

Cálculo diferencial e introducción a las derivadas parciales

Albert Gras i Martí
Teresa Sancho Vinuesa

PID_00183892

Índice

Sobre estos materiales de trabajo	5
1. Análisis de datos de procesos físicos:	
hagamos un experimento	7
1.1. Consejos sobre la representación gráfica de funciones	8
1.2. Funciones de primer grado: la ecuación de una recta	9
2. Funciones reales de variable real	10
2.1. La función $y = y(x)$ o $y = f(x)$	10
3. A veces se conoce la función matemática	12
3.1. Desplazamiento en función del tiempo	12
3.2. Funciones de segundo grado: la ecuación de una parábola	13
3.3. Recapitulemos	14
3.4. Velocidad de caída por la pendiente	14
3.5. Valor medio de una magnitud	16
3.6. Velocidad media	16
3.7. Velocidad instantánea	19
3.8. Cálculo de la velocidad instantánea	20
3.9. Definición de derivada de una función en un punto	21
3.10. Recapitulación	21
4. La derivada como un cociente de diferenciales	22
4.1. Diferencial y derivada de una función	23
4.2. Sobre el concepto de límite	24
4.3. Continuidad, derivabilidad	25
5. Aceleraciones	28
5.1. Derivadas de orden superior	29
5.2. Propiedades de las funciones derivadas y derivadas de las funciones elementales	29
6. Representación de una función como un polinomio	32
6.1. ¿Cómo calcula una calculadora de bolsillo o un ordenador una exponencial; por ejemplo, el valor $e^{1.23}$?	32
6.2. La fórmula de Taylor	33
7. Nociones sobre funciones de varias variables	36
7.1. Funciones de más de una variable	36
Recapitulación: ¿qué hemos aprendido en este módulo?	43
Resolución de actividades	45

Sobre estos materiales de trabajo

El objetivo principal de este módulo es introducir el concepto de derivada de una función y explorar algunas de sus aplicaciones. Daremos también unas nociones sobre funciones de varias variables y el concepto de derivada parcial.

En este módulo trabajaremos con funciones reales de variable real. Una gran cantidad de fenómenos tratados por la física, las ingenierías, las ciencias experimentales, la economía y las ciencias sociales se modelizan en términos de funciones matemáticas. Conocer bien las propiedades de estas funciones permite describir adecuadamente los procesos correspondientes. Las funciones reales de variable real son, además, la herramienta de trabajo básica del análisis matemático.

Recordaremos los conceptos generales más importantes sobre las funciones existentes de variable real y veremos cómo interpretarlos y reconocerlos gráficamente. Haremos también un recorrido por las propiedades de las funciones de mayor interés para un futuro ingeniero (funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas).

1. Análisis de datos de procesos físicos: hagamos un experimento

Empezaremos por ver un ejemplo de cómo modelizar (o representar) matemáticamente los datos de una situación física.

Ejemplo 1: Medimos cómo se enfría un café

Con instrumentos electrónicos de adquisición de datos,¹ hemos obtenido medidas, cada 30 segundos, de la temperatura de un café que se está enfriando; los datos se muestran en la tabla 1. Cuando introducimos la sonda en el café, esperamos un minuto hasta que tomamos la primera medida de la temperatura (de la misma manera que, cuando nos medimos la temperatura corporal con un termómetro, esperamos unos instantes antes de tomar la lectura). Este experimento de enfriamiento del café ha durado sólo unos ocho minutos; no hemos esperado a que el café se enfríe mucho.

Tabla 1. Temperatura de un café que se enfría durante unos minutos.

Tiempo (s)	Temperatura (°C)
60	54.7
90	54.4
120	54.1
150	53.5
180	52.4
210	52.1
240	51.4
270	50.7
300	50.0
330	49.5
360	49.0
390	48.4
420	48.1
450	47.5

A1

Representad gráficamente los datos de la tabla 1.

1. Si tenéis curiosidad por saber cómo se hacen experimentos con sensores, mirad el apartado de E^xAC («Experimentación asistida por calculadora gráfica») de <http://www.fisica-basica.net/propostes-experimentals/propostes-experimentals.htm#exac>

1.1. Consejos sobre la representación gráfica de funciones

Las representaciones gráficas de funciones matemáticas o de tablas de datos se tienen que hacer con cuidado para que, cuando se observen las gráficas, nos podamos hacer rápidamente una idea de lo que se quiere mostrar:

- 1) Hay que indicar qué magnitudes se representan (en el ejemplo anterior, la temperatura T en función del tiempo t).
- 2) Los ejes de coordenadas tienen que expresar las unidades correspondientes a la magnitud que se represente (en el ejemplo anterior, grados centígrados y segundos).
- 3) Hay otros elementos que afectan a la visualización y la claridad de una representación gráfica. Por ejemplo, mientras que las unidades del eje t de la figura 1s se han marcado de 100 en 100, la escala de T va de unidad en unidad.

Observad en la figura 1s que los puntos que representan los datos de la 1 están bastante «alineados» y, por este motivo, se podrían describir matemáticamente por la ecuación de una línea recta, como la que muestra la ec.(1):

$$T(t) = -0.02 t + 56.0 \quad (1)$$

El valor de las constantes de la ec.(1) se ha elegido de manera que la temperatura se mide en °C y el tiempo en s.

A2

Representa la recta anterior, ec.(1), en la misma gráfica donde habéis representado los datos de la tabla 1.

Más adelante volveremos sobre el problema de cómo encontrar la función matemática que represente unos datos experimentales determinados. Una vez disponemos de la función que ajusta unos datos, como la recta en el caso anterior, tenemos la opción de interpolar² entre los valores conocidos y de extrapolar a valores que se salen del intervalo tabulado (mirad la siguiente actividad).

A3

- a) Comparad el valor de la temperatura que da la ec.(1) para algunos valores del tiempo con los valores de la tabla 1 (por ejemplo, para $t = 90$ s, $t = 360$ s, etcétera).
- b) Calculad también qué temperatura predice la ec.(1) para $t = 190$ s o para $t = 500$ s y $t = 3\,000$ s, tres valores que no aparecen en la 1. ¿Tienen sentido los valores que se obtienen?

2. *Interpolar* es calcular un valor que se encuentra entre dos valores de una tabla. *Extrapolar* es calcular un valor que está más allá (por encima o por debajo) de los valores extremos de una tabla.

1.2. Funciones de primer grado: la ecuación de una recta

La expresión (1) es un caso particular de la ecuación de una recta, o función «afín», que matemáticamente se suele escribir así:

$$y = ax + b \quad (2a)$$

O bien así:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (2b)$$

donde:

- x es la variable independiente;
- y es la variable dependiente;
- a, b, m, x_1, y_1 son constantes.

La variable independiente y la variable dependiente en una función «afín» están elevadas a la potencia 1.

Siempre que la relación entre dos variables sea de proporcionalidad directa:

$$(y - \text{constante}) \text{ proporcional a } (x - \text{constante})$$

la representación analítica de esta relación será la de las ecs.(2a) y (2b), y la representación gráfica será una recta. Como caso particular, podemos ver escrita esta relación de proporcionalidad también así:

$$y = kx \quad (2c)$$

donde k es una constante.

A4

¿Qué significa «proporcionalidad directa»? Poned algún ejemplo sencillo de proporcionalidad directa.

¿Y qué tipo de rectas se pueden representar con ecuaciones como la (2a) y la (2b) o la (2c)?

A5

a) Representad las expresiones (2a), (2b) y (2c) para algunos valores positivos o negativos de los parámetros que vosotros mismos podéis elegir. (Tomad valores sencillos, como +2, -3, +5, etcétera.)

b) Como la ec.(2a) y la (2b) representan la misma función lineal, las constantes a y b , y las constantes m, x_1 e y_1 tienen que estar relacionadas. Encontrad esta relación.

Por lo tanto, como hemos visto en el caso del café que se enfría, si tenemos datos experimentales de cómo varían determinadas magnitudes, podemos encontrar las funciones matemáticas que las representan. El caso más sencillo se da cuando hay una relación afín entre estas magnitudes y la representación gráfica es una línea recta.

2. Funciones reales de variable real

De la misma manera que hemos visto en el caso del café que se enfría, algunos fenómenos físicos, sociales y económicos, algunos procesos industriales, etcétera, se pueden modelizar por medio de funciones matemáticas. A veces, las funciones se conocen en forma tabular, como en el ejemplo del café. En otros casos, se conoce la expresión matemática que describe el fenómeno; entonces, a partir del valor de la variable independiente y mediante la realización de cálculos elementales, se obtiene el valor de la variable dependiente. Tendremos, por ejemplo, funciones como las siguientes:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ T &= f(t) \\ y &= f(t) \\ z &= f(y) \\ I &= f(\omega) \end{aligned} \tag{3}$$

O en otra notación equivalente para las mismas funciones (3):

$$\begin{aligned} y &= y(x) \\ T &= T(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(y) \\ I &= I(\omega) \end{aligned} \tag{3'}$$

Las variables independientes en los ejemplos anteriores son, respectivamente, x , t , t , y , ω , mientras que las variables dependientes son, respectivamente, y , T , y , z , I . Así, por ejemplo, en la expresión $z = f(y)$, f será la función matemática cuya expresión analítica indica qué operaciones hay que hacer con el valor de y para obtener el valor correspondiente de z . Y análogamente en los otros casos.

2.1. La función $y = y(x)$ o $y = f(x)$

En la mayoría de los casos, cada variable tiene un nombre y un significado físico concreto; por lo tanto, tiene unas unidades en las que se mide. Hay que tener en cuenta estas unidades al operar con las variables y al hacer las representaciones gráficas correspondientes. En algún momento, sin embargo, y siguiendo la tradición matemática, cuando queramos generalizar algunas definiciones, conceptos, algoritmos, etcétera, nos referiremos a la función «abstracta»:

$$y = f(x) \tag{4}$$

o bien, equivalentemente, a la función:

$$y = y(x) \tag{4'}$$

La función $y(x)$ representará cualquiera de las funciones que podamos definir en física, en ingeniería, etc. Y ésta es la potencia de las matemáticas, que permiten analizar funciones y sus propiedades en «abstracto» sin tener que preocuparse de si son una buena representación de alguna situación «real» o no lo son.

3. A veces se conoce la función matemática

Hemos visto que, si hacemos un experimento y medimos determinadas magnitudes, podemos encontrar la función matemática que describe los datos experimentales. A menudo, sin embargo, tenemos la situación contraria: conocemos la función matemática, y queremos representarla gráficamente y analizar la situación física que representa.

3.1. Desplazamiento en función del tiempo

Ejemplo 2: Caída por una pendiente

Imaginemos un objeto que cae por una pendiente (un desnivel, un tobogán, etcétera), como en la figura 1.

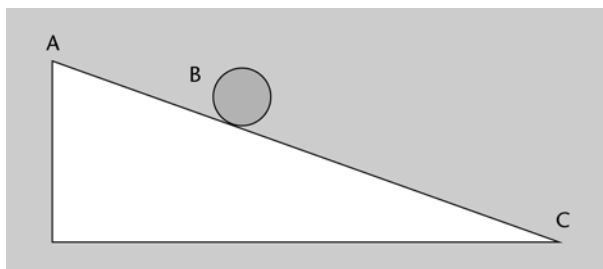


Figura 1: Un objeto que cae por un desnivel que tiene una longitud (AC) de 4 m.

El análisis de un fenómeno resulta a menudo más fácil si se simplifica la situación real. En este caso se puede suponer, por ejemplo, que, en lugar de un objeto, lo que cae es una masa puntual sin dimensiones, que denominamos «partícula».³

Esta descripción del objeto que cae como un objeto simplificado (una masa puntual) y la descripción de la pendiente (un plano inclinado con sus irregularidades o imperfecciones) por una línea recta inclinada son los primeros pasos hacia una **modelización matemática** del fenómeno o del proceso que estamos analizando. Los modelos contienen a menudo diversas hipótesis adicionales que simplifican el problema, como cuando despreciamos el efecto del rozamiento del objeto con el plano inclinado o con el aire.

La función matemática que describe en cada instante la posición del punto que cae por la pendiente se llama **ecuación del movimiento**. (Así, hablamos, por ejemplo, de la ecuación del movimiento de un satélite que se envía a Marte, o de la ecuación del movimiento de un haz de electrones que viaja por un tubo de rayos catódicos y que contribuye a formar la imagen en la pantalla de un televisor convencional.)

Supongamos que alguien ha hecho el experimento de caída por una pendiente que mide 4 m de longitud, y ha encontrado que la ecuación del movimiento que da la distancia recorrida por la masa puntual en función del tiempo es:

$$s = 8.8 t^2 \quad (5)$$

3. Incluso, si nos imaginamos que cae una bola, y no una masa puntual, el problema se complica un poco ¡porque la bola puede dar vueltas!

donde s es el desplazamiento de la masa puntual sobre la trayectoria, es decir, sobre el recorrido de la partícula que se mueve. En la ec.(5), t se mide en segundos y s se mide en centímetros.

A6

Contestad las siguientes cuestiones:⁴

1) ¿Por qué es $s = 0$ cm cuando $t = 0$ s?

(Fijaos en que s puede representar la magnitud ‘distancia recorrida’ o la unidad de tiempo, ‘segundo’ o ‘segundos’, según el contexto. Las magnitudes suelen representarse en cursiva, como $s = 8.8...$ en la ec.(5), y las unidades, en letra normal, como $... = 0$ s).

2) ¿Qué distancia, Δs , recorre el punto entre los instantes $t = 1$ s y $t = 2$ s?

Δs se lee «delta (de) s» o «incremento» (o variación) de la variable s y representa la diferencia entre dos valores de s . En general:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

3) Dibujad la representación gráfica de la función (5). (Recordad los consejos sobre representación gráfica del apartado 1.1.)

En una gráfica donde representamos unos cuantos puntos de una función, podemos unir a mano los puntos con el fin de tener una idea de la curva que se representa: en el caso de la actividad anterior, ec.(5), cuando unimos los puntos de la gráfica obtenemos una «parábola» que pasa por el origen de coordenadas (figura 6s).

3.2. Funciones de segundo grado: la ecuación de una parábola

La función matemática que describe la ec.(5) se llama **parábola**. Una parábola es la gráfica que resulta de representar un polinomio de grado 2. En el caso más general, este polinomio tiene la forma:

$$y(x) = ax^2 + bx + c \quad (6)$$

O, en el caso del movimiento de la partícula por la pendiente, figura 1, donde la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente el espacio recorrido:

$$s(t) = at^2 + bt + c \quad (6')$$

En las ecs.(6) y (6'), a , b y c son constantes. En el caso que estamos analizando, ec.(5), las constantes son $a = 8.8 \text{ cm/s}^2$, $b = c = 0$.

Aunque matemáticamente podemos dar cualquier valor a la variable t , los valores negativos no tienen sentido en el problema de la pendiente ($t = -3$ s serían 3 segundos antes de poner en marcha el cronómetro o de empezar a caer el objeto). Además, un valor como $t = 7$ s da un espacio recorrido de 431.2 cm, mayor que la longitud de la pendiente (¡hemos supuesto en el pie de la figura 1 que sólo mide 4 m!).

4. Nota: Podéis reconocer la ec.(5) como un caso particular de un movimiento determinado que se estudia en física.

Es decir, que una función matemática puede ser una representación de un proceso, pero siempre sujeta a determinadas restricciones. En este ejemplo, el intervalo de validez de la variable t comienza en $t = 0$ y acaba en el momento que la partícula llega al pie del plano inclinado, hecho que ocurre, según la ec.(5) cuando $s = 4$ m, es decir, en el instante $t = \sqrt{400 \text{ cm}/8.8 \text{ cm/s}^2} = 6.7$ s

Como función matemática, la ec.(5) tiene la forma cualitativa de la figura 2, donde las flechas indican que la función crece sin límite a derecha o a izquierda.

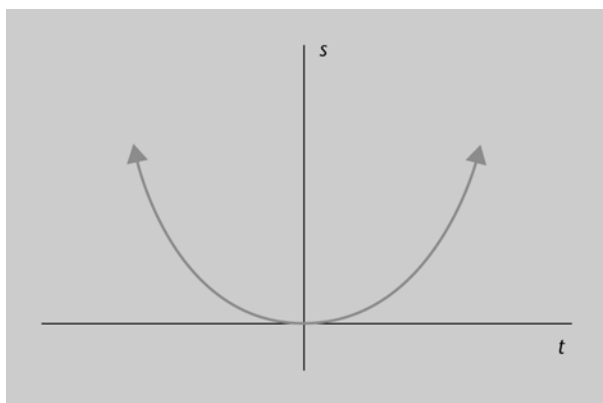


Figura 2: La función matemática $s(t) = A \cdot t^2$ si la constante A es positiva.

A7

- Trazad a mano algunas parábolas que se podrían describir con la ec.(6); considerad también qué ocurre según el signo del parámetro a .
- Representad cualitativamente algunas parábolas que no se podrían describir con la ec.(6).

3.3. Recapitulemos

En el experimento del café que se enfría, tenemos una tabla de valores de la temperatura en función del tiempo, que hemos representado, y hemos encontrado la función que mejor se ajusta a los datos. Hemos obtenido una línea recta y una función, por lo tanto, afín.

En el caso de la caída de un objeto por una pendiente, nos han dado la función que describe el movimiento en función del tiempo, una función cuadrática (el mayor exponente de x es 2), y hemos hecho la representación y obtenido una parábola.

Las rectas y las parábolas (o las funciones de primero y segundo grado) son funciones sencillas pero que aparecen frecuentemente en las matemáticas aplicadas.

3.4. Velocidad de caída por la pendiente

Ahora nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cae el objeto por la pendiente siempre a la misma velocidad?

La respuesta es «no». Sabemos por experiencia propia que ¡el objeto se desliza cada vez más y más rápidamente!

¿Y cómo podemos encontrar la velocidad⁵ en cada instante del punto que cae? Por ejemplo, ¿qué velocidad tiene en el instante $t = 4$ s?

Dado que la velocidad de un objeto en movimiento se define como el espacio que recorre el objeto por unidad de tiempo, podemos calcular la posición del móvil en dos instantes (figura 3), en el instante $t = 4$ s y, por ejemplo, en el instante $t = 6$ s, y dividir el incremento de desplazamiento Δs por el correspondiente incremento de tiempo,

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (7)$$

El símbolo \bar{v} es una manera de representar valores medios. La ec.(7) es la expresión de la velocidad media del objeto durante el intervalo de tiempo Δt .

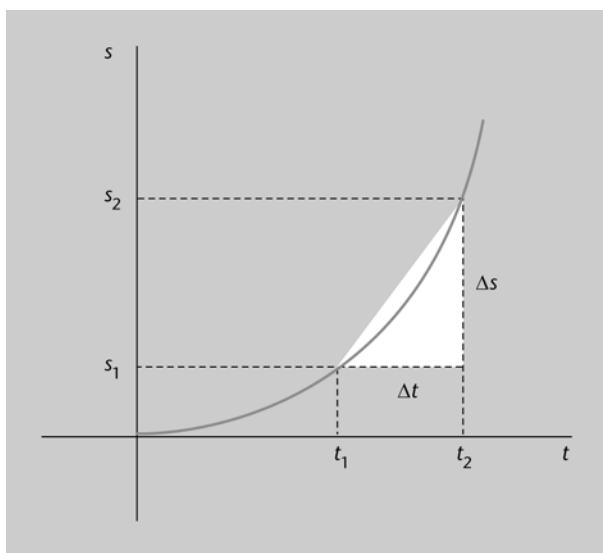


Figura 3: Incremento de desplazamiento Δs para un incremento de tiempo Δt , a partir de un instante inicial t_1 y una distancia inicial recorrida s_1 .

A8

Calculad en m/s y en km/h la velocidad media del objeto descrito por la ec.(5) cuando está cayendo entre 4 s y 6 s.

El resultado que obtenemos⁶, $\bar{v} \cong 3.17$ km/h, es la **velocidad media** del objeto durante los 2 s que van del instante $t = 4$ s al $t = 6$ s.

Ya hemos calculado la velocidad media del objeto que cae durante los 2 s que van de los 4 s a los 6 s. ¿Qué pasa si consideramos un incremento de tiempo más corto?

5. En este curso no distinguiremos entre rapidez o celeridad y velocidad; hablaremos sólo de velocidad. Técnicamente, la rapidez o celeridad nos da el espacio recorrido por unidad de tiempo, mientras que la velocidad incluye, además, la dirección y el sentido del movimiento. La celeridad o rapidez es el módulo del **vector de velocidad**. Como sólo consideraremos distancias recorridas en una dirección dada o a lo largo de una trayectoria, no es necesario hacer esta precisión.

6. El símbolo \cong se lee «aproximadamente igual a».

A9

Calculad ahora (también en km/h) la velocidad media del objeto que cae, en los 0.6 s que van de $t = 4$ s a $t = 4.6$ s.

Observa que ahora obtenemos $\bar{v} \cong 2.74$ km/h, un valor diferente del valor medio obtenido antes, 3.17 km/h, para otro intervalo temporal. Es decir, la velocidad media del móvil no es constante: ¡varía según en qué intervalo de tiempo la calculemos!

Eso no es ninguna sorpresa: ya sabemos que el objeto cae por la pendiente cada vez más deprisa, y, por lo tanto, según el intervalo de tiempo que consideramos, estaremos calculando valores medios de conjuntos de velocidades diferentes.

3.5. Valor medio de una magnitud

Hagamos un inciso: ¿Qué significa el término «medio» o «media»? Por ejemplo, qué entendemos cuándo decimos que:

- a) El número medio de hijos por pareja es de 1.8 hijos.
- b) La calificación media que ha obtenido un alumno en las asignaturas de primer curso de Telecomunicación es de 7.6 puntos.
- c) La velocidad media del objeto que cae por el plano inclinado, entre $t = 4$ s y $t = 4.6$ s, es de 2.74 km/h.

A10

¿Qué significa el valor medio? Aplicad la definición que deis de valor medio a los ejemplos a), b) y c) anteriores.

Como el concepto de valor medio es importante, conviene que lo tratemos un poco más.

A11

Aplicad el concepto de valor medio que se ha discutido en la actividad A10 para explicar qué significan las velocidades calculadas en las actividades A8 y A9.

3.6. Velocidad media

Por lo tanto, la velocidad media que hemos calculado en la actividad A9 es la velocidad que tendría el cuerpo que cae desde el instante $t = 4$ s y durante el intervalo de tiempo de 0.6 s, si se tratara de un movimiento uniforme durante el intervalo $\Delta t = 0.6$ s.

En general, dados dos puntos (t_1, s_1) y (t_2, s_2) de la trayectoria (figura 4) con $s_2 = s_1 + \Delta s_1$ y $t_2 = t_1 + \Delta t_1$, el cálculo de la velocidad media en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se efectúa así:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad (8)$$

Si trazamos la recta secante que corta la gráfica de la función $s(t)$ (figura 4), en los dos puntos (t_1, s_1) y (t_2, s_2) , el cálculo de la velocidad media, definida mediante un cociente, corresponde al cálculo de la tangente del ángulo que forma la recta secante a la trayectoria⁷ con una recta horizontal (figura 4). La tangente trigonométrica de este ángulo, $\tan \alpha$, se llama **pendiente de la recta secante**.

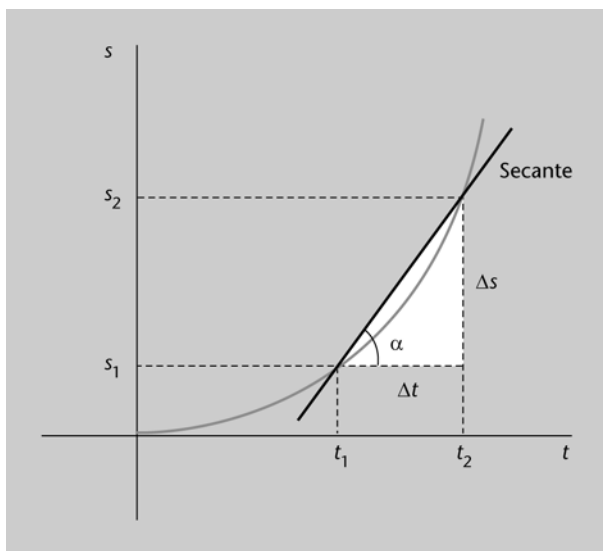


Figura 4: Recta secante que corta a la curva por los puntos que definen los incrementos de desplazamiento y de tiempo. El ángulo α es el que forma la recta secante con una recta horizontal que pasa por el punto inicial del intervalo.

Como ya sabéis, la tangente de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como el cociente del cateto opuesto al ángulo, por el cateto contiguo (figura 5):

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad (9)$$

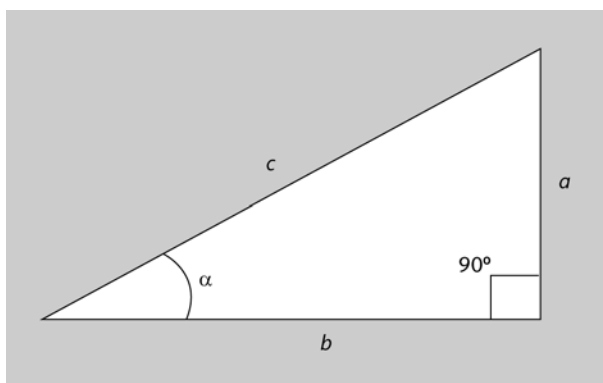


Figura 5: Triángulo rectángulo, catetos a y b e hipotenusa c . La tangente del ángulo α es $\tan \alpha = \frac{a}{b}$.

Por lo tanto, podemos decir que, para el triángulo de la figura 4, que tiene como catetos Δs y Δt , la pendiente de la secante, ec.(8), es la velocidad media del objeto en el intervalo Δt :

$$\bar{v} = \tan \alpha \quad (10)$$

7. Nota: en este módulo el término *trayectoria* se utiliza como sinónimo de ecuación del movimiento, aunque este uso no es totalmente preciso. Es decir, cuando hablamos de trayectoria nos referimos a la curva que describe la ecuación del movimiento $s(t)$.

Ya sabemos que las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etcétera) no tienen dimensiones: se calculan como cocientes de longitudes. Pero en el caso de la velocidad media de un móvil, los catetos tienen dimensiones diferentes (espacio y tiempo) y, por lo tanto, el cociente tiene dimensiones de longitud/tiempo, es decir, de velocidad. Más correctamente, pues, la ec.(10) se tendría que escribir así:

$$\bar{v} = \tan \alpha \times \frac{(\text{unidades de } \Delta s)}{(\text{unidades de } \Delta t)} \quad (10')$$

No utilizaremos esta notación tan «recargada»; sin embargo, hay que tener presente que las magnitudes en física e ingeniería suelen tener dimensiones.

A la vista del significado gráfico de la velocidad media, ya podemos interpretar cualitativamente, en el caso de la caída por la pendiente, lo que hemos encontrado en las actividades A8 y A9: si el intervalo de tiempo que consideramos para calcular el valor medio es menor, la velocidad media también es menor (figura 6). La secante número 3 tiene más pendiente que la secante 2, y ésta más que la 1, porque estamos considerando intervalos de tiempo cada vez mayores, $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$, $t_4 - t_1$, en un proceso en el que la velocidad del objeto aumenta constantemente.

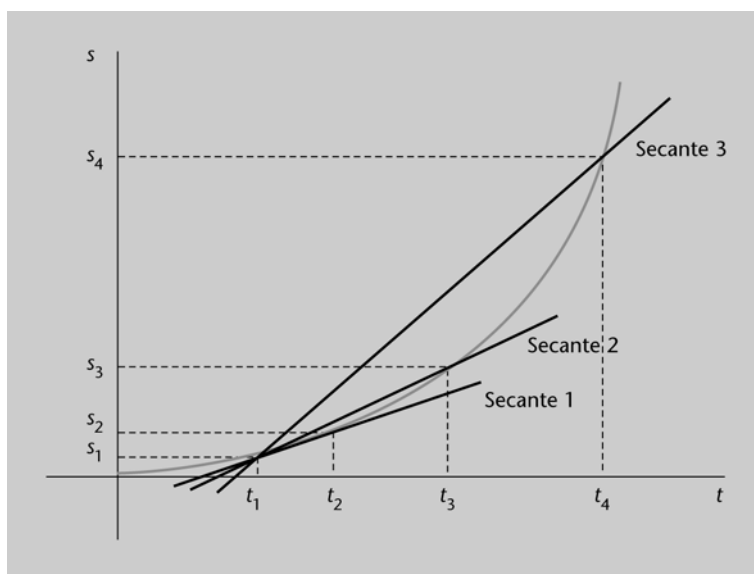


Figura 6: Tres secantes que pasan por el punto (t_1, s_1) . Para una función creciente como la representada, cuando el valor del incremento de tiempo aumenta, la pendiente de la secante también aumenta.

A12

- Escribid la expresión de la pendiente de las tres rectas secantes de la figura 6 con los datos que se dan. Por ejemplo, la secante 1 es la que va del punto (t_1, s_1) al punto (t_2, s_2) , etc.
- Definid a qué llamamos *pendiente* de una recta.

Recordemos que la pendiente de las rectas secantes de la figura 6 representa la velocidad media del objeto cuando se mueve entre los dos instantes que definen la secante. Y esta velocidad media sería la que

tendría que tener el objeto para moverse a velocidad constante durante el intervalo Δt y para tardar el mismo tiempo en recorrer Δs que en el movimiento real.

3.7. Velocidad instantánea

Como hemos visto en las actividades A8 y A9, la velocidad *media* de un objeto depende del instante t en que la calculamos y del intervalo Δt que utilizamos para calcularla. Ahora bien, ¿cuál es la velocidad *instantánea*, es decir, la velocidad que tiene en un instante determinado el objeto que cae por la pendiente?

Con el fin de llegar al concepto de velocidad instantánea, podemos pensar qué pasa si el intervalo de tiempo que utilizamos en el cálculo de la velocidad lo hacemos cada vez más corto. En la figura 6 se ve que las rectas secantes, trazadas desde el mismo punto (t_1, s_1) , para incrementos de tiempo cada vez menores, se acercan cada vez más a la recta que es tangente a la curva en el punto (t_1, s_1) .

Por ello, la *velocidad instantánea* del objeto que cae por la pendiente, en el instante t_1 , en que el objeto está en el punto de desplazamiento s_1 , se define como la *pendiente de la recta tangente a la curva en aquel punto* (figura 7).

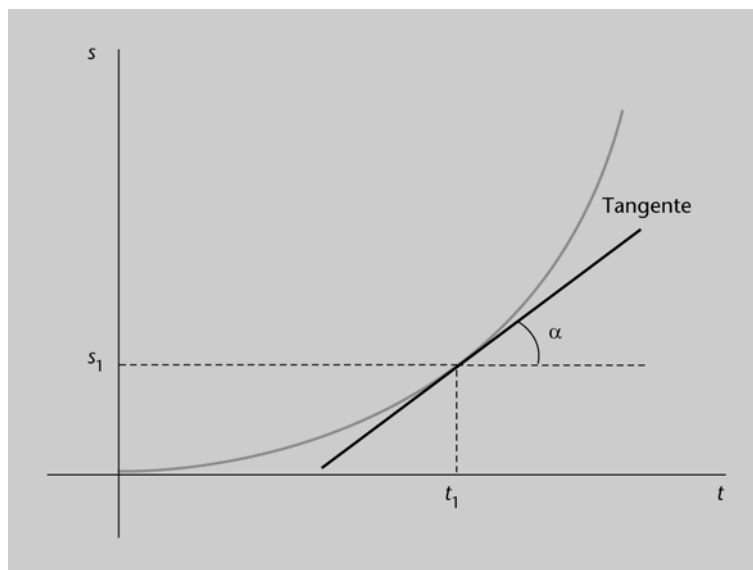


Figura 7: Recta tangente a la curva en el punto (t_1, s_1) . La pendiente de esta recta es la velocidad instantánea calculada en t_1 .

Podemos escribir, simbólicamente, para la velocidad instantánea v :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} \quad (11a)$$

Es decir, recordando la ec.(8):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (11b)$$

A13

Supongamos que alguien ha medido (no importa cómo) la velocidad del objeto que cae por la pendiente en el instante $t_1 = 3$ s, y el resultado es de 52.8 cm/s. ¿Qué significa este valor?

La velocidad instantánea o velocidad en un instante se definirá, pues, como aquella velocidad a la que se desplazaría un móvil por unidad de tiempo, a partir de aquel instante, si la velocidad se mantuviera constante (es decir, si la posición cambiara uniformemente con el tiempo).

Como sabemos, la representación gráfica de la velocidad instantánea es la de una recta tangente a la función de desplazamiento en aquel instante de tiempo.

3.8. Cálculo de la velocidad instantánea

¿Cómo podemos calcular analíticamente, y no gráficamente, la velocidad instantánea? Haremos operativa la definición que hemos dado en la ec.(11b):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (11b)$$

Por ejemplo, calculemos la velocidad instantánea del objeto que cae por la pendiente en el instante $t = 0.8$ s. Tenemos que calcular el límite para $\Delta t \rightarrow 0$ de la función de velocidad media obtenida para un instante determinado y un incremento de tiempo determinado, $\bar{v}(t, \Delta t)$. En primer lugar, escribiremos la expresión general de la velocidad media a partir de $t = 0.8$ s y para un Δt genérico. Después, calcularemos el límite de esta expresión cuando el incremento de tiempo tiende a cero.

A14

- a) La posición del cuerpo cuando $t = 0.8$ s, $s(0.8 \text{ s}) = \dots$
- b) La posición del cuerpo en un Δt genérico posterior, $t = 0.8 + \Delta t$, $s(0.8 + \Delta t) = \dots$
- c) El desplazamiento del cuerpo durante el incremento de tiempo Δt ,
 $\Delta s = s(0.8 + \Delta t) - s(0.8 \text{ s}) = \dots$
- d) La velocidad media calculada a partir de $t = 0.8$ s, durante el intervalo Δt :
 $\bar{v}(0.8, \Delta t) = \Delta s / \Delta t = \dots$
- e) La velocidad en el instante $t = 0.8$, $v(0.8) = \dots$

Por lo tanto, el objeto cae en el instante $t = 0.8$ s a 14.08 cm/s, o sea, a unos 0.51 km/h.

Análogamente, podemos calcular la velocidad del objeto en cualquier instante t : en primer lugar obtenemos la función $\bar{v}(t, \Delta t)$ y después calculamos el límite cuando Δt tiende a cero.

A15

Repetid la actividad A14 para un instante t cualquiera, en lugar del instante particular $t = 0.8$ s. Comprobad en el foro de debate que el resultado coincide con el de vuestros compañeros.

3.9. Definición de derivada de una función en un punto

En general, se define la derivada de una función $s(t)$ en un punto determinado t , y la representamos con el símbolo s' , como el límite del cociente incremental $\Delta s/\Delta t$ cuando el intervalo de la variable independiente tiende a cero:

$$s' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (12)$$

Pero este procedimiento es el que se ha utilizado para calcular la velocidad instantánea, es decir:

$$v = s' \quad (13)$$

Por lo tanto, la velocidad instantánea es la derivada respecto al tiempo de la función espacio recorrido.

3.10. Recapitulación

En la descripción matemática de procesos fisicoquímicos y de procesos de interés en ingeniería, especialmente los procesos que evolucionan en el tiempo, resulta conveniente introducir el concepto de valor medio de una función, de valor instantáneo, de límite y de pendiente o derivada.

Ahora nos planteamos un nuevo problema: el de calcular incrementos de la función; y resultará conveniente la introducción de un nuevo concepto: el de diferencial de una función.

4. La derivada como un cociente de diferenciales

El problema que nos planteamos en este apartado es cómo calcular la evolución o el cambio de una función cualquiera, $y(x)$, si conocemos el valor que tiene en un punto determinado, x . Discutiremos, en primer lugar, el caso concreto de un objeto que se desplaza y que caracterizamos con la función que da el espacio recorrido en función del tiempo.

La cuestión es, pues: Conocido el valor $s_1 = s(t_1)$, ¿cuánto vale la función en un instante posterior $t_1 + \Delta t$? En la figura 8 tenemos la representación de la función $s(t)$. ¿Qué pasará si, a partir del punto (t_1, s_1) , nos movemos por la recta tangente en este punto y no por la curva que define la función? Si conocemos el valor de la función en el punto $t = t_1$, $s_1 = s(t_1)$, y el valor de la pendiente de la función en el mismo punto, $s'(t_1)$, y queremos saber el valor de la función en el punto $t_1 + \Delta t$, entonces si nos movemos un incremento de tiempo Δt por la recta tangente, obtenemos el valor $s_1 + \Delta s$, en lugar del valor exacto $s_1 + \Delta s$.

Esta idea nos permite introducir un nuevo concepto, el de **diferencial de una función**. Definimos la diferencial de la posición (ds) a partir de un instante t cualquiera (y de la posición correspondiente s), y para un intervalo arbitrario Δt . Así, el diferencial de la función es lo que se desplazaría el objeto a partir de este instante t y durante el intervalo de tiempo Δt si lo hiciera con velocidad constante. La expresión matemática de este concepto es la siguiente:

$$ds = v \cdot \Delta t \quad (14)$$

donde v es la velocidad instantánea del móvil en el punto t .

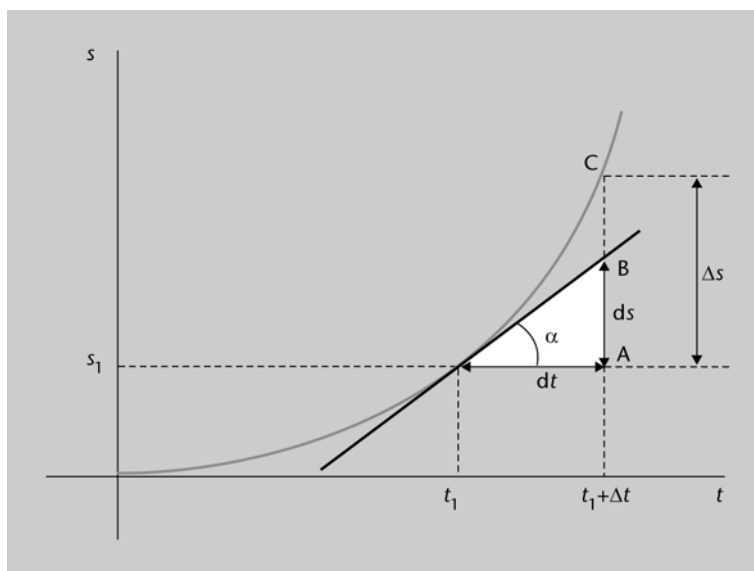


Figura 8: Para un incremento Δt de la variable independiente, podemos obtener dos incrementos de la variable dependiente: uno si nos movemos por la recta tangente, ds , y otro si nos movemos por la propia función, Δs .

Para la variable independiente, podríamos escribir siempre Δt cuando hablamos de diferenciales, pero, por razones de simetría, haremos:

$$\Delta t = dt \quad (15)$$

Es decir, para la variable independiente, el concepto de diferencial y de incremento es equivalente.⁸ Escribiremos la (14) así:

$$ds = v \cdot dt \quad (16)$$

Una vez introducido este nuevo concepto de diferencial, a partir de la misma definición (14) o (16), vemos que la definición de velocidad instantánea se puede expresar operativamente como un cociente de diferenciales:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (17)$$

En la figura 8 se representa gráficamente qué significa la diferencial y qué significa el incremento de una función. Si trazamos la recta tangente a la curva $s(t)$ en el punto (t_1, s_1) y avanzamos desde este punto un incremento de tiempo Δt hasta el punto $t_1 + \Delta t = t_1 + dt$, vemos que:

- Sobre la recta tangente estamos en el punto B, y el aumento de la variable s es ds (el valor de la diferencial de s): la función pasa de la ordenada s_1 (o punto A) a la ordenada $s_1 + ds$ (punto B):

$$ds = AB \quad (18a)$$

- Sobre la curva $s(t)$ estamos en el punto C, y el aumento de la variable s es Δs : la función pasa de la ordenada s_1 (o punto A) a la ordenada $s_1 + \Delta s$ (punto C):

$$\Delta s = AC \quad (18b)$$

Por lo tanto, si conocemos la curva $s(t)$ y queremos calcular un incremento Δs , lo podemos obtener de manera exacta: $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$. Pero si no conocemos la función $s(t)$ y en cambio sí conocemos la derivada en un punto (es decir, si conocemos cómo varía la función en un punto), sólo podemos calcular el diferencial de la función, ds , que es una aproximación al valor de Δs , $ds = s' \cdot dt$.

4.1. Diferencial y derivada de una función

De una función podemos calcular, pues, la derivada y la diferencial. Estas magnitudes tienen dimensiones y significado físico bien diferentes.

A16

En vista de la figura 8 y de la definición de función tangente, ec.(9), explicad y comentad la expresión (17), $v = ds/dt$.

8. Otra manera de ver que es lícito hacer $\Delta t = dt$ es aplicar la definición (14) a la función $t = t$ (o, en términos matemáticos generales, a la función $y = t$). La ec.(14), aplicada a $y = t$, da $dy = 1 \cdot \Delta t = \Delta t$; pero como $y = t$, podemos sustituir y por t en el primer miembro de la igualdad $dy = \Delta t$, y obtenemos $dt = \Delta t$.

Los conceptos de velocidad media, de velocidad instantánea y de diferencial que hemos introducido para poder conocer detalles de un movimiento son de carácter general. Son aplicables a cualquier otra función matemática. Para una función cualquiera, $y = y(x)$, escribiremos:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (19a)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad (19b)$$

$$dy = y' \, dx \quad (19c)$$

Como hemos visto, la derivada de una función en un punto tiene el significado geométrico siguiente: es la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el eje X la tangente geométrica a la curva en ese punto.

Por otra parte, la diferencial de una función, para un incremento dado de la variable independiente, expresa el incremento del valor de la función que obtendríamos si la pendiente de la función se mantuviera constante en todo el incremento de la variable independiente.

Tenemos, pues, tres maneras de representar simbólicamente la derivada de una función, ecs.(19a y 19b):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha \quad (20)$$

4.2. Sobre el concepto de límite

Mientras que la expresión (19b) no es más que un cociente de dos magnitudes diferenciales, el concepto de límite de un cociente, como el de la expresión (19a), es un concepto diferente de un cociente. Consideremos un ejemplo sencillo: la función $y(x) = 1/x$. Si damos algunos valores a x , como 10, 100, 1 000, ..., obtendremos, respectivamente, $y = 0.1, 0.01, 0.001...$ Por lo tanto, podemos escribir que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (21)$$

Ahora bien, si tabulamos la función $y(x)$, nunca aparecerá en la tabla de valores de la función el valor $y = 0$. Con la definición de límite nos hemos inventado un concepto nuevo, que origina valores de la función que en algunos casos, como en el de la ec.(21), pueden no ser valores que «toma» la función. (Recordad también el comentario que hicimos en la solución de la actividad A13 sobre el significado de la velocidad instantánea, otro concepto útil que hemos introducido.)

De hecho, tendríamos que decir que todas las definiciones, leyes, modelos, etcétera, que utilizamos en matemáticas, física e ingeniería son «conceptos mentales». ¿Quién ha visto alguna vez una «recta» matemática ideal, un «punto» material, una «fuerza», una «onda electromagnética»? Los conceptos y las

definiciones nos sirven como herramientas para describir y entender mejor el mundo donde vivimos, para desarrollar modelos matemáticos e imágenes mentales de los procesos que observamos.

4.3. Continuidad, derivabilidad

En el ejemplo (21), el valor de la función nunca coincide con el valor del límite. En general, sin embargo, éste no será el caso, y el valor de la función y el del límite coincidirán. Calculemos, por ejemplo, el límite de la función $y = 1/x$ para x tendiendo a 5:

$$\lim_{x \rightarrow 5} y = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x} = 0.2 \quad (21')$$

La función sí toma este valor, $y = 0.2$, en $x = 5$. Como ya sabemos de otros cursos de matemáticas, los límites de una función en un punto se pueden tomar por un lado o por el otro del mismo (límite por la derecha y límite por la izquierda); por ejemplo, para valores crecientes de x que acaben en $x = 5$, o para valores decrecientes de x que acaben también en $x = 5$. Y si la función tiene el mismo límite por los dos lados y éste es un valor finito, decimos que existe el límite de la función en este punto. Además, si el valor de este límite coincide con el valor de la función en este punto, decimos que la función es **continua** en este punto, $x = 5$.

Por tanto, una función es **continua** en un punto $x = a$ cuando los límites de la función (momento en el que nos acercamos al punto a por ambos lados) coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow a} y(x) \quad (22)$$

Y, además, el valor de este límite coincide con el valor de la función en este punto a :

$$\lim_{x \rightarrow a} y(x) = y(a) \quad (23)$$

Por ejemplo, si calculamos los límites laterales (por la izquierda y por la derecha) cuando x tiende a 0 de la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (24)$$

tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

A17

Representad gráficamente la función definida a trozos (24).

Puesto que los límites laterales no coinciden, la función no es continua en este punto. En este caso se dice que la función presenta una **discontinuidad de salto** en $x = 0$.

Pero ¿qué ocurre con la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \\ x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (25)$$

en el punto $x = 0$?

A18

Representad gráficamente la función definida a trozos (25).

En este caso, los límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$$

Esto significa que existe el límite en este punto y vale -2 . Puesto que $f(0) = 4$, podemos decir que la función no es continua en el punto $x = 0$. En este caso, decimos que la función presenta una **discontinuidad evitable** en este punto.

Por ejemplo, la función:

$$y(x) = \frac{1}{x-3} \quad (26)$$

es continua en cualquier punto, excepto en aquellos que anulan el denominador, es decir, el punto $x = 3$; por ejemplo, en el punto $x = 0$, vale $y(0) = 1/3$; en el punto $x = 1$, vale $y(1) = 1/2$; en el punto $x = 2$, vale $y(2) = 1$. De hecho, cuando nos vamos acercando a $x = 3$ por la izquierda, los valores de la función cada vez son mayores, y cuando lo hacemos por la derecha, cada vez son menores. Observamos que, en este caso, los límites laterales tienden a $+\infty$ y a $-\infty$, y decimos que la función presenta una discontinuidad asintótica en este punto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} y(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} y(x) &= +\infty \end{aligned} \quad (27)$$

De hecho, siempre que el valor del límite de una función en un punto sea $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la función presenta una **discontinuidad asintótica**.

A19

Representad gráficamente la función (26).

Una propiedad de las funciones que se puede demostrar, y que es bastante intuitiva, es que **si una función es derivable en un punto, entonces es continua en aquel mismo punto**. La proposición inversa no es cierta: *toda función continua en un punto no es necesariamente derivable en aquel punto*, como veremos a continuación.

A20

Representad gráficamente la siguiente función:

$$y(x) = \frac{1}{1 + |x - 2|} \quad (28)$$

(Recordad que la función módulo, o valor absoluto, $|x - 2|$, es el resultado de calcular $x - 2$ y cambiarle al resultado el signo a positivo si resulta negativo.)

En un punto cualquiera de la función de la ec.(28) (salvo el punto $x = 2$), ésta es continua y derivable. En el punto $x = 2$, la función es continua y vale $y(2) = 1$, como se puede comprobar fácilmente tomando los límites para $x \rightarrow 2^+$ y $x \rightarrow 2^-$. Sin embargo, la derivada de la función no existe, como comprobaréis en la actividad siguiente.

A21

Comprobad que la función (28) no es derivable en el punto $x = 2$. Por ejemplo, podéis escribir la función para $x > 2$ así:

$$y(x) = \frac{1}{1 + x - 2} = \frac{1}{x - 1} \quad (29)$$

Calculad su derivada y mirad cuánto vale cuando os aproximáis al punto 2 (desde valores superiores a 2).

Análogamente, escribid la expresión (28) para $x < 2$ y calculad la derivada; luego aproximaos a $x = 2$ desde valores inferiores a 2.

Veréis que obtenéis valores diferentes de la pendiente de la curva en aquel punto, según por el lado que os aproximáis.

El resultado de la actividad anterior, en que la función es continua en $x = 2$ pero no es derivable en ese punto, se puede entender gráficamente de manera sencilla: la representación de la función (28) que vimos en la actividad A20 muestra que las pendientes de la función (28) son siempre positivas y crecientes, conforme nos aproximamos al punto $x = 2$ por la izquierda, mientras que las pendientes son decrecientes y negativas conforme nos alejamos del punto $x = 2$ por la derecha. Como la pendiente no es la misma cuando nos acercamos al punto $x = 2$ por los dos lados, decimos que la función no es derivable en este punto, a pesar de ser continua.

A22

Recapitemos: elaborad un esquema muy breve de lo que hemos visto y hemos aprendido hasta ahora. En particular, recordad la definición y el significado gráfico de cómo calcular y para qué sirve:

- a) la derivada,
- b) la diferencial.

Volveremos más adelante a otras aplicaciones de los conceptos de derivada y de diferencial. A continuación, nos planteamos si podemos caracterizar un proceso con derivadas de orden superior.

5. Aceleraciones

Una de las tareas del ingeniero es avanzar en la resolución de los problemas técnicos que se le presenten. Para ello, hay que aprender a plantear preguntas, resolver problemas e inventar conceptos y técnicas analíticas, o aprovechar las existentes.

Por ejemplo, en la vida diaria hablamos a menudo de aceleración y de frenazo: las aceleraciones o frenazos de un coche, las desaceleraciones de los valores de las acciones en bolsa, las aceleraciones en el índice de precios («Se ha acelerado el coste de la vida...»), etc. ¿Cómo tratamos las aceleraciones?

Volvamos al ejemplo 2 del apartado 3: el objeto que cae por una pendiente. Sabemos que, en general, el movimiento de caída es «acelerado»: el objeto cae más rápidamente a medida que pasa el tiempo. ¿Cómo caracterizamos esta propiedad? La física introduce el concepto de aceleración: «En un movimiento que tiene una trayectoria⁹ $s(t)$ y una velocidad instantánea $v(t)$, llamamos aceleración a la variación de la velocidad que se da por unidad de tiempo». Análogamente a como hicimos con la velocidad, podemos definir conceptos como la aceleración media y la aceleración instantánea.

A23

a) ¿Cuál será la expresión de la aceleración media y de la aceleración instantánea? (Recordad los apartados 3.6 y 3.7: velocidad media y velocidad instantánea.)

b) Calculad, por ejemplo, la aceleración que tiene un vehículo que pasa de una velocidad de 40 km/h a 60 km/h en 3 segundos.

c) Calculad la aceleración instantánea que tiene el objeto que cae por la pendiente de la figura 1. (Recordad el resultado $v = 17.6 t$ de la actividad A15.)

Una vez hemos definido el concepto de derivada de la función velocidad, y análogamente a como hicimos en el caso de la función espacio recorrido, podemos introducir el concepto de diferencial para la función velocidad:

$$dv = a \cdot dt \quad (30)$$

que tiene la misma interpretación y las mismas propiedades que cualquier diferencial.

Los mismos conceptos que hemos utilizado para calcular velocidades y la operativización de éstas se pueden repetir para el caso de las aceleraciones. Por ejemplo, podemos obtener aceleraciones instantáneas a partir del cálculo de aceleraciones medias, $\bar{a}(t, \Delta t)$, y su límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v' \quad (31)$$

9. Aclariment: en aquest mòdul el terme trajectòria es fa servir a com a sinònim d'equació del moviment, tot i que aquest ús no és del tot precís. És a dir, quan es parla de trajectòria ens estem referint a la corba que descriu l'equació del moviment $s(t)$.

Además, si recordamos la definición (17) de velocidad instantánea como la primera derivada del espacio recorrido respecto al tiempo, podemos escribir la expresión anterior de la aceleración como la «derivada segunda del espacio recorrido respecto al tiempo dos veces»:

$$a = v' = \frac{d}{dt} \frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = s'' \quad (32)$$

5.1. Derivadas de orden superior

Y por descontado, este proceso de derivación puede continuar sin más límite que el que imponga la función que estamos derivando: puede que en algún momento del proceso de derivación la función deje de ser derivable o que se anule; en este segundo caso, todas las derivadas posteriores se anularán.

Así, para una función cualquiera $y = y(x)$, podremos tener un número ilimitado de derivadas:

$$y', y'', y''', y^{IV}, y^V, \dots \quad (33a)$$

que también podemos escribir así:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^{(iv)}y}{dx^{(iv)}}, \frac{d^{(v)}y}{dx^{(v)}} \dots \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} \dots \quad (33b)$$

Sólo en el caso de la primera derivada podemos hablar de cociente de diferenciales, con el significado geométrico que hemos visto en el apartado 4.

En el caso particular de los movimientos de los objetos, no suele ser necesario hablar más que de velocidades (primera derivada del desplazamiento respecto al tiempo) y aceleraciones (segunda derivada del desplazamiento respecto al tiempo dos veces). Pero en otros problemas, puede ser conveniente trabajar con derivadas de orden superior. E incluso veremos en el apartado 6 que a veces puede ser útil calcular «infinitas» derivadas.

5.2. Propiedades de las funciones derivadas y derivadas de las funciones elementales

El cálculo de derivadas de funciones, por lo tanto, aparece repetidamente en las aplicaciones de las matemáticas a la resolución de problemas de la ciencia o de la ingeniería. Por ejemplo, si queremos calcular la velocidad a la que se enfría el café del ejemplo con el que empezamos este tema, ec.(1), tendríamos que calcular dT/dt . Obtendríamos $dT/dt = -0.02 \text{ °C/s} = -1.2 \text{ °C/minuto}$. El café se enfría al ritmo de 1.2 °C cada minuto.

Aprovechemos que hemos desarrollado un procedimiento para calcular derivadas (actividades A14 y A15) y apliquémoslo a otros ejemplos.

A24

Calculad la función derivada de una función potencial de tercer grado, $y = Ax^3$.
(Seguid el mismo procedimiento que en la actividad A15.)

De manera análoga a como hemos procedido en las actividades A15 y A24, se pueden demostrar las propiedades generales de las derivadas de las funciones que se recogen en la tabla 2, así como las fórmulas de las funciones derivadas de las funciones elementales que se recogen en la tabla 3.

A25

Completad la tabla 2 con los enunciados verbales de las propiedades que faltan.

Tabla 2. Propiedades de las derivadas de las funciones

Función, y	Derivada, y'	
$A \cdot y$	$A \cdot y'$	La derivada de una función multiplicada por una constante es el producto de esta constante por la derivada de la función.
$y + z$	$y' + z'$	La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada función.
uv	$u'v + uv'$	
u/v	$(vu' - uv')/v^2$	

A26

Completad algunas filas de la tabla 3 con los enunciados verbales de las propiedades que faltan. (Completad al menos hasta la función coseno.)

Tabla 3. Derivadas de algunas funciones elementales, $y = y(x)$

Función, $y = y(u)$ con $u = u(x)$. Es decir, $y = y(u(x))$	Derivada, $y' = \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$	
$y = x$	$y' = 1$	
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1} u'$	La derivada de una potencia de una función de x es igual al exponente, por la base elevada al exponente, menos una unidad, por la derivada respecto a x de la función.
$y = e^u$	$y' = u' e^u$	
$y = a^u$	$y' = a^u u' \ln a$	
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	
$y = \tan u$	$y' = (1 + \tan^2 u) u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	
$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$y = \arccos u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	

Tenéis que memorizar las fórmulas de las tablas 2 y 3, pero la mejor manera de hacerlo es mediante la resolución de ejercicios.

A27

Calculad la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-x^2 + 2 \sin x}$

b) $g(x) = \ln \left(\sin \left(\frac{x^3 - 4}{2x} \right) \right) - \cos 2x$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{1 - x} + \frac{2x}{e^x + x}$

Nota: Haced todos los ejercicios de derivación a mano, aunque podéis utilizar la calculadora Wiris para comprobar que todo va bien.

A28

a) Calculad la derivada n -ésima de la función $y = e^x$.

b) Calculad la derivada n -ésima de la función $y = \sin \frac{x}{2}$. Si tenéis dificultades, comentadlas en el espacio del foro.

Ahora veremos una primera aplicación de las derivadas múltiples de una función.

6. Representación de una función como un polinomio

Calculad el valor de la función $y = y(x)$ siguiente para $x = 0.2$:

$$y = \frac{1}{1-x} \quad (34)$$

Obtendréis, por supuesto, que $y(0.2) = 1.25$. Ahora suponed que podemos expresar la función $1/(1-x)$ como una suma de potencias de x del siguiente tipo:

$$y(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \dots \quad (35)$$

Calculad, a partir de la expresión anterior, el valor de la función en $x = 0.2$, tomando algunos términos del polinomio.¹⁰

A29

¿Cuántos términos de la suma (35) tenéis que considerar para llegar a un valor $y > 1.24$ para $x = 0.2$?

Habéis visto en la actividad anterior que cada vez que incluís un término más en el polinomio de la ec.(35), os acercáis más al valor exacto 1.25 de la función (34). De hecho, se puede demostrar que, si calculáis la suma de infinitos términos, las dos funciones (34) y (35) coinciden. Por lo tanto, una suma infinita de términos puede dar un valor finito.

Para un valor negativo de x , la serie (35) es un ejemplo de **serie alternada**, es decir, una serie donde los signos de los sumandos son, alternativamente, positivos y negativos.

A30

¿Cuántos términos tenéis que considerar en la suma de la ec.(35) para llegar a un valor $y > 0.99$ para $x = -0.01$?

Fijaos en que cuando el valor de la variable es pequeño, como en la actividad A30 ($x = -0.01$), con pocos términos de la suma infinita (35) ya nos acercamos rápidamente al valor exacto de la función.

6.1. ¿Cómo calcula una calculadora de bolsillo o un ordenador una exponencial; por ejemplo, el valor $e^{1.23}$?

Alrededor de un punto determinado, cualquier función que cumpla algunas propiedades básicas (que sea derivable, por ejemplo) se puede desarrollar en una serie de infinitos términos que se llama «fórmula»

10. Tal vez reconoceréis en la ec.(35) la suma de una serie geométrica de razón x .

de Taylor». En el apartado siguiente veremos su aspecto general. De momento, calcularemos la función exponencial mediante este desarrollo en serie de Taylor, que no vamos a demostrar por ahora:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (36)$$

A31

a) Calculad con una calculadora de bolsillo (o con Wiris) el valor de, por ejemplo, $e^{1.23}$.

b) ¿Cuántos términos de la suma infinita (36) tenéis que considerar para llegar a un valor $y > 3.4$?

Haced lo mismo para el valor $x = 0.1$ ¿Cuántos términos necesitáis para tener tres cifras exactas del resultado?

Repetiremos aquí lo que hemos dicho después de la actividad A30: podéis comprobar fácilmente, tanto en la expresión (35) como en la (36), que si el valor de la variable x es pequeño, con pocos sumandos que suméis, ya tenéis una buena aproximación al valor «exacto» de la función que da, por ejemplo, la calculadora de bolsillo.

Hagamos un inciso sobre la exactitud de los cálculos

¿Es cierto que las matemáticas son una ciencia «exacta»? Por ejemplo, si calculáis el valor de $1/3$, ¿cuál es su valor exacto?

$$1/3 = 0.3333333333\dots$$

Nunca podremos escribir el resultado con un número finito de cifras decimales.

En muchas ocasiones, sobre todo en aplicaciones de las matemáticas a la física y a la ingeniería, nos encontramos con valores aproximados como resultado de una medida experimental o de un cálculo.

En una serie alternada, como la de la ec.(35) para $x < 0$, se puede demostrar que si nos detenemos en un término determinado, el error que se comete en una suma es menor que el término siguiente (en valor absoluto), aquel que no incluimos en la suma. Por ejemplo, si calculamos el valor de la serie para $x < 0$ y nos detenemos en el término x^6 , el error que se comete es menor que $|x^7|$.

A32

a) ¿Qué error cometemos si calculamos $y(-0.5)$ con el desarrollo en serie de Taylor (35) y nos detenemos en el término número 3?

b) ¿Y si nos detenemos en el término número 7?

6.2. La fórmula de Taylor

La expresión que permite obtener desarrollos en serie de funciones (que sean derivables) es ésta:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (37)$$

No deduciremos la fórmula anterior, pero aprenderemos a utilizarla.

Este desarrollo indica que si conocemos el valor de la función $f(x)$ y de todas sus derivadas en un punto determinado, x , podemos calcular el valor exacto de una función en un punto vecino cualquiera, $x + h$, si somos capaces de sumar la serie infinita.

Ya hemos visto en las actividades A30, A31 y A32 que si no conocemos el valor de todas las derivadas de la función en el punto x , el precio que pagamos es que el cálculo del valor de la función en el punto $x + h$ ya no será exacto.

También hemos comprobado en los ejercicios anteriores que, si el incremento h es pequeño, si cogemos unos cuantos términos de la suma infinita (serie), ya obtenemos una buena aproximación a la función.

La fórmula de Taylor permite demostrar expresiones como la serie (35) o (36).

El desarrollo en serie de Taylor en torno al origen, es decir, en el punto $x = 0$, es muy habitual:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots \quad (37')$$

(Si comparáis la (37') con la (37), veréis que primero se ha hecho $x = 0$ en la (37), y luego se ha reemplazado el valor h por x porque es más habitual escribir el desarrollo de esta forma.)

El desarrollo (37') dice que toda función infinitamente derivable en el cero se puede escribir como una serie que contiene el valor de la función y sus derivadas calculadas en el origen de coordenadas, y cada término de la suma se multiplica por una potencia de x creciente.

A33

Comprobad que la expresión (37') os permite calcular los primeros 4 términos de la expresión (34). (Y, análogamente, se haría el cálculo del resto de la serie.)

Y ahora deduciremos otra fórmula de Taylor; esta vez para una función trigonométrica.

A34

Obtened los primeros cinco términos del desarrollo en serie de la función $y = \sin x$ en torno al punto $x = 0$.

Hemos obtenido una serie alternada; por lo tanto, el error que se comete si nos detenemos en un término cualquiera de la serie es menor que el término siguiente, aquel que no incluimos en la suma.

Otra serie interesante es la que da el valor de la función coseno desarrollada entorno del punto $x = 0$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \quad (38)$$

A35

Calculad el valor del coseno de 0.1 radianes con tres cifras decimales exactas a partir de la serie alternada (38).

Y las series infinitas no sólo se pueden sumar; por ejemplo, también se pueden derivar o integrar. ¡Veámoslo!

A36

a) Derivad la expresión (36) y comprobad que el resultado tiene sentido, es decir, que obtenéis la expresión de la derivada de la función e^x .

b) Derivad la expresión (38) y comprobad, a la vista del resultado de la actividad A34, que el resultado tiene sentido, es decir, que obtenéis la expresión de la derivada de la función $\cos x$.

El radián

Puesto que ahora nos hemos encontrado por primera vez con el cálculo de valores concretos de las funciones trigonométricas, haremos un inciso. Contestad en la actividad siguiente qué es un radián y por qué 2π radianes equivalen a 360° .

A37

a) ¿Por qué una circunferencia tiene 360° ?

b) Algunas calculadoras de bolsillo tienen tres modos para trabajar las funciones trigonométricas: DEG, RAD, GRA. El ángulo que subtiende una circunferencia completa en el primer caso es de 360° , en el segundo $2\pi = 6.283185\dots$ radianes y en el tercero, 400° . ¿Cómo es posible que hablemos de valores tan diferentes para un mismo ángulo?

c) ¿Cómo se define un radián? ¿Qué dimensiones tiene, es decir, en qué unidad se tienen que medir los ángulos?

7. Nociones sobre funciones de varias variables

Hemos repasado algunas cuestiones básicas asociadas a las funciones reales de variable real, $f(x)$, y hemos trabajado diversos aspectos del concepto de derivación. A veces es necesario trabajar con funciones de más de una variable. Veremos algunas de sus propiedades básicas; después, introduciremos el concepto de derivada parcial y mencionaremos algunas de sus propiedades.

7.1. Funciones de más de una variable

Ya sabemos qué representa una función como ésta:

$$y(x) = ax + b \quad (39)$$

que podemos escribir en la forma:

$$Ax + By = 0 \quad (40)$$

Y conocéis de la asignatura de álgebra lineal ecuaciones como la siguiente:

$$Ax + By + Cz = 0 \quad (41)$$

A38

¿Qué objeto geométrico representan las funciones (39) a (41), gráficamente?

En tres dimensiones, el objeto geométrico más sencillo es una superficie plana. Podemos expresarla como una función lineal, ec.(41), donde las potencias de todas las variables son 0 o 1.

En general, una función de dos variables tiene la forma $z = f(x, y)$. Las funciones del tipo:

$$z = f(x, y) \quad (42)$$

donde x e y , son variables independientes, y z , es la variable dependiente o función, representan superficies en un espacio de tres dimensiones. Es decir, en un sistema de coordenadas X, Y, Z obtenemos una superficie tridimensional.

Por ejemplo, en la figura 9 se representa la siguiente función:

$$z = 2x^2 + 2y^2 - 4 \quad (43)$$

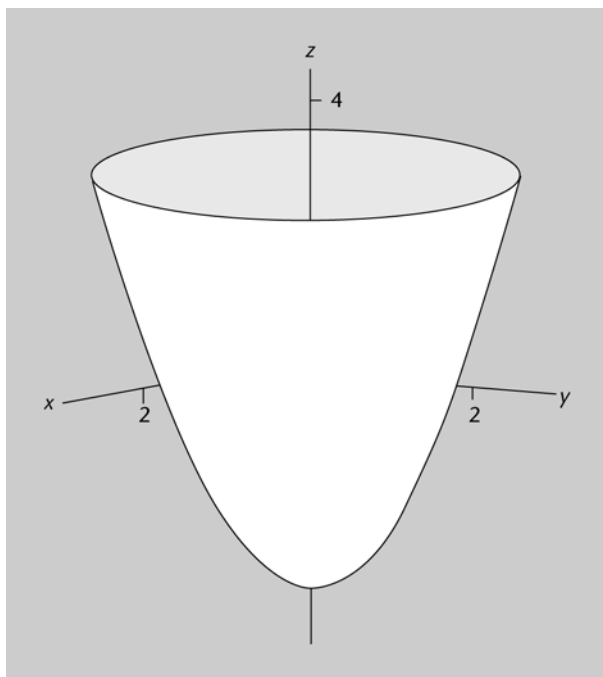


Figura 9: Representación gráfica de la función (43).

Se trata de un paraboloide elíptico; es un ejemplo de función cuadrática porque la potencia máxima de las variables independientes es 2.

La ecuación de un plano se puede escribir en la forma (42) si despejamos la variable z . Obtenemos:

$$f(x, y) = Ax + By + D$$

Una forma sencilla de graficar un plano es encontrar los puntos donde el plano corta los tres ejes de coordenadas, y luego unir estos puntos y formar el triángulo correspondiente. Este triángulo es parte del plano, y nos dará una idea adecuada de qué aspecto tiene el plano.

A39

Encontrad los puntos de corte del plano siguiente con los ejes de coordenadas:

$$z = 12 - 3x - 4y$$

Representad el resultado gráficamente (representad el plano).

Las funciones del tipo:

$$w = f(x, y, z)$$

son superficies cuatridimensionales (que no podemos representar en un espacio 3D).

¿Cómo son los dominios de funciones de más de una variable?

Recordemos que el dominio de una función de una variable $y = f(x)$ consiste en todos los valores de x que podemos introducir en la función y obtener como resultado un número real. Se trata de un intervalo (o intervalos) de la recta real, es decir, de un espacio unidimensional.

El dominio de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, serán las regiones del espacio bidimensional formado por parejas de coordenadas (x, y) que podríamos introducir en la función y con las que podríamos obtener un número real.

A40

Determinad el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

b) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

c) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

Análogamente, el dominio de funciones de tres variables $w = f(x, y, z)$ serán regiones del espacio tridimensional.

Derivadas parciales

Se puede introducir el concepto de derivada parcial de una función de más de una variable. Recordemos el significado de derivada de una función.

La derivada $f'(x)$ de una función de una variable $f(x)$ representa el ritmo de cambio de la función conforme cambia x .

Cuando tenemos una función de más de una variable, hemos de decidir cuál de ellas deseamos cambiar para ver cómo se modifica la función. Pero podemos cambiar las variables de infinitas maneras. Además, cada variable puede cambiar a un ritmo diferente; por ejemplo, una de las variables podría cambiar mucho más rápidamente que la otra. Y estos cambios pueden tener efectos diferentes sobre la función.

Empezaremos por la situación más sencilla, en la que sólo cambiamos una variable independiente, mientras dejamos constantes las demás.

Comenzaremos con un ejemplo, la función $f(x, y) = 2x^2y^3$, y determinaremos el ritmo al que cambia la función en un punto (a, b) si mantenemos constante el valor de y y permitimos que x varíe, o bien si mantenemos constante el valor de x y permitimos que y varíe.

En el primer caso, si mantenemos constante el valor de y , significa que siempre tendrá el valor $y = b$, pero permitimos que x varíe. Por tanto, podemos definir una nueva función de la manera siguiente: $g(x) = f(x, b) = 2x^2b^3$, que es una función de una variable que ya sabemos tratar. Sabemos determinar el valor de la función y de su derivada en el punto $x = a$:

$$g'(a) = 4ab^3 \text{ si mantenemos } y = b \text{ constante.}$$

Llamamos $g'(a)$ la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto a x en el punto (a, b) , y lo representaremos de la siguiente forma:

$$f_x(a, b) = 4ab^3$$

O también:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{y=b}^{x=a} = 4ab^3$$

Ahora calculemos la variación de la función para x fijo, $x = a$. Podemos definir una función de y y derivarla como ya sabemos hacer para funciones de una sola variable. Resulta:

$$h(y) = f(a, y) = 2a^2y^3 \Rightarrow h'(y) = 6a^2y^2$$

La escribiremos en una forma análoga a la anterior:

$$f_y(a, b) = 6a^2b^2$$

Estas dos derivadas parciales se denominan también **derivadas parciales de primer orden**. Podemos definir de manera análoga derivadas parciales de cualquier orden.

Fijaos que las derivadas parciales no se pueden representar con una sola «prima» f' , como las derivadas llamadas totales (las derivadas de funciones de una sola variable). Siempre hay que especificar con respecto a qué variable se está derivando.

En general, para el ejemplo que hemos visto, escribiremos:

$$f_x(x, y) = 4xy^3 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 6x^2y^2$$

En resumen, el cálculo de derivadas parciales de funciones de más de una variable es muy similar al del cálculo de derivadas de funciones de una variable: basta con tomar la variable y como constante cuando derivemos respecto a x , $f_x(x, y)$, y viceversa cuando calculemos $f_y(x, y)$.

La definición formal de la derivada parcial es similar a la que dimos para funciones de una sola variable, ec.(12):

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Y en cuanto a las notaciones que se suelen emplear, dada la función $z = f(x, y)$, ya hemos visto algunas de las siguientes:

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f$$

Fijaos en que las derivadas parciales se representan como cociente con una letra similar a una delta, y no con una d :

$$f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$$f(x, y) \Rightarrow f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Y ahora resolveremos algunos ejercicios.

A41

Calculad las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^4 + 6\sqrt{y} - 10$

b) $w = x^2y - 10y^2z^3 + 43x - 7 \tan(4y)$

c) $h(s, t) = t^7 \ln(s^2) + \frac{9}{t^3} - \sqrt[3]{s^4}$

d) $f(x, y) = \cos\left(\frac{4}{x}\right) e^{x^2y - 5y^3}$

Y algunos ejercicios más.

A42

Calculad las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

a) $z = \frac{9u}{u^2 + 5v}$

b) $g(x, y, z) = \frac{x \sin(y)}{z^2}$

c) $z = \sqrt{x^2 + \ln(5x - 3y^2)}$

Por tanto, debemos recordar que cuando calculemos una derivada parcial respecto a una variable, hay que tratar las otras variables como constantes.

Derivación implícita

Tanto para funciones de una variable como de varias variables, se puede dar el caso de que, dada una expresión implícita de una función ($4x + 3y = 0$, por ejemplo), necesitemos tener su derivada (derivada implícita).

Por ejemplo, si deseamos calcular la derivada dy/dx de la función $3y^4 + x^7 = 5x$, ésta se puede calcular sin necesidad de aislar la función $y(x)$ (lo que a veces es imposible o muy difícil,) siempre que pensemos que y es función de x y tratemos las funciones de y por la regla de la cadena, y añadamos un término dy/dx al resultado.

En el ejemplo anterior, derivamos ambos miembros respecto a x y escribimos:

$$12y^3 \frac{dy}{dx} + 7x^6 = 5$$

Esta expresión también puede escribirse así: $12y^3 y' + 7x^6 = 5$.

Y si despejamos la derivada que buscamos, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5-7x^6}{12y^3}$$

También podemos escribirlo así:

$$y' = \frac{5-7x^6}{12y^3}.$$

Obviamente, el resultado queda también como una función implícita, porque no podemos despejar la derivada en función sólo de x .

La derivación implícita funciona de la misma manera con funciones de varias variables. Si tenemos una función de tres variables, x , y , z , tomaremos z como función de las otras dos variables:

$$z = z(x, y)$$

Y siempre que derivemos z respecto a x , usaremos la regla de la cadena y multiplicaremos el resultado por:

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

Y de la misma manera, cuando derivemos z respecto a y , multiplicaremos el resultado por:

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

Veamos un ejemplo.

A43

Calculad:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

para las dos funciones siguientes:

- a) $x^3z^2 - 5xy^5z = x^2 + y^3$
- b) $x^2 \sin(2y - 5z) = 1 + y \cos(6zx)$

Interpretación de las derivadas parciales

Las interpretaciones de las derivadas de funciones reales de una variable también valen para funciones de diversas variables, con ligeras modificaciones, porque ahora estamos tratando con más de una variable.

La primera interpretación es la más importante. De la misma manera que con funciones de una sola variable, las derivadas parciales representan el ritmo de cambio de la función para cambios de la variable respecto a la cual derivamos, de manera que se mantienen constantes las otras variables.

A44

Determinad si la función:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y^3}$$

es creciente o decreciente en el punto (2, 5).

Como hemos visto en la actividad anterior, la función es creciente cuando crece x y la variable y permanece constante; y la función es decreciente cuando crece y y la variable x permanece constante.

Eso no es extraño. La figura siguiente muestra un ejemplo de una función que tiene un comportamiento en el que crece para una variable y decrece para la otra. La función crece a lo largo del eje Y y decrece a lo largo del eje X .

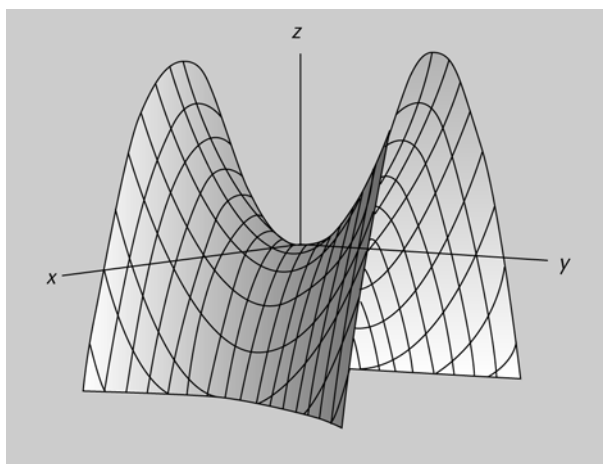


Figura 10: Paraboloide hiperbólico

La segunda interpretación del significado de las derivadas es el siguiente: $f'(a)$ representa la pendiente de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en $x = a$.

De la misma manera, $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ representan las pendientes de las rectas tangentes, pero para unas curvas particulares, las que resultan de intersectar la función $f(x, y)$ con los siguientes planos:

- la derivada parcial $f_x(a, b)$ es la pendiente de la curva que resulta de cortar la función $f(x, y)$ con el plano $y = b$ en el punto (a, b) ;
- la derivada parcial $f_y(a, b)$ es la pendiente de la curva que resulta de cortar la función $f(x, y)$ con el plano $x = a$ en el punto (a, b) .

A45

Calculad las pendientes de la función $z = 10 - 4x^2 - y^2$ en el punto (1, 2) y elaborad un esquema de la función y del significado de las pendientes.

Con este ejercicio terminamos esta breve introducción al concepto de derivadas parciales. Son muchas las aplicaciones de las mismas, como se irá viendo en las diferentes asignaturas de la carrera.

Tras la introducción del concepto de derivada y el breve acercamiento a las derivadas parciales, estudiaremos en el próximo módulo la operación inversa a la derivación: la integración.

Recapitulación: ¿qué hemos aprendido en este módulo?

A46

Confeccionad un esquema de lo que habéis aprendido en este módulo (expresiones, conceptos, términos, etcétera).

Comentad, también, qué os ha resultado más sencillo y más difícil de entender. Añadid a la lista aquellos conceptos, aplicaciones, herramientas, etcétera, que consideréis que todavía no entendéis o no maneáis con soltura.

Resolución de actividades

A1

Obtendréis una representación gráfica parecida a la de la figura 1s.

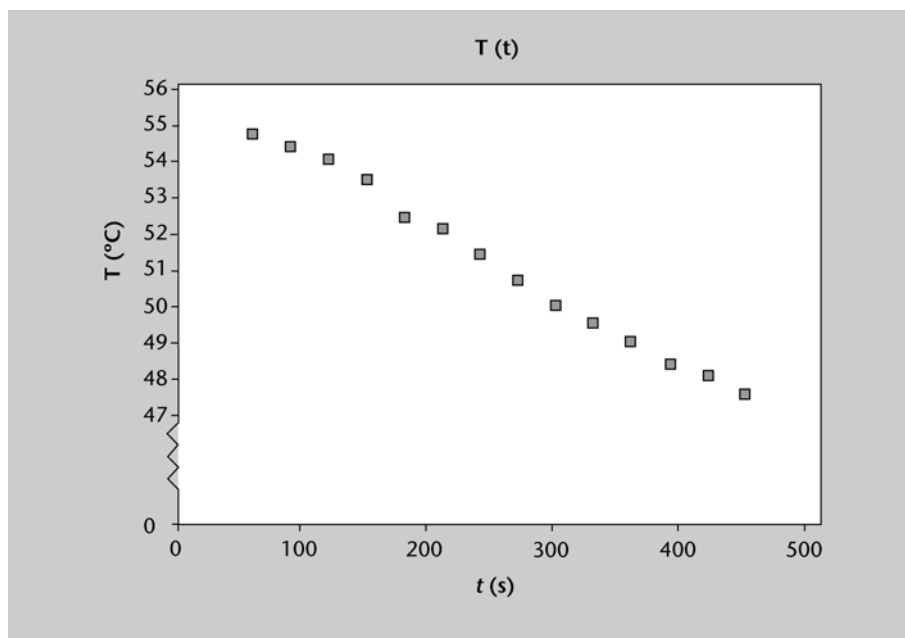


Figura 1s. Representación de los datos de la tabla 1.

A2

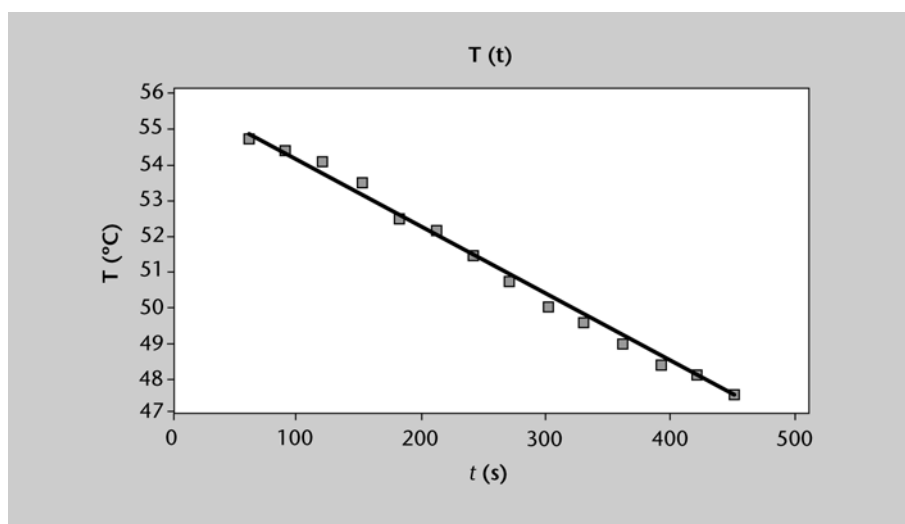


Figura 2s. Representación de los datos de la tabla 1 (los puntos) y de la recta que se les ajusta, ecuación(1).

A3

Resulta, de la ecuación (1),

a)

t (s)	T (°C), ecuación (1)	T (°C), tabla 1
90	54.4	54.4
360	48.8	49.0

b)

t (s)	T (°C), ecuación (1)	T (°C), tabla 1
120	53.6	54.1
190	52.2	(no está)
210	51.8	52.1
300	50.0	50.0
390	48.2	48.4
500	46	(no está)
3000	-4	(no está)

Los valores, interpolados y extrapolados, $t = 190$ s y $t = 500$ s, y los calculados a partir de la recta de la ecuación (1), respectivamente, parecen razonables a la vista de los valores de la tabla.

El valor para 3 000 s no es razonable: un café no se enfriará más que la temperatura ambiente, y ¡si no estamos en Siberia no deberíamos estar a 4 bajo cero!

A4

Hay proporcionalidad directa entre dos magnitudes cuando en el caso de que una magnitud se duplique, por ejemplo, la otra también lo hace. Es decir, las dos magnitudes aumentan o disminuyen de manera que la relación entre ellas se mantiene constante, es decir, $y/x = k = \text{constante}$.

Ejemplos: el coste de comprar barras de pan, gasolina, etc. es proporcional a la cantidad de barras o de litros que se compran.

A5

Las expresiones (2a), (2b) y (2c) pueden representar rectas de pendiente diferente, positiva o negativa, y que abarcan diversos cuadrantes del plano XY.

a) En el primer caso, ecuación (2a), podemos asegurar que para $x = 0$ es $y = b$, es decir, la recta corta el eje de ordenadas en el punto $(0, b)$, figura 3s.

Análogamente, si $y = 0$ resulta $x = -b/a$, es decir, la recta (2a) corta el eje x en el punto $(-b/a, 0)$.

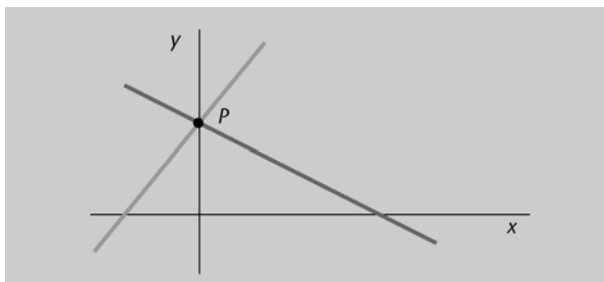


Figura 3s. Rectas que pasan por el punto $P(0, b)$ y tienen dos valores diferentes de la pendiente, una negativa y otra positiva. Cortan el eje x en el punto $(-b/a, 0)$.

En la ecuación (2b) si $x = x_1$ entonces resulta $y = y_1$, es decir, la recta pasa por el punto (x_1, y_1) , figura 4s.

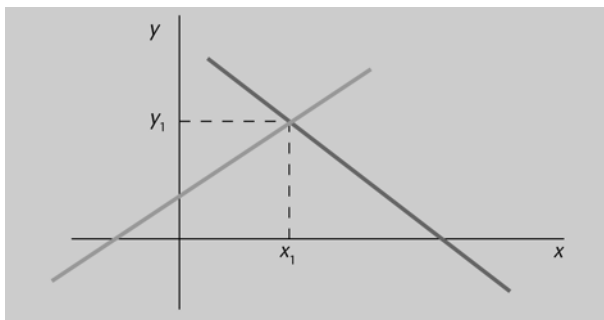


Figura 4s. Rectas que pasan por el punto (x_1, y_1) y tienen dos pendientes diferentes, una positiva y otra negativa.

La ecuación(2c) es siempre la de una recta que pasa por el origen.

¡Atención!

No necesitamos calcular más de dos o tres puntos para hacer la representación gráfica, porque se trata de una recta.

b) Igualamos las dos expresiones de la función $y(x)$,

$$y = ax + b = y_1 + m(x - x_1) = y_1 + mx - mx_1$$

Y como la igualdad $ax + b = y_1 + mx - mx_1$ tiene que ser válida para cualquier valor de x , podemos tomar $x = 0$ y obtenemos,

$$b = y_1 - mx_1$$

y si sustituimos este valor de b en la igualdad,

$$ax + b = y_1 + mx - mx_1$$

obtenemos,

$$a = m$$

A6

1) Como hemos empezado a contar el tiempo en el instante $t = 0$ (el instante en que, por ejemplo, ponemos en marcha el cronómetro), entonces el espacio recorrido en el instante $t = 0$ es nulo. Podemos suponer (si no nos dicen otra cosa) que en este instante la masa puntual está en el punto A del plano inclinado, figura 1. (Igualmente valdría la ecuación (5) si en $t = 0$ la masa inicia el movimiento en cualquier otro punto como el B , figura 1, que sería la nueva posición inicial y $s = 0$.)

2) Para $t = 1$ s, $s = 8.8 \times 1^2 = 8.8$ cm, y para $t = 2$ s, $s = 8.8 \times 2^2 = 35.2$ cm. Por lo tanto, el espacio recorrido entre $t = 1$ s y $t = 2$ s por la partícula que cae es,

$$\Delta s = s(t = 2 \text{ s}) - s(t = 1 \text{ s}) = 35.2 \text{ cm} - 8.8 \text{ cm} = 26.4 \text{ cm}$$

Como sabemos, Δs se lee “delta (de) s ” o “incremento” (o variación) de la variable s y representa la diferencia entre dos valores de s . En general,

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

3) Primero calculamos algunos valores de la función $s(t)$, mirad la tabla 1s.

Tabla 1s. Algunos valores de la función $s(t)$, ecuación (5).

t (s)	s (cm)
0	0
1	8.8
2	35.2
3	79.2
4	140.8
5	220.0
6	316.8
7	431.2

Cuando representamos los valores de la tabla 1s obtenemos la gráfica de la figura 5s.

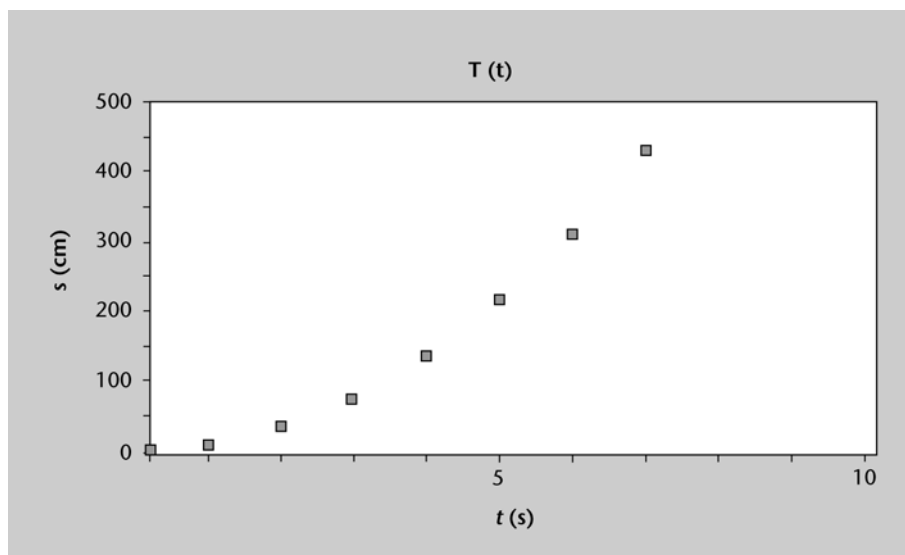


Figura 5s. Representación gráfica de algunos puntos de la función $s(t)$, ecuación (5), dados por la tabla 1s.

Y cuando unimos los puntos para apreciar mejor la forma cualitativa de la función, obtenemos:

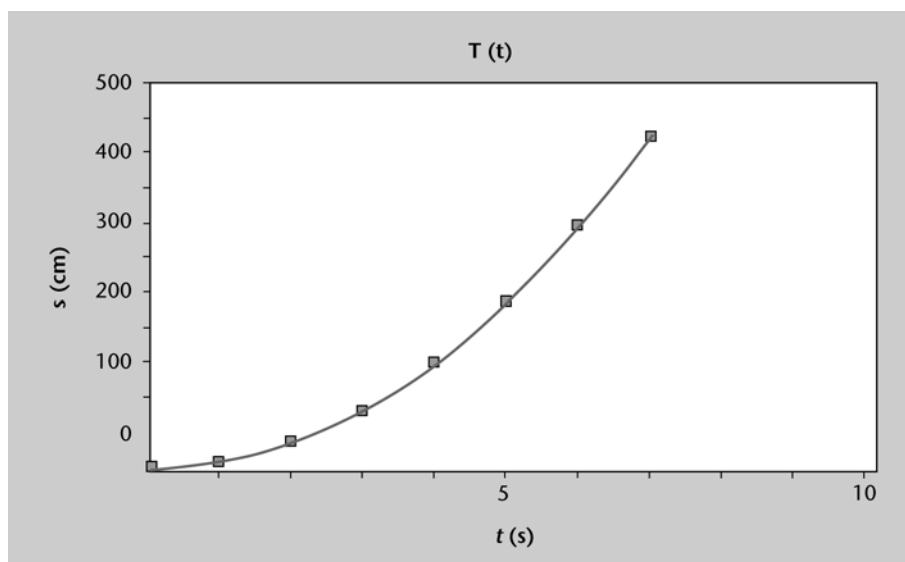


Figura 6s. Curva (trazada a mano) que une los puntos de la representación gráfica de la función $s(t)$, ecuación (5).

A7

a) Tenemos diferentes casos posibles, figura 7s. Si $a < 0$, las parábolas tienen un máximo, y si $a > 0$, tienen un mínimo. La función es cuadrática en la variable x .

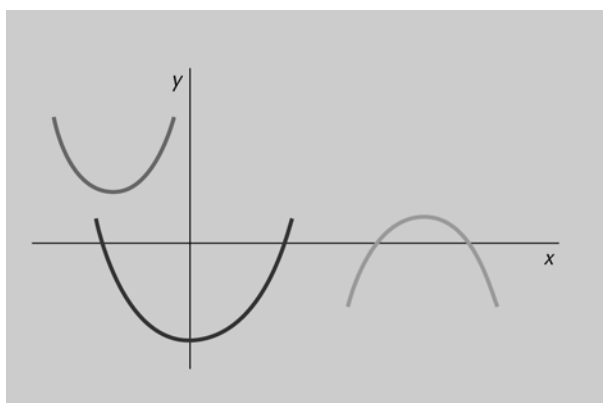


Figura 7s. Algunas parábolas posibles descritas por la ecuación (6).

b) Las parábolas de la figura 8s no responden a ecuaciones del tipo (6) sino a ecuaciones del tipo,

$$x = py^2 + qy + r$$

donde p , q y r son constantes. Ahora y será la variable independiente y x , la variable función o variable dependiente. La función es cuadrática en la variable y .

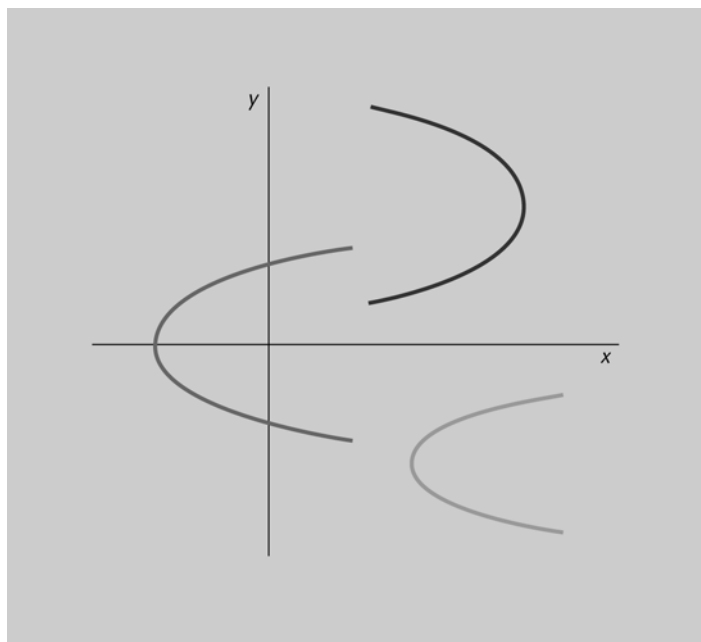


Figura 8s. Algunos ejemplos de parábolas que no se podrían describir con una ecuación como la (6), $y(x) = ax^2 + bx + c$, pero sí con la ecuación $x = py^2 + qy + r$.

A8

Resulta,

$$\bar{v} = \Delta s / \Delta t = (8.8 \times 6^2 - 8.8 \times 4^2) \text{ cm} / (6 - 4) \text{ s} = (316.8 - 140.8) \text{ cm} / (6 - 4) \text{ s} = 88 \text{ cm/s} = 0.88 \text{ m/s}.^{11}$$

Para calcular esta velocidad en km/h podemos pasar de metros a km,

$$1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km}$$

y de segundos a horas,

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos} \times 60 \text{ segundos/minuto} = 3.600 \text{ segundos}$$

Es decir,

$$\bar{v} = 0.88 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.88 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\cdot 10^{-3} \frac{\text{km}}{\text{m}} \right) \left(\cdot \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} \right) = 3.168 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Fijaos que al hacer las operaciones de cambio de unidades de esta manera controlamos en cada momento si estamos haciendo bien los cambios porque debemos tratar las unidades como si fuesen cifras, simplificándolas, multiplicándolas, dividiéndolas, etc. Si únicamente nos fijamos en las unidades de la última expresión, podemos simplificarlas así,

$$\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \frac{\text{km}}{\cancel{\text{m}}} \frac{\cancel{\text{s}}}{\text{h}} = \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Fijaos también que si la constante (8.8) de la ecuación del movimiento tiene una cifra decimal significativa, $s(t) = 8.8 \cdot t^2$, no tiene mucho sentido que demos los resultados de los cálculos de \bar{v} con tres cifras decimales, 3.168 km/h. Tendría más sentido escribir, por ejemplo, 3.17 km/h. Pero no nos detendremos en esta cuestión.

11. Podemos escribir 8.8×6^2 o bien $8.8 \cdot 6^2$.

A9

Resulta,

$$\bar{v} = \Delta s / \Delta t = (8.8 \cdot 4.6^2 - 8.8 \cdot 4^2) \text{ cm} / (4.6 - 4) \text{ s} = (186.2 - 140.8) \text{ cm} / (4.6 - 4) \text{ s} = 75.67 \text{ cm/s} = 0.76 \text{ m/s} = 2.736 \text{ km/h}$$

A10

Para calcular el valor medio de una magnitud que toma varios valores, “sumo los valores de la magnitud y divido por el número de valores”. De esta forma calculamos el valor, pero hay que explicar también el significado y la utilidad del valor que se obtiene.

La media de una magnitud (como el número de hijos) no tiene por qué ser uno de los valores que puede tomar esta magnitud. (Una familia puede tener 0, 1, 2... hijos, nunca 1.8.)

Entonces, ¿qué significa el valor medio? El valor medio de una magnitud que toma un conjunto de valores diferentes es el valor que tendría esta magnitud si todos los valores de la magnitud fuesen iguales. Utilizamos el valor medio como una **representación** de un conjunto de datos, como un valor que nos dice algo de la magnitud correspondiente.

Aplicad esta definición a los ejemplos anteriores (hijos, calificaciones). Por ejemplo, si tenéis seis asignaturas y una calificación media de 7.6, probablemente las calificaciones serán variadas: 6.4, 8.2, 7.7, etc. El valor medio es el valor de las calificaciones que tendríais si las calificaciones fueran iguales en las seis asignaturas: todas con 7.6 puntos.

Hay que distinguir entre dar una definición operativa de una magnitud (cómo calculamos la media, por ejemplo) y saber explicar el significado de esta magnitud, su utilidad.

A11

Es importante verbalizar con precisión. Se debe decir, por ejemplo, que la velocidad media del objeto en movimiento en los 2 s que van de los instantes $t = 4 \text{ s}$ al $t = 6 \text{ s}$ corresponde a la velocidad que tendría que tener el objeto para ir entre los puntos $s(t = 4 \text{ s})$ y $s(t = 6 \text{ s})$, siempre a la misma velocidad (la velocidad constante que hemos calculado como valor medio) y tardando el mismo tiempo (2 s) que en el movimiento real (que no es a velocidad constante).

El movimiento de la partícula se llama no uniforme, o acelerado, porque su velocidad no es constante.

A12

a) Secante 1

$$\tan \alpha = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

secante 2

$$\tan \alpha = \frac{s_3 - s_1}{t_3 - t_1}$$

secante 3

$$\tan \alpha = \frac{s_4 - s_1}{t_4 - t_1}$$

b) Pendiente de una recta: Es la tangente del ángulo que forma esta recta con una recta horizontal.

A13

Hay que poner de manifiesto la razón por la que se ha hecho la suposición de velocidad media constante: nuestra percepción de la velocidad necesita del transcurso del tiempo, lo que entra en contradicción con el concepto de *velocidad instantánea*. El concepto de *velocidad instantánea* es, por lo tanto, un **objeto mental** que no pueden percibir directamente los sentidos; para explicar su significado, hay que recurrir a un movimiento hipotético que permita interpretar la velocidad instantánea como una velocidad media, que sí que es perceptible por los sentidos.

A14

- a) $s(0.8 \text{ s}) = 8.8 \times 0.8^2 = 5.632 \text{ cm}$
 b) $s(0.8 + \Delta t) = 8.8 \times (0.8 + \Delta t)^2 = 5.632 + 14.08 \Delta t + 8.8 (\Delta t)^2$
 c) $s(0.8 + \Delta t) - s(0.8 \text{ s}) = 14.08 \Delta t + 8.8 (\Delta t)^2$
 d) $\bar{v}(0.8\Delta t) = \Delta s / \Delta t = 14.08 + 8.8 \Delta t$
 e) $\bar{v}(0.8) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}(0.8, \Delta t) = 14.08 \text{ cm/s}$

En cada paso del cálculo conviene interpretar gráficamente lo que se está haciendo mediante marcas en la curva del movimiento, como las que hicimos en la figura 4, y expresar también verbalmente lo que se está haciendo.

A15

Se obtendrá $v(t) = 17.6 t$.

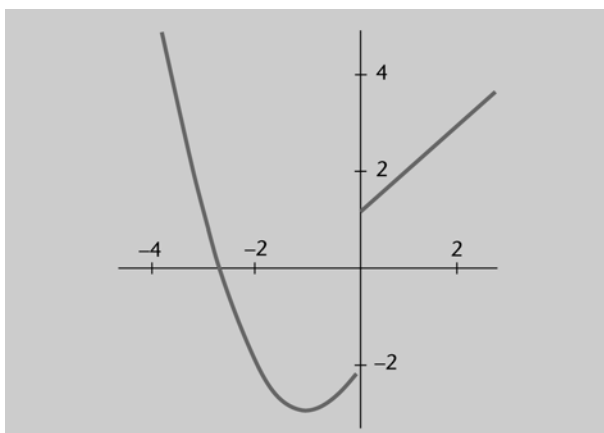
A16

Del triángulo rectángulo que forman dt y ds en la figura 8, $\tan \alpha = ds/dt$. Como la velocidad instantánea de un objeto es $v = s'$, entonces $v = ds/dt$.

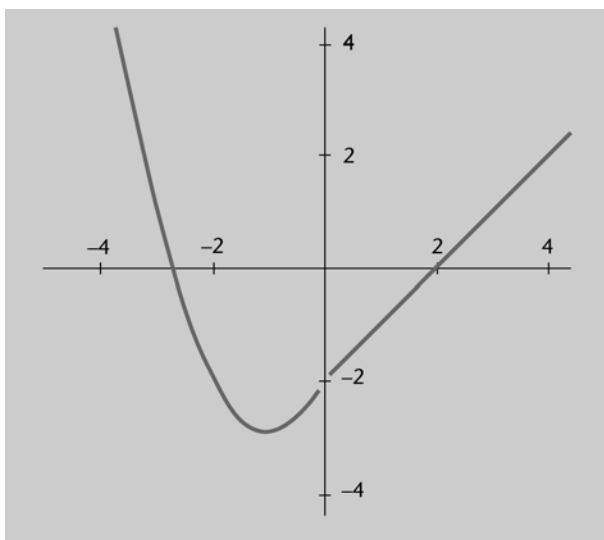
La velocidad es el espacio recorrido por unidad de tiempo.

A17

Podéis comparar vuestra gráfica con la siguiente:

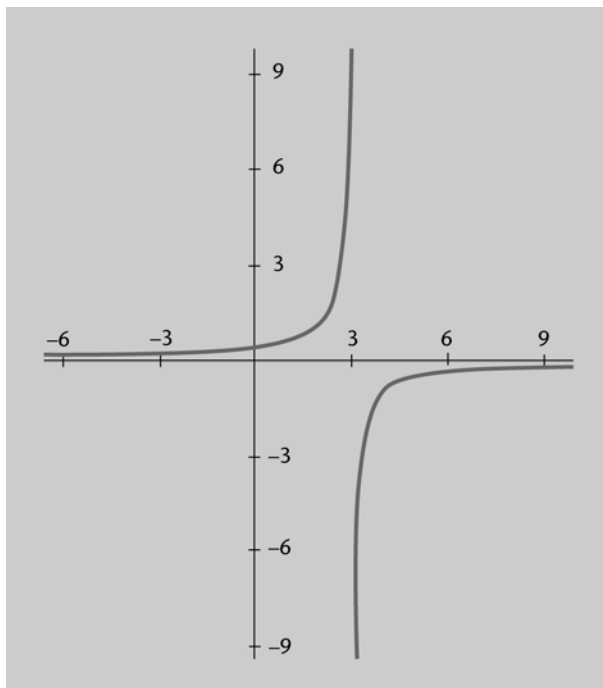
**A18**

Podéis comparar vuestra gráfica con la siguiente:

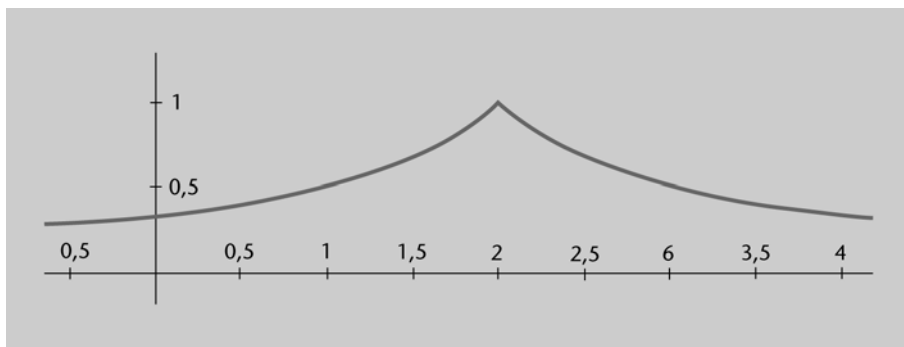


A19

Podéis comparar vuestra gráfica con la siguiente:

**A20**

Podéis comparar vuestra gráfica con la siguiente:



Ejercicio de recapitulación parcial. Hay que acostumbrarse a hacer esquemas y resúmenes de los temas, a expresar verbalmente los conceptos, etc.

Funciones reales de variable real: 1.º grado: $y = ax + b$ (Recta)
2.º grado: $y = ax^2 + bx + c$ (Parábola)

Pendiente de una recta: Es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la horizontal, $\tan \alpha$.

Velocidad media: $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$ gráficamente, pendiente de la recta secante.

Velocidad instantánea: $v = ds/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}$ gráficamente, pendiente de la recta tangente.

Diferencial: $ds = v \times dt$ valor aproximado del incremento de la función, definido como el crecimiento sobre la recta tangente trazada en el punto inicial del intervalo.

Función continua: Una función es continua en un punto a si el límite de la función cuando x tiende a a es $f(a)$.

Función derivable: Una función derivable es continua (pero la inversa puede no ser cierta).

A21

$$y(x) = \frac{1}{1 + |x - 2|}$$

Si $x > 2$, $|x - 2| = x - 2$, y

$$y(x) = \frac{1}{1 + |x - 2|} = \frac{1}{x - 1}$$

Por lo tanto (para $x > 2$),

$$y'(x) = -\frac{1}{(x - 1)^2}$$

y para $x = 2$,

$$y'(2) = -\frac{1}{(2 - 1)^2} = -1$$

Por otra parte, para $x < 2$, escribiremos,

$$|x - 2| = 2 - x$$

así siempre será $2 - x > 0$. Por lo tanto (para $x < 2$),

$$y(x) = \frac{1}{1 + 2 - x} = \frac{1}{3 - x}$$

$$y'(x) = -\frac{-1}{(3 - x)^2} = \frac{1}{(3 - x)^2}$$

$$y'(2) = \frac{1}{(3 - 2)^2} = +1$$

Es decir, la función no es derivable en $x = 2$ porque la derivada toma valores diferentes según nos aproximemos a este punto por un lado u otro.

A23

a) $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (será la aceleración media)

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ (será la aceleración instantánea)}$$

b) Con los datos del problema, sólo podemos calcular la aceleración media,

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60 - 40 \text{ km/h}}{3 \text{ s}} = 6.67 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}} = 6.67 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s} \cdot \text{s}} = 1.85 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) Como ya hemos calculado en la actividad A15 que $v(\text{cm/s}) = 17.6 t(\text{s})$, y se trata de una relación lineal, entonces la derivada o pendiente es $dv/dt = 17.6 \text{ cm/s}^2$ y el objeto cae con aceleración constante; por tanto, la aceleración media del objeto que cae coincide con la aceleración instantánea y vale $a = 17.6 \text{ cm/s}^2$.

A24

Haremos como en las actividades A15 y A16, paso a paso. La función es,

$$y = Ax^3$$

y el valor de la función para un incremento de la variable independiente,

$$y + \Delta y = A \cdot (x + \Delta x)^3$$

El incremento de la función es,

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = A \cdot (x + \Delta x)^3 - Ax^3 = 3Ax^2\Delta x + 3A \cdot x \cdot \Delta x^2 + A \cdot \Delta x^3$$

y el cociente incremental,

$$\Delta y / \Delta x = 3Ax^2 + 3A x \cdot \Delta x + A \cdot \Delta x^2$$

Cuando tomamos el límite del cociente incremental para $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos la derivada,

$$dy/dx = 3Ax^2$$

Observad que este resultado es un caso particular de la derivada de una potencia. Para la expresión siguiente de la tabla de derivadas,

$$y = Ax^m$$

Resulta,

$$y' = mAx^{m-1}$$

que coincide con el cálculo anterior para $m = 3$.

La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función. Este resultado se obtiene de la derivada de un producto,

$$\begin{aligned} y &= uv \\ y' &= uv' + u'v \end{aligned}$$

si tenemos en cuenta que la derivada de una constante es cero.

A25

uv	$uv' + u'v$	La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda función, sumado a la derivada de la primera función multiplicada por la segunda función.
$\frac{u}{v}$	$\frac{uv' - uv'}{v^2}$	La derivada de un cociente de dos funciones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos la función del numerador multiplicada por la derivada del denominador, y todo esto dividido por el cuadrado del denominador.

A26

$y = e^u$	$y' = u' e^u$	La derivada de la exponencial de una función es igual a la exponencial, por la derivada de la función.
$y = a^u$	$y' = a^u u' \ln a$	La derivada de una potencia de base a de una función es igual a la potencia de base a de la función, por el logaritmo neperiano de la base, por la derivada de la función.
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	La derivada del logaritmo neperiano de una función es igual a la inversa de la función, multiplicada por la derivada de la función.
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	La derivada del logaritmo de base a de una función es igual a la inversa de la función, multiplicada por la derivada de la función y por el logaritmo base a del número e .
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	La derivada del seno de una función es igual al coseno de la función, por la derivada de la función.
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	La derivada del coseno de una función es igual a menos el seno de la función, por la derivada de la función.

A27

Conviene que cuando se está aprendiendo a derivar, se especifiquen paso a paso las reglas o propiedades de derivación que se usan. Veamos cómo.

a) $f(x) = e^{-x^2+2\sin x}$

La derivada de una exponencial es el producto de ella misma por la derivada del exponente.

$$\frac{df(x)}{dx} = e^{-x^2+2\sin x} \frac{d(-x^2+2\sin x)}{dx}$$

La derivada de una suma es la suma de derivadas.

$$\frac{df(x)}{dx} = e^{-x^2+2\sin x} \left(\frac{d(-x^2)}{dx} + \frac{d(2\sin x)}{dx} \right)$$

La derivada de un producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

La derivada de una potencia es igual al exponente, por la base elevada al exponente menos una unidad.

$$\frac{d(-x^2)}{dx} = -\frac{dx^2}{dx} = -2x^{2-1} = -2x$$

La derivada de un producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

La derivada de la función *seno* es la función *coseno*.

$$\frac{d(2\sin x)}{dx} = 2 \frac{d\sin x}{dx} = 2 \cos x$$

Por tanto,

$$\frac{df(x)}{dx} = e^{-x^2+2\sin x} (-2x + 2 \cos x) = 2(\cos x - x) e^{-x^2+2\sin x}$$

b) $g(x) = \ln\left(\sin\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)\right) - \cos 2x$

La derivada de una suma (o resta) es la suma (o diferencia) de derivadas.

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d\ln\left(\sin\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)\right)}{dx} - \frac{d\cos 2x}{dx}$$

La derivada de la función del logaritmo de una función es la inversa de la función, por la derivada de la función.

La derivada del coseno de una función es igual a menos el seno de la función por la derivada de la función.

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)} \cdot \frac{d\sin\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)}{dx} - (-\sin(2x)) \frac{d(2x)}{dx} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)} \cdot \frac{d\sin\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)}{dx} + 2\sin(2x)$$

La derivada del seno de una función es igual al coseno de la función por la derivada de la función.

$$\frac{d\sin\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)}{dx} = \cos\left(\frac{x^3-4}{2x}\right) \cdot \frac{d\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)}{dx}$$

La derivada de un cociente es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, y todo ello dividido por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)}{dx} = \frac{2x \frac{d(x^3-4)}{dx} - (x^3-4) \frac{d(2x)}{dx}}{(2x)^2}$$

La derivada de una suma es la suma de derivadas. La derivada de una potencia, etc.

$$\frac{d\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)}{dx} = \frac{2x(3x^2) - (x^3-4)2}{(2x)^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 + 8}{4x^2} = \frac{x^3 + 2}{x^2}$$

Recogiendo,

$$\begin{aligned} \frac{dg(x)}{dx} &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)} \cos\left(\frac{x^3-4}{2x}\right) \left(\frac{x^3+2}{x^2}\right) + 2\sin(2x) \\ \frac{dg(x)}{dx} &= \frac{x^3+2}{x^2 \tan\left(\frac{x^3-4}{2x}\right)} + 2\sin(2x) \end{aligned}$$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2-2}}{1-x} + \frac{2x}{e^x+x}$

La única propiedad nueva que necesitamos es la derivada de la raíz, pero realmente es la potencia $\frac{1}{2}$ de una función.

$$\sqrt{x^2 - 2} = (x^2 - 2)^{\frac{1}{2}}$$

Por tanto, su derivada es el exponente, por la base elevada al exponente menos uno, y por la derivada de la base.

$$\frac{d\sqrt{x^2 - 2}}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d(x^2 - 2)}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} 2x = x(x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dh(x)}{dx} &= \frac{d\left(\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{1 - x}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{2x}{e^x + x}\right)}{dx} \\ &= \frac{(1 - x) \frac{d\sqrt{x^2 - 2}}{dx} - \sqrt{x^2 - 2} \frac{d(1 - x)}{dx}}{(1 - x)^2} + \frac{\left(\frac{1}{e^x + x}\right) \frac{d(2x)}{dx} - 2x \frac{d\left(\frac{1}{e^x + x}\right)}{dx}}{\left(\frac{1}{e^x + x}\right)^2} \\ \frac{dh(x)}{dx} &= \frac{x(1 - x) - (x^2 - 2)(-1)}{(1 - x)^2 \sqrt{x^2 - 2}} + \frac{2\left(\frac{1}{e^x + x}\right) - 2x\left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + 1\right)}{\left(\frac{1}{e^x + x}\right)^2} \\ \frac{dh(x)}{dx} &= \frac{x - 2}{(1 - x)^2 \sqrt{x^2 - 2}} + 2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x \left(\frac{1}{e^x + x}\right)^2} \end{aligned}$$

A28

El resultado, calculado con Wiris, se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} y &= \sin(x/2) \rightarrow \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \\ y' &\rightarrow \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \\ y'' &\rightarrow -\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{4} \\ y''' &\rightarrow -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{8} \\ y'''' &\rightarrow \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{16} \\ y''''' &\rightarrow \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{32} \\ y'''''' &\rightarrow -\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{64} \\ y''''''' &\rightarrow -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{128} \end{aligned}$$

A29

Podéis hacer los cálculos a mano. Aquí tenéis los cálculos hechos con Excel. Si tenéis tiempo, conviene que los reproduzcáis también con la hoja de cálculo:

función 1/(1-x)								
Términos -->	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	...	
x	1	1+x	+x ²	+x ³	+x ⁴	+x ⁵	...	y=1/(1-x)
0,5	1	1,5	1,75	1,875	1,9375	1,96875	...	2
0,2	1	1,2	1,24	1,248	1,2496	1,24992	...	1,25

Por lo tanto, a partir de incluir tres términos en la suma (33) ya superamos el valor $y = 1.24$.

A30

La función vale,

$$y = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+0.01} = 0.99009900...$$

es decir, es periódica de período 9900.

Los cálculos siguientes muestran que a partir del tercer término ya tenemos valores superiores a 0.99 para $x = -0.01$.

función 1/(1-x)								
Términos -->	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	...	
x	1	1+x	+x ²	+x ³	+x ⁴	+x ⁵	...	y=1/(1-x)
0,5	1	1,5	1,75	1,875	1,9375	1,96875	...	2
0,2	1	1,2	1,24	1,248	1,2496	1,24992	...	1,25
-0,01	1	0,99	0,9901	0,990099	0,99009901	0,99009901	...	0,99009901

Además, a partir del 4.º término ya tenemos el valor 0.990099, que es una (muy) buena aproximación al valor de la función.

A31

a) $e^{1.23} = 3.421229536$.

b) Hacen falta seis términos para tener $y > 3.4$.

función exp(x)								
Términos -->	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	...	
x	1	1+x	+x ² /2	+x ³ /3!	+x ⁴ /4!	+x ⁵ /5!	...	y=exp(x)
1,23	1	2,23	2,98645	3,2965945	3,391963934	3,41542481	...	3,421229536

c) Con sólo tres términos ya tenemos cuatro cifras exactas: 1.105.

función exp(x)								
Términos -->	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	...	
x	1	1+x	+x ² /2	+x ³ /3!	+x ⁴ /4!	+x ⁵ /5!	...	y=exp(x)
1,23	1	2,23	2,98645	3,2965945	3,391963934	3,41542481	...	3,421229536
0,1	1	1,1	1,105	1,105166667	1,105170833	1,10517092	...	1,105170918

Hagamos un inciso sobre la exactitud de los cálculos.

A32

a) El error (en valor absoluto) en una serie alternante en la que sumamos 3 términos es menor que el valor del sumando número 4,

$$|x^3/3!| = |(-0.5)^3/3!| = 0.042$$

Es decir, un error menor de 4 centésimas (0.04).

b) En este caso el error es menor que el valor del sumando número 8,

$$|x^7/7!| = |(-0.5)^7/7!| = 1.12 \cdot 10^{-3}$$

En este caso, el error es menor de una milésima (0.001).

A33

Hacemos un desarrollo de la función en torno al punto $x = 0$ y escribimos la ecuación (35),

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \frac{h^3}{3!}f'''(0) + \dots \quad (35)$$

y, aunque no es necesario, cambiamos ahora la variable h por x para mostrar la expresión habitual,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots \quad (35')$$

Para aplicar la expresión anterior a la función,

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

necesitamos las derivadas calculadas en el origen,

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2}, \quad y'(0) = 1 \\ y''(x) &= 2 \frac{1}{(1-x)^3}, \quad y''(0) = 2 \\ y'''(x) &= 6 \frac{1}{(1-x)^4}, \quad y'''(0) = 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el desarrollo de Taylor resultante es,

$$y(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Fijaos que se podría intuir cuáles son los otros términos de la serie infinita,

$$y(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

donde el sumatorio indica que hemos de sumar términos del tipo x^n para $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, \dots$

(Pero una intuición no es lo mismo que una demostración matemática. Para ser rigurosos deberíamos demostrar la expresión general, cosa que no haremos aquí.)

A34

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{iv}(0) + \dots$$

Apliquémosla a la función $\sin x$. Como la derivada de la función $\sin x$ es $\cos x$, y la de $\cos x$ es $-\sin x$, obtenemos,

$$\sin(x) = \sin 0 + x \cos 0 + \frac{x^2}{2!}(-\sin 0) + \frac{x^3}{3!}(-\cos 0) + \frac{x^4}{4!}(\sin 0) + \dots$$

es decir,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

una serie alternante.

A35

Según la calculadora de bolsillo, $\cos 0.1 = 0.995004$.

Con el segundo término del desarrollo de la función coseno tenemos bastante, pues el resultado 0.995004167 es superior a 0.995:

función cos x					
Términos -->	1.º	2.º	3.º	4.º	
x	1	$-x^2/2$	$x^4/4!$	$-x^6/6!$	y=cos x
0,1	1	0,995	0,995004167	0,9950042	0,995004165
-0,01	1	0,99995	0,99995	0,99995	0,99995
0,0001	1	1	0,999999995	1	0,999999995

A36

a) En el desarrollo en serie de la exponencial,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (34)$$

La derivada de cada término de la suma es sencilla y obtenemos,

$$\frac{de^x}{dx} = 0 + \frac{1}{1!} + 2\frac{x}{2!} + 3\frac{x^2}{3!} + 4\frac{x^3}{4!} + 5\frac{x^4}{5!} + \dots$$

y simplificando cada término obtenemos la misma ecuación (34) pues,

$$\frac{n}{n!} = \frac{n}{n(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Por ello, como sabemos, obtenemos que la derivada de la función exponencial es ella misma,

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

b) También, al derivar la suma de términos del desarrollo de la función coseno,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} - \dots \quad (36)$$

obtenemos,

$$\frac{d \cos x}{dx} = 0 - 2\frac{x}{2!} + 4\frac{x^3}{4!} - 6\frac{x^5}{6!} + 8\frac{x^7}{8!} - \dots$$

que simplificada da,

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$

El término de la izquierda de la igualdad anterior es,

$$-\sin x$$

y el término de la derecha del desarrollo anterior coincide con el desarrollo de Taylor de la función sen x (actividad A32),

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} - \dots$$

cambiada de signo.

A37

a) Decir que el ángulo total de un círculo es de 360° es un convenio (es decir, un valor que se elige más o menos arbitrariamente).

b) Otro convenio es asignar el valor 400° al ángulo que subtiende una circunferencia. En los dos casos, 360° o 400°, la elección del valor del ángulo de la circunferencia se ha hecho para simplificar cálculos; los valores del ángulo de un cuadrante, por ejemplo, serán 90° o 100°, según el caso.

c) Para definir un radián hemos de recordar cómo se define un ángulo. La definición de ángulo como el cociente del arco que subtiende un sector de una circunferencia, dividido por el valor del radio de la circunferencia,

$$\text{ángulo} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}}$$

da el valor 2π para el ángulo que subtiende la circunferencia completa,

$$\text{ángulo de una circunferencia} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Por lo tanto, el ángulo unidad (en radianes) será,

$$\text{ángulo} = 1 = \frac{\text{arco}}{\text{radio}}$$

es decir, aquel ángulo para el que el arco y el radio coinciden. Si trazáis una circunferencia de radio cualquiera, veréis que un ángulo de unos 57° (es decir, de algo más de medio ángulo recto o 45°) corresponde a un radián, porque longitud de arco y radio coinciden.

De manera exacta, se calcula así:

$$360^\circ \text{ corresponden a } 2\pi \text{ radianes,}$$

por eso, los grados por radián son,

$$1 \text{ radián} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ$$

A38

En dos dimensiones, es decir, gráficas en un plano XY , las ecuaciones (39) y (40) representan rectas en el plano.

La ecuación lineal (41) en tres dimensiones representa un plano.

Nota

Las relaciones (39) y (40) también representan planos en tres dimensiones, pero como la constante que multiplicaría a la variable z en ese caso es cero, los planos serían paralelos al eje Z en una representación XYZ tridimensional.

A39

Con el eje Y el punto de corte se encuentra haciendo $x = 0$, $z = 0$, y resulta,

$$12 - 4y = 0, y = 3$$

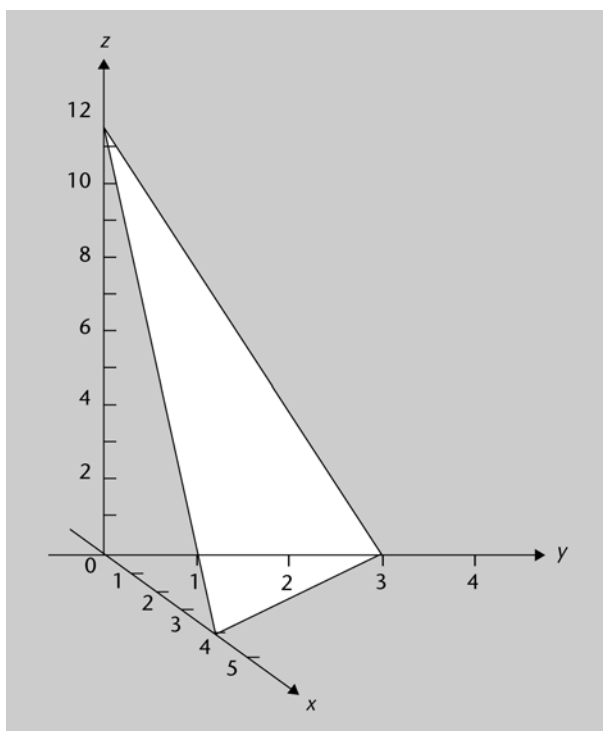
Con el eje X , haciendo $y = 0$, $z = 0$, obtenemos,

$$12 - 3x = 0, \text{ o bien, } x = 4$$

Y con el eje Z , hacemos $x = 0$, $y = 0$, y resulta $z = 12$.

Los tres puntos de corte son, pues $(4, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 12)$.

Una forma sencilla de representar este plano es dibujando las rectas que unen los tres puntos anteriores.

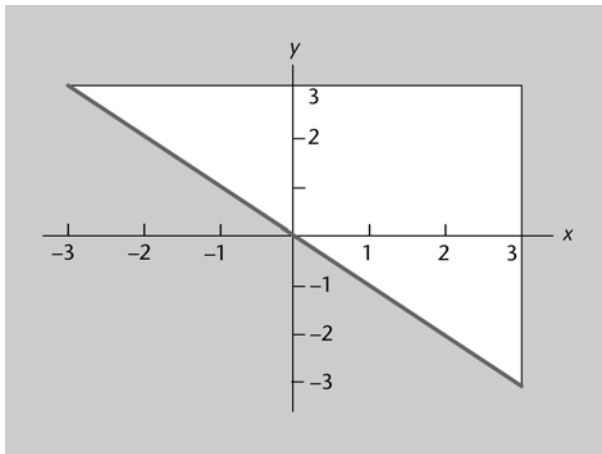


A40

a) Sabemos que no podemos calcular la raíz cuadrada de un número negativo, por lo que la condición será,

$$x + y \geq 0$$

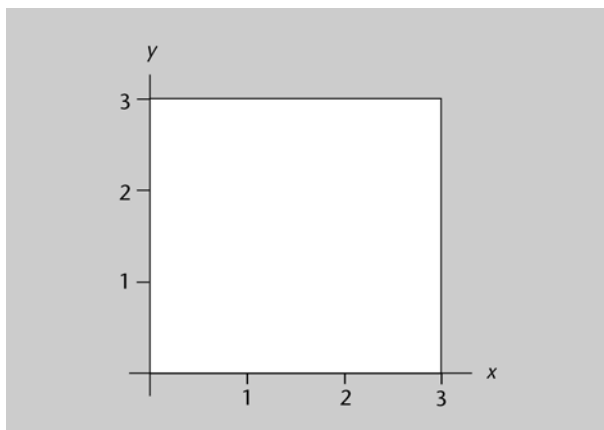
La región del plano XY definida por la condición anterior es la de la figura siguiente:



b) Análogamente, las condiciones serán ahora que,

$$x \geq 0 \text{ y que } y \geq 0$$

La región del plano XY de validez de la función es ahora:



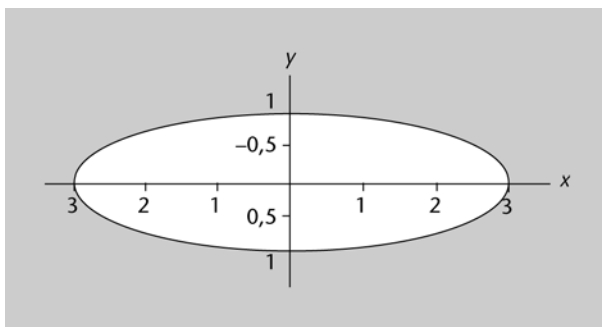
c) La condición que debe cumplir el argumento del logaritmo es que no sea negativo ni nulo, por tanto,

$$9 - x^2 - 9y^2 > 0$$

es decir,

$$x^2 + 9y^2 < 9$$

Como la ecuación $(x/3)^2 + y^2 = 1$ representa una elipse de semiejes 3 y 1, el dominio de la función logaritmo son los puntos interiores a la elipse de la figura



A41

a) Hay que recordar que cuando se deriva parcialmente respecto de x la y se trata como constante. Obtenemos,

$$f_x(x, y) = 4x^3$$

porque la derivada del segundo y tercer término se anulan por ser “constantes”.

Y hacemos lo contrario cuando derivamos respecto de y ,

$$f_y(x, y) = \frac{3}{\sqrt{y}}$$

b) Ahora hemos de calcular tres derivadas parciales porque tenemos una función de tres variables,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy + 43$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 - 20yz^3 - 28\sec^2(4y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2xy + 43$$

c) Ahora se trata de una función de dos variables que, además, designamos con letras diferentes de las x, y habituales. Escribimos la función de manera que resulte más sencillo derivarla,

$$h(s, t) = t^7 \ln(s^2) + 9t^{-3} - s^{\frac{4}{7}}$$

y obtenemos,

$$h_s(s, t) = \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{2t^7}{s} - \frac{4}{7}s^{-\frac{3}{7}}$$

$$h_t(s, t) = \frac{\partial h}{\partial t} = 7t^6 \ln(s^2) - 27t^{-4}$$

d)

$$f_x(x, y) = \frac{4}{x^2} \sin\left(\frac{4}{x}\right) e^{x^2 y - 5y^3} + 2xy \cos\left(\frac{4}{x}\right) e^{x^2 y - 5y^3}$$

$$f_y(x, y) = (x^2 - 15y^2) \cos\left(\frac{4}{x}\right) e^{x^2 y - 5y^3}$$

A42

a)

$$z_u = \frac{-9u^2 + 45v}{(u^2 + 5v^2)^2}$$

$$z_v = \frac{-45u}{(u^2 + 5v^2)^2}$$

b)

$$g_x(x, y, z) = \frac{\sin y}{z^2}$$

$$g_y(x, y, z) = \frac{x \cos y}{z^2}$$

$$g_z(x, y, z) = -\frac{2x \sin y}{z^3}$$

c)

$$z_x = \left(x + \frac{5}{2(5x - 3y^2)} \right) \left(x^2 + \ln(5x - 3y^2) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$z_y = -\frac{3y}{5x - 3y^2} \left(x^2 + \ln(5x - 3y^2) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

A43

a) Comencemos calculando $\frac{\partial z}{\partial x}$. Derivaremos los dos miembros respecto de x , sin olvidar que hay que multiplicar por $\frac{\partial z}{\partial x}$ cada vez que derivemos una función z . Recordemos que si nos encontramos con un producto de x y z hemos de aplicar la regla de derivación de un producto,

$$3x^2 z^2 + 2x^3 z \frac{\partial z}{\partial x} - 5y^5 \frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

Despejamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ y resulta,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 3x^2 z^2 + 5y^5 z}{2x^3 z - 5xy^5}$$

Y análogamente para $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2 + 25xy^4 z}{2x^3 z - 5xy^5}$$

b) Resulta,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x \sin(2y - 5z) + 6zy \sin(6zx)}{5x^2 \cos(2y - 5z) - 6yx \sin(6zx)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos(6zx) - 2x^2 \cos(2y - 5z)}{6xy \sin(6zx) - 5x^2 \cos(2y - 5z)}$$

A44

Tenemos dos opciones: que varíe x y se mantenga fija y , o al revés.

En el primer caso, calculamos,

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{y^3}$$

y calculada en el punto dado resulta,

$$f_x(2, 5) = \frac{4}{125} > 0$$

La función es creciente para x crecientes si mantenemos la y fija.

Si ahora mantenemos x fija y variamos y ,

$$f_y(x, y) = -\frac{3x^2}{y^4}$$

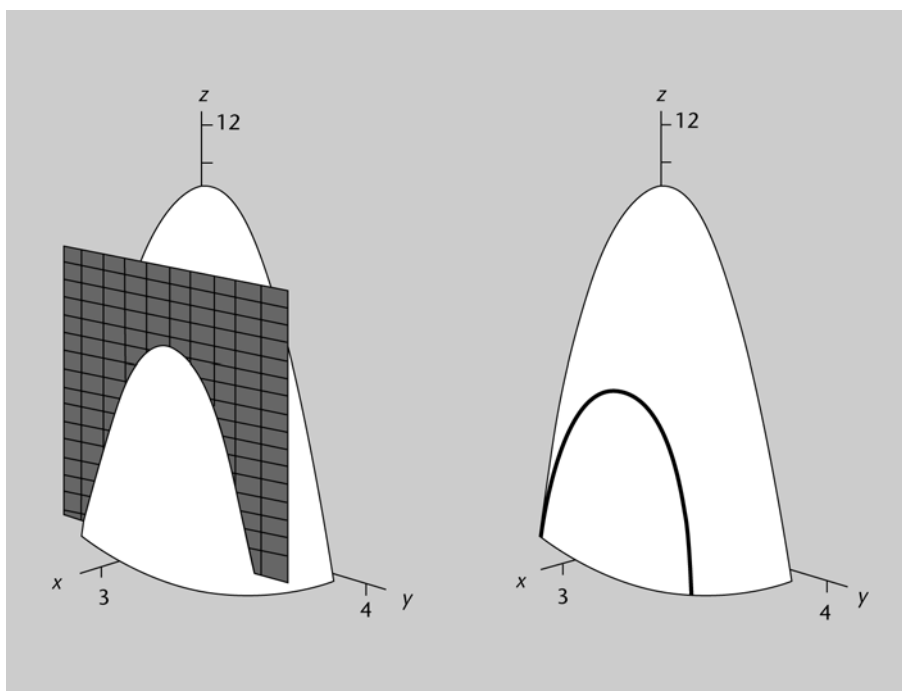
y calculada en el punto dado resulta,

$$f_y(2, 5) = -\frac{12}{625} < 0$$

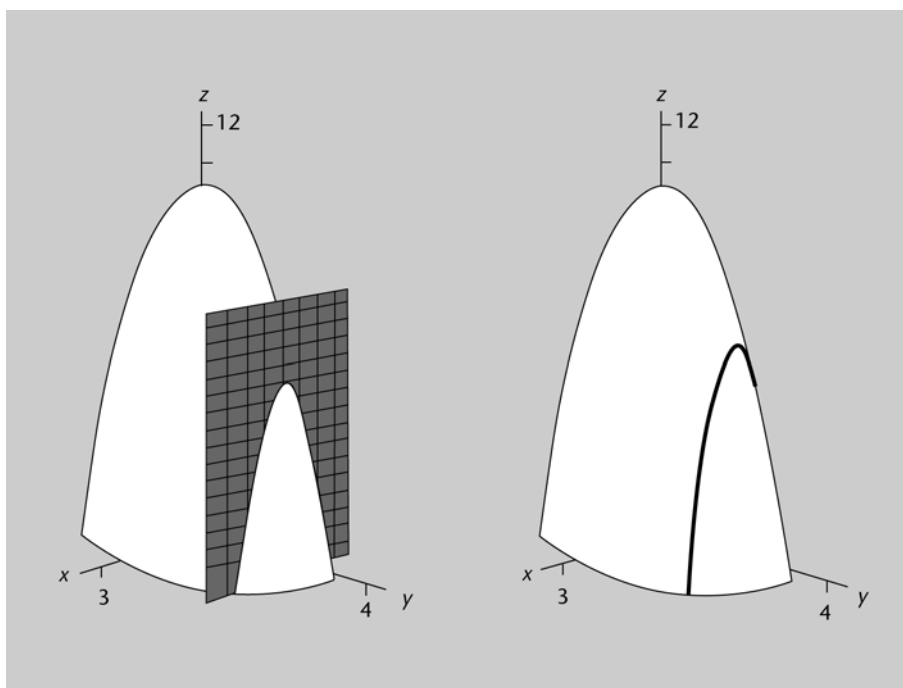
y por lo tanto, la función es decreciente en el mismo punto, cuando la y varía.

A45

En la figura siguiente de la izquierda se muestra una gráfica de la función, y del plano $x = 1$ que la interseca, que produce la curva que se representa en la figura de la derecha.



Y análogamente para el plano $y = 2$.



Calculemos las derivadas parciales, para obtener las pendientes,

$$f_x(x,y) = -8x \quad f_y(x,y) = -2y$$

cuando las calculamos en el punto en cuestión,

$$f_x(1,2) = -8 \quad f_y(1,2) = -4$$

Por tanto, las tangentes a las curvas definidas por la intersección de la figura y el plano tienen pendientes -8 y -4 , respectivamente.