x_2$ . Ahora calcularemos la recta tangente a la curva, que pasa por el punto  $(x_2, y_2)$ , y calcularemos, mediante una ecuación como la (22), el punto  $x_3$  donde corta el eje X. Obtendremos, como era de esperar:

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2}{y'_2} \quad (25)$$

una ecuación que tiene el mismo aspecto que la ec.(22) y la (24).

**A23**

Seguid todos los pasos indicados para deducir la expresión (25): escribid la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto  $(x_2, y_2)$  y demostrad que el punto donde esta recta corta el eje X es el dado por la ec.(25).

Y repetimos así el proceso (es decir, hacemos iteraciones) hasta que el valor que obtenemos del cero de la función se acerque «suficientemente» a la solución, es decir, converja hacia la solución:

$$x_A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow \dots$$

La convergencia es apreciable cuando algunas cifras decimales de la solución no cambian a partir de alguna iteración, es decir, se mantienen fijas.

**A24**

¿Cuál será la expresión genérica que permitirá calcular la aproximación  $n + 1$  al cero de la función si conocemos la aproximación  $n$ ?

**Aplicación del método**

Así pues, aplicar el método de Newton para calcular los ceros de una función, una vez determinado un intervalo donde se anula la función,  $[x_A, x_B]$ , consiste en efectuar los cálculos siguientes (reproducimos aquí las ecuaciones anteriores):

$$x_1 = x_A - \frac{y_A}{y'_A} \quad (22)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{y'_1} \quad (24)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2}{y'_2} \quad (25)$$

Y en general:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (26)$$



Según el problema concreto que queramos resolver, tendremos que hacer más o menos iteraciones. Si el proceso es convergente, cada vez tendremos más «precisión» en el valor del cero de la función; es decir, la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado (en valor absoluto) será cada vez más pequeña, o dicho de otra manera, el número de cifras decimales exactas será cada vez mayor. Por ejemplo, en un proceso concreto podemos obtener  $x_A = 2$ ,  $x_1 = 3.1$ ,  $x_2 = 3.05$ ,  $x_3 = 3.045$ ,  $x_4 = 3.042$ ,  $x_5 = 3.0415...$  En este caso, el cero de la función estará en el punto  $x = 3.04$ , y si necesitamos más precisión (más cifras decimales exactas), tendremos que continuar la iteración.

## A25

Aplicad el método de Newton para calcular el cero de la función del tiro parabólico, ec.(16). En primer lugar, aseguraos de que la función cambia de signo en algún entorno de  $x$  y coged uno de los dos puntos de este entorno como el punto A de partida del método.

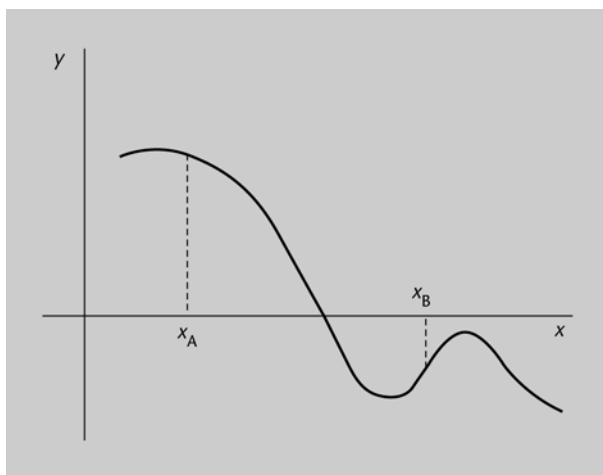


Figura 9a: La función cambia de signo en el intervalo  $[x_A, x_B]$ . Si tomamos el punto  $x_A$  (o el  $x_B$ ) y aplicamos el método de Newton con el fin de encontrar dónde tiene el cero la función entre  $x_A$  y  $x_B$ , es fácil ver gráficamente que no llegaremos a obtenerlo.

Podemos encontrarnos con casos en los que el método de Newton no converge. Veamos dos de los casos posibles, figura 9a y figura 9b: a) al iterar el proceso, los puntos que se obtienen se alejan del cero de la función; b) la derivada de la función se anula en alguno de los puntos (y por tanto, no podemos continuar iterando una expresión como la (24), porque no se puede dividir por cero).

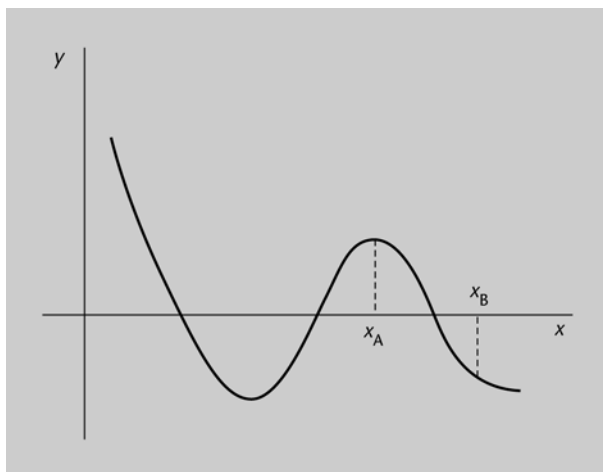


Figura 9b: Hay un punto donde la derivada se anula en el intervalo  $[x_A, x_B]$ . Según cuál sea el valor inicial que se elija, los valores de la derivada en varias iteraciones pueden ser muy próximos a cero (o incluso cero) y, por lo tanto, el cociente  $y_n/y'_n$  se hace extraordinariamente grande. El método de Newton se volverá «inestable».

En estos casos, podéis tratar de reducir el intervalo donde la función cambia de signo y escoger otro punto para empezar el proceso iterativo. Pero si aun así no funciona, tendríais que probar con métodos numéricos diferentes al método de Newton (de ellos no hablaremos en este curso).

Por tanto, la forma de la función y la elección de la aproximación inicial son clave para asegurar la convergencia del método.

#### 5.4. Cálculo de ceros con la calculadora Wiris

El algoritmo de cálculo numérico que hemos llamado método de Newton, u otros basados en ideas diferentes, son los que utilizan para el cálculo de ceros de funciones la calculadora simbólica Wiris u otros paquetes matemáticos parecidos (MathCad, Mathematica, etcétera).

---

#### A26

Calculad los ceros de la función siguiente  $y = 8 - x^4$ .

a) En primer lugar, hacedlo por el método de Newton, a mano.

b) Y luego, con la calculadora Wiris.

---

## 6. Aplicación de la diferencial: planteamiento de problemas de interés en ingeniería

A menudo, el concepto de diferencial es el punto de partida para el estudio de fenómenos fisicoquímicos o de ingeniería. Veamos un ejemplo.

### Ejemplo 1: Absorción de una onda por un medio

Sabéis que cuando una señal de TV, de móvil, etcétera, atraviesa un medio material como una pared, una puerta o un tejido, una parte de la señal se pierde: el medio la absorbe. Lo mismo pasa con todo tipo de ondas, como las sonoras: nos cuesta oír a las personas que hablan en la habitación de al lado porque las paredes absorben parcialmente las ondas sonoras.

Todas las ondas se atenúan por dos razones: una, porque al alejarse de la fuente, la energía de la onda se tiene que repartir en un frente más ancho; la otra, por la absorción del medio. Por ejemplo, en una noche clara cerca del puerto, la luz de un faro nos llega tenue si estamos lejos, pero, si además hay niebla, la luz se atenúa todavía más.

¿De qué manera se puede calcular cómo decrece la intensidad de una onda que se atenúa por absorción? Suponemos que la onda viaja por un medio y que, en un punto  $x$  de este medio, la intensidad<sup>2</sup> de la onda es  $I(x)$ . ¿Cuánto variará la intensidad de la onda,  $\Delta I(x)$ , si ésta avanza una distancia  $\Delta x$  dentro del medio?

Lo primero que se nos ocurre es que la absorción del medio depende del grosor de la capa de material que atraviesa, y podríamos pensar que la cantidad de absorción  $\Delta I$  será proporcional al grosor  $\Delta x$  de la capa.

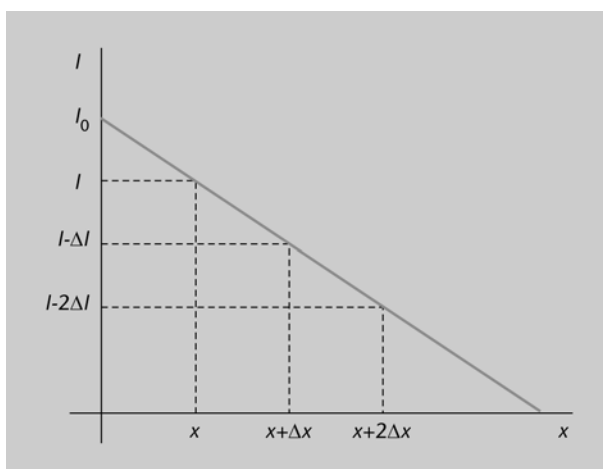


Figura 10: Gráfica de la intensidad de una onda que atraviesa un medio de grosor  $x$  si suponemos que la intensidad decrece como en la ec.(27).

2. La definición concreta de la intensidad no es importante para el problema que queremos resolver, pero aun así vamos a darla aquí: la intensidad de una onda es la cantidad de energía por segundo que atraviesa la unidad de superficie colocada perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.

La constante de proporcionalidad se suele llamar  $\alpha$ , tradicionalmente. Escribiremos, pues:

$$\Delta I(x) = \alpha \Delta x \quad (27)$$

La expresión anterior no puede ser correcta: si duplicamos el grosor, la intensidad aumentará  $I + 2\Delta I$ ; cuando lo que tendría que hacer es reducirse. Nos falta, pues, un signo negativo en la ec.(27):

$$\Delta I(x) = -\alpha \Delta x \quad (28)$$

De manera que si  $\Delta x$  aumenta,  $\Delta I$  decrecerá. Ésta sería una hipótesis de trabajo que podemos representar gráficamente como en la figura 10. La onda pasa de la intensidad  $I$  en el punto  $x$  a la intensidad  $I - \Delta I$  en el punto  $x + \Delta x$ . Si la onda avanza otra distancia igual,  $\Delta x$ , la intensidad se reducirá a  $I - 2\Delta I$ , etc.

Pero cuando se hace el experimento y se mide la intensidad de la onda que atraviesa un grosor  $\Delta x$ , o un grosor doble, o triple, etcétera, en lugar de un comportamiento como el de la figura 10, se obtiene una gráfica como la de la figura 11.

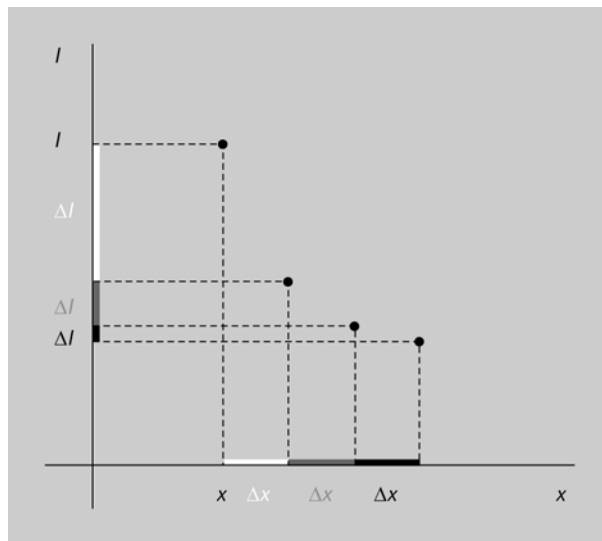


Figura 11: Gráfica de la intensidad medida de una onda que atraviesa un medio de grosor  $x$ .

Según el resultado de la figura 11, la reducción de la intensidad que se mide para un mismo incremento de penetración de la onda depende del punto  $x$ , es decir, del valor concreto de la intensidad  $I$  en el punto donde se mida. Pero la expresión (28) dice que  $\Delta I$  no depende del valor de  $I$ . ¿Cómo expresamos matemáticamente el resultado experimental de la figura 11? Podemos escribir, por ejemplo:

$$\Delta I(x) = -\alpha I \Delta x \quad (29)$$

Esta expresión indica que la intensidad de una onda en un punto se reduce al avanzar una distancia  $\Delta x$  en un medio proporcionalmente a la intensidad  $I$  que tiene en este punto y proporcionalmente también al grosor  $\Delta x$  de la capa que atraviesa. Como en la ec.(28), la atenuación de la onda depende del medio que atraviesa, a través del parámetro  $\alpha$ .

El hecho experimental de que la intensidad en un punto se reduce según el valor de la intensidad en este punto, se podría formular de maneras muy diversas, y expresiones como las siguientes también podrían ser buenas, en principio:

$$\Delta I(x) = -\alpha I^{1/2} \Delta x \quad (30)$$

O también:

$$\Delta I(x) = -\alpha I^2 \Delta x \quad (31)$$

En comparación, la expresión (29) tiene la ventaja de la simplicidad: la dependencia de  $\Delta I$  es lineal en  $I$ . Pero una vez que encontramos cuál es la consecuencia matemática de una expresión como la (29), o como la (30) o (31), tiene que ser el experimento el que determine cuál es la expresión correcta.

¿Dónde estamos, pues? Nos encontramos en la misma situación que en el ejemplo 1 del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» (el café que se enfría): como no conocemos la función  $I(x)$ , no podemos calcular el incremento,  $\Delta I(x)$  con la ec.(29), por ejemplo. Pero lo que sí podemos hacer es considerar la estimación que hemos hecho de la variación de  $I$ , como que se trata de la diferencial  $dI$  de la función desconocida  $I(x)$ :

$$dI(x) = -\alpha I dx \quad (32)$$

## A27

---

Expresad verbalmente qué significa la expresión anterior.

---

Recordemos (apartado 4 del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales») que el valor de  $dI(x)$  que obtenemos con la expresión (32) no será el valor del incremento que buscamos,  $\Delta I(x)$ , pero nos podemos acercar cada vez más a él cuanto menor sea el valor de  $\Delta x$  que escogemos. Además, el límite del error que cometemos tenderá a 0 si hacemos  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Podemos deducir una expresión para la función desconocida  $I(x)$  a partir de la ec.(32). Si lo escribimos de la manera siguiente:

$$\frac{dI}{dx} = -\alpha I \quad (33)$$

lo podemos leer así: «la derivada de la función intensidad respecto a  $x$  (o la variación de la intensidad por unidad de grosor de material que atraviesa la onda) es proporcional a la intensidad que tiene la onda en un punto determinado». Una ecuación como la (33), que también se puede escribir así:

$$I' = -\alpha I \quad (34)$$

se llama **ecuación diferencial**. Es una ecuación donde aparecen derivadas. Resolver la ecuación diferencial (34) equivale a encontrar una función  $I(x)$  tal que, al derivarla, resulta ella misma multiplicada por una constante  $-\alpha$ .

Si observamos la tabla 1 de derivadas de funciones elementales, veremos que la única función que al derivarla resulta ella misma es la función exponencial. Podemos escribir, pues, la solución de la ecuación diferencial (34) así:

$$I(x) = e^x \quad (35)$$

Pero esta expresión no puede estar bien, porque al derivar  $e^x$  obtenemos  $e^x$  en lugar de  $-\alpha \cdot e^x$ . Por lo tanto, el argumento de la exponencial (el exponente) tiene que contener  $-\alpha$ :

$$I(x) = e^{-\alpha x} \quad (36)$$

Todavía nos falta algo, porque una función exponencial no tiene dimensiones (el valor de  $e^{-\alpha x}$  tiene que ser un número sin unidades), mientras que la intensidad tiene unidades (energía por segundo y por metro cuadrado). Por lo tanto, la ec.(36) se tiene que modificar de manera que al derivarla no se altere, pero que incluya una constante con las dimensiones correctas. Escribimos, pues:

$$I(x) = A e^{-\alpha x} \quad (37)$$

Si sustituimos la expresión (37) en la ecuación diferencial (33), veremos que la satisface, para cualquier valor de la constante  $A$ .

Matemáticamente, podemos decir que la derivada de la función (37) es la misma,  $-\alpha \cdot I$ , para cualquier valor de la constante  $A$ , que se llama «constante de integración» y que es una constante arbitraria. Pero podemos darle un significado físico a la constante  $A$  si notamos que si hacemos  $x = 0$  en la (37) obtenemos:

$$I(x = 0) = A e^{-\alpha 0} = A \cdot 1 = A \quad (38)$$

Es decir,  $A$  es la intensidad de la onda en el punto donde ésta empieza a atravesar el material. Si llamamos  $I_0 = A$  a esta intensidad inicial, escribiremos finalmente:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} \quad (39)$$

Ésta es la solución de la ecuación diferencial (34).

## A28

- 
- a) Resolved la ecuación diferencial (33) cuando la escribimos en la forma  $dI/I = -\alpha \cdot dx$ . (Hay que integrar ambos miembros de la igualdad.)
- b) Resolved esta otra ecuación diferencial:  $y' = x$ .
- 

Con respecto a las constantes arbitrarias de integración, nos encontramos con un caso parecido al de las actividades A20 y A21: mientras que matemáticamente cualquier valor de la constante de integración que aparece al resolver la ec.(34) o la de la actividad A28 es válido, el problema de ingeniería que se quiere resolver con una ecuación diferencial indicará qué valor de la constante hay que utilizar.

En resumen, hemos visto que el concepto de diferencial nos permite plantear una ecuación diferencial que, una vez resuelta, nos da una descripción matemática del fenómeno físico o del proceso de ingeniería que estamos modelizando.

### 6.1. ¿Cómo se generan las ecuaciones diferenciales?

Las ecuaciones diferenciales aparecen en muchos campos de aplicación de las matemáticas: en ingeniería, física, economía, sociología, biología, etc.

Por ejemplo, si recordáis las leyes de Newton de la mecánica, podéis escribir fácilmente la ecuación diferencial que describe la caída al suelo de un cuerpo de masa  $m$  por la fuerza de la gravedad. La 2.ª ley de Newton dice que:

$$F = m \cdot a \quad (40)$$

Y si la altura del cuerpo en cada instante es  $h$ , la aceleración que tiene al caer es:

$$a = \frac{d^2h}{dt^2} \quad (41)$$

tal y como hemos visto también en el apartado 5 del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales». En la ec.(40) se tiene que especificar qué fuerza actúa sobre el cuerpo y entonces podremos calcular el resultado de la acción de esta fuerza. La fuerza que actúa sobre la masa que cae es lo que denominamos peso:

$$F = -m \cdot g \quad (42)$$

(el signo «menos» indica que la fuerza va dirigida hacia el suelo, mientras que las alturas se miden en sentido contrario, hacia arriba). Y de la identificación de (42) y de (40) y (41) obtenemos la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g \quad (43)$$

Esta ecuación diferencial se llama ecuación diferencial de segundo orden porque contiene una derivada segunda.

¿Dónde está el cuerpo en cada instante de caída,  $h(t)$ ? Esta función nos la dará la integración doble de la ecuación diferencial (43). Demos un primer paso. La resolución de la ec.(43) es sencilla: ¿qué función da, al derivarla, una constante? Sabemos que la solución es una relación afín o línea recta y, por lo tanto, escribiremos:

$$\frac{dh}{dt} = -gt + c_1 \quad (44)$$

Si derivamos la expresión anterior, donde  $c_1$  es una constante arbitraria, obtenemos la ec.(43). La constante  $c_1$  es arbitraria desde el punto de vista matemático, pero el problema concreto que estamos determinando permite especificarla: en este caso sería la velocidad de la caída del objeto en el instante inicial ( $t = 0$ ).

Pero todavía no hemos llegado a la solución  $h(t)$ . Debemos integrar de nuevo la ec.(44), es decir, resolver la ecuación diferencial de primer orden (44).

**A29**


---

Volved a integrar la ecuación diferencial anterior.

---

Cada vez que integramos una ecuación diferencial, tenemos que añadir una constante de integración al resultado, porque al derivar, las constantes desaparecen. Así, de la integración de una ecuación diferencial de primer orden como las ecs.(33) o (44) obtendremos una constante arbitraria, ecs.(34) y (43), respectivamente. De la integración de una ecuación diferencial de segundo orden obtendremos dos constantes arbitrarias (ved la ec.(43) y la solución de la actividad A29).

El movimiento de caída libre es el de un objeto sometido únicamente a la acción de la gravedad, sin rozamiento. La caída libre de un cuerpo de masa  $m$  está descrita por la ecuación que hemos deducido en la actividad A29:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2 \quad (45)$$

Es una ecuación parabólica, como la encontramos también en el ejemplo 2 del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» al analizar la caída libre de un objeto por una pendiente, ec.(5) del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales».

**A30**


---

a) ¿Qué diferencia hay entre la ec.(5) del módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» y la solución de la actividad A29?

b) En el módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» se analiza la caída por una pendiente. Comparadlo con el caso que hemos visto en esta sección 6.1.

---

## 6.2. Otro ejemplo: un café que se enfría durante «mucho» tiempo

Repetid la argumentación que hemos hecho para la onda que se absorbe por un medio, para el ejemplo del café que se enfría. Resultados experimentales demuestran que el café se enfría más al principio, cuando está más caliente, y que conforme baja la temperatura, se va enfriando más lentamente. Es decir, la velocidad de enfriamiento depende del valor que tiene la temperatura del café en cada instante.

**A31**


---

Obtened la ecuación diferencial que exprese cómo se reduce la temperatura del café con el paso del tiempo e integradla para obtener  $T(t)$ .

---

Se nos plantea, sin embargo, una cuestión: ¿por qué hemos empezado el módulo «Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales» de estos materiales de trabajo diciendo que en un experimento habíamos obtenido que la temperatura de un café que se enfría disminuye linealmente con el tiempo (figura 1s)?

**A32**


---

Contestad la pregunta anterior.

---



## Recapitulación final: ¿qué hemos aprendido en este módulo?

### A33

---

Comentad qué habéis aprendido en este módulo, en particular:

- a) Explicad el significado geométrico de derivada, diferencial e integral.
  - b) ¿Qué tipo de problemas pueden ser resueltos a través de estos conceptos?
  - c) Haced una lista de los conceptos que os han resultado más sencillos de entender y otra de los que os han resultado más difíciles.
  - d) ¿Cuáles son los conceptos, aplicaciones, herramientas, etcétera, que todavía no entendéis o manejáis bien?
-



## Tabla de derivadas e integrales

Tabla 2: Derivadas y primitivas de algunas funciones elementales

Función, $y$	Derivada, $y'$	Integral, $\int y \, dx$	Enunciado (integral)
$y = x$	$y' = 1$	$\int k \, dx = kx + C$	
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1} u'$	$\int u' u^m \, dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad m \neq -1$	La integral de una potencia de una función $u$ , que esté multiplicada por la derivada de la función, es igual a la base elevada al exponente más una unidad, dividido por el exponente más una unidad, y todo sumado a una constante arbitraria. El resultado es válido sólo si el exponente no es igual a menos uno.
$y = e^u$	$y' = u' e^u$	$\int e^x \, dx = e^x + C$	
$y = a^u$	$y' = a^u u' \ln a$	$\int u' e^u \, dx = e^u + C$	
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$\int u' a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$	
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln  x  + C$	
		$\int \frac{u'}{u} \, dx = \ln  u  + C$	
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	$\int u' \sin u \, dx = -\cos u + C$	
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$\int u' \cos u \, dx = \sin u + C$	
$y = \tan u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$\int u' \tan u \, dx = -\ln  \cos u  + C$	
$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} \, dx = \arcsin \frac{u}{a} + C$	
$y = \arccos u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$		
$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$\int \frac{u'}{a^2+u^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$	



## Resolución de actividades

### A1

a) La aceleración es el cambio de velocidad por unidad de tiempo. El coche pasa de 30 km/h (unos 8.3 m/s) a 120 km/h (unos 33.33 m/s) en 9 s. Si suponemos que la aceleración es constante, valdrá, en valor medio,  $\bar{a} = \Delta v / \Delta t = (120 - 30) \text{ km/h} / 9 \text{ s} \approx 2.78 \text{ m/s}^2$ .

La situación es la que muestra la figura 1s: para una aceleración constante, la velocidad aumentará linealmente desde la velocidad inicial  $v_0$ .

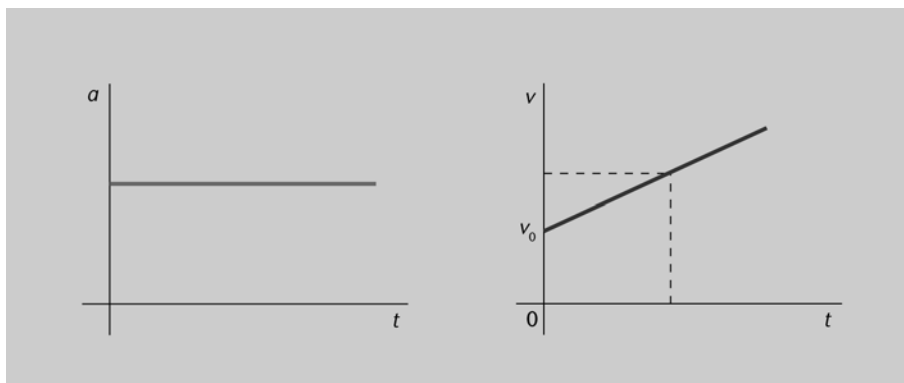


Figura 1s. Si suponemos que la aceleración del vehículo es constante, la relación correspondiente entre velocidad y tiempo es lineal.

b) Se trata de calcular el desplazamiento de un vehículo sobre la trayectoria,  $\Delta s$ , durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Pero como no conocemos la función  $s(t)$ , no podemos calcular  $\Delta s$ . Sí que conocemos la velocidad del vehículo y podemos calcular la diferencial del espacio que ha recorrido durante el intervalo  $\Delta t$ ,  $ds = v \cdot dt$ .

### A2

a) Con pasos de 1 s.

Paso núm.	v(m/s)	tiempo de...	hasta...	ds = v·dt
1	8,333333333	0	1	8,333333333
2	11,11111111	1	2	11,11111111
3	13,88888889	2	3	13,88888889
4	16,66666667	3	4	16,66666667
5	19,44444444	4	5	19,44444444
6	22,22222222	5	6	22,22222222
7	25,00000000	6	7	25,00000000
8	27,77777778	7	8	27,77777778
9	30,55555556	8	9	30,55555556
Suma ds(m) =				175,000

b) Con pasos de 0.5 s.

Paso núm.	$v(\text{m/s})$	tiempo de...	hasta...	$ds(\text{m}) = v \cdot dt$
1	8,33333333	0,0	0,5	4,16666667
2	9,72222222	0,5	1,0	4,86111111
3	11,11111111	1,0	1,5	5,55555556
4	12,50000000	1,5	2,0	6,25000000
5	13,88888889	2,0	2,5	6,94444444
6	15,27777778	2,5	3,0	7,63888889
7	16,66666667	3,0	3,5	8,33333333
8	18,05555556	3,5	4,0	9,02777778
9	19,44444444	4,0	4,5	9,72222222
10	20,83333333	4,5	5,0	10,41666667
11	22,22222222	5,0	5,5	11,11111111
12	23,61111111	5,5	6,0	11,80555556
13	25,00000000	6,0	6,5	12,50000000
14	26,38888889	6,5	7,0	13,19444444
15	27,77777778	7,0	7,5	13,88888889
16	29,16666667	7,5	8,0	14,58333333
17	30,55555556	8,0	8,5	15,27777778
18	31,94444444	8,5	9,0	15,97222222
Suma de ds =				181,250

c) En la figura 2s el producto  $ds = v \cdot dt$  es el área del rectángulo (base  $\times$  altura).

Gráficamente, hemos calculado las áreas de los rectángulos de la figura 2s, si suponemos que la aceleración es constante en los 9 s.

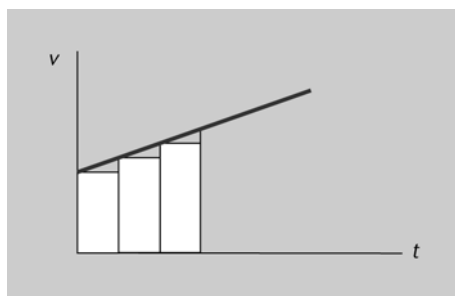


Figura 2s. Aproximación a la función  $v(t)$  mediante intervalos de velocidad constante.

Fijaos que por la forma como hemos definido los intervalos y la velocidad constante en cada uno de ellos, figura 2s, en el ejemplo anterior siempre obtendremos valores del área (del desplazamiento del móvil, en este ejemplo) inferiores al valor exacto. Pero podríamos haber tomado las velocidades como indica la parte b de la figura 3s y en este caso siempre obtendríamos (al subdividir los intervalos más y más) aproximaciones al valor exacto del área, pero siempre por exceso.

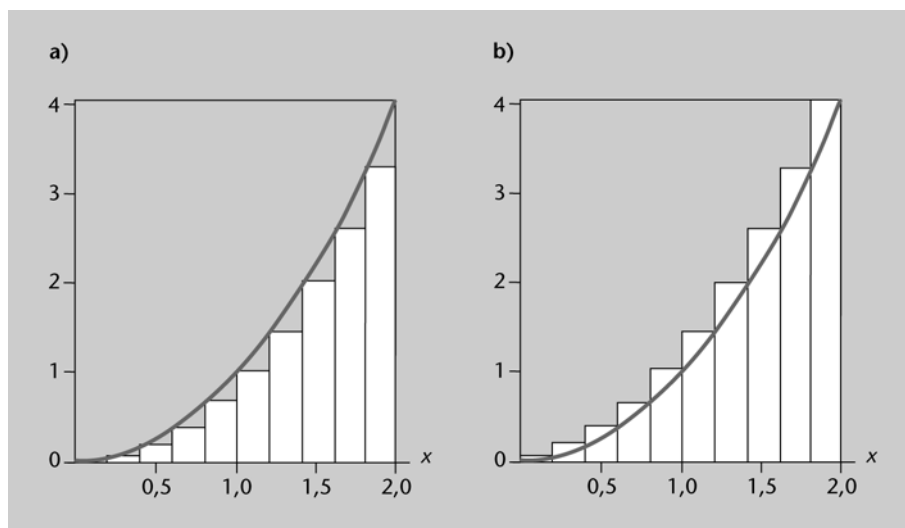


Figura 3s. El área bajo la curva se aproxima mediante rectángulos que quedan: a) siempre por debajo de la curva; b) siempre por encima de la curva.

En otro tipo de curvas, como la de la figura 4s, cuando aproximamos el área bajo la curva por el área de los rectángulos indicados, no podemos saber fácilmente si el resultado peca por exceso o por defecto, pues la parte de área que incluimos de más con el rectángulo primero, A, puede ser mayor o menor que el área que hemos dejado fuera con el segundo rectángulo, B.

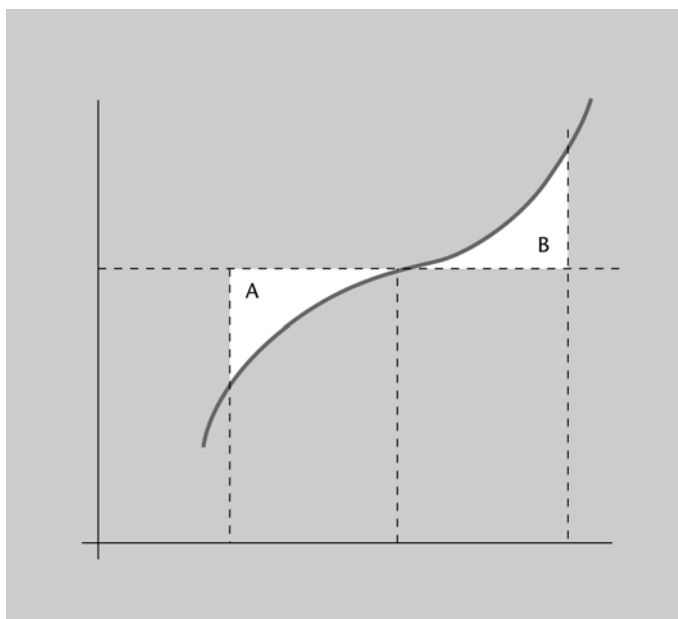


Figura 4s. El área bajo la curva se aproxima mediante el área de los rectángulos indicados, que incluyen un área extra (A) o dejan parte del área fuera (B).

### A3

Para 0.1 s.

Paso número	v(m/s)	tiempo de...	hasta...	ds(m) = v·dt
1	8,333333333	0,0	0,1	0,8333333333
2	8,611111111	0,1	0,2	0,8611111111
3	8,888888889	0,2	0,3	0,8888888889
4	9,166666667	0,3	0,4	0,9166666667
5	9,444444444	0,4	0,5	0,9444444444
6	9,722222222	0,5	0,6	0,9722222222
7	10,00000000	0,6	0,7	1,0000000000
8	10,27777778	0,7	0,8	1,027777778
9	10,55555556	0,8	0,9	1,055555556
10	10,83333333	0,9	1,0	1,083333333
11	11,11111111	1,0	1,1	1,111111111
12	11,38888889	1,1	1,2	1,138888889
13	11,66666667	1,2	1,3	1,166666667
14	11,94444444	1,3	1,4	1,194444444
...	...	...	...	...
85	31,66666667	8,4	8,5	3,166666667
86	31,94444444	8,5	8,6	3,194444444
87	32,22222222	8,6	8,7	3,222222222
88	32,50000000	8,7	8,8	3,250000000
89	32,77777778	8,8	8,9	3,277777778
90	33,05555556	8,9	9,0	3,305555556
Suma de ds =				186,250

**A4**

Paso 0.01 s.

Paso núm.	v(m/s)	tiempo de...	hasta...	ds(m) = v·dt
1	8,333333333	0,0	0,0	0,0833333333
2	8,361111111	0,01	0,02	0,0836111111
3	8,388888889	0,02	0,03	0,0838888889
4	8,416666667	0,03	0,04	0,0841666667
5	8,444444444	0,04	0,05	0,0844444444
6	8,472222222	0,05	0,06	0,0847222222
7	8,500000000	0,06	0,07	0,0850000000
8	8,527777778	0,07	0,08	0,0852777778
9	8,555555556	0,08	0,09	0,0855555556
10	8,583333333	0,09	0,10	0,0858333333
11	8,611111111	0,10	0,11	0,0861111111
...	...	...	...	...
892	33,083333333	8,91	8,92	0,3308333333
893	33,111111111	8,92	8,93	0,3311111111
894	33,138888889	8,93	8,94	0,3313888889
895	33,166666667	8,94	8,95	0,3316666667
896	33,194444444	8,95	8,96	0,3319444444
897	33,222222222	8,96	8,97	0,3322222222
898	33,250000000	8,97	8,98	0,3325000000
899	33,277777778	8,98	8,99	0,3327777778
900	33,305555556	8,99	9,00	0,3330555556
Suma de ds =				187,375

Se puede comparar el resultado anterior con el valor exacto del desplazamiento (suponiendo que la aceleración es constante), que se puede calcular como  $s = v_0 t + (v_{\text{final}} - v_0) \cdot t/2 = 187.5$  m.

30 a 120 km/h en 9s				
30 km/h =	8,333333333 m/s	120 km/h =	33,33333333 m/s	
Valor exacto (suponiendo aceleración constante)				
Espacio = $v_{\text{inicial}} \cdot t + (v_{\text{final}} - v_{\text{inicial}}) \cdot t/2 =$				187.50

Vemos que con un paso de  $dt = 0.01$  s obtenemos un espacio recorrido de 187.35 m, que se aproxima mucho al valor exacto, 187.50 m.

**A5**

Fijaos en el triángulo rectángulo de la figura 5s, que se extiende desde el origen de coordenadas hasta el punto  $x = b$ . La altura del triángulo es  $a$ .

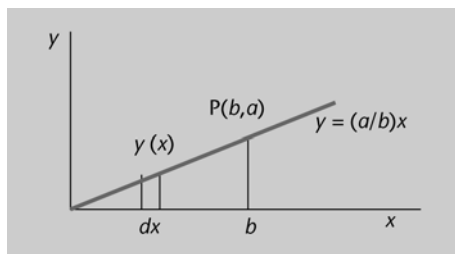


Figura 5s. Triángulo rectángulo.

La recta que pasa por el origen y contiene la hipotenusa, es decir, que pasa también por el punto  $(b,a)$ , es,

$$y = \frac{a}{b} x$$

El área del rectángulo indicado es el área bajo la curva definida por el eje de abscisas y la recta  $y = (a/b) \cdot x$ ,

$$A = \int_0^b dx \cdot y(x) = \int_0^b dx \cdot \frac{a}{b} x$$



y como los factores constantes se pueden sacar de la integral, y la primitiva de la función  $y = x$  es  $y = x^2/2$ ,

$$A = \frac{a}{b} \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = \frac{a}{b} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{2} ab$$

Como ya sabíamos, el área del rectángulo es la mitad de la longitud de la base por la altura.

## A6

La integral entre un instante inicial y otro final de la velocidad instantánea multiplicada por la diferencial (o incremento) de tiempo es igual al incremento del desplazamiento del cuerpo entre estos dos instantes, y se obtiene como la diferencia entre los valores de la función antiderivada de la velocidad, que hemos de calcular en los extremos del intervalo temporal que estamos considerando.

## A7

Tabla 1. Propiedades de las derivadas y de las integrales de funciones

Función, $y$	Derivada, $y'$	Integral, $\int y(x) \cdot dx$	Enunciado (integral)
$A \cdot y$	$A \cdot y'$	$\int A \cdot y \cdot dx = A \int y \cdot dx$	La integral del producto de una función por una constante es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.
$y + z$	$y' + z'$	$\int (y + z) \cdot dx = \int y \cdot dx + \int z \cdot dx$	La integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada función.
$uv$	$u'v + uv'$	$\int u'v \cdot dx = uv - \int uv' \cdot dx$ (regla de integración por partes)	La integral de una función multiplicada por la derivada de otra función es igual al producto de la función por la primitiva de la función derivada, menos la integral de la primitiva anterior por la derivada de la primera función.
$u/v$	$(vu' - uv')/v^2$		---

## A8

Función, $y$	Derivada, $y'$	Integral, $\int y(x) \cdot dx$	Enunciado (integral)
$y = x$	$y' = 1$	$\int k dx = kx + C$	La integral de una constante es ella misma, multiplicada por la variable de integración, sumada a una constante arbitraria.
$y = e^u$	$y' = u' e^u$	$\int e^x dx = e^x + C$	La integral de la función exponencial es la misma función, sumada a una constante arbitraria.
$y = a^u$	$y' = a^u u' \ln a$	$\int u' e^u dx = e^u + C$	La integral de la exponencial de una función por la derivada de esta función es igual a la exponencial de la función, sumada a una constante arbitraria.
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$	La integral de la exponencial de base $a$ de una función, por la derivada de esta función, es igual a la exponencial de base $a$ de la función, dividido por el logaritmo neperiano de la base, sumada a una constante arbitraria.
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	La integral de la inversa de $x$ es el logaritmo del valor absoluto de $x$ , sumada a una constante arbitraria.
		$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u  + C$	La integral de la inversa d'una funció, multiplicada per la derivada de la mateixa funció, és igual al logaritme neperià del valor absolut d'aquesta funció, sumat a una constant arbitrària.

Función, $y$	Derivada, $y'$	Integral, $\int y(x) \cdot dx$	Enunciado (integral)
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	$\int u' \sin u dx = -\cos u + C$	La integral del seno de una función, multiplicado por la derivada de la función, es igual a menos el coseno de la función, sumada a una constante arbitraria.
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$\int u' \cos u dx = \sin u + C$	La integral del coseno de una función, multiplicado por la derivada de la función, es igual al seno de la función, sumada a una constante arbitraria.

**A9**

1) Como se cumple que

- a) la derivada de  $x^4$  es  $4x^3$ ,
- b) la derivada de una suma de funciones es la suma de derivadas, y
- c) la derivada de una constante es nula,
- d) las tres funciones tienen la misma derivada  $4x^3$ .

2) Por las mismas razones anteriores, la derivada de la función es  $4x^3$ .

3) Derivemos la función,  $F(x) = (2/3)x^{3/2} + 4x^{1/2} + C$

$$F'(x) = (2/3)(3/2)x^{3/2-1} + 4(1/2)x^{1/2-1} + 0 = x^{1/2} + 2x^{-1/2}$$

$$F'(x) = x^{1/2} + \frac{2}{x^{1/2}} = \frac{x+2}{x^{1/2}}$$

**A10**

$$a) \int \frac{x^3+3}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (x^{5/2} + 3x^{-1/2}) dx = \frac{x^{7/2}}{7/2} + 3 \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2 \frac{x^{7/2}}{7} + 6x^{1/2} + C$$

$$b) \int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left( \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

En la primera tenemos que el numerador es la derivada del radicando que hay en el denominador, salvo constantes; por tanto, es una función tipo  $u^m \cdot u'$ . La segunda integral es directamente el arc sin  $x$ ,

$$\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\int 4x(1-x^2)^{-1/2} dx - 3 \arcsin x + C = \frac{4(1-x^2)^{-1/2+1}}{(-1/2+1)} - 3 \arcsin x + C = 8(1-x^2)^{1/2} - 3 \arcsin x + C$$

$$c) \int \frac{2x}{x^2+6x+13} dx$$

En el numerador podemos hacer aparecer la derivada del denominador,

$$\int \frac{2x}{x^2+6x+13} dx = \int \frac{2x+6-6}{x^2+6x+13} dx = \int \left( \frac{2x+6}{x^2+6x+13} - 6 \frac{1}{x^2+6x+13} \right) dx$$

La primera es inmediata, y la segunda se puede resolver construyendo el cuadrado del denominador para tener un integrando tipo arco tangente,

$$x^2+6x+13 = (x+A)^2 + B$$

Resulta:  $x^2+6x+13 = (x+3)^2 + 4$ . Por tanto,

$$\int \frac{2x}{x^2+6x+13} dx = \ln(x^2+6x+13) - 6 \int \frac{1}{(x+3)^2+4} dx$$

Para que la segunda sea inmediata, la función arc tg debe ser del tipo  $1+u^2$ , por tanto, la manipulamos un poco,

$$\int \frac{2x}{x^2 + 6x + 13} dx = \ln(x^2 + 6x + 13) - \frac{6}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 1} dx + C$$

y hacemos el cambio de variable  $(x + 3)/2 = u$ ,

$$\int \frac{2x}{x^2 + 6x + 13} dx = \ln(x^2 + 6x + 13) - \frac{6}{4} \int \frac{2du}{u^2 + 1} = \ln(x^2 + 6x + 13) - 3 \arctg u + C$$

y deshacemos el cambio de variable,

$$\int \frac{2x}{x^2 + 6x + 13} dx = \ln(x^2 + 6x + 13) - 3 \arctg\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$$

d)  $\int 2^{\sin x} \cos x dx$

Esta es casi inmediata: el integrando contiene la derivada del exponente. Por tanto,

$$\int 2^{\sin x} \cos x dx = \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C$$

e)  $\int x^2 \ln x dx$

Si integramos por partes, con  $u' = x^2$ ,  $v = \ln x$ , obtenemos,

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3} \left( \ln x - \frac{1}{9} \right) + C$$

f)  $\int x \sin 4x dx$

Esta integral también la abordamos por partes, con  $u' = \sin 4x$ ,  $v = x$ ,

$$\int x \sin 4x dx = -x \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx = -x \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{4} \frac{\sin 4x}{4} + C = \frac{1}{4} \left( \frac{\sin 4x}{4} - x \cos 4x \right) + C$$

## A11

Si la velocidad del vehículo fuese constante, el cálculo sería trivial,

$$\Delta s = v \Delta t = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 15' = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{15'}{60' / \text{h}} = 15 \text{ km} \quad (1s)$$

Pero si el movimiento del vehículo viene descrito por una gráfica como la de la figura 6s, por ejemplo, y estamos en el punto  $(t_1, v_1)$ , lo que calcularíamos de esta manera sería un valor inferior al real porque en los instantes siguientes el vehículo cada vez irá más rápido.

Por contra, el incremento de desplazamiento que calculamos con la ecuación (1s) sería superior al valor real si estuviéramos en el punto  $(t_3, v_3)$  o en el  $(t_4, v_4)$  porque el vehículo reduce la marcha después de los instantes  $t_3$  o  $t_4$ .

El cálculo (1s) sería exacto si estuviéramos en un punto donde la gráfica  $v(t)$  fuera plana, como el  $(t_2, v_2)$ , siempre que la velocidad  $v_2$  se mantuviera constante durante los 15' siguientes al instante  $t_2$ .

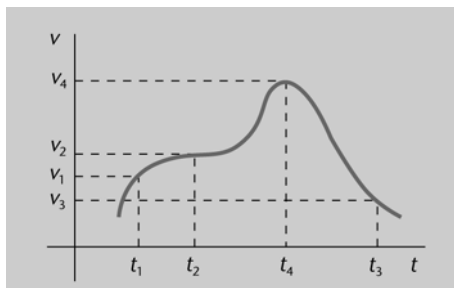


Figura 6s. Gráfica  $v(t)$  de un movimiento complicado

**A12**

a) En un movimiento a velocidad constante, que tendrá una gráfica lineal  $s(t)$ , la pendiente de la recta será la velocidad instantánea (que coincide con la velocidad media) y, por lo tanto,  $\Delta s = ds$ .

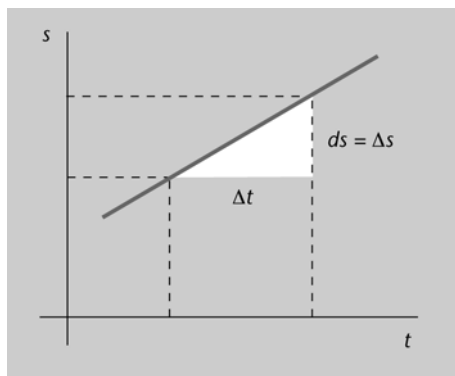


Figura 7s. En una función lineal, el incremento y el diferencial de la función coinciden.

b) Veamos los ejemplos siguientes: b1)  $\Delta s > ds$ , b2)  $\Delta s < ds$ , b3)  $\Delta s > ds$ , b4)  $\Delta s < ds$ :

b1)  $\Delta s > ds$

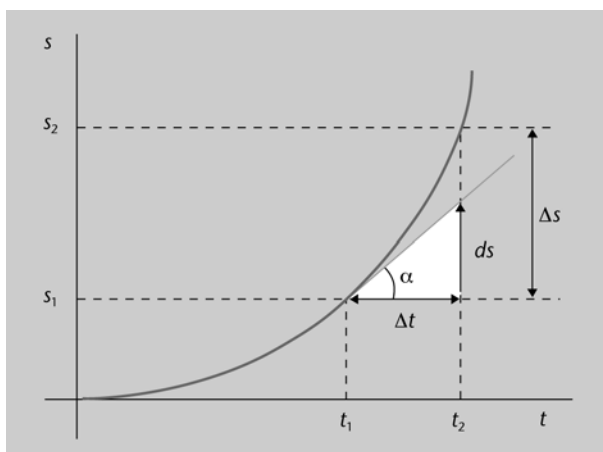


Figura 8s. Una función  $s(t)$  en la que  $ds < \Delta s$  en todos los puntos.

b2)  $\Delta s < ds$

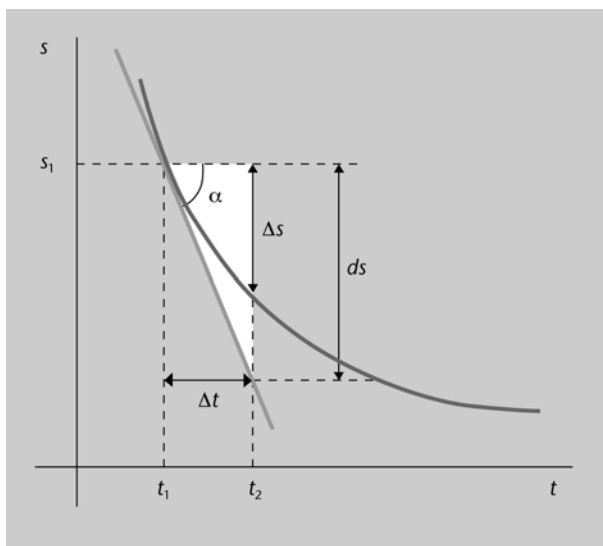


Figura 9s. Una función  $s(t)$  en la que  $ds > \Delta s$  en todos los puntos.

**b3)**  $\Delta s > ds$

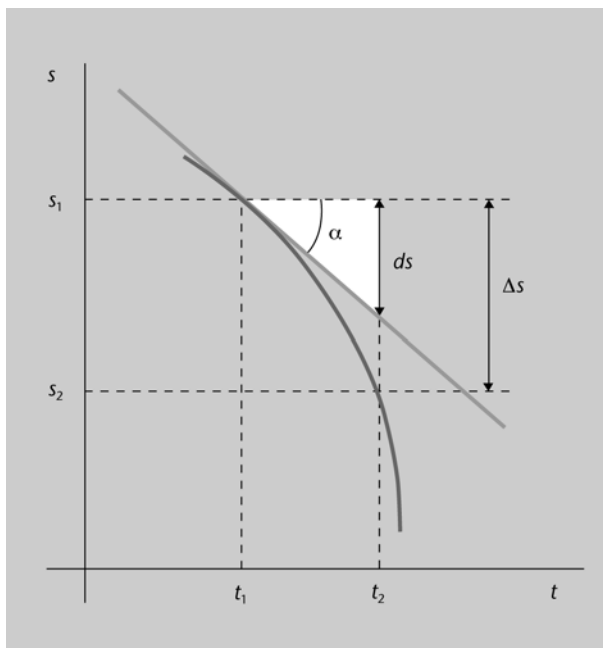


Figura 10s. Una función  $s(t)$  en la que  $ds < \Delta s$  en todos los puntos.

**b4)**  $\Delta s < ds$

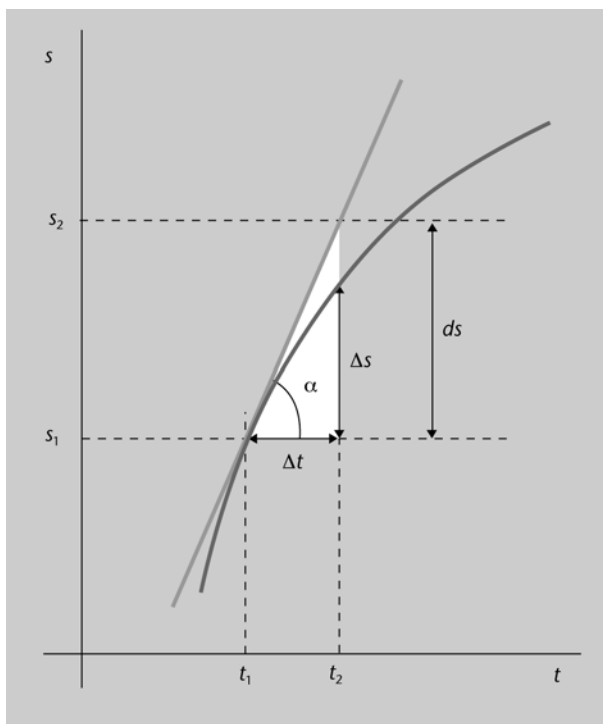


Figura 11s. Una función  $s(t)$  en la que  $ds > \Delta s$  en todos los puntos.

c) En una función que tenga un pico o un valle, la recta tangente en ese punto es, por lo tanto, horizontal.

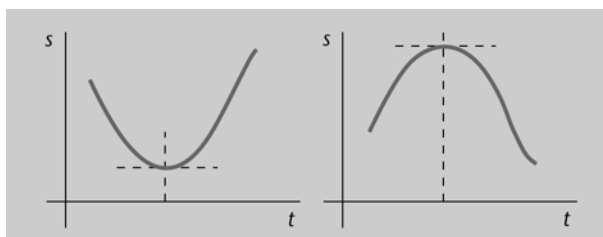


Figura 12s. Ejemplos de gráficas de funciones que tienen puntos donde la recta tangente es horizontal, es decir, la derivada se anula y, por lo tanto,  $ds = 0$ .

En los puntos indicados (máximo o mínimo) en la figura 12s, la diferencial de la función cuando nos movemos por la tangente que pasa por el máximo y mínimo es nula: la función no cambia de valor  $ds = v \cdot dt = 0 \cdot dt = 0$ . (En términos de la gráfica del movimiento de un vehículo, la velocidad es nula en los puntos donde el desplazamiento  $s$  es máximo o mínimo.)

d) La figura 10s muestra un ejemplo de curva que contiene las tres situaciones,  $\Delta s > ds$ ,  $\Delta s < ds$ ,  $\Delta s = ds$ .

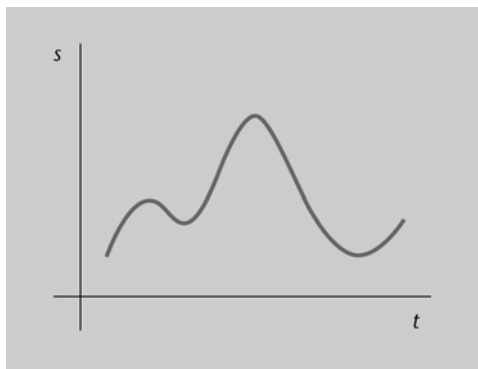


Figura 13s. Una función que tiene zonas donde  $\Delta s > ds$ , otras donde  $\Delta s < ds$  y también tiene cuatro puntos donde  $ds = 0$  (2 máximos y 2 mínimos).

### A13

a) En el caso de que la función sea una recta, la recta secante y la recta tangente coinciden. En este caso,  $\Delta T = dT$  para cualquier valor de  $t$  y cualquier incremento  $\Delta t$ ,

$$dT = -0.02 \, dt$$

b) Como vemos en la relación anterior, la pendiente de la recta es,

$$\frac{dT}{dt} = -0.02 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}} = -1.2 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$$

La derivada temporal de una función  $T(t)$  es la velocidad o el ritmo al que se calienta o se enfría el sistema. Por ello, la pendiente de la recta es la velocidad instantánea de enfriamiento del café: cada segundo la temperatura baja dos centésimas de grado centígrado (o 1.2  $^{\circ}\text{C}$  cada minuto).

### A14

a) Como ya sabemos, la diferencial ( $dv$ ) se puede considerar como una aproximación al incremento de la velocidad,  $\Delta v$ ,

$$dv = a \cdot dt$$

Obtenemos:  $dv = 6 \, \text{m/s}^2 \cdot 3 \, \text{s} = 18 \, \text{m/s}$  y la velocidad a los 3 s de haber hecho la medida será aproximadamente de  $v = 20 \, \text{m/s} + 18 \, \text{m/s} = 38 \, \text{m/s}$ .

b) El valor  $dv = 18 \, \text{m/s}$  representa lo que cambiaría la velocidad del vehículo si la aceleración se mantuviera constante durante el intervalo de tiempo de 3 s. (Lógicamente, si la aceleración no es constante, el incremento de velocidades que tendrá el vehículo durante los 3 s no coincidirán con el valor que hemos calculado,  $\Delta v \neq dv$ , pero serán tanto más parecidos  $\Delta v$  y  $dv$  cuanto menor sea el incremento de tiempo que consideremos.)

### A15

Se pide el signo de la función derivada para un valor cualquiera de la variable independiente, para las funciones de las actividades siguientes del módulo de "Cálculo diferencial".

A5. Se trata de rectas, por tanto, la pendiente será constante y positiva o negativa.

A7. Las parábolas de la sección a) tendrán pendiente variable y negativa o positiva, según estemos a un lado u otro del máximo o mínimo. La pendiente decrecerá, en valor absoluto, conforme nos acerquemos al extremo de la función (máximo o mínimo), hasta anularse en él.

Las parábolas de la sección b) no son funciones  $y(x)$  porque para un valor de  $x$  no tenemos un solo valor de  $y$ . Las pendientes de estas parábolas crecen en valor absoluto conforme nos acercamos al punto común de las dos ramas de la función, hasta tomar un valor infinito en el punto donde la tangente a la curva es vertical.

A17. Si nos acercamos al origen desde un punto alejado del eje  $-X$ , la pendiente va creciendo, siempre positiva, de manera lenta al principio y muy rápidamente al acercarnos al punto  $x = 3$ . Para valores superiores de  $x$ , la pendiente sigue siendo positiva y decreciente, hasta tender a anularse para valores grandes de  $x$ .

A18. La curva tiene pendientes positivas y crecientes para valores de  $x$  menores que el punto donde es máxima, y luego la pendiente es negativa y decreciente. En el máximo la pendiente no está definida, pues la curva tiene dos tangentes, como vimos en la actividad A19 del módulo de “Cálculo diferencial”.

## A16

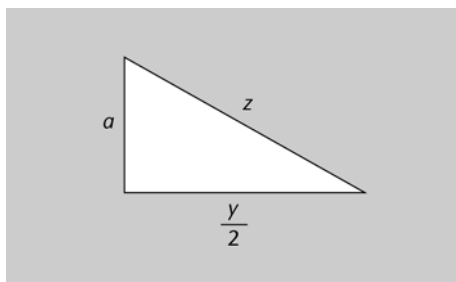
La pendiente de la curva a un lado y al otro de un máximo o de un mínimo cambia de signo, y en el punto donde la función es máxima o mínima, la pendiente es nula.

En otras palabras, la recta tangente a una curva en un punto en el que la función es máxima o mínima tiene pendiente nula, es decir, es una recta horizontal, porque  $\tan 0^\circ = 0$ .

## A17

La superficie que queremos que sea máxima es la del rectángulo más la del triángulo. Si ponemos nombre a cada uno de los lados de la figura, podremos expresar la superficie en función de los lados.

Sea  $x$  la altura del rectángulo e  $y$  la base. Según el enunciado, la base del triángulo es  $y$ . Si llamamos  $z$  a la medida de cualquiera de los otros dos lados del triángulo, que son iguales, ya que el triángulo debe ser isósceles, tenemos tres incógnitas que no son independientes, ya que deben cumplir las dos condiciones siguientes.



**Condición 1:** Interesa que la altura  $a$  del triángulo sea igual a  $3/8$  de la longitud de la base; por lo tanto,

$$a = \frac{3}{8}y$$

Ahora bien, la altura del triángulo, el lado de medida  $z$  y la mitad de la base forman un triángulo rectángulo al cual podemos aplicar el teorema de Pitágoras y establecer una relación entre ellos,

$$z^2 = a^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}y\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{64}\right)y^2 + \frac{1}{4}y^2 = \frac{25}{64}y^2$$

así pues,

$$z = \frac{5}{8}y$$

**Condición 2:** El perímetro de la figura debe de ser de 90 cm y, por ello,

$$2x + y + 2z = 90 \Rightarrow 2x + y + \frac{5}{4}y = 90 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(90 - \frac{9}{4}y\right) = 45 - \frac{9}{8}y$$

Como conclusión, la superficie viene dada por la función,

$$S(y) = x \cdot y + \frac{1}{2}y \cdot a = \left(45 - \frac{9}{8}y\right)y + \frac{1}{2}y \cdot \frac{3}{8}y = 45y - \frac{9}{8}y^2 + \frac{3}{16}y^2 = 45y - \frac{15}{16}y^2$$

Para encontrar el valor de  $y$  que haga máxima esta función, calcularemos su derivada  $S'(y)$  y buscaremos la solución de la ecuación  $S'(y) = 0$ ,

$$S'(y) = 45 - \frac{15}{8}y = 0 \Rightarrow y = 24$$

Comprobemos con la segunda derivada que efectivamente sea un máximo local. Para  $y = 24$ , se tiene,

$$S''(24) = -\frac{15}{8} < 0$$

Dado que el dominio de la variable  $y$  es  $(0, +\infty)$  y únicamente hemos encontrado un punto crítico, que ha resultado ser máximo local, este valor también nos da el máximo absoluto de la función.

A partir de este valor de  $y$ , podemos calcular las otras dos dimensiones,

$$z = \frac{5}{8}24 = 15 \quad x = 45 - \frac{9}{8}24 = 18$$

Por tanto, las dimensiones de la figura son  $x = 18$ ,  $y = 24$ ,  $z = 15$ .

## A18

a)  $y(x) = 0.75x - 3.125 \cdot 10^{-2}x^2 = 0(2s)$

Recordemos que la fórmula que permite encontrar las soluciones a una ecuación de segundo grado como ésta,

$$ax^2 + bx + c = 0(3s)$$

es la siguiente,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Por cierto, esta fórmula debes memorizarla.) Sustituyendo valores,

$$x = 0 \text{ m} \quad y \quad x = 24 \text{ m.}$$

Otra manera de obtener la solución de la ecuación (2s), donde el parámetro  $c$  de la ecuación (3s) es nulo, es escribirla en forma factorizada,

$$x(0.75 - 3.125 \cdot 10^{-2} \cdot x) = 0$$

Si el producto de dos factores es nulo, al menos uno de ellos debe serlo. Obtenemos, pues, la solución trivial:  $x = 0$ , que es el punto de partida de la pelota. Y la otra solución es:  $x = 3.125 \times 10^{-2} / 0.75 = 24 \text{ m}$ .

La solución  $x = 0$  es trivial: la pelota estaba en el suelo en el instante del lanzamiento. Por lo tanto, en  $x = 24 \text{ m}$  la pelota toca el suelo de nuevo.

b) La derivada de la función (16) es sencilla,

$$y'(x) = 0.75 - 2 \cdot 3.125 \cdot 10^{-2} x$$

y al igualar la función derivada a cero para encontrar los máximos y mínimos de la función  $y(x)$ ,

$$y'(x) = 0 \quad 0.75 - 2 \cdot 3.125 \cdot 10^{-2} \cdot x = 0$$

obtenemos,

$$x = 12 \text{ m.}$$

Por lo tanto, en  $x = 12 \text{ m}$ , a la mitad de la trayectoria entre 0 y 24 m, la pelota llega a la altura máxima.

## A19

a) Por ejemplo,

$$p_0(x) = -6$$

$$p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p_6(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

donde  $a, b, c, d, e, f$  y  $g$  pueden ser constantes cualesquiera.

b)

$$y(x) = 3(x-2)^2(x+1) = 3(x^2-4x+4)(x+1) = 3x^3 - x^2 - 8x + 12$$



c) Para resolver la ecuación  $y(x) = 0$  y encontrar los tres ceros de la función, podemos utilizar la calculadora Wiris o bien fijarnos en que antes de hacer las operaciones del apartado b), la función es un producto de dos factores,

$$y(x) = 3(x - 2)^2 (x + 1)(4s)$$

y se anulará, por lo tanto, cuando se anule el primer factor,

$$x = 2$$

o cuando se anule el segundo,

$$x = -1$$

Así, los ceros de la función son tres:

$$x = 2 \text{ (doble) y } x = -1$$

d) Los extremos de una función se obtienen al igualar a cero la derivada de la función,

$$y'(x) = 9x^2 - 2x - 8 = 0$$

o sea, en  $x = -0.838$ ,  $x = 1.06$

Veremos que la anulación de una derivada es condición necesaria, pero NO SUFICIENTE para que la función tenga un extremo. Puede que la función no tenga máximo ni mínimo en un punto, y que sin embargo se anule la derivada en el mismo. Es fácil ver casos en que esto es cierto. Por ejemplo, en una recta horizontal,  $y = 3$ , la primera derivada se anula,  $y' = 0$ , pero no hay máximo ni mínimo. Otro caso más habitual es el del punto  $(t_2, v_2)$  de la figura 6s: la función tiene pendiente nula en ese punto,  $v'(t_2) = 0$ , pero en él no hay ni un máximo ni un mínimo. Se trata de un “punto de inflexión”, en el cual cambia la curvatura de la función.

En este ejercicio supondremos, como así es, que la función  $(4s)$  efectivamente tiene extremos en los dos puntos anteriores).

e) Con la información sobre dónde tiene extremos y dónde corta al eje  $X$ , es fácil imaginarse cómo será la función. Sabemos que se anula en dos puntos y que tienen máximos o mínimos en otros dos puntos. Además, podemos ver que para  $x$  muy grandes, la función,

$$y(x) = 3(x - 2)^2 (x + 1)$$

será positiva, y para valores muy negativos de  $x$ , será negativa.

Por tanto, para  $x$  negativos la función es negativa y crecerá hasta tener un máximo en  $x = -0.838$ . Se anulará en  $x = -1$ , antes del máximo, etc.

Comprobémoslo con Wiris.

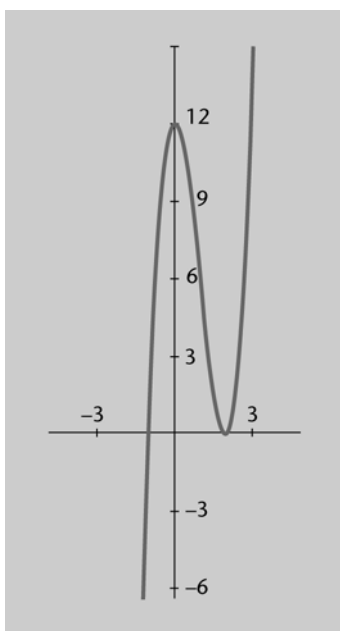


Figura 14s. Representación gráfica de la expresión  $(4s)$ .

**A20**

$$T = -0.02t + 56 = 0$$

$$t = 56 \text{ } ^\circ\text{C}/0.02 \text{ (} ^\circ\text{C/s)} = 2\,800 \text{ s} \approx 47 \text{ min}$$

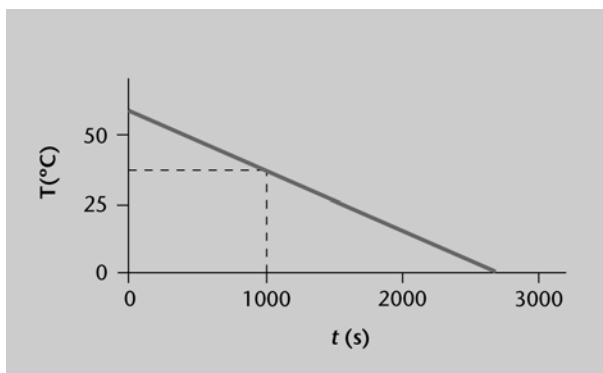


Figura 15s: La temperatura del café que se enfría hasta llegar a 0° C, ecuación (20).

**A21**

El café nunca llegará a 0 °C si no está en una habitación a 0°. La temperatura del café no bajará de la temperatura ambiente, la de la habitación donde esté el café: 15 °C, por ejemplo.

**A22**

La función de la ecuación (23) igualada a cero es,

$$y(x_1) = y_1 + y'_1 (x - x_1) = 0$$

y al despejar  $x$  obtenemos,

$$x = x_1 - y_1 / y'_1$$

**A23**

$$y - y_2 = y'_2 (x - x_2)$$

y al hacer  $y = 0$ , obtenemos,

$$x_3 = x_2 - y_2 / y'_2$$

**A24**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 0$$

En efecto, si  $n = 2$ , por ejemplo, la expresión anterior es,

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

que coincide con la expresión (25),

**A25**

$$y = 0.75x - 3.125 \cdot 10^{-2}x^2$$

Busquemos dónde cambia de signo la función. Probemos, por ejemplo, para  $x = 10$ , que da un valor positivo,

$$= 7.5 - 0.03125 \times 100 = 7.5 - 3.125 > 0$$

Y para  $x = 100$ ,  $y = 75.0 - 0.03125 \cdot 10\,000 = 75.0 - 312.5 < 0$

Por lo tanto, entre 10 y 100 hay un cero.

Calculamos  $y'$

$$y' = 0.75 - 6.25 \cdot 10^{-2}x$$

El primer cero es, pues,

$$x_2 = x_1 - y_1/y'_1 = 10 - y(10)/y'(10)$$

y como,

$$y(10) = 7.5 - 3.125 = 4.375$$

$$y'(10) = 0.75 - 0.625 = 0.125$$

obtenemos,

$$x_2 = 10 - 4.375/0.125 = -25$$

El valor obtenido es negativo y está fuera del intervalo que habíamos determinado, entre 10 y 100. Por tanto, el valor  $x = 10$  no es un buen punto de partida para calcular el cero.

Probemos con  $x = 20$ ,

$$y(20) = 2 \cdot 7.5 - 4 \cdot 3.125 = 2.5$$

y como es un resultado positivo, también nos vale como punto de partida. Calculamos la derivada en este punto,

$$y'(20) = 0.75 - 2 \cdot 0.625 = -0.5$$

Por lo tanto,

$$x_2 = x_1 - y_1/y'_1 = 20 - y(20)/y'(20) = 20 - 2.5/(-0.5) = 25$$

Y ahora tomamos  $x_2 = 25$  como nuevo punto de partida,

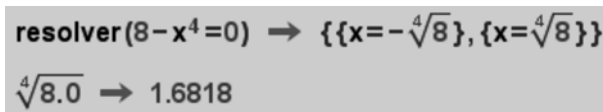
$$x_3 = x_2 - y_2/y'_2 = 25 - y(25)/y'(25) = 25 - (-0.78125)/(-0.8125) = 23.96$$

etc.

Vemos que con un par de iteraciones nos hemos acercado mucho al cero, que está en  $x = 24$ , como hemos visto en la actividad A18.

## A26

El procedimiento con Wiris es el siguiente,



Y a mano: podemos probar con el intervalo  $[1,3]$ , pues la función en  $x = 1$  vale 7, y en  $x = 3$  vale  $-73$ , es decir, cambia de signo,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 0$$

$$y'(x) = -4x^3$$

$$x_2 = 1 - 7/(-4 \times 1) = 2.75$$

$$x_3 = 2.75 - (8 - 2.75^4)/(-4 \times 2.75^3) = 2.1587$$

$$x_4 = 2.1587 - (8 - 2.1587^4)/(-4 \times 2.1587^3) = 1.8178$$


$$x_5 = 1.8178 - (8 - 1.8178^4)/(-4 \times 1.8178^3) = 1.6963$$


$$x_6 = 1.6963 - (8 - 1.6963^4)/(-4 \times 1.6963^3) = 1.68198$$

El cálculo “a mano” con Wiris es muy sencillo, basta con tener la fórmula escrita e ir sustituyendo el resultado de cada iteración en la misma.

$$1.6963 + \frac{(8 - 1.6963^4)}{4 \cdot 1.6963^3} \rightarrow 1.682$$

$$1.682 + \frac{(8 - 1.682^4)}{4 \cdot 1.682^3}$$

y haciendo clic en ,

$$1.682 + \frac{(8 - 1.682^4)}{4 \cdot 1.682^3} \rightarrow 1.6818$$


vemos que en 7 iteraciones hemos llegado al resultado que obtuvo Wiris. Análogamente, se calcularía el otro cero.

### A27

La expresión (32) da la diferencial de la intensidad, es decir, el valor del incremento que tendría la función  $I(x)$  si la pendiente de la curva se mantuviera constante y con el valor que tiene en el punto  $x$ . Se trata de una aproximación al valor del incremento de la función  $I(x)$ , que será más válida cuanto menor sea el incremento de  $x$  que consideramos.

### A28

a) Al integrar, el miembro de la izquierda da  $\ln I$  mientras que el de la derecha da  $-\alpha \cdot x + \text{constante}$ ,

$$\ln I = -\alpha \cdot x + \text{constante}$$

Y si invertimos la función logarítmica, obtenemos la relación (37) con,

$$A = e^{\text{constante}}$$

b) Queremos una función que al derivarla dé  $x$ , por lo tanto,  $y$  será proporcional a  $x^2$ . Concretamente,  $y = \frac{1}{2} x^2$ . Pero si sumamos una constante arbitraria  $A$  a la expresión anterior, también se obtiene la misma derivada, por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es,

$$y = \frac{1}{2} x^2 + A$$

### A29

La integración de la ecuación anterior es también trivial y obtenemos,

$$h = -\frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración arbitrarias (desde el punto de vista de las matemáticas), pero que se tienen que fijar con las condiciones iniciales o condiciones de contorno del problema concreto que estamos resolviendo. En este caso, si sabemos, por ejemplo, que el objeto está a la altura inicial  $h_0$ , podemos determinar la constante  $c_2$ ,

$$h(0) = h_0 = c_2$$

y del conocimiento de la velocidad inicial con la que cae el objeto sacaríamos la constante  $c_1$ .

### A30

a) La caída libre que se describe mediante la ecuación (45) es una caída vertical, mientras que en el caso de la pendiente, el cuerpo cae en la dirección de la pendiente.

b) La física enseña que los movimientos horizontal y vertical de un objeto son independientes. Este principio se aplicará también a los casos de una caída libre o de un tiro parabólico o a la caída de un objeto por una pendiente. Por eso el movimiento vertical en la caída por un plano inclinado o en una caída libre tienen la misma forma matemática, ya que corresponden al mismo tipo de movimiento (actúan las mismas fuerzas: la gravedad).

**A31**

Análogamente al caso de la absorción de una onda por un medio,

$$\frac{dT}{dt} = -kT \quad (a)$$

donde la constante  $k$  expresa la dependencia del enfriamiento con el medio donde está el cuerpo que se enfría. La integración de la ecuación diferencial anterior da,

$$T(t) = T_0 e^{-kt} \quad (b)$$

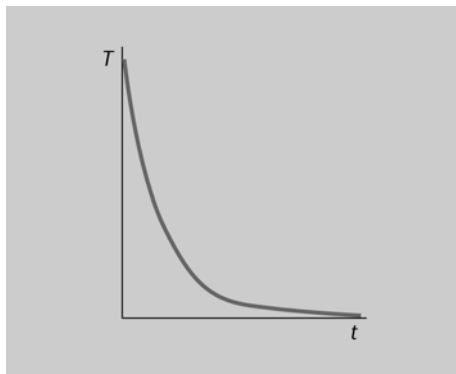
Es decir, la ley de enfriamiento de un cuerpo es una función exponencial decreciente y no una línea recta como la de la figura 1 del módulo 1.

Esta ley de enfriamiento exponencial se llama ley de Newton porque es quien la dedujo por primera vez.

Ya hemos dicho en la actividad A20 que si pasa un tiempo suficientemente grande, el café acaba igualando la temperatura a la del ambiente,  $T_a$ . La ecuación (b) predice que para  $t \rightarrow \infty$  la temperatura tiende a cero. No nos detendremos a ver cómo se tienen que modificar las ecuaciones (a y b) para tener en cuenta este hecho.

**A32**

La relación (b) de la actividad anterior tiene la forma que indica la figura siguiente:



El tiempo de enfriamiento de un café puede durar bastantes minutos (de hecho, según la ecuación (b) del A31, el tiempo de enfriamiento es infinito).

Si hemos medido la temperatura del café durante unos pocos minutos, como en la tabla 1 del módulo 1, nos habremos fijado en una sección breve (entre  $t_1$  y  $t_2$  en la curva de la figura anterior) y esta sección se puede aproximar por una línea recta. Únicamente cuando tuviéramos datos para un periodo de tiempo suficientemente largo de enfriamiento del café, nos daríamos cuenta de que la función que mejor ajusta los datos experimentales es una exponencial.

